

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT ELECTRONIQUE

MEMOIRE MAGISTER

*COMMANDE D'ATTITUDE D'UN SATELLITE PAR
L'ALGEBRE DES QUATERNIONS ET
L'EQUATION D'HAMILTON*

OPTION MICROONDES

Par
BEROUAL LOUARDI

Président du Jury : BELARBI KHALED Pr. Université de Constantine.

Rapporteur : BENSLAMA Malek Pr. Université de Constantine.

Examineur : SOLTANI FOUZI Pr. Université de Constantine.

Examineur: FILALI SALIM Pr. Université de Constantine.

Dans le cadre du projet de recherche national J2501/02/51/05: élaboration de modèles de simulation du maintien et de la mise à
poste des constellations de satellites.

Promotion : 2005/2006

Introduction générale

La mise et le maintien à poste des satellites et des constellations de satellites fait l'objet d'une particulière sur le plan recherche. Le laboratoire d'électromagnétisme et télécommunication est en train de développer cet axe spécifique au management de satellite. Plusieurs travaux de magistère ont déjà été effectués [1,2,3], certains travaux ont été réalisés dans des projets de fin d'étude [4].

En ce qui nous concerne, un aspect important dans la mise et maintien à poste sera abordé. Cet aspect consiste à renforcer le processus de simulation du contrôle d'attitude en comparant deux techniques. La première permet de découvrir l'algèbre des quaternions, qui est un outil qui allie rigueur et élégance dans le traitement. La seconde approfondit la mécanique lagrangienne par l'introduction de l'Hamiltonien.

Pour bien apprécier le contexte et l'importance de cette étude, il convient de rappeler succinctement les principaux travaux qui ont été effectués sur le contrôle d'attitude actif des satellites stabilisés. Cette étude consiste en une application des techniques de commande et de contrôle appliquées aux satellites.

En effet, il ne s'agit pas seulement d'envoyer un satellite vers l'espace, il faut savoir aussi le commander, le contrôler et le positionner sur des orbites appropriées. Pour cela, il est fondamental de distinguer entre l'Altitude et l'Attitude. La première concerne la hauteur dans le ciel où le satellite est positionné, la seconde concerne le positionnement du satellite lui-même. Donc on peut mettre un satellite en poste mais son attitude ne permet pas de le contrôler ou de le commander de manière efficace. L'étude du Contrôle d'Attitude est donc devenue un facteur complémentaire des techniques spatiales.

Ce travail montre comment sur le plan informatique, on peut intégrer au mieux les équations du mouvement d'un satellite autour de son centre d'inertie. C'est ce qu'on appelle les équations d'attitude, qui sont particulièrement utiles dans la mise en place d'un SCA (Système de Contrôle d'Attitude) notamment dans le cas où l'orientation peut être quelconque. Le lecteur est certainement familiarisé avec le repérage de l'attitude d'un satellite dans l'espace, à l'aide des angles soit d'Euler soit de Cardan. Ces deux repérages renferment des indéterminations ou des non définitions d'angles dans certaines configurations. De plus la mise sous forme canonique des équations du mouvement s'avère très difficile voire

impossible. Un problème sérieux se pose sur le plan numérique, dans l'étude d'un mouvement général. Pour cela on applique l'algèbre des quaternions dans les commandes appliquées aux satellites c'est la première méthode, la deuxième méthode c'est la commande d'attitude par l'équation d'Hamilton (la commande optimale).

La première commande magnétique originale (commande optimale) a été appliquée au satellite Tiros-Wheel lancé en janvier 1965 [5] pour lequel on pouvait, grâce à une minuterie à bord, changer la polarité d'une bobine électromagnétique alignée suivant l'axe de spin de manière à provoquer la précession de cet axe. Les instants de mise sous tension et le choix de la polarité de la bobine étaient déterminés par application d'une méthode connue sous le nom QOMAC, pour "Quarter Orbit Magnetic Attitude Control". Cette méthode consiste à inverser la polarité du courant de la bobine en phase avec le champ magnétique terrestre et moyennant un choix convenable de la phase du courant par rapport à l'instant de passage au noeud ascendant de l'orbite, on pouvait générer un couple moyen dirigé suivant n'importe quelle direction dans le plan orbital, augmentant considérablement les possibilités de la commande. Ultérieurement et notamment pour le satellite SAS-3 et plusieurs satellites de la série Atmospheric Explorer, il a été adopté un système de commande à retard (DCS ou Delayed Command System) qui utilise la méthode QOMAC et dans lequel une série prédéterminée de commandes de changement de polarité de la bobine (s'étendant sur une période de temps relativement longue) était chargée dans une mémoire à bord du satellite lors d'un passage de ce dernier visibilité de la station de contrôle. Ensuite, les commandes s'exécutaient de façon automatique et aux instants prévus faisant évoluer l'attitude du satellite [5].

Malheureusement, lorsqu'il s'agit de réduire au maximum le temps nécessaire à la réalisation des manoeuvres, la méthode QOMAC n'est pas optimale au sens de la commande en temps minimum puisque l'on ne peut commuter la bobine que tous les quarts d'orbite et que l'on doit attendre au moins un tour d'orbite pour que le couple de commande moyen soit dans la direction voulue. Cette attente risque d'être trop longue pour les opérations de changement d'attitude qui exigent d'être exécutées en un temps relativement court, comme pour les manoeuvres de correction d'orbite des satellites de navigation du réseau TRANSIT/NOVA, pour lesquels Tossman (1977) puis Junkins et ses collaborateurs (1981) ont conçu une commande optimale en temps minimum permettant de réaliser très rapidement la réorientation de l'axe de spin au moyen d'une bobine alignée suivant ce même axe. Pour cette commande, la commutation de la bobine est effectuée, non pas tous les quarts d'orbite, mais à des instants déterminés par la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire.

Pour répondre à toutes ces questions nous vous présentons cette étude sur cinq chapitres :

Le premier chapitre consacré à la présentation des généralités sur le contrôle d'attitude d'un satellite, ces généralités concernent le domaine d'utilisation et la nécessité du système de contrôle d'attitude (SCA), avec des exemples de spécification (satellites scientifiques, satellites d'imagerie, satellites de télécommunication ...), et des rappels de mécanique (théorème du moment cinétique, étude du mouvement).

Le deuxième chapitre concerne le comportement d'un satellite sous l'effet du gradient de gravité, il refferme les résultats obtenus par simulations des équations du mouvement et de la navigation. Pour cela on a besoin de :

- connaître les paramètres suivants: la position exacte, les coordonnées, la direction et le sens du déplacement.
- La vitesse angulaire par rapport à la terre et à elle-même et cela sur chaque axe (roulis, tangage, lacet), et les accélérations.
- De maîtriser ces paramètres afin de les adapter aux situations.

Le troisième chapitre présentera à la commande d'attitude d'angle de satellite avec la limite de saturation de déclencheur. L'approche traditionnelle pour la conception de commande pour le satellite que le grande manœuvre d'angle est de fixer le gain proportionnel pour le contrôleur PID (plus intégrale plus dérivé) employant des variables d'attitude de quaternions avec la garantie de stabilité. Les entrées externes non désirées de perturbation peuvent induire l'erreur excessivement grande par la commande de PID. La commande d'anti-remontage (AWC) et l'intégrateur intelligent (II) sont efficaces en réduisant l'accumulation rapide du signale de commande. Les résultats obtenus seront reportés pour les différents types de commande (PID, AWC, II).

Le quatririème chapitre aura trait à la commande optimale d'un satellite contrôlé par des magnéto-coupleurs. Il import de savoir que cette option est couramment utilisée. Elle donne jusqu'à l'heur actuel des résultats satisfaisants. Pour aborder ce chapitre nous commencerons par cite les principaux critères de la commande optimale ; ce qui nous permettre de formuler notre problème. Nous proposerons une solution une solution sur la base de l'équation d'Hamilton. Cette solution sera illustrée avec des applications pratiques.

Le cinquième chapitre concerne la commande optimale en temps minimum d'attitude d'un satellite avec les différents stratégies classiques de commande d'attitude et de vitesse de spin et l'explication de la commande optimale en temps minimum pour deux cas (la vitesse de spin constante, et changement simultané d'attitude et de vitesse de spin). Ainsi la manœuvre de réorientation de l'axe de spin du satellite NOVA sera un exemple d'application de la méthode de commande d'attitude et de vitesse de spin en temps minimum.

Ce travail sera clos par une conclusion générale.

1. Introduction

Un S.C.A (Système de Contrôle d'Attitude) est indispensable à tout satellite, plateforme spatiale, sonde interplanétaire ou lanceur.

On distingue :

- les méthodes passives, qui ne consomment pas d'énergie mais imposent une géométrie particulière du satellite : stabilisation par gradient de gravité, par magnétocoupleurs, ...
- Les méthodes actives avec électronique, informatique actionneurs et capteurs embarqués, consommant de l'énergie, à durée de vie limitée.

On peut encore séparer deux catégories : les satellites sans moment cinétique et ceux qui possèdent un moment cinétique embarqué.

1.1. Rôle de SCA

Les deux points importants sont la maîtrise de l'attitude (c'est à dire de l'orientation du satellite ou mieux de son mouvement autour du centre d'inertie), et le contrôle de la trajectoire, donc des paramètres orbitaux du véhicule spatial donc du mouvement du centre d'inertie.

1.2. Fonctions assurées

Le SCA est imposé à la fois par les spécifications propres à la mission et par les perturbations agissant sur le satellite et modifiant en continu sa dynamique.

Pour le contrôle de l'attitude :

- la mesure de l'attitude, assurée par des senseurs embarqués.
- L'élaboration de lois de contrôle utilisées à bord.
- La mise en œuvre de la commande, par une logique informatique et de l'automatique qui pilote des actionneurs.

Le système très complexe comporte :

1.2.1. Des détecteurs [6]

Ils permettent notamment de restituer les vitesses angulaires et les angles définissant l'attitude.

- Détecteurs optique sont des capteurs de position angulaire, mesurant l'attitude par rapport à une référence externe.
- Détecteurs inertiels à gyroscopes inertiels ou laser.

- Gyromètre.
- Accéléromètres.
- Magnétomètres.

1.2.2. Electronique et informatique de bord

Pour le traitement des informations capteurs, élaboration d'ordres, surveillances de pannes, reconfigurations et élaboration et contrôle de commandes :

- logique câblée.
- Logiciels embarqués éventuellement adaptables.
- Gestion des télécommandes et de la télémessure.
- Centrale d'ordres.

1.2.3. Actuateurs ou actionneurs

Organes de commande, autorisant une acquisition d'attitude et une réduction des vitesses angulaires, permettant de maintenir une attitude ou d'en amortir les petites oscillations, de changer un pointage, d'assurer un balayage, de stabiliser une phase propulsée etc...

1.2.3.1. Propulseurs à éjection de masse

Gaz chauds, gaz froids, électrique, ionique.

1.2.3.2. Inertiels

Roue cinétique, roues de réaction et à gyroscopes.

1.2.3.3. Magnétiques

- Magnéto coupleurs.
- Utilisation de la dérivée du champ magnétique terrestre par vrillage de panneaux solaires et interaction avec la pression de radiation photonique due à la lumière solaire et frappant les générateurs solaires.

1.2.4. Des amortisseurs de nutation

- Passifs à liquides visqueux.
- Passifs ou actifs par bobines magnétiques (avec ou sans hystérésis).

1.3. Nécessite du SCA

Ce sont les spécifications et contraintes de la mission qui imposent de tels contrôles. Il n'est pas possible d'en dresser une liste exhaustive parce chaque mission a ses propres spécificités.

1.3.1. Maîtrise de l'attitude

A partir de la phase d'injection assurée par le SCA du lanceur (appelé SCAR pour Ariane), le SCA doit assurer en particulier :

- une manœuvre de "de spin" si nécessaire (réduction de la rotation axiale).
- La réduction des vitesses angulaires transverses (réduction de la nutation).
- Les acquisitions roulis - tangage et lacet par l'intermédiaire des acquisitions Terre et Soleil en particulier.
- Eventuellement la manœuvre de retournement si le satellite est pointé à 180° de son pointage nominal.

Le SCA contrôle également :

- le déploiement partiel ou total des panneaux solaires lorsque ceux-ci sont présents (GS =

Générateurs Solaires).

- L'orientation des panneaux solaires Le déploiement d'autres équipements : antennes...
- Le pointage des charges utiles : antennes, instruments de prise de vues...

Le SCA participe à la stabilisation du véhicule notamment dans les manœuvres utilisant des moteurs, en assurant l'orientation du vecteur poussée dans les séquences de maintien à poste, de désaturation éventuelle des roues cinétiques ou à réaction.

Le SCA participe à la gestion du contrôle thermique du véhicule et à la mise en œuvre correcte des équipements (Pointage d'antennes en TM-TC).

Ses performances en précision affectent la qualité des prises de vue pour les missions d'observations de la Terre ou d'astronomie spatiale.

De même les expériences en micro gravité demandent un contrôle très strict des vitesses angulaires, surveillance assurée par le SCA d'autant plus difficile que certains équipements mobiles, sur ou dans la plate-forme, induisent des vibrations parasites (Moteurs des enregistreurs, des caméras, des panneaux solaires, des éléments inertiels, etc...).

2. Exemple de spécification [6]

Naturellement les besoins dépendent de l'application et nous ne pouvons pas les passer toutes en revue.

Citons quelques cas :

2.1. Satellites scientifiques

Comme Hipparcos qui mesure la distance stellaire par parallaxe sur l'orbite terrestre L'attitude doit être restituée à 0.001" d'arc.

SOHO étudiant le Soleil présente une stabilité de pointage de l'ordre de 1" arc/15 mn.

2.2. Satellites d'imagerie

La famille SPOT 1 à 3 pointe le sol à 0.15° et surtout pour obtenir une bonne qualité d'image, la vitesse angulaire est maîtrisée à 0.001°/s.

Par exemple pour SPOT 4, l'usage d'un relais à système optique, impose un pointage précis à 0.1μrad, soit 25 fois plus précis que ses prédécesseurs.

2.3. Satellites de télécommunications

Un pointage de l'ordre de 0.1° à 0.2° est nécessaire. Cependant un pointage plus fin permet de gagner de la puissance, puisque le faisceau d'émission est plus réduit.

2.4. Satellites radio amateur

Quelques degrés de précision en pointage suffisent, ce qui autorise ces satellites à utiliser des stabilisations passives, mêmes si elles conduisent à une précision modeste.

2.5. Stations spatiales (MIR, FREEDOM, EUREKA...)

Un pointage de l'ordre de 1° est suffisant en général. Par contre comme la station est le siège d'expériences scientifiques, notamment en microgravité de longue durée, un niveau de

microgravité de 10^{-5} g est requis, demandant une surveillance stricte du freinage atmosphérique en particulier et des équipements embarqués pouvant générer des forces parasites.

3. Rappelles succincts sur les perturbations [7]

Vu de la Terre, l'espace situé au-dessus de 200 km du sol terrestre paraît être le paradis de la perfection mécanique, malheureusement c'est loin d'être le cas.

Les perturbations agissant sur un satellite donnent lieu à des couples ou forces extrêmement faibles mais comme rien n'entrave les rotations, les résultats sont rapidement significatifs et demandent la mise en œuvre de toutes les ressources en astuces mécaniques, informatiques et techniques des automatismes possibles.

Dressons le bilan des perturbations, certaines affectant l'orbite d'autres l'attitude et enfin quelquefois les deux. Seule est envisagée ici la liste de ces perturbations, laissant le soin au lecteur de l'étude détaillée et précise de chacune.

3.1. Perturbations externes

Gravitationnelles, affectant l'orbite par une dérive des 2 paramètres orbitaux. (Argument nodal du périhélie) et (longitude vernale de la ligne des nœuds) et le mouvement autour du centre d'inertie par le couple dû au gradient de gravité.

- Non-homogénéité de la Terre.
- Non-sphéricité.
- Attraction luni-solaire qui joue sur notamment l'inclinaison orbitale.
- Freinage atmosphérique résiduel qui se fait notamment sentir sur les orbites basses en dégradant l'énergie mécanique ce qui conduit à une diminution du grand axe de l'orbite par effet de traînée.
- Pression de radiation solaire qui agit sur les surfaces du véhicule, perturbant l'orbite et générant, en particulier par l'intermédiaire des panneaux solaires, des couples perturbateurs de l'attitude. Quelquefois ces couples sont exploités grâce à des volets ou un vrillage des panneaux pour contrer d'autres perturbations du même ordre de grandeur.
- Pression de radiation due à la lumière rediffusée par la Terre (albédo) ayant un effet analogue au précédent mais d'un ordre de grandeur inférieur.

- Interaction entre le champ magnétique terrestre et le moment magnétique résiduel du satellite, quelquefois les couples magnétiques sont volontairement créés par des magnétocoupleurs pour lutter contre d'autres couples. Ceci n'affecte que l'attitude.

3.2. Perturbations internes

L'origine de ces perturbations est variée et la liste pourrait être longue. Citons les principales:

- Mouvements d'appendices souples comme les GS (générateurs solaires) par exemple ou des mâts porteurs d'instruments, etc...
- Couples et vibrations créées par des éléments moteurs mobiles dans la plate-forme.
- Moteurs des panneaux.
- Moteurs de caméras.
- Moteurs des enregistreurs.
- Gyroscopes.
- Couples parasites des moteurs de commande des éléments inertiels comme les roues cinétiques dans le cas de moment cinétique.
- Fuites de gaz du système gaz froid.
- Ballotement de liquides dans les réservoirs.

4. Rappel de mécanique

4.1. Théorème du moment cinétique [6,8]

La dérivée absolue du moment cinétique, calculé au centre d'inertie d'un système, est égale au moment en ce point des forces extérieures agissant sur ce système.

- **Notations :**

G centre d'inertie G_x l'axe de roulis, G_y l'axe de tangage, G_z l'axe de lacet.

La matrice d'inertie du satellite calculée en G est exprimée dans le repère satellite G_{xyz} est :

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Et cas le plus courant où $G_{x,y,z}$ sont principaux d'inertie, la matrice est diagonale, on a alors une matrices plus simple :

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} I_R & 0 & 0 \\ 0 & I_T & 0 \\ 0 & 0 & I_L \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

R : Roulis, T : Tangage, L : Lacet

Le vecteur rotation instantanée du satellite par rapport au repère inertiel, exprimé en axes satellite est noté :

$$\mathbf{\dot{\Omega}}(S/R_a) = p\mathbf{r}_x + q\mathbf{r}_y + r\mathbf{r}_z \quad (1.3)$$

Le moment total des actions extérieures au satellite exprimé sur les axes satellite, noté:

$$\mathbf{r} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{roulis} \\ C_{tangage} \\ C_{lacet} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Le moment cinétique H en axes satellite vaut :

$$\mathbf{r} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

4.1.1 Calcul du moment cinétique H d'un solide [6,8]

Nous supposons que le satellite n'est composé que d'éléments assimilables à des solides. Le moment cinétique d'un solide est en G :

$$\mathbf{r} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \bar{I} \mathbf{\dot{\Omega}}(S/R_a) = \begin{pmatrix} I_R p \\ I_T q \\ I_L r \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

4.1.2. Dérivation du moment cinétique [5]

$$\left(\frac{d\dot{\mathbf{H}}}{dt}\right)_{Ra} = \begin{pmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{pmatrix} = \left(\frac{d\bar{I}\dot{\Omega}(S/R_a)}{dt}\right)_{Ra} = \left(\frac{d\dot{\mathbf{H}}}{dt}\right)_{xyz} + \dot{\Omega}(S/R_a) \wedge \dot{\mathbf{H}} \quad (1.7)$$

Ce système permet après tabulation de \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{r} de connaître la rotation absolue et donc d'en déduire l'attitude du satellite.

5. Conclusion

Tous les points qui ont été cités ne sont pas suffisants, on peut simplement calculé la rotation absolue du satellite, exprimée en axes relatifs. Pour obtenir l'orientation il faut encore un pas d'intégration et ce n'est pas le plus facile, car il fait intervenir le paramètre angulaire .or l'expérience montre qu'aucun système d'angles n'est parfait et qu'il présente toujours au moins une singularité géométrique, face à une orientation quelconque.

1. Introduction

Ce chapitre concerne le comportement d'un satellite sous l'effet du gradient de gravité.

Les domaines proposés :

- Le repérage d'un satellite par rapport au repère local, avec les angles d'Euler.
- Les quaternions d'attitude, outil mathématique de repérage d'une rotation ou de l'attitude d'un solide.
- Le gradient de gravité, considéré comme une perturbation ou au contraire utiliser pour stabiliser une attitude.
- Le champ magnétique terrestre.
- Les magnéto coupleurs, utilisant le champ magnétique terrestre.
- La stabilisation d'un satellite par gradient de gravité et magnéto coupleur.

1.1. Le satellite [9]

Micro satellite de messagerie par exemple, acceptant une précision de pointage terre de 5° .

Il sera modélisé sous la forme d'un solide de révolution S1 et d'un système de 2 mâts transverses, pour bien mettre en évidence le rôle des inerties dans la stabilisation par gradient de gravité.

En pratique le mât ne dispose que d'un seul côté qui devrait rester pointé vers le zénith.

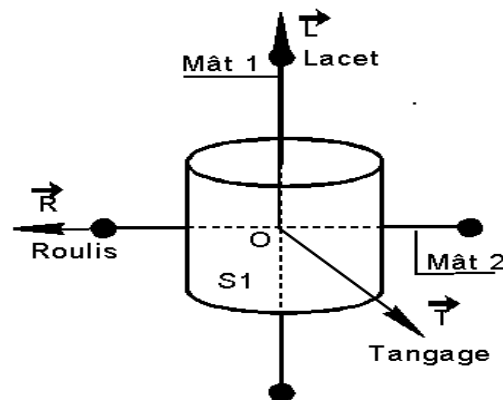


Figure 2.1. Le satellite.

- S1 a pour inerties : I_R (roulis) = I_T (tangage) = $6 \text{ m}^2 \text{ kg}$ I_L (lacet) = $8 \text{ m}^2 \text{ kg}$ et une masse $M=100\text{kg}$.
- Le mât1 est constitué de deux boules ponctuelles de 3 kg chacune à 3 m du centre O.

- Le mât 2 est constitué de deux boules ponctuelles de 2 kg chacune à 2 m du centre O.

1.2. L'orbite [9]

Le satellite est sur orbite circulaire basse polaire d'altitude sol 470 km. Sur une orbite polaire circulaire, le champ magnétique terrestre qui sera utilisé pour la stabilisation est assez simple à modéliser.

Dans un premier temps, pour bien appréhender l'effet du seul gradient de gravité, on ne prend en compte que la gravité centrale newtonienne, sans perturbations d'orbite et pour les forces extérieures créant des couples sur le satellite, uniquement le couple dû au gradient de gravité.

1.3. Repères – Nutation - Angles [9,10]

La mission du satellite requiert une position quasi invariable par rapport au sol. Survolé O Xa Ya Za est un repère galiléen, qu'il n'est pas utile de préciser outre mesure.

Le satellite S est en orbite, supposée circulaire, de rayon r_0 . On appelle Repère Orbital R_0 le repère d'origine S et d'axes XYZ.

Avec:

- X axe dit de **roulis**, unitaire de la vitesse orbitale, tangent à l'orbite.
- Y axe de **tangage**, unitaire du moment cinétique, normal à la trajectoire.
- Z axe de **lacet**, suivant la géocentrique, pointant le zénith.

On désigne par S_{xyz} le repère R, principal d'inertie pour le satellite, avec I_R I_T I_L les moments principaux d'inertie.

Pour un satellite stabilisé, devant garder ses axes quasiment fixes par rapport à ce repère orbital R_0 , nous sommes amenés à définir des angles particuliers, qui pour le cas d'espèce, resteront petits voisins de 0, nous adoptons les angles de Cardan.

Les repères sont définis comme suit, après avoir indiqué que l'axe α est la projection sur le plan horizontal X, Y de l'axe x (avec une singularité évidente pour $\theta = 90^\circ$) la succession de repères est:

XYZ --- ψ à $\alpha\beta Z$ --- θ à $x\beta\gamma$ --- Φ à xyz

Nous avons ainsi défini ces angles conventionnels, plus adaptés que les angles d'Euler, au cas des petits angles, car ils sont toujours bien définis :

- roulis Φ mesuré autour de x (voisin de X lorsque les angles sont petits).

- Tangage θ mesuré autour de β (voisin de Y lorsque les angles sont petits).
- Lacet ψ mesuré autour de Z.

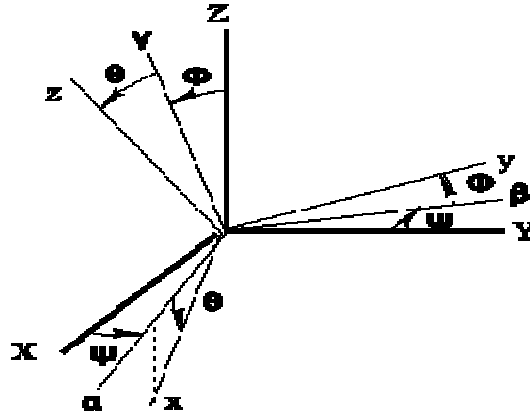


Figure 2.2. Les angles d'Euler.

La matrice P de passage de XYZ à xyz s'explique classiquement:

$$p = \begin{pmatrix} \cos q \cos y & -\cos f \sin y + \sin f \sin q \cos y & \sin f \sin y + \cos f \sin q \cos y \\ \cos q \sin y & \cos f \cos y + \sin f \sin q \sin y & -\sin f \cos y + \cos f \sin q \sin y \\ -\sin q & \sin f \cos q & \cos f \cos q \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

À comparer à son expression déduite du quaternion qui représente la rotation géométrique faisant passer du repère orbital au repère satellite :

$$p = \begin{pmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Ce qui permet d'exploiter les résultats pour évaluer les conditions initiales ou les angles de position en fonction du quaternion.

1.4. Gradient de gravité [10]

Le gradient de gravité a pour origine l'attraction différentielle qui s'exerce sur des masses situées à des distances différentes du centre de la terre.

Le couple de gradient de gravité vaut exprimé en axes satellite :

$$\mathbf{\Gamma}_{xyz}^{\mathbf{r}} = 3w_0^2 \mathbf{Z} \wedge \mathbf{I} \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 3w_0^2 (I_L - I_T) \sin \Phi \cos \Phi \cos^2 q \\ -3w_0^2 (I_R - I_L) \sin q \cos q \cos \Phi \\ -3w_0^2 (I_T - I_R) \sin \Phi \cos q \sin q \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

On les exprime en termes exacts de quaternions, on trouve :

$$\mathbf{\Gamma}_{xyz}^{\mathbf{r}} = 6w_0^2 \begin{pmatrix} (I_L - I_T)[2(q_0^2 + q_3^2) - 1](q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ (I_R - I_L)[2(q_0^2 + q_3^2) - 1](q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(I_T - I_R)(q_3 q_2 + q_0 q_1)(q_3 q_1 - q_0 q_2) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Pour de petits angles en contrôle d'attitude notamment en ne gardant que les termes d'ordre 1 :

$$\mathbf{\Gamma}_{xyz}^{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 3w_0^2 (I_L - I_T) \Phi \\ 3w_0^2 (I_R - I_L) q \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

1.5. Champ magnétique terrestre [9]

1.5.1. Généralités

Le champ magnétique terrestre apparaît comme résultant d'un dipôle magnétique faisant un angle de 11° avec l'axe de rotation de la Terre et légèrement décentré. Le pôle sud du dipôle est dans l'hémisphère nord à $78^\circ 6'$ de latitude et $289^\circ 55'$ de longitude ouest, de plus ce dipôle dérive de $0.014^\circ/\text{an}$ vers l'est et sa force augmente de 0.05% par an.

C'est dire la complexité de sa représentation.

Deux modèles sont connus:

- IAGA pour International Association of Geomagnetism and Aeronomy
- IGRF pour International Geomagnetic Reference Field qui propose un développement du potentiel magnétique donnant accès au champ magnétique terrestre sous la forme suivante:

Avec les notations :

- r rayon vecteur.
- L longitude du satellite.
- λ désigne la latitude.

- $R_T = 6378,135$ km: rayon terrestre équatorial.
- g_n^m et h_n^m , des coefficients connus fonctions lentement variables de l'année, donnés, listés et fournis en tableaux, dans les ouvrages spécialisés.
- P_n^m sont les fonctions de Legendre normalisées.

Pour une première étude de stabilisation par magnéto coupleurs et une bonne compréhension du phénomène, nous nous contenterons d'un modèle simple en ne gardant que les premiers termes du développement :

$$V(r, I, L) = \frac{R_T^3}{r^2} (g_1^1 \sin I + g_1^1 \cos L \cos I + h_1^1 \sin L \cos I) \quad (2.6)$$

Nous obtenons donc les composantes du champ magnétique par

$$\vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(r, I, L)$$

- B_r est la composante radiale
- B_N la composante tangente au méridien vers le nord local
- B_L la composante vers l'est

Le calcul donne :

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = 2 \left[\frac{R_T}{r} \right]^3 (g_1^1 \sin I + g_1^1 \cos L \cos I + h_1^1 \sin L \cos I) = B_z \\ B_N &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial I} = \left[\frac{R_T}{r} \right]^3 (-g_1^1 \cos I + g_1^1 \cos L \sin I + h_1^1 \sin L \sin I) \\ B_L &= -\frac{1}{r \cos I} \frac{\partial V}{\partial L} = \left[\frac{R_T}{r} \right]^3 (g_1^1 \sin L - h_1^1 \cos L) \end{aligned} \quad (2.7)$$

1.5.2. Modèle simplifié du champ magnétique terrestre

Nous commencerons par un modèle encore plus simple sans que cela altère les résultats généraux de l'étude de contrôle d'attitude.

- **Hypothèses**

On assimile le champ magnétique terrestre à celui d'un dipôle magnétique placé suivant l'axe Nord-Sud de la Terre et présentant ainsi une symétrie de révolution autour de l'axe de rotation de la Terre.

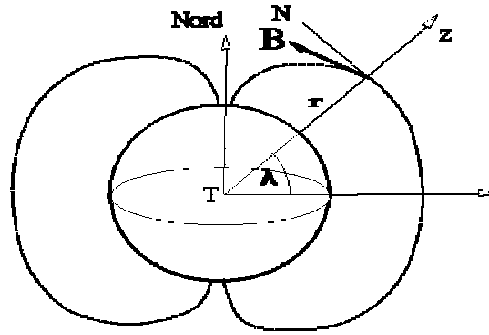


Figure 2.3. Champ magnétique terrestre.

Nous savons que :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \\ \vec{H} &= -\frac{2K}{r^3} \sin I \vec{Z} + \frac{K}{r^3} \cos I \vec{N} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ et $K = 6,413 \cdot 10^{21} \text{ A.m}^2$

- N est la direction locale du Nord (pour nous magnétique et géographique à la fois avec la simplification adoptée).

1.5.3. Exemple de calcul des composantes de B dans le repère orbital local pour une orbite héliosynchrone

- **Hypothèses**

L'orbite est supposée circulaire de type héliosynchrone ou du moins d'inclinaison $i > 90^\circ$. Le temps de référence $t = 0$ est pris à l'un des passages du satellite au noeud N ascendant (passage de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord).

On appelle j l'angle polaire du satellite compté à partir du noeud ascendant positivement autour de l'axe de tangage (axe également porteur du moment cinétique du satellite).

On appellera β l'angle entre la vitesse (ou l'axe de roulis X) et la direction N du nord local, est mesuré positivement autour de la géocentrique Z (Sur la figure trace montante $\beta < 0$ et $i > 90^\circ$).

- **Remarque**

La simple observation du dessin montre que pour une telle orbite, lorsque la trace est montante (latitude croissante) $-90^\circ < \beta < 0$ et pour une trace descendante (latitude décroissante) $-180^\circ < \beta < -90^\circ$.

On rappelle les relations de trigonométrie sphérique suivantes :

$$\cos i = \cos l \sin b \quad \sin l = \sin i \sin j \quad j = w_0 t$$

Calcul des composantes de B sur X, Y, Z repère local :

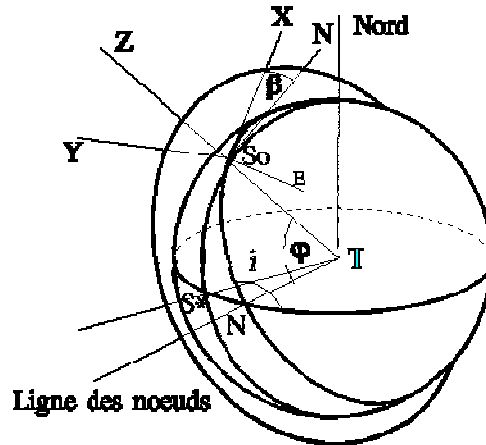


Figure 2.4. Ligne des nœuds.

De plus le lecteur se convaincra que le plan (E, N) est le plan horizontal (E est la direction de locale de l'est). Il fera attention à l'angle b compté algébriquement dans les calculs de projection.

La projection donne alors :

$$\vec{N} = \cos b \vec{X} + \sin b \vec{Y}$$

D'où les composantes du champ B magnétique en axes du repère orbital local (X, Y, Z.) :

$$\begin{aligned} B_x &= m_0 \frac{K}{r^3} \operatorname{sgn}(\cos j) \cos l \cos b \\ B_y &= m_0 \frac{K}{r^3} \cos l \sin b = m_0 \frac{K}{r^3} \cos i \\ B_z &= m_0 \frac{2K}{r^3} \sin l \end{aligned} \tag{2.9}$$

On observe que dans notre modélisation la composante B_Y est constante mais naturellement faible puisque l'inclinaison est voisine de 90° (une orbite héliosynchrone est presque polaire). Bien sûr avec un modèle plus précis, cette propriété n'est plus vraie et B_Y a une variation périodique.

2. Contrôle d'attitude par magnéto-coupleurs

2.1. Le magnéto-coupleurs [11]

Les équipements utilisés pour générer les couples électromagnétiques, et que l'on désigne par le terme de "magnéto-coupleur", sont simples à réaliser, peu coûteux et faciles à implanter à bord du satellite. En plus, ils ne consomment pas trop d'énergie électrique et ils sont d'une grande fiabilité en ce sens que leur usage ne risque pas de panne catastrophique.

Les magnétos coupleurs utilisés en pratique sont les barreaux aimantés et les bobines électromagnétiques.

Les barreaux aimantés ou "barreaux à hystérésis" sont utilisés pour assurer le pointage d'un axe du satellite suivant le vecteur induction magnétique terrestre tout au long de l'orbite. Leur utilisation est très restreinte et ne peut intéresser que les satellites de petites dimensions placées en orbite basse. Leur principal inconvénient est qu'ils ne peuvent fournir qu'une commande "passive", entièrement tributaire du champ magnétique.

Les bobines électromagnétiques sont des magnéto-coupleurs «actifs» puisque l'on peut changer l'intensité et le sens de leur dipôle magnétique à volonté, en modifiant respectivement l'intensité et le sens du courant électrique qui les traverse. En outre, en choisissant convenablement les instants et les durées de mise sous tension de la (ou les) bobine (s), on peut arriver à générer des couples de commande dans la direction voulue, malgré la dépendance envers le champ magnétique terrestre.

Les bobines peuvent être avec ou sans noyau ferromagnétique à moment dipolaire égal, les bobines à noyau ont une masse plus faible et consomment moins de puissance que les bobines à air. En contrepartie, les bobines à noyau ont généralement des dimensions réduites alors que les bobines à air peuvent être enroulées sur la périphérie du corps principal ou bien disposées dans le plan du générateur solaire déplorable.

Par ailleurs, en vue de réaliser une commande magnétique active, la mise sous tension des bobines ne peut être faite de façon arbitraire mais, au contraire, elle doit obéir à des lois de commande bien définies. Ces lois sont, en effet, étudiées et évaluées au sol en fonction de la manoeuvre à effectuer, du modèle d'orbite et de champ magnétique et des divers paramètres du satellite. Elles sont ensuite, soit implantées dans la mémoire du calculateur de bord, soit envoyées depuis le sol (par télécommande) vers un calculateur ou une logique ciblée commandant les bobines (Figure 2.5).

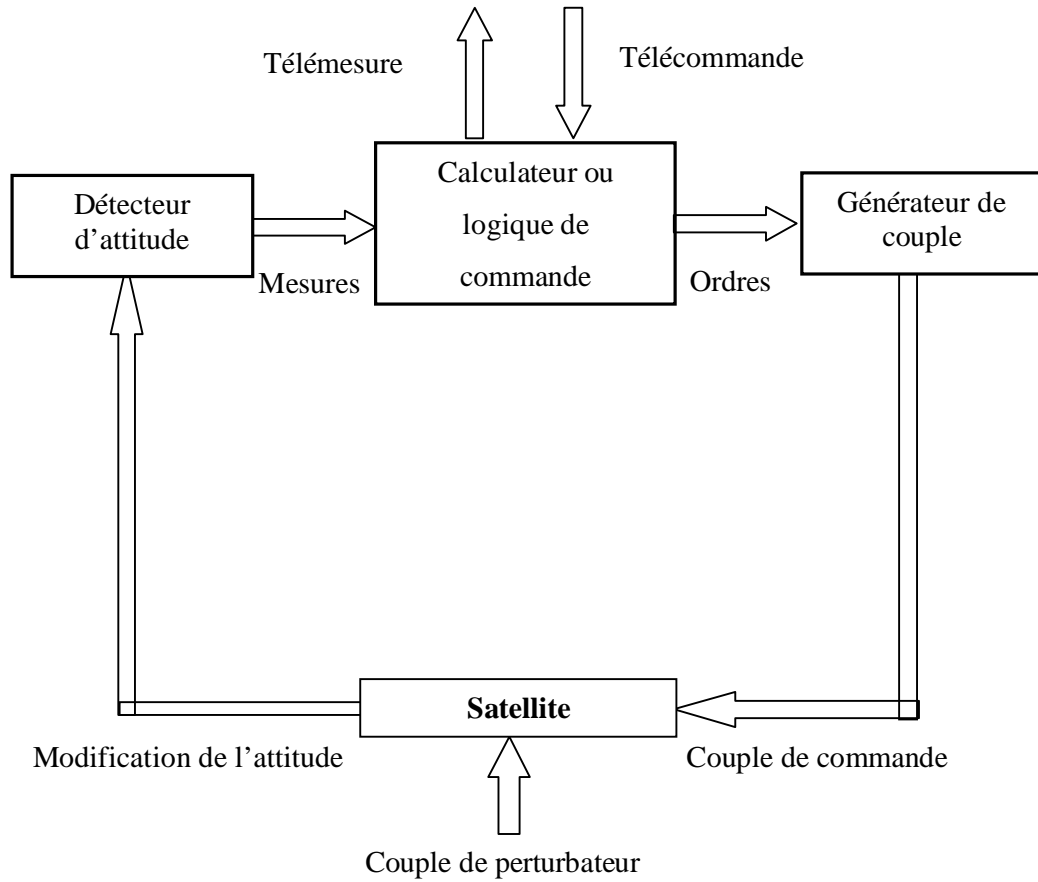


Figure 2.5. Schéma fonctionnel du contrôle d'attitude.

2.1.1. Notations et conventions [9,10]

- I_R, I_T, I_L les inerties en roulis, tangage et lacet.
- Φ, θ, ψ les angles de roulis, tangage et lacet supposés petits dans le contrôle d'attitude.
- ω_0 la pulsation orbitale constante pour une orbite circulaire de rayon r .

Le vecteur champ magnétique terrestre par ses composantes dans le repère orbital local XYZ, associé à la position courante du satellite, au rayon vecteur r et au temps t , cette donnée peut être soit analytique soit sous forme de modèle embarqué.

$$\frac{\mathbf{r}}{B} / \begin{matrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{matrix} \begin{matrix} XYZ \\ XYZ \\ XYZ \end{matrix} = \begin{pmatrix} B_x(r,t) \\ B_y(r,t) \\ B_z(r,t) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

L'électronique de bord et les capteurs utilisés doivent élaborer des moments magnétiques, en commandant les courants des bobines.

Un pseudo moment magnétique de commande est élaboré par le calculateur, par exemple en loi proportionnelle dérivée:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{rx}\dot{f} + K_{dx}\dot{f} \\ K_{ry}\dot{q} + K_{dy}\dot{q} \\ K_{pz}\dot{y} + K_{dz}\dot{y} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

D'autres commandes peuvent naturellement être imaginées.

2.1.2. Couple dû aux magnéto-coupleurs [9]

Le satellite est équipé de magnétomètres (liés au satellite), mesurant les composantes en axes satellite du champ magnétique terrestre. Des capteurs de positions angulaires (senseurs) et des gyromètres de mesure de vitesses angulaires associés à une électronique de bord, permettent d'élaborer les fonctions m_x m_y m_z , puis M_x M_y M_z , et donc les courants à injecter dans trois bobines suivant les trois axes pour obtenir le moment magnétique de commande M .

Le moment général M du dipôle équivalent s'écrit sous forme vectorielle :

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \frac{\vec{m} \wedge \vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{|\vec{B}|} \begin{pmatrix} m_y B_z - m_z B_y \\ m_z B_x - m_x B_z \\ m_x B_y - m_y B_x \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Le vecteur champ magnétique terrestre calculé dans la base satellite en fonction des paramètres angulaires et des composantes de B dans le repère orbital, est dans le cas des petits angles de dépointage :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y & -q \\ -y & 1 & f \\ q & -f & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Donnant le couple de commande ci-dessous, obtenu en explicitant le double produit vectoriel:

$$\vec{M}_c = \vec{M} \wedge \vec{B} = \frac{1}{|\vec{B}|} \begin{pmatrix} -B_y^2 - B_z^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_x B_y & -B_x^2 - B_z^2 & B_y B_z \\ B_x B_z & B_y B_z & -B_x^2 - B_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Ce couple de contrôle agissant sur le satellite est donné par ses composantes dans les axes satellite. En dernier ressort c'est m (m_x m_y m_z) qui apparaît comme la commande.

Le moment total des perturbations extérieures autres que gravitationnelles sont :

$$M_p = \begin{pmatrix} M_{rx} \\ M_{ry} \\ M_{rz} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

On s'intéressera tout particulièrement aux couples d'origine aérodynamiques et on s'apercevra probablement du rôle important joué par la position du centre de poussée par rapport au centre de masse.

2.2. Commande portant sur le moment magnétique [9]

Elle se fait par l'intermédiaire du moment magnétique des bobines des magnéto-coupleurs de moment M .

On peut par exemple essayer une commande générée par des mesures gyrométriques et des moments proportionnels aux vitesses angulaires relatives mesurées dans le repère satellite.

$$\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(S/R_a) - w_0 \vec{Y} = \begin{pmatrix} p - w_0 p_{21} \\ q - w_0 p_{22} \\ r - w_0 p_{23} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Donc une commande électronique indirecte de la forme:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = K_g \begin{pmatrix} p - w_0 p_{21} \\ q - w_0 p_{22} \\ r - w_0 p_{23} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Où K_g est un gain à régler.

Le rôle amortisseur de la commande apparaît grâce aux signes < 0 des termes diagonaux de la matrice fonction de B , servant au calcul du moment de commande.

Ce gain pourrait si nécessaire, être différent sur les 3 axes, par exemple:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{gR}(p - w_0 p_{21}) \\ K_{gT}(q - w_0 p_{22}) \\ K_{gL}(r - w_0 p_{23}) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

2.3. Couples perturbateurs

La présence de couples perturbateurs pourrait être envisagée, on notera avec un indice p , les composantes sur les axes satellites:

$$\vec{\Gamma}_p = \begin{pmatrix} \Gamma_{pX} \\ \Gamma_{pY} \\ \Gamma_{pZ} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

3. Le quaternion

3.1. Equation d'évolution du quaternion [9]

Il faut comprendre deux concepts:

- Que la position du satellite, par rapport au repère orbital, résulte de la rotation géométrique, donc du quaternion d'attitude \mathbf{q} de composantes (q_0, q_1, q_2, q_3) . Le quaternion est capable de représenter toute attitude sans jamais présenter de singularités.
- Que le mouvement instantané galiléen autour du centre d'inertie, est une rotation axiale de vitesse angulaire donnée par la rotation instantanée Ω de composantes (p, q, r) en axes absolus.

3.2. La rotation relative au repère orbital [9,10]

Celle qu'il faut annuler en théorie, est alors:

$$\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(S/R_a) - w_0 \vec{Y} = \begin{pmatrix} p - w_0 p_{21} \\ q - w_0 p_{22} \\ r - w_0 p_{23} \end{pmatrix} / R = \begin{matrix} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ x \ y \ z \end{matrix} \quad (2.20)$$

Cette rotation est connue à bord du satellite grâce aux mesures gyrométriques.

Il est donc envisageable de générer des couples s'opposant à telle ou telle vitesse à contrôler.

L'évolution du quaternion et la rotation sont liés par les équations :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} M_s q \quad (2.21)$$

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad \text{Avec : } \begin{pmatrix} c_{21} = 2(q_1 q_2 + q_0 q_0) \\ c_{22} = 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 \\ c_{23} = (q_3 q_2 - q_0 q_1) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Avec une matrice Ms:

$$M_s = \begin{pmatrix} 0 & -p + w_0 c_{21} & -q + w_0 c_{22} & -r + w_0 c_{23} \\ p - w_0 c_{21} & 0 & r - w_0 c_{23} & -q + w_0 c_{22} \\ q - w_0 c_{22} & -r + w_0 c_{23} & 0 & p - w_0 c_{21} \\ r - w_0 c_{23} & q - w_0 c_{22} & -p + w_0 c_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

4. Equations de mouvement [9,10]

Le théorème du moment cinétique appliqué au satellite en son centre d'inertie, en projection sur les axes satellite, sous l'effet de :

- C couple de commande
- Γ_p couple perturbateur

Donne les équations du mouvement :

$$I_R \frac{dp}{dt} + (I_L - I_T)qr = 6w_0^2(I_L - I_T)(q_2 q_3 + q_0 q_1)(2q_0^2 + 2q_3^2 - 1) + Cx + \Gamma_{pX} \quad (2.24)$$

$$I_T \frac{dq}{dt} + (I_R - I_L)rp = 6w_0^2(I_R - I_L)(q_1 q_3 + q_0 q_2)(2q_0^2 + 2q_3^2 - 1) + Cy + \Gamma_{pY} \quad (2.25)$$

$$I_L \frac{dr}{dt} + (I_T - I_R)pq = 12w_0^2(I_T - I_R)(q_2 q_3 + q_0 q_1)(q_1 q_3 - q_0 q_2) + Cz + \Gamma_{pZ} \quad (2.26)$$

4.1. Formulation du problème

On propose :

- On prendre comme un vecteur d'état X à 7 coordonnées X= [p, q, r, q0, q1, q2, q3].
- D'écrire le système différentiel sous une forme canonique où F fonction vectorielle ne dépend que des inerties, de la pulsation et de vecteur d'état X, ce qui rendra l'adaptation plus facile pour d'autre application :

$$dX/dt= F(X)+BU$$

- B ne dépend que des inerties et U est le vecteur d'entrée du système, dont les trois premières composantes sont les couples normalisés en axe satellite.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_l} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{I_r} \\ \frac{C_y}{I_t} \\ \frac{C_z}{I_l} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le diagramme fonctionnel pourrait donc être le suivant et constituer un bloque unique avec une entrée U et une sortie X.

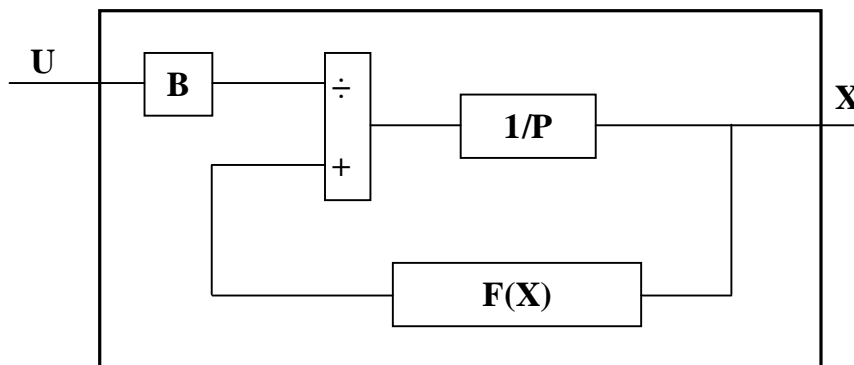


Figure 2.6. Diagramme fonctionnel.

4.2. Présentation des résultats numérique

Pour la résolution de ces équations on a utilisé la méthode «Ordinary differential equation».

• Résultats

Pour le quaternion de base : $q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9211 \\ 0 \\ -0.3894 \\ 0 \end{pmatrix}$.

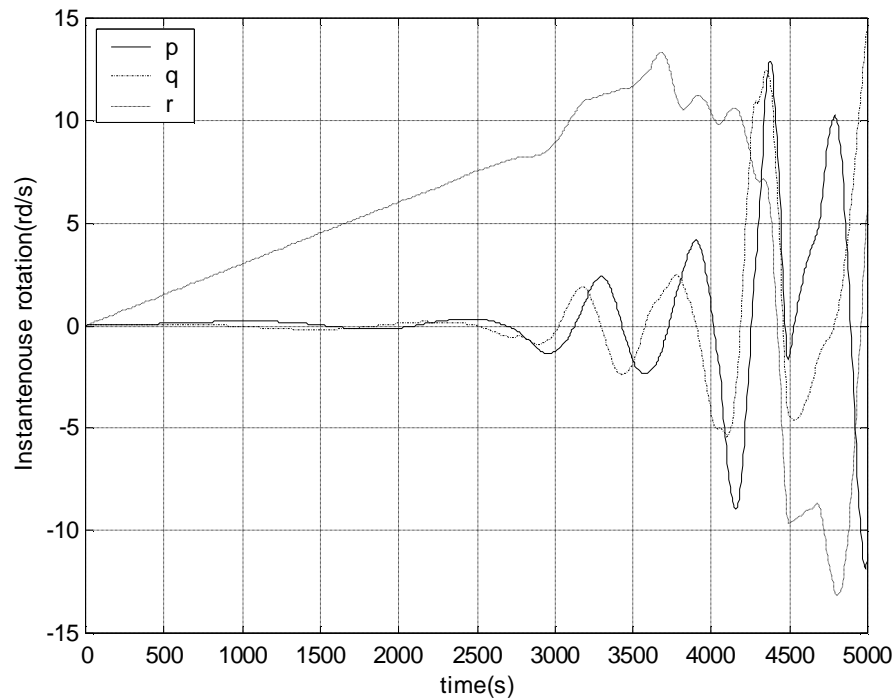


Figure 2.7. Les variations des composantes du rotation instantanée W.

Théoriquement, on calcule les coefficients du vecteur de rotation par la relation $\Omega = 2\dot{q}\bar{q}$. Comme ce vecteur est une donnée intrinsèque qui dépend du quaternion (mouvement de la base par rapport à l'autre), il est difficile de le calculer.

En ce qui concerne notre travail, nous avons calculé les paramètres p, q et r en résolvant le système d'équations différentielles (2.24), (2.25), (2.26).

5. Equations de la navigation

Pour l'équation de navigation, les paramètres qui agissent à la vitesse sur chaque axe sont l'altitude h et l'inclinaison i , en variant ces paramètres on obtient des solutions différentes.

Les valeurs de l'altitude et de la longitude déterminent l'orbite où se trouve le satellite, donc on va voir la variation de la vitesse de la fusée et du satellite sur les trois axes et ça pour chaque orbite (L'orbite équatoriale, l'orbite incline, l'orbite polaire, l'orbite rétrograde).

5.1. Equation de navigation exprimée par ses composantes [12,13]

Pour un système de navigation terrestre, fonctionnant dans l'armature géographique locale de référence, l'équation de navigation peut être exprimée comme suit :

$$\dot{V}_e^n = f^n - (2w_{ie}^n + w_{en}^n) \times V_e^n + g_l^n \quad (2.27)$$

V_e^n : Vitesse de l'armature sur chaque axe, $V_e^n = [v_N \quad v_E \quad v_D]^T$

f^n : Vecteur de force calculé avec l'accéléromètre, $f^n = [f_N \quad f_E \quad f_D]^T$

w_{ie}^n : Taux du tour autour la terre, $w_{ie}^n = [\Omega \cos i \quad 0 \quad -\Omega \cos i]$

w_{en}^n : Taux du tour du satellite sur lui-même,

$$w_{en}^n = [v_E/(R_0 + h) \quad -v_N/(R_0 + h) \quad -v_E/(R_0 + h)] \quad (2.28)$$

g_l^n : Gradient de la gravité, $g_l^n = [g_N \quad g_E \quad g_D]$

L'équation de navigation est donc exprimée comme suit :

$$\dot{V}_e^n = \begin{pmatrix} f_R \\ f_T \\ f_L \end{pmatrix} - \left[2 \cdot \begin{pmatrix} \Omega \cos i \\ 0 \\ -\Omega \cos i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_R/(R_0 + h) \\ -v_T/(R_0 + h) \\ -v_R/(R_0 + h) \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} v_R \\ v_T \\ v_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_R \\ g_T \\ g_L \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

En développant (3.29), on obtient le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_R = f_R - 2\Omega v_T \sin i + \frac{(v_R v_L - v_T^2 \tan i)}{(R_0 + h)} + g_R \\ \dot{v}_T = f_T + 2\Omega(v_R \sin i + v_L \cos i) + \frac{v_T}{(R_0 + h)}(v_L + v_R \tan i) - g_T \\ \dot{v}_L = f_L - 2\Omega v_T \cos i - \frac{v_T^2 + v_R^2}{(R_0 + h)} + g_L \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Où :

$$R_0 = 6378137.0 \text{ m.}$$

$$g(h_{R,T,L}) = g(0)/(1+h_{R,T,L}/R_0)^2$$

$$g(0) = 9.780318 (1+5.3024 \cdot 10^{-3} \sin^2 i - 5.9 \cdot 10^{-6} \sin^2 2i) \text{ m/s}^2$$

5.2. Résultats

Chaque orbite a ses propres paramètres d'altitude et d'inclinaison, pour cela nous trouvons des différents résultats pour chaque orbite, comme il est montré ci-dessous :

- L'orbite géostationnaire

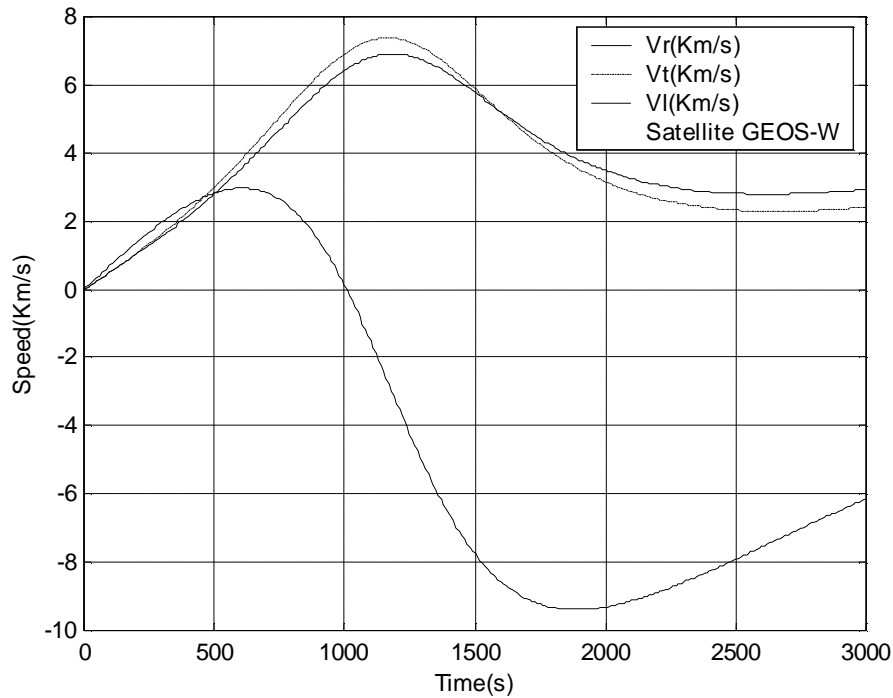


Figure 2.8. Les variations des vitesses de satellite pour une orbite géostationnaire.

- **L'orbite héliosynchrone**

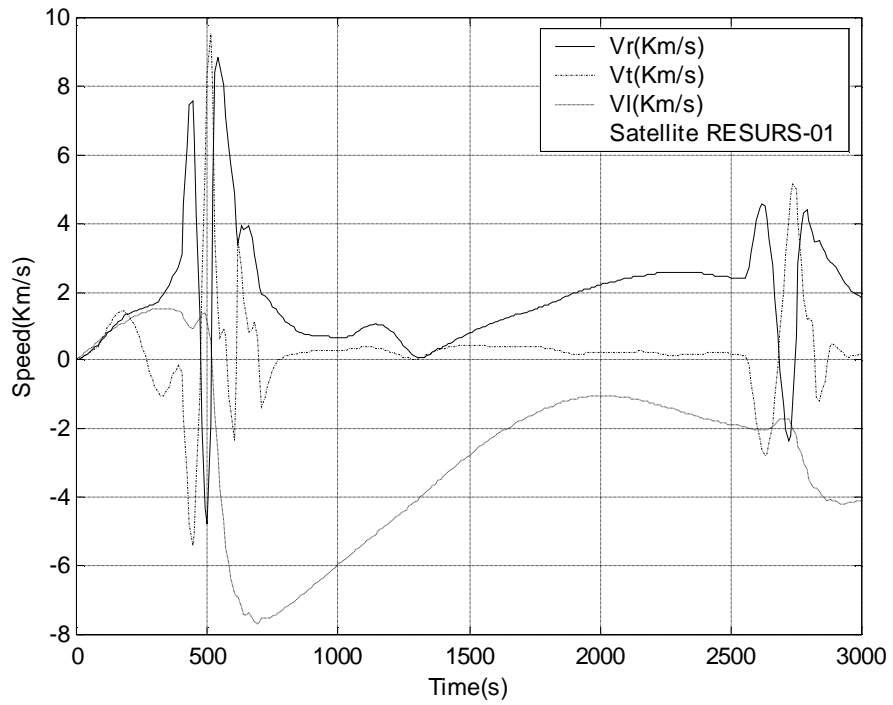


Figure 2.9. Les variations des vitesses de satellite pour une orbite héliosynchrone.

- **L'orbite inclinée**

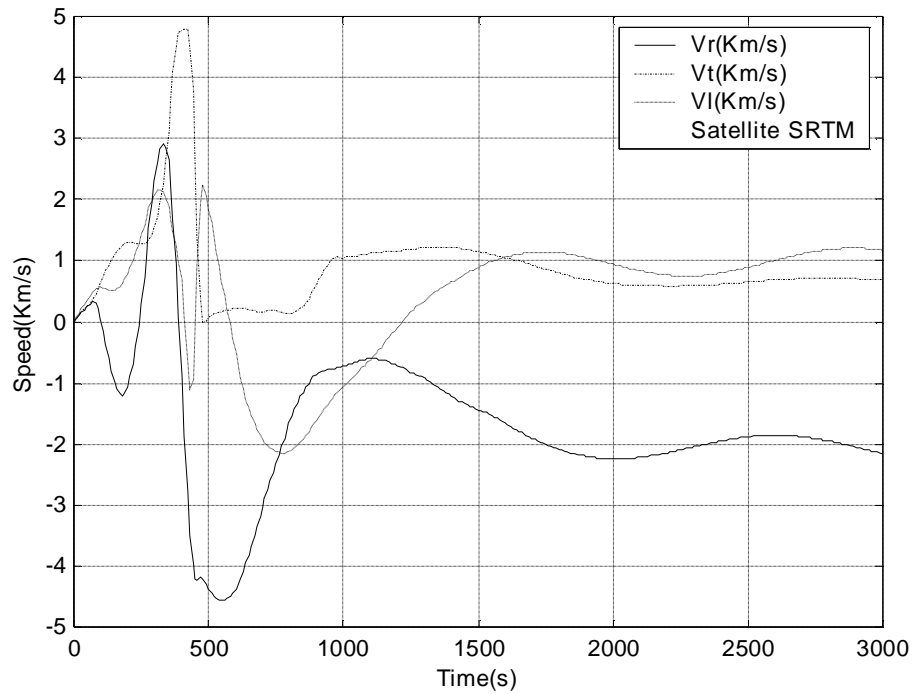


Figure 2.10. Les variations des vitesses de satellite pour une orbite inclinée.

- **Orbite elliptique**

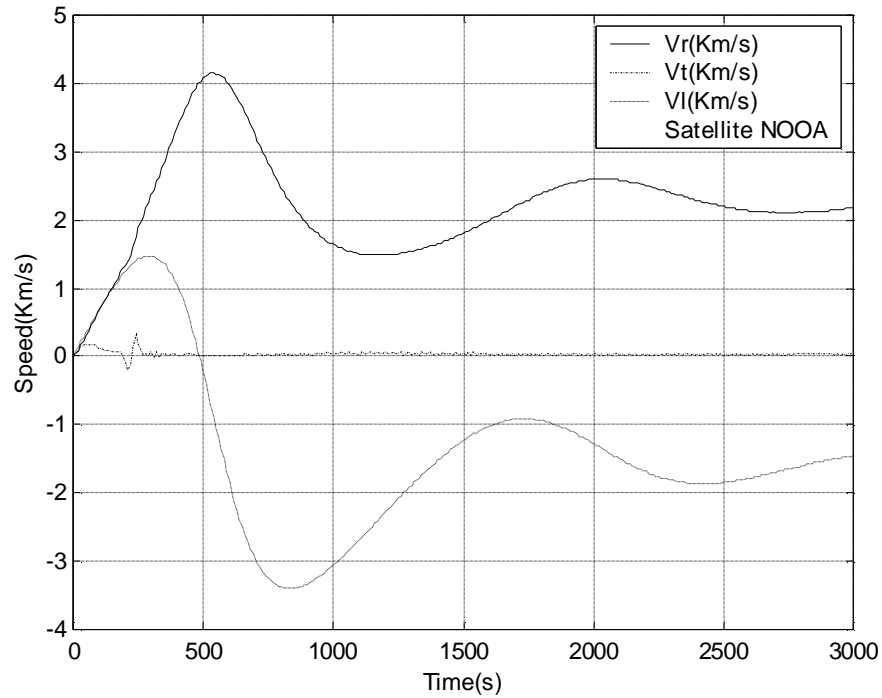


Figure 2.11. Les variations des vitesses de satellite pour une orbite elliptique.

Les courbes ci-dessus (Figure 2.8 - Figure 2.11), sont les solutions des équations différentielles (2.30), représentant les variations de la vitesse du satellite (fusée), sur les différents axes, durant le déplacement, de la terre vers l'orbite.

A chaque orbite correspond une vitesse de lancement laquelle diminue, pendant le trajet. Arrivée à son orbite, le satellite doit avoir la vitesse adéquate pour pouvoir se maintenir sur son orbite.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, qui est consacré au contrôle actif d'attitude d'un satellite par le système magnéto-coupleurs, nous avons appliqué, à ce système, la méthode du quaternion d'attitude afin qu'il soit plus éloquent.

Le rôle des satellites est de surveiller la terre et de collecter les informations qui servent à l'étude des phénomènes naturels et au développement de la communication. Pour cela on a besoin de connaître des paramètres et de les maîtriser afin de les adapter aux situations.

Ces paramètres sont: la position exacte, les coordonnées, la direction et le sens du déplacement, le décalage de l'armature par rapport à un repère initial, la vitesse angulaire par rapport à la terre et à elle-même et cela sur chaque axe (roulis, tangage, lacet) et les accélérations.

Dans ce chapitre, nous étudions tous ces paramètres à partir de deux équations différentielles:

- La première est l'équation du mouvement qui représente la variation de la position du satellite et la position exacte à un temps connu t_0 .
- La seconde est l'équation de navigation qui exprime la vitesse angulaire sur chaque axe.

La connaissance de tous ces paramètres permet de connaître approximativement l'attitude et donne donc la possibilité de contrôler le satellite et de communiquer avec ce dernier.

1. Introduction

L'idée principale des lois de commande est d'utiliser des déclencheurs de fixée le corps en même temps que des taux de corps et des paramètres angulaires d'attitude de quaternion pour la garantie de stabilité. La stabilité globale de la loi de rétroaction de quaternion est habituellement prouvée par théorie de stabilité de Lyapunov. La plupart d'avantage important de rétroaction de quaternion est donc garantie de stabilité sous la condition de grandes manoeuvres non linéaires d'attitude d'angle. Ceci fait un contraste distinct à partir du cas en utilisant des angles d'Euler pour la stabilisation d'attitude de rétroaction du satellite dans des marges angulaires relativement plus petites.

La rétroaction de Quaternion est habituellement représentée dans une forme proportionnelle régulière plus intégrale plus dérivée du contrôleur (PID) [14,15].

En d'autres termes, l'erreur intégrale cause l'accumulation des signaux de commande et/ou de la saturation de déclencheur. En fait, le problème de saturation de déclencheur dû à la commande intégrale a été une question classique dans la société d'automatique. Une approche prometteuse pour réduire au minimum l'erreur intégrale est le prétendu contrôleur d'anti-remontage (AWC - Anti-Windup Control) [16,17,18]. La conception d'AWC est motivée par la nécessité de réduire l'effet intégral comme source primaire de saturation de déclencheur. Dans les études précédentes, les lois de commande de rétroaction exprimées par des éléments de quaternion ont été mises en application sous la forme de PID, mais pas beaucoup d'attention a été prêtée au problème de saturation de déclencheur. Pour de grandes manoeuvres d'angle à l'aide des déclencheurs à roues de réaction, le problème de saturation de déclencheur doit être considéré comme souci pratique particulièrement sous des perturbations externes.

Une autre approche pratique pour atténuer l'effet de saturation est le prétendu intégrateur intelligent [19].

L'intégrateur intelligent est une modification de la commande intégrale originale. La commande intégrale est manoeuvrée de façon à éviter la construction initiale du signal de commande. En cette étude, les contrôleurs conventionnels pour la grande manoeuvre de vaisseau spatial d'angle sont le modifier pour adapter à l'AWC et les arrangements intelligents d'intégrateur. L'objectif de commande est grande manoeuvre gyroscopique d'attitude d'angle sous la limite de saturation de déclencheur et la perturbation externe.

Les déclencheurs assumés dans cette étude sont des roues de réaction produisant du couple de commande. Il est bien connu que les roues de réaction soient sujettes

habituellement à la limitation dans l'impulsion angulaire maximum. Sur l'application de la commande en circuit fermé, l'élan angulaire tendent à dans le pli et l'élan périodique vidant des opérations sont exigés pour réduire le niveau d'élan angulaire. L'exécution d'AWC et l'intégrateur intelligent sont examinés en assumant les entrées constantes de perturbation. Des résultats de simulation sont présentés pour vérifier la stratégie proposée. La méthode étudier en ce chapitre fournira certainement une solution pratique à la saturation de déclencheur pour de grandes manoeuvres d'attitude d'angle de satellite.

2. Grande manoeuvre d'angle

2.1. Dynamique et cinématique d'attitude

Considérons un modèle rigide de satellite avec un ensemble des roues internes de réaction suivant les indications de la figure 3.1. On assumé que la roue de réaction est une configuration à quatre roues de pyramide fournissant la redondance pour la commande gyroscopique.

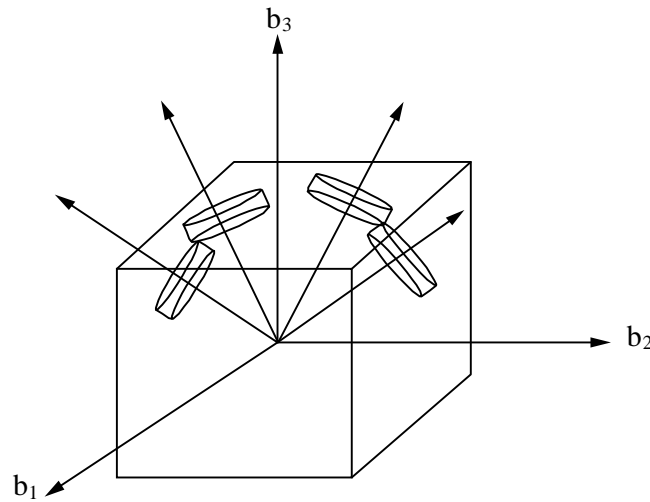


Figure 3.1. Modèle de vaisseau spatial avec quatre roues de réaction.

La dynamique de rotation gyroscopique non linéaire du vaisseau spatial rigide est représentée comme [20] :

$$(J - CJ_W C^{-1}) \dot{w} + w \times H + C u_W = u_{ext} \quad (3.1)$$

$$H = Jw + CJ_W \Omega \quad (3.2)$$

$$\dot{\Omega} = J_W^{-1} u_W - C^{-1} \dot{w} \quad (3.3)$$

Ou :

J : la matrice d'inertie de satellite.

u_w : le couple d'entrée.

u_{ext} : couple externe .

H : vecteur total d'impulsion angulaire de système.

J_w : la matrice d'inertie de roue.

Ω : vecteur de vitesse de roue dans l'armature de coordonnées de roue.

C : matrice du même rang 3x4 de la transformation du châssis à l'armature de roue.

$\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$: représente le vecteur des composants de vitesse angulaire de satellite.

On assume que le vecteur de couple de commande de roue est sujet à la limite de saturation comme :

$$Cu_W \equiv u_{Wb} = \begin{cases} N & d_W > N \\ d_W & -N < d_W < N \\ N & d_W < -N \end{cases} \quad (3.4)$$

Où N est le vecteur des limites de saturation des signaux d'entrée de commande à l'axe de corps de satellite, et le δ_w est le vecteur des signaux de commande avant l'élément de saturation suivant les indications de figure 3.2.

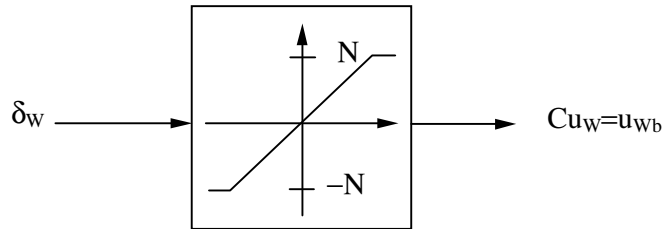


Figure 3.2. Élément non linéaire de bloc de saturation.

D'une part, les rapports cinématiques pour des variables d'attitude de quaternion satisfont [14,15] :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2} [\bar{w}] q + \frac{1}{2} q_4 w \\ \dot{q}_4 &= -\frac{1}{2} w^T q \end{aligned} \quad (3.5)$$

Là où $q=[q_1, q_2, q_3]^T$ est le vecteur des éléments de quaternion et le $[\bar{w}]$ est une matrice oblique symétrique qui contient les composants de la vitesse angulaire du satellite comme :

$$[\bar{w}] = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Les éléments de quaternion sont définis comme :

$$q_i = l_i \sin(\phi/2), \quad i=1,2,3, \quad q_4 = \cos(\phi/2) \quad (3.7)$$

Où:

ϕ est la magnitude d'angle de la rotation du l'axe principal dans le théorème d'Euler.

$l_i(1, 2,3)$ sont les composants d'axe principal au sujet du cadre de la référence.

Les éléments du quaternion satisfont :

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (3.8)$$

Les quaternions d'erreurs est définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} q_{e1} \\ q_{e2} \\ q_{e3} \\ q_{e4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{c1} & q_{c2} & q_{c3} & q_{c4} \\ -q_{c2} & q_{c1} & q_{c4} & -q_{c3} \\ -q_{c3} & -q_{c4} & q_{c1} & q_{c2} \\ -q_{c4} & q_{c3} & -q_{c2} & q_{c1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Où :

$q_{ei} (i=1, 2, 3,4)$: quaternion d'erreurs.

$q_{ci} (i=1, 2, 3,4)$: quaternion de commande.

Note que les quaternions de l'erreur sont identiques à quaternions courant quand les quaternions commandés sont $[q_{c1}, q_{c2}, q_{c3}, q_{c4}] = [0, 0, 0, 1]$.

La dynamique de rotation dans l'équation (3.1) et de quaternion dans l'équation (3.5) sont combinés ensemble pour construire des contrôleurs d'attitude de rétroaction de quaternion comme présenté dans la sous-section suivante.

2.2. Loi de commande

Une loi de commande de rétroaction pour la grande manoeuvre d'angle est construite comme [9,10] :

$$u_{Wb} = -g w \times H + D w + K q_e \quad (3.10)$$

Où :

D, K : sont des matrices du gain du contrôle.

γ : paramètre a introduit pour utiliser le terme de l'accouplement gyroscopique. Si γ est égale à l'unité le terme de l'accouplement gyroscopique est complètement annulé par la loi du contrôle, donc D est positif.

Pour le cas où les gains de la réaction sont mis à être :

$$D = d\tilde{J}, \quad K = k\tilde{J} \quad (3.11)$$

$$\text{Où :} \quad k, d > 0, \quad \tilde{J} = J - C J_w C^{-1}$$

Aussi, pour preuve de la stabilité, la fonction de Lyapunov suivant a été introduite :

$$V = \frac{1}{2} w^T K^{-1} \tilde{J} w + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + (q_4 - 1)^{-1} \quad (\dot{V} < 0 \text{ Système stable}) \quad (3.12)$$

Dans la présence de trouble externe constant, le contrôleur dans l'équation (3.10) peut être modifié en augmentant le terme du contrôle intégrant.

$$u_{wb} = -g w \times H + D w + K q_e + K_i \int q_e dt \quad (3.13)$$

Où :

K : matrice du gain du réaction intégrant.

2.3. Stabilité sous la saturation de déclencheur

Le contrôleur de rétroaction présenté dans la stabilité ci-dessus de garanties seulement quand le signal de commande est dans la limite de saturation. Une fois que le déclencheur devient saturé, la stabilité n'est pas automatiquement garantie plus longtemps. Ils ont choisi une fonction d'énergie pour la stabilité de Lyapunov, et ont prouvé que le dérivé de temps de

la fonction de Lyapunov peut être fait à négatif même sous la saturation de déclencheur. Dans ce cas, le contrôleur a comme conséquence des taux angulaires d'un corps fini simple de rétroaction. Une fonction de signe a été adoptée pour établir une loi globalement stabilisante de commande. Le contrôleur, sans n'importe quelle rétroaction sur des fonctions d'erreur d'attitude telles que des erreurs de quaternion, a été fait pour diminuer la fonction de Lyapunov. Avec la commande de rétroaction sur des erreurs d'attitude comme les équations (3.10) et (3.13), l'état de stabilité doit être établi d'une façon différente. Sous la limite de saturation et le δ_w de notation dans la figure 3.2, la loi de commande dans l'équation (3.10) ou l'équation (3.13) peut être généralisé plus loin comme :

$$u_{wb} = \begin{cases} N & d_w > N \\ d_w & -N < d_w < N \\ N & d_w < -N \end{cases} \quad (3.14)$$

La stabilité du système en circuit fermé en même temps n'est pas automatiquement garantie. En utilisant le mouvement régissant d'équation et en omettant le u_{ext} de perturbation externe à titre d'essai, nous obtenons le dérivé de temps du fonction de Lyapunov comme suit :

$$\dot{V} = w^T K^T (-w \times H - u_{wb} + Kq) \quad (3.15)$$

Pour l'analyse de stabilité par le contrôleur dans l'équation (3.10), trois cas différents sont considérés.

Cas I: $\delta_w > N$

Dans ce cas la commande est saturée à N, de sorte qu l'équation (3.15) peut être récrit comme :

$$\dot{V} = w^T K^{-1} (-w \times H - N + Kq) \quad (3.16)$$

Avec :

$$d_w = -w \times H + Dw + Kq > N \quad (3.17)$$

Avec: $\omega^T \omega x H = 0$

Donc :

$$\dot{V} = a w^T (-N + Kq) \quad (3.18)$$

Il y a deux possibilités pour le signe de \dot{V} . Le premier est $\omega > 0$.

$$\dot{V} > -w^T K^{-1} D w \quad (3.19)$$

et l'autre pour $\omega < 0$, Alors :

$$\dot{V} < -w^T K^{-1} D w \quad (3.20)$$

En d'autres termes, dans l'état d'inégalité par l'équation (3.19), \dot{V} pourrait avoir le signe positif ou négatif. Cependant, pendant que l'entrée maximum positive de commande continue à agir dessus, la vitesse angulaire tend à augmenter dans la direction négative plus loin avec le quaternion décroissant. Si une telle situation continue, puis l'équation de contrainte (équation (3.18)) ne peut pas être plus long valide. Ainsi la commutation dans le signe dérivé de fonction de Lyapunov est prévue. De même, si la vitesse angulaire initiale est positive, Puisque la vitesse angulaire continue à diminuer alors le changement dans la fonction de Lyapunov est également prévue quand ω croise la ligne zéro.

Cas II : $-N < \delta_w < N$

Dans ce cas le signal de commande est dans la limite de saturation de déclencheur. La fonction de Lyapunov diminue, donc :

$$\dot{V} = -w^T K^{-1} D w < 0 \quad (3.21)$$

Cas III : $\delta_w < -N$:

Similaire au dérivé de temps de la fonction de Lyapunov dans l'équation (3.17), il suit cela :

$$\dot{V} = w^T K^{-1} (-w \times H + N + Kq) \quad (3.22)$$

Maintenant, la condition d'inégalité:

$$d_w = -w \times H + Dw + Kq < -N \quad (3.23)$$

Le dérivé de temps de la fonction de Lyapunov devient :

$$\dot{V} = a w^T (N + Kq) \quad (3.24)$$

Pour les équations (3.22) et (3.23), il pourrait également y avoir deux cas différents dépendant du signe d' ω , En d'autres termes :

$$\dot{V} > -w^T K^{-1} D w \text{ si } \omega > 0 \text{ et } \dot{V} < -w^T K^{-1} D w \text{ si } \omega < 0 \quad (3.25)$$

Si le dérivé de temps de la fonction de Lyapunov peut montrer le signe positif ou négatif, la réponse globale est également un mouvement se délabrant dans le même contexte avec Cas I.

Par l'analyse faite ci-dessus, le contrôleur avec la limite de saturation peut encore être prétendu satisfaire la condition de stabilité dans un sens rigoureux même si il n'est pas absolument stable dans le sens normal de stabilité. En d'autres termes, l'état de stabilité de Lyapunov est violé seulement pour une quantité limitée de période. L'argument rigoureux de stabilité a été validé par l'étude de simulation à présenter dans le suivant. En fait, l'élément non linéaire de saturation ne détruit pas la stabilité globale du système [20], l'argument rigoureux semblable a put être fait avec le plein contrôleur de PID dans l'équation (3.13) Mais puisque la pleine stabilité n'est pas garantie avec la commande de PID pour les ensembles arbitraires de gains de rétroaction.

Le moment de masse de l'inertie du satellite est :

$$J = \begin{bmatrix} 1.308 & 0 & 0 \\ 0 & 2.210 & 0 \\ 0 & 0 & 2.52 \end{bmatrix} \text{ (Kg m}^2\text{)}.$$

Dans cette étude, l'entrée constante de perturbation est assumée afin d'examiner l'exécution de contrôleur de PID. L'importance de couple de perturbation est choisie pour être 0.113 (N m), beaucoup plus haut que le couple normal de perturbation, qui rend l'action intégrale de commande efficace. Un système de commande à quatre roues de travers de réaction est assumé. La matrice de cosinus de direction entre les roues et le corps de satellite est donnée par :

$$C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

L'importance de limites de saturation de commande (N) sont fixées au 1.13 (N m) pour chaque axe. On assume que les éléments initiaux de quaternion sont le [0.5324 ,0.2362, 0.4073, 0.7035] qui correspondent aux angles d'attitude d'Euler (lacet, roules, tangage) de 60° , 30° et 50° . Tandis que les quaternions de cible sont placés au [q_{1c} ,q_{2c} ; q_{3c} q_{4c}] =[0, 0, 0, 1] de sorte que les quaternions courants soient identiques aux quaternions de cible.

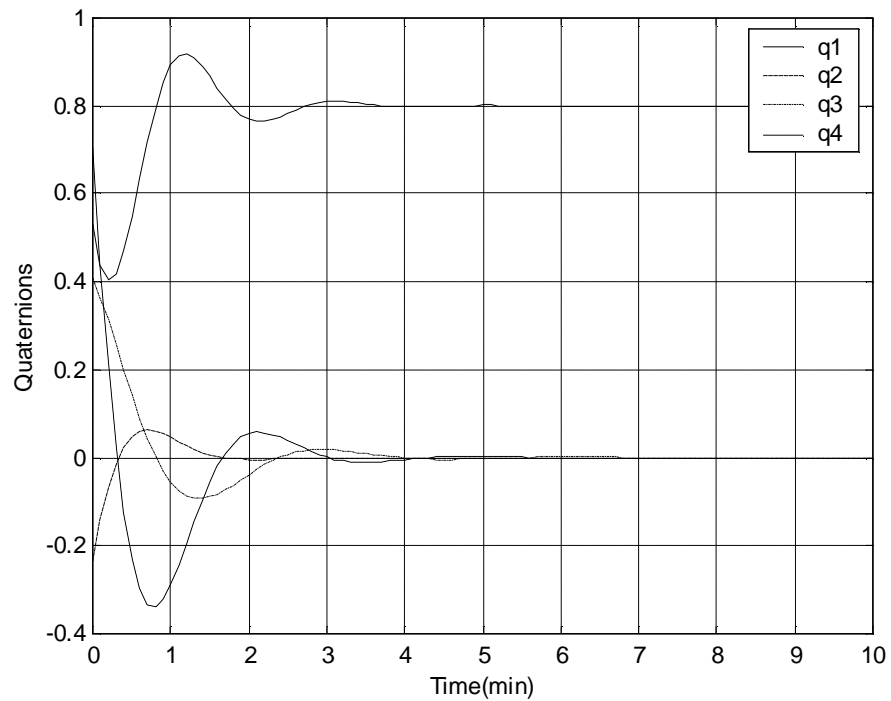


Figure 3.3. Résultats de simulation des composants de quaternion pour le contrôleur régulier PID (plus intégrale plus dérivée).

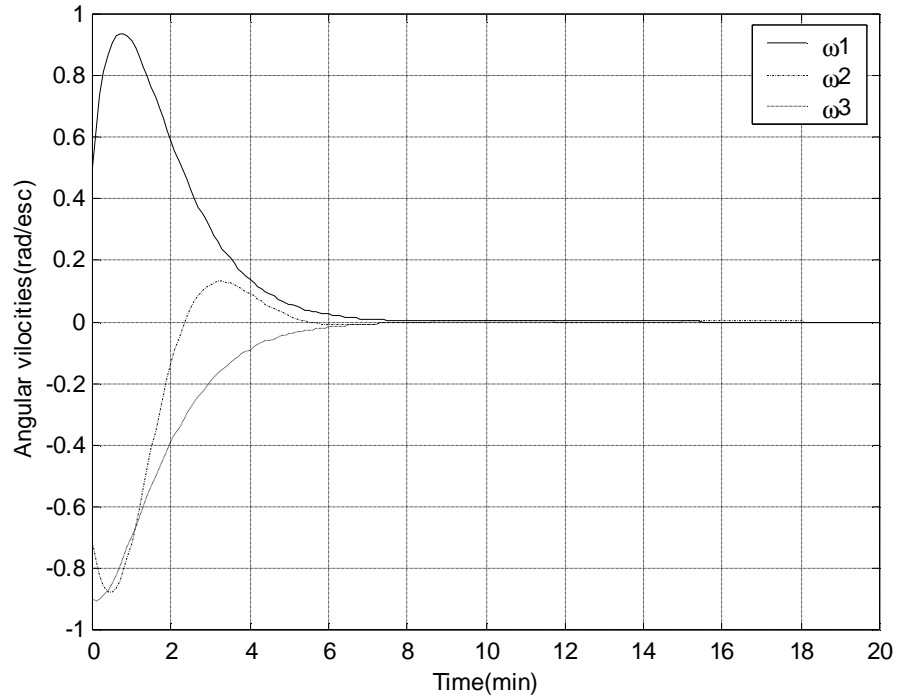


Figure 3.4. Résultats de simulation des composants de vitesse angulaire de satellite pour le contrôleur régulier PID (plus intégrale plus dérivée).

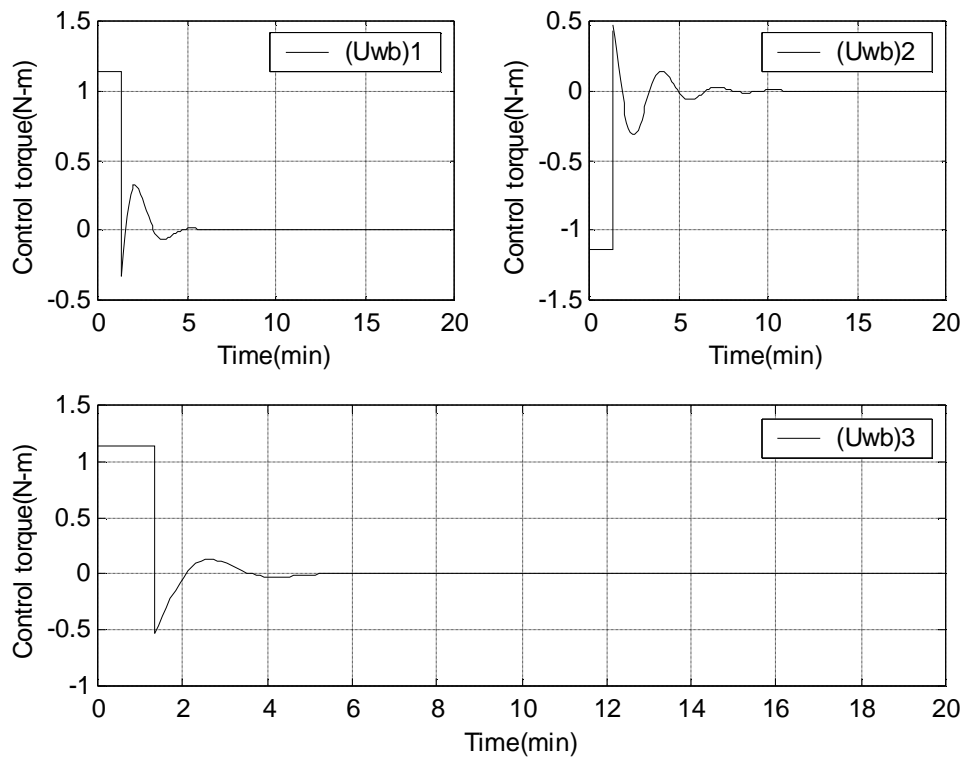


Figure 3.5. Résultats de simulation des couples de commande de satellite pour le contrôleur régulier PID (plus intégrale plus dérivée).

3. Commande d'Anti-remontage

Une technique prometteuse pour surmonter le problème de saturation dans la commande intégrale est AWC (anti-windup control). L'idée principale d'AWC est de résoudre partiellement l'inconvénient de la commande intégrale. Évidemment AWC dans cette étude n'est pas une nouvelle idée. D'abord, nous supposons que chaque roue de réaction du satellite est sujette à la saturation. Alors la saturation est également représentée par la commande entrée au sujet des châssis de satellite. Mathématiquement, la saturation est représentée par les équations (3.3) et (3.14). Basé sur l'idée des travaux précédents sur AWC [16,17], le contrôleur PID modifié (ou AWC) est:

$$\dot{d}_w = -g_w \times H + D w + K q_e + K_l \int q_e dt + K_a \int (u_{wb} - d_w) dt \quad (3.26)$$

Pour les grandes manoeuvres gyroscopiques d'angle. La dernière limite d'équation ci-dessus avec un gain (K_a) de rétroaction correspond à l'AWC. Quand le signal d'entrée (δ_w) au bloc non linéaire de saturation dépasse la limite de saturation, la limite d'anti-remontage agit de réduire le niveau de signal au-dessous de la limite de saturation. Ainsi la période de l'état saturé est également réduite pendant que le $\delta_w - u_{wb}$ possède un signe vis-à-vis celui du δ_w . La région potentiellement instable comme (Cas I) de la section précédente est principalement perfectionnement également réduit d'exécution. Dans la condition normale pour laquelle le signal de commande (δ_w) est dans la limite de saturation, le contrôleur modifié dans l'équation (3.26) commute de nouveau à la loi originale de commande de PID dans l'équation (3.13).

La stabilité et l'exécution du système global comprenant le bloc d'AWC dépendent évidemment de gain de rétroaction K_a , Intuitivement parlant, à mesure que K_a augmente, l'action d'anti-remontage devient plus active. Selon l'étude de simulation, l'exécution d'AWC s'est avérée être plutôt robuste en ce qui concerne la variation de K_a . La représentation graphique du contrôleur proposé avec l'élément d'AWC est présentée dans la figure 3.6.

Afin d'ajouter l'interprétation additionnelle pour l'AWC de la perspective différente, nous prenons un exemple simple de manoeuvre d'axe. L'analyse a dérivé du cas simple d'axe peut apporter de la perspicacité sur le cas gyroscopique entièrement non linéaire. Le dynamique de rotation d'axe simple est décrit comme :

$$J \ddot{\theta} = u \quad (3.27)$$

où J est le moment de l'inertie de l'axe et u est le couple de commande.

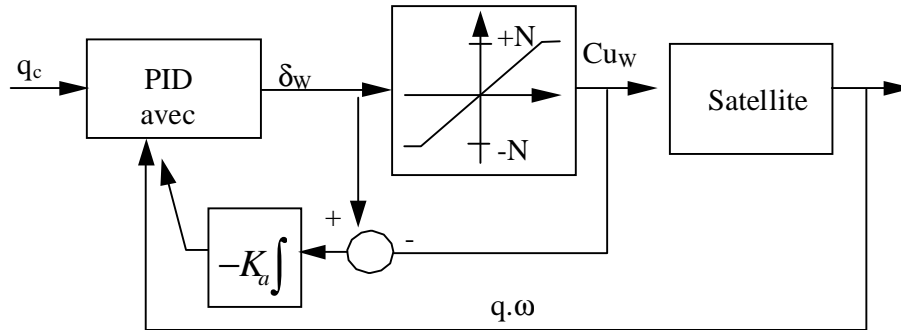


Figure 3.6. Contrôleur de PID augmenté avec AWC.

La loi de commande d'AWC pour ce cas spécial devient :

$$d = -k_p f_e - k_d \dot{f}_e - k_I \int f_e dt - k_a \int (d - u) dt \quad (3.28)$$

où $f_e = f - f_{ref}$ est l'erreur d'attitude.

Si nous assumons le signal de commande lui-même est à la saturation de sorte qu'AWC devienne opérationnel, puis l'équation (3.28) peut être écrit dans la transformée de Laplace comme :

$$d(s) = \frac{s}{s + k_a} [(k_p + k_d s + k_I / s) f_e(s) \pm k_a N / s] \quad (3.29)$$

Où $\delta(s)$ et $\phi(s)$ transformée de Laplace pour les variables $\delta(t)$ et $\phi(t)$, tandis que les $\pm N/s$ représente le transformée de Laplace de l'intégrale de commande entrée saturée. Maintenant l'équation ci-dessus implique AWC comme compensateur de liaison de phase en combinaison avec le compensateur original de PID :

$$\frac{s}{s + k_a} \quad (3.30)$$

Les résultats de simulation montrent évidemment l'amélioration visuelle sur les réponses transitoires comparées à ceux de figure 3.3. Évidemment, il a pu y avoir différents paramètres de commande de PID produisant une meilleure réponse passagère en général.

Les résultats de simulation montrent une meilleure exécution avec moins de commande comparée au contrôleur régulier de PID. Ceci l'avantage principal de l'AWC proposé. La région de saturation de déclencheur est réduite par AWC qui mène à améliorer la réponse passagère en utilisant moins de commande. Le prix d'AWC est une structure compliquée de contrôleur du contrôleur original de PID. Cependant, l'exécution pratique d'AWC ne semble pas être si difficile. La période de temps de la saturation de déclencheur est également réduite en raison d'AWC. Les taux angulaires de corps montrent que beaucoup moins dépassent atteindre les états d'équilibre rapidement comme prévus. Les résultats de simulation démontrent donc le point premier du contrôleur proposé. Une autre approche simple mais attrayante pour éviter le problème de saturation est intégrateur intelligent qui est discuté dans la prochaine section.

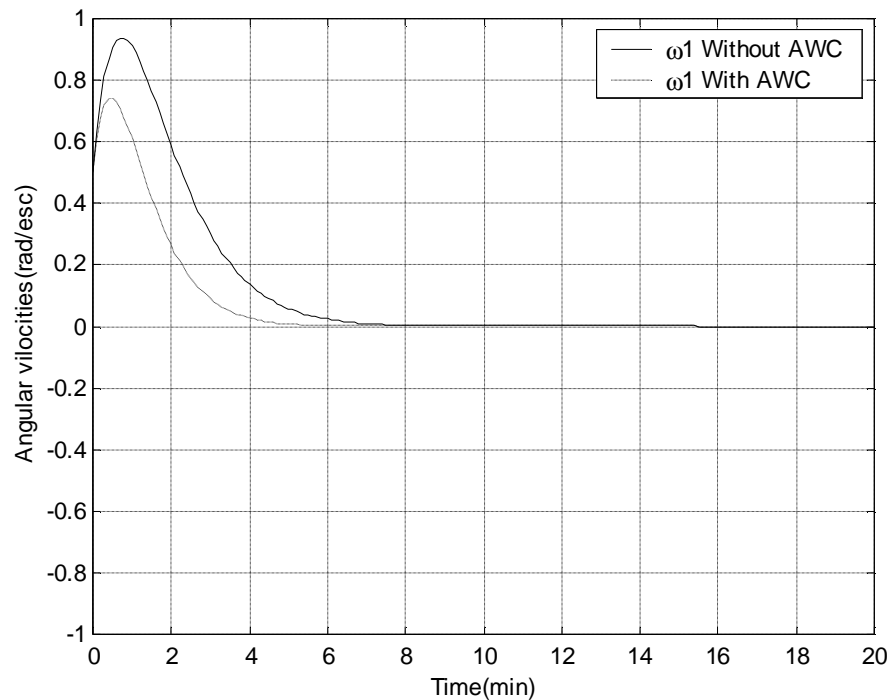


Figure 3.7. Résultats de simulation de vitesse angulaire w_1 de satellite pour le contrôleur AWC (anti-windup control).

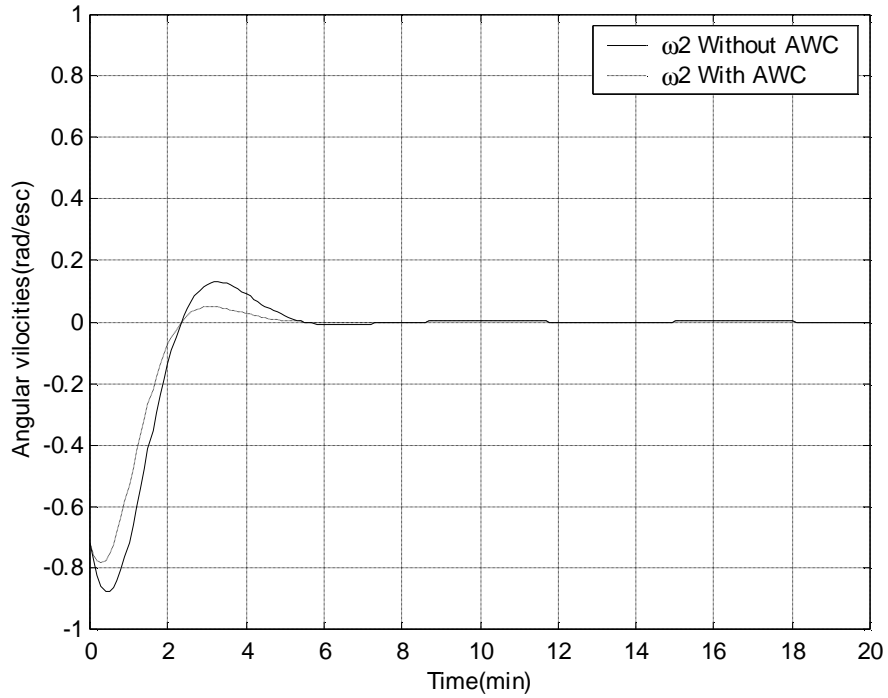


Figure 3.8. Résultats de simulation de vitesse angulaire w_2 de satellite pour le contrôleur AWC (anti-windup control).

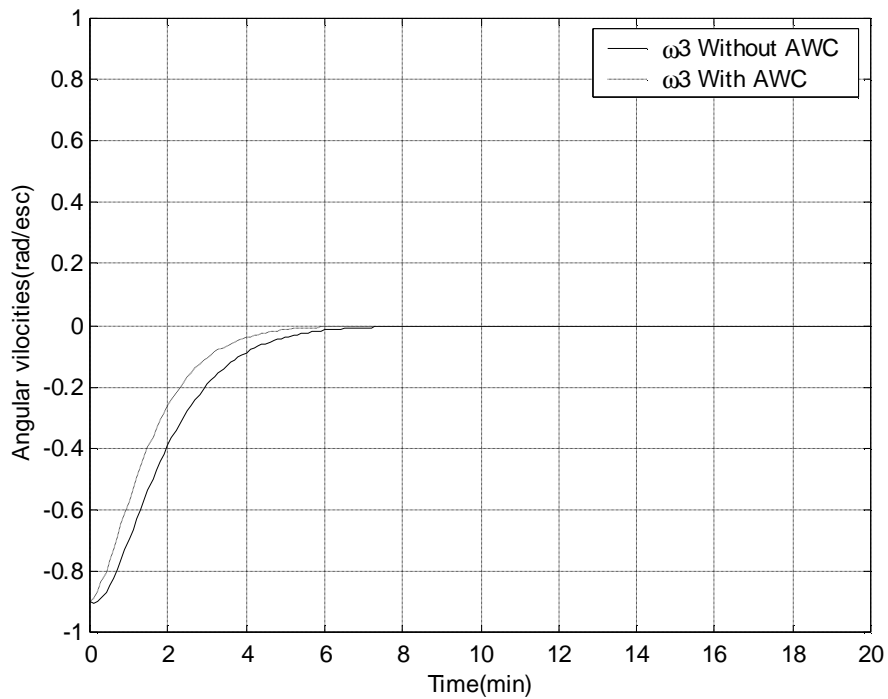


Figure 3.9. Résultats de simulation de vitesse angulaire w_3 de satellite pour le contrôleur AWC (anti-windup control).

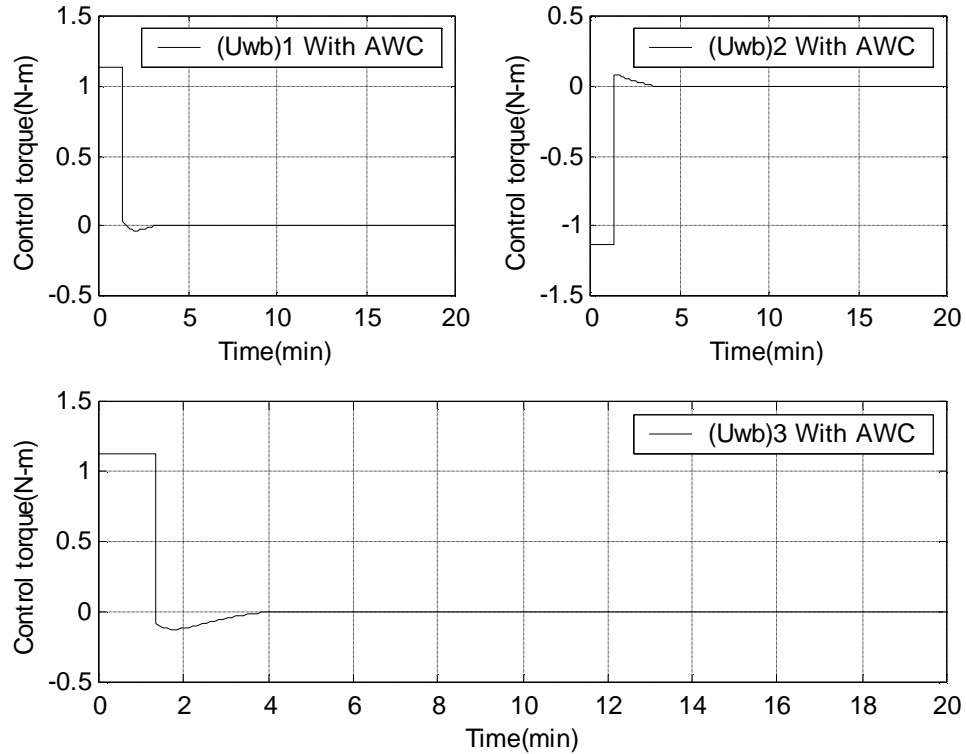


Figure 3.10. Résultats de simulation des couples de commande de satellite pour le contrôleur AWC (anti-windup control).

4. Intégrateur intelligent

L'intégrateur intelligent est également conçu pour réduire au minimum la grande initiale dépassent causé par commande intégrale. L'idée fondamentale est de présenter un bloc non linéaire qui limite le signal intégré d'erreur à une valeur prescrite et réduit le signal pendant que la période passagère expire. La représentation de schéma fonctionnel est présentée dans la figure 3.11 avec l'élément non linéaire inclus [18,19].

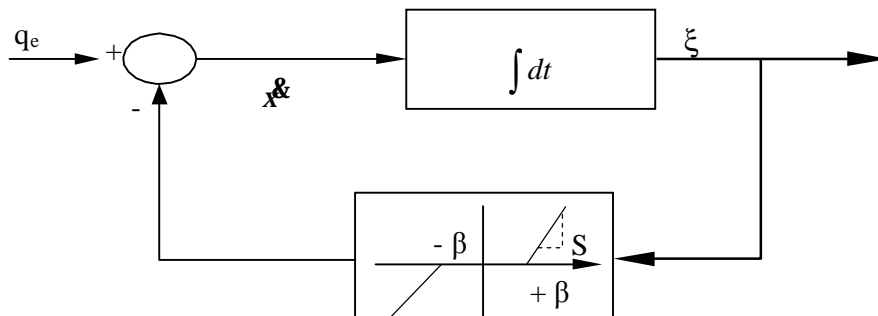


Figure 3.11. Schéma fonctionnel pour l'intégrateur intelligent.

Une nouvelle variable ξ , ce qui dénotent le signal intégré d'erreur, peut être exprimé comme :

$$\xi = \begin{cases} q_e & \text{si } |q_e| < b \\ q_e - S(x - b) & \text{si } |q_e| > b \end{cases} \quad (3.31)$$

Les paramètres de conception de l'intégrateur intelligent sont la zone (β) et la pente de l'élément non linéaire (S). La taille de β détermine l'excédent mort de zone qui l'intégrateur est identique à l'intégrateur régulier. Pendant qu'il peut montrer, l'importance de ξ est limitée à un certain niveau pour éviter le grand signal de commande intégral. Une fois que l'élément intégral dépasse la valeur- seuil, le non zéro de pente (S) agit de telle manière que le signal intégral d'erreur diminue. Le paramètre S détermine le taux auquel l'erreur intégrée diminue. Maintenant le contrôleur de PID est modifié pour remplacer la commande intégrale originale avec l'intégrateur intelligent [20]. Le contrôleur modifié peut être écrit comme :

$$d_w = -gw \times H + Dw + Kq_e + K_I x \quad (3.32)$$

Les paramètres de conception β et S ont été choisis par peu d'épreuves. La simulation a été conduite pour choisir β et S qui produisent des réponses passagères satisfaisantes. La zone morte β détermine l'excédent de région que l'intégrateur ramène à l'intégrateur régulier. Le β plus grand implique donc que l'intégrateur intelligent est moins en activité comparé à l'intégrateur régulier. Plus le paramètre S de pente mène à jeûner diminution de la limite intégrale d'erreur grande.

Les résultats de simulation, il peut montrer que l'intégrateur intelligent réduit efficacement le grand mouvement passager initial provoqué par la commande intégrale. Ainsi on a partiellement éliminé un des inconvénients principaux de la commande de PID. Les signaux de commande se comportent d'une manière semblable à AWC pendant qu'ils se comprennent. Évidemment, ensemble différents paramètres de conception (β, S) peut avoir comme conséquence différentes tendances dans des signaux de commande.

AWC et intégrateur intelligent s'avèrent être efficaces en réduisant la réponse passagère significative due à la commande intégrale en présence de la perturbation constante. L'AWC manipule directement l'importance du signal de commande essayant de tenir le signal de commande dans la limite de saturation tandis que l'intégrateur intelligent

ajuste l'opérateur de commande lui-même. Maintenant il serait normal de combiner deux contrôleurs ensemble. L'intégrateur intelligent travaille à la limite intégrale d'erreur, et la commande de commande globale peut niveau immobile de saturation d'extension. Par conséquent, la commande de commande devrait être surveillée toute heure autour du niveau de saturation. L'intégrateur intelligent peut ou peut ne pas être en activité sous l'action de commande de anti-remontage. Le signal de commande excessif est commandé par AWC et intégrateur intelligent en association. Ainsi le nouveau contrôleur peut être écrit :

$$d_w = -gw \times H + Dw + Kq_e + K_r x + k_a \int (u_{wb} - d_w) dt \quad (3.33)$$

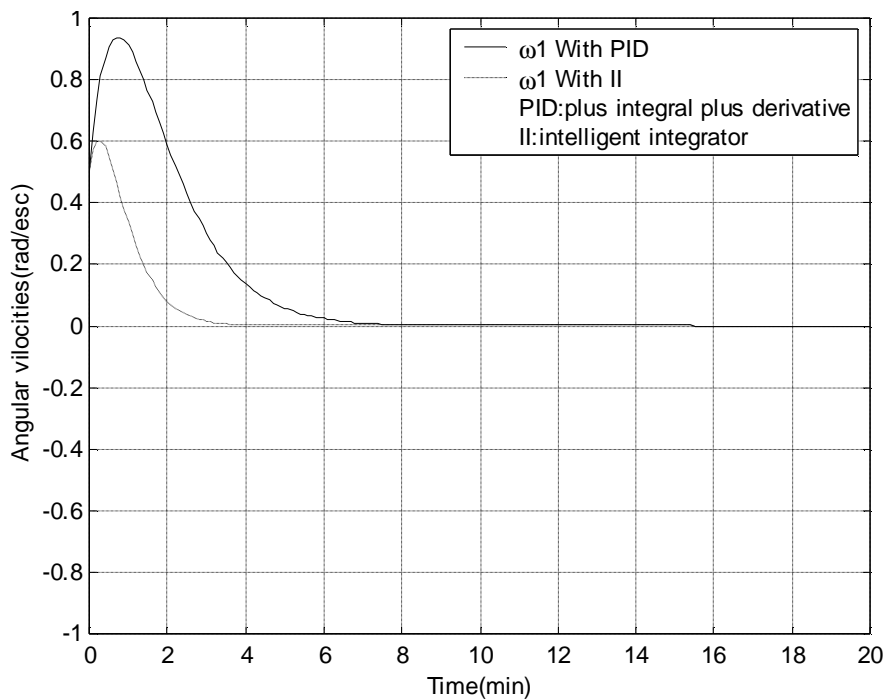


Figure 3.12. Résultats de simulation de vitesse angulaire w_1 de satellite pour le contrôleur II (Intégrateur Intelligent).

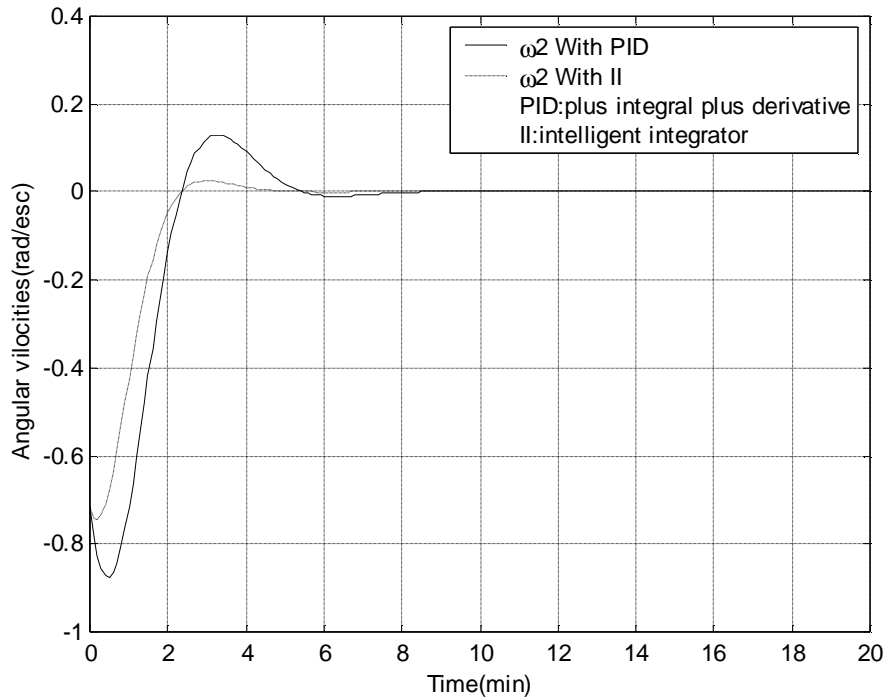


Figure 3.13. Résultats de simulation de vitesse angulaire w_2 de satellite pour le contrôleur II (Intégrateur Intelligent).

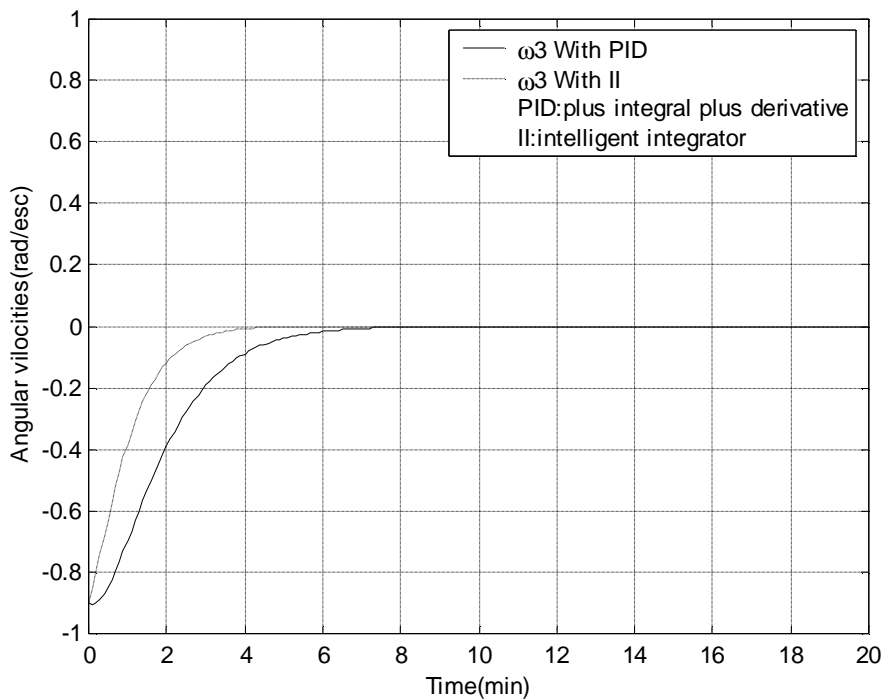


Figure 3.14. Résultats de simulation de vitesse angulaire w_3 de satellite pour le contrôleur II (Intégrateur Intelligent).

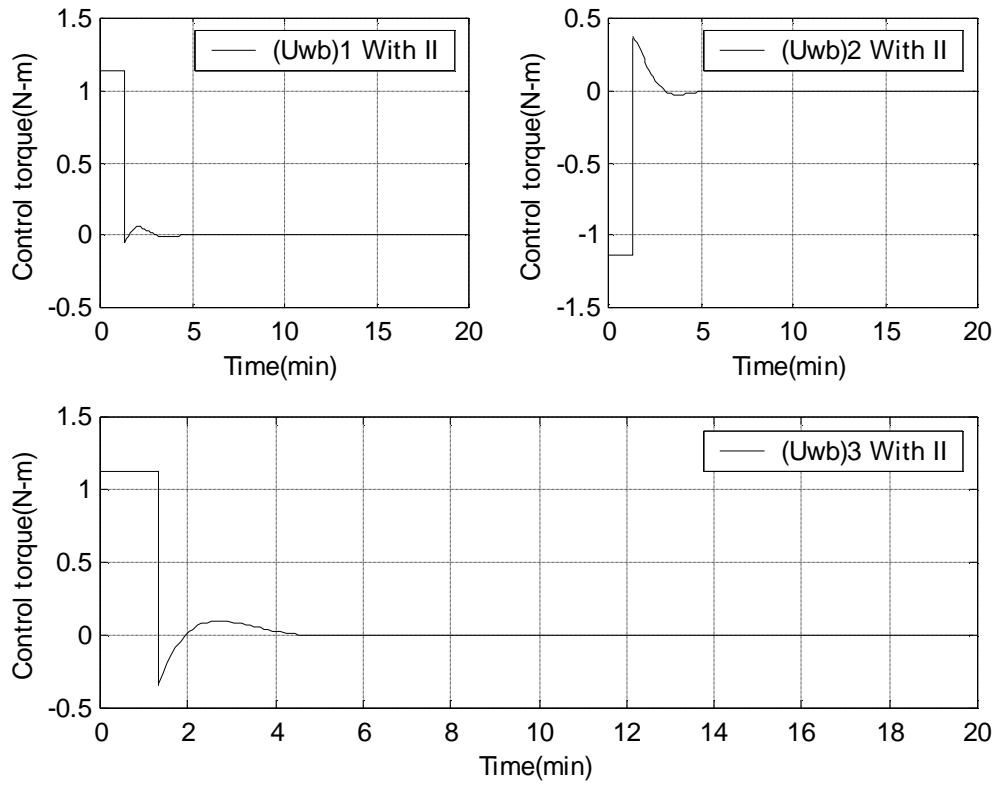


Figure 3.15. Résultats de simulation des couples de commande de satellite pour le contrôleur II (Intégrateur Intelligent).

5. Conclusion

Le contrôleur de rétroaction pour des manoeuvres gyroscopiques d'attitude de satellite de grand angle a été modifié par commande simple mais techniquement utile de inclure de anti-remontage et intégrateur intelligent. L'étude de simulation a vérifié des avantages pratiques de l'idée proposée. Les réponses transitoires excessives se sont améliorées jusqu'à un degré significatif par commande d'anti-remontage et intégrateur intelligent. La saturation est une question technique cruciale pour les déclencheurs à roues de réaction particulièrement pour de grandes manoeuvres non linéaires d'angle de satellite. Par conséquent, les résultats de ce chapitre fourniront les solutions pratiques aux contrôleurs conventionnels de PID étant appliqués aux beaucoup de satellite.

1. Introduction

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un processus peut se résumer comme suit.

Un processus étant donné et défini par son modèle, trouver parmi les commandes admissibles celle qui permet à la fois:

- de vérifier des conditions initiales et finales données.
- De satisfaire diverses contraintes imposées.
- D'optimiser un critère choisi.

Cette définition appelle quelques commentaires :

- toute recherche de commande, et a fortiori de commande optimale, nécessite la manipulation d'expressions mathématiques et, en particulier de celles caractérisant l'évolution du processus, c'est-à-dire de son modèle. Le choix du modèle s'avère donc primordial. Trop simple, il ne caractérisera pas suffisamment bien le processus, et inutilement sophistiqué, il conduira à des calculs très complexes.

- La commande est en général soumise à diverses contraintes liées à sa réalisation (accélération limitée, vitesse de montée en puissance bornée, débit borné, discontinuités exclues, réservoir de capacité limitée...) elle-même liée au matériel disponible pour la mise en œuvre.

- Les variables caractéristiques du processus peuvent être soumises à diverses contraintes liées aux saturations, à la sécurité, à la construction, au confort, au coût...

- Les états initiaux et finaux du processus peuvent également être soumis à diverses contraintes liées aux conditions de départ et à l'objectif à atteindre. Par exemple un hélicoptère décollant d'un bateau pour atterrir sur un autre, tous deux en déplacement.

- Le critère à optimiser doit correspondre à l'expression d'un choix étudié avec soin, il peut être lié aux valeurs de l'état et de la commande pris à des instants donnés, lié à une intégrale d'une fonction de ces variables sur un intervalle de temps fixé ou non, ou les deux à la fois.

- L'existence d'une commande satisfaisant un objectif donné suppose que le processus est commandable, hypothèse qui sera faite implicitement de façon systématique.

2. Principaux critères [21]

L'intérêt de la commande optimale découle de la nature même de sa définition : optimiser un critère de notre choix, tout en satisfaisant des conditions de fonctionnement données et des contraintes imposées.

Les principaux critères utilisés sont le temps minimum, les critères quadratiques et les critères de type consommation.

- Les utilisations principales du *critère temps minimum* sont les problèmes de sécurité et la minimisation des coûts liés à la durée.

Les applications principales se rencontrent dans les domaines de la production continue, de l'espace, de la défense et de la médecine.

- La mise en œuvre de *critères quadratiques* intervient dans les problèmes de minimisation de l'énergie mise en œuvre, de stabilisation et de suivi de trajectoire ; elle concerne essentiellement les problèmes de régulation et d'asservissement en général, ainsi que les processus mettant en œuvre des énergies importantes. L'intérêt apparaît à la fois au niveau de la qualité, de la sécurité et des coûts de mise en œuvre.

- L'utilisation de *critères de type consommation* concerne surtout les processus de production continue, dont on veut diminuer les coûts de fonctionnement, et les processus autonomes à ressources limitées dont on désire accroître la durée de fonctionnement.

- Quel que soit le critère retenu, la méthode envisagée permet une détermination rigoureuse et systématique de la commande dans une approche boucle fermée ; elle est, de plus, compatible avec d'autres techniques de commande auxquelles elle peut être associée, comme la commande adaptative, la commande prédictive, la commande en mode glissant...

3. Formalisation du problème

3.1. Mise en équations [21]

Le système dynamique, ou processus, étudié est caractérisé par trois ensembles de variables:

- les *variables de sortie*, en général directement accessibles et regroupées dans un vecteur Y de dimension m .
- Les *variables de commande*, regroupées dans un vecteur u de dimension \mathbf{I} et dont le choix permettent d'agir sur l'évolution du processus.

• Les *variables internes* caractérisant l'état du processus à un instant donné, regroupées dans un *vecteur état* x de dimension n . Nous notons l'instant courant.

Dans une modélisation de l'évolution du processus, ces diverses variables sont liées par une équation d'état le plus souvent explicitée sous la forme :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (4.1)$$

$$y = h(x, u, t) \quad (4.2)$$

3.2. Choix de critère d'optimalité [21,22]

Le critère d'optimalité peut prendre en compte les valeurs initiale et finale de l'état du processus, comme minimiser l'écart final par rapport à une consigne donnée, ou tenir compte de l'ensemble des valeurs de l'état ou de la commande à chaque instant. Ce dernier cas apparaît, par exemple, dans un problème de minimisation de l'écart par rapport à une trajectoire donnée ou de minimisation de l'énergie totale consommée. La forme la plus générale du *critère à optimiser* correspond à l'expression:

$$J = g(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} r(x, u, t) dt \quad (4.3)$$

Le premier élément du membre de droite, appelé *partie terminale* privilégie dans le critère la prise en compte des états initial et final.

Nous supposons, dans la suite, l'optimisation décrite sous forme d'une minimisation (maximiser une quantité revient à minimiser l'opposé).

• Le choix du critère est très important et une commande qui minimise un critère donné n'est pas nécessairement intéressante si le critère est mal choisi ou ne tient pas compte des contraintes physiques imposées au système.

Par exemple, pour un système linéaire sans contrainte, le choix d'un critère correspondant à une réaction en temps minimum conduira par le calcul à une réponse instantanée imposant un transfert d'énergie fini en un temps nul, c'est-à-dire une puissance infinie, a priori irréalisable. Dans ce cas, le problème doit être modifié soit en changeant le critère, soit en ajoutant des contraintes ou des limitations sur l'état ou la commande.

D'un point de vue pratique, l'existence de la partie terminale $g(x_0, t_0, x_f, t_f)$ conduit à des conditions, dites « conditions de transversalité », de prise en compte en général complexe. C'est pourquoi il est préférable, lorsque cela ne nuit pas à la qualité du résultat recherché, de choisir $g = 0$.

4. Détermination de la commande optimale [21,23]

4.1. Equations canoniques de Hamilton

Afin de simplifier la présentation des résultats, nous allons utiliser une quantité, appelée Hamiltonien du système, définie par la relation :

$$H(x, u, I, t) \stackrel{\Delta}{=} -r(x, u, t) + I^T f(x, u, t) \quad (4.4)$$

Mettant en œuvre à la fois le scalaire r utilisé dans le critère à minimiser (4.3) et le vecteur f caractérisant l'état du système (4.1).

Le vecteur $I(t)$ appelé vecteur adjoint constitue une variable intermédiaire.

Les équations canoniques de Hamilton s'écrivent :

$$\dot{I} = \frac{\partial H}{\partial I} \quad (4.5)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.6)$$

Cette dernière relation permettant de définir le vecteur adjoint I On peut alors écrire le principe du maximum sous la forme simplifiée.

La commande optimale est celle qui maximise l'Hamiltonien, les contraintes et les conditions terminales étant satisfaites.

5. Exemple d'application pratique importante

5.1. Principaux critères d'optimisation

Il existe trois familles de problèmes fondamentaux en commande optimale.

5.1.1. La commande en temps minimum

C'est le transfert d'un système d'un état initial $x(t_0) = x_0$ arbitraire à un état final spécifique en un minimum de temps.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (4.7)$$

Le critère s'écrit (Suivant les notations de la relation (4.3)) :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt, \quad r = 1, \quad g = 0$$

5.1.2. La commande à consommation minimale

C'est le transfert d'un système d'un état initial $x(t_0) = x_0$ à un état final spécifique en consommant le minimum de ses ressources.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u| dt \quad (4.8)$$

5.1.3. La commande à énergie minimale

C'est le transfert d'un système d'un état initial $x(t_0) = x_0$ à un état final spécifique en consommant le minimum d'énergie. Qui correspond à l'intégrale d'une puissance :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt \quad (4.9)$$

6. Conventions et définition

6.1. Configuration générale de satellite [24]

Cette configuration est définie sur la figure 4.1 On suppose que le satellite est un corps rigide possédant une symétrie de révolution autour de son axe longitudinal de vecteur unitaire \hat{Z} . On désigne par \hat{X} et \hat{Y} les vecteurs unitaires de deux axes principaux d'inertie transverse et par I_x , I_y et I_z les moments d'inertie autour des axes \hat{X} , \hat{Y} et \hat{Z} respectivement, sachant que l'on a :

$$I_x = I_y = I_t \quad (\text{Inertie transverse}) \quad (4.10)$$

Et que l'on suppose :

$$I_z / I_t > 1 \quad (4.11)$$

Cette dernière inégalité garantissant la "stabilité naturelle" du satellite dans son mouvement de rotation autour de l'axes \hat{Z} , que l'on appelle également "axe de Spin".

Pour commander le mouvement de rotation autour de l'axe \hat{Z} ainsi que l'orientation de cet axe dans l'espace, le satellite dispose d'un système de contrôle d'attitude comprenant essentiellement :

- Des senseurs solaires et/ou terrestres pour la détection et la mesure de l'attitude.
- Des bobines électromagnétiques pour la génération de couples de commande par interaction avec le champ magnétique terrestre.

A titre indicatif, on a représenté sur la Figure 4.1, une bobine à air d'axe aligné avec \hat{Z} et deux bobines à noyau disposées suivant les axes d'inertie transverse \hat{X} et \hat{Y} .

- Eventuellement un amortisseur de nutation pour maintenir l'axe longitudinal \hat{Z} (axe de spin) au voisinage du vecteur moment cinétique du satellite.
- Par ailleurs, nous supposons que le satellite ne dispose pas de magnétomètre pour la mesure du champ magnétique terrestre à bord et qu'il ne comporte pas d'appendices flexibles.

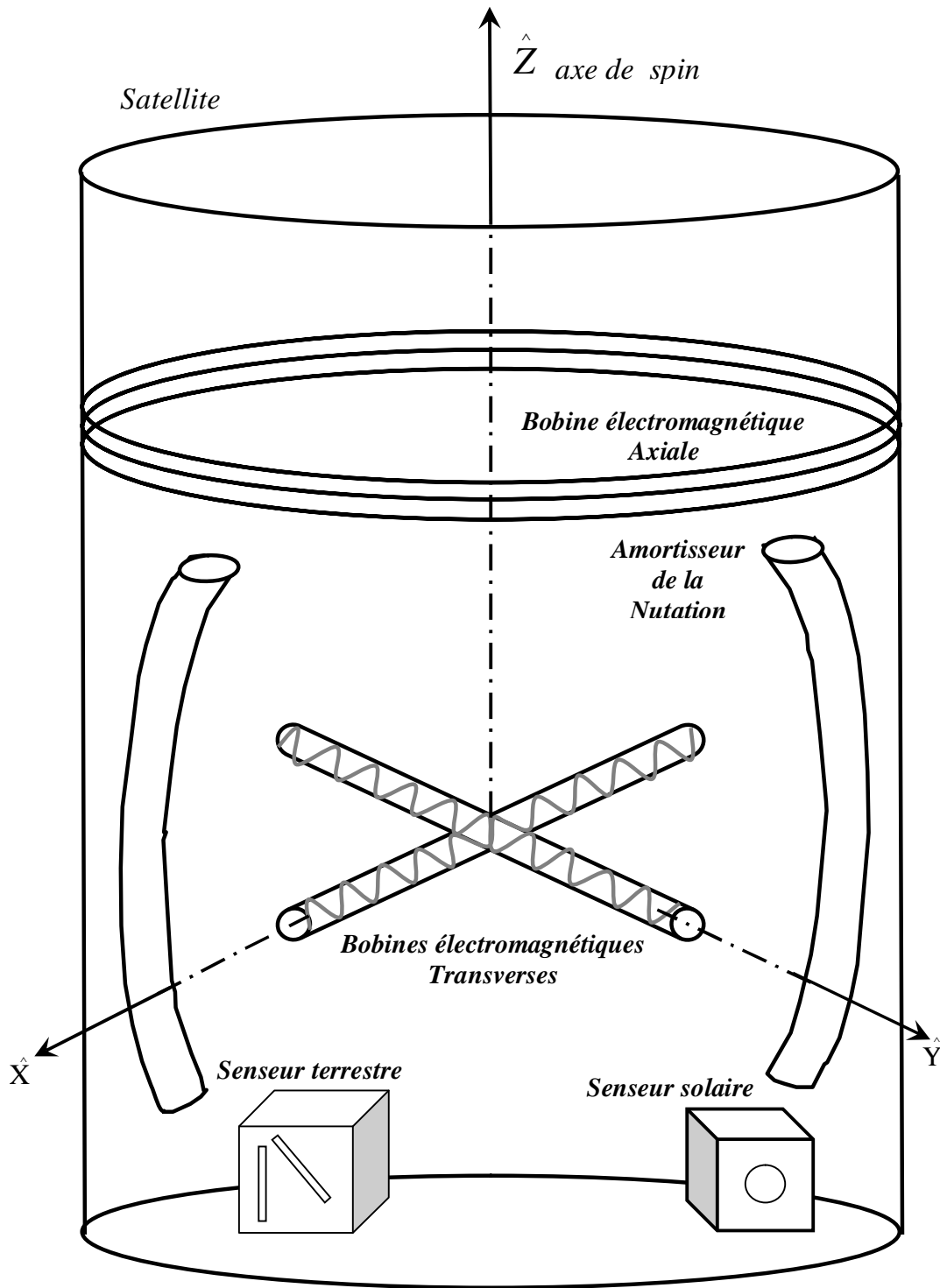


Figure 4.1. Configuration générale du satellite

6.2. Définition de l'attitude

6.2.1. Repères de référence [25,26]

Les repères utilisés sont les suivants :

- Le repère inertiel géocentrique, dont les axes est :

\hat{X}_{50} : Vecteur unitaire situé dans le plan équatorial terrestre et dirigé suivant la direction du point vernal 1950

\hat{Z}_{50} : Vecteur unitaire dirigé vers le Nord géographique,

\hat{Y}_{50} : défini par le produit vectoriel $\hat{Z}_{50} \times \hat{X}_{50}$

- Le repère satellite dont les axes \hat{X} , \hat{Y} et \hat{Z} sont des axes principaux du véhicule et tel que l'axe \hat{Z} correspond à la direction à pointer,

- Le repère intermédiaire ou "repère despinné" qui est lié au satellite et dont les axes \hat{X}_d , \hat{Y}_d ,

\hat{Z}_d se déduisent des axes-satellites \hat{X} , \hat{Y} , \hat{Z} et par une rotation d'angle $-j$ autour de \hat{Z} .

L'angle j est la "rotation propre" du satellite autour de \hat{Z} et sa dérivée

$$w = \frac{dj}{dt} \quad (4.12)$$

Est appelé "vitesse de spin", et l'axe $\hat{Z}_d = \hat{Z}$ "axe de spin".

6.2.2. Angles de définition de l'attitude

Dans le cas présent, l'attitude sera définie par la position de l'axe de spin \hat{Z}_d dans le repère inertiel $\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i$ déduit de $\hat{X}_{50}, \hat{Y}_{50}, \hat{Z}_{50}$ par une translation suivant le rayon vecteur centre Terre-satellite.

Dans le cas général, cette position peut être déterminée par deux angles (figure 4.2) :

a : Ascension droite par rapport à $\hat{X}_i = \hat{X}_{50}$.

d : Déclinaison sur le plan équatorial $(\hat{X}_i, \hat{Y}_i) = (\hat{X}_{50}, \hat{Y}_{50})$.

Notons que dans le cas particulier où \hat{Z}_d est aligné avec \hat{Z}_{50} (dans un sens ou dans l'autre), l'ascension droite est indéterminée et la position de l'axe \hat{Z}_d sera alors définie soit par $d = +90$ soit par $d = -90$.

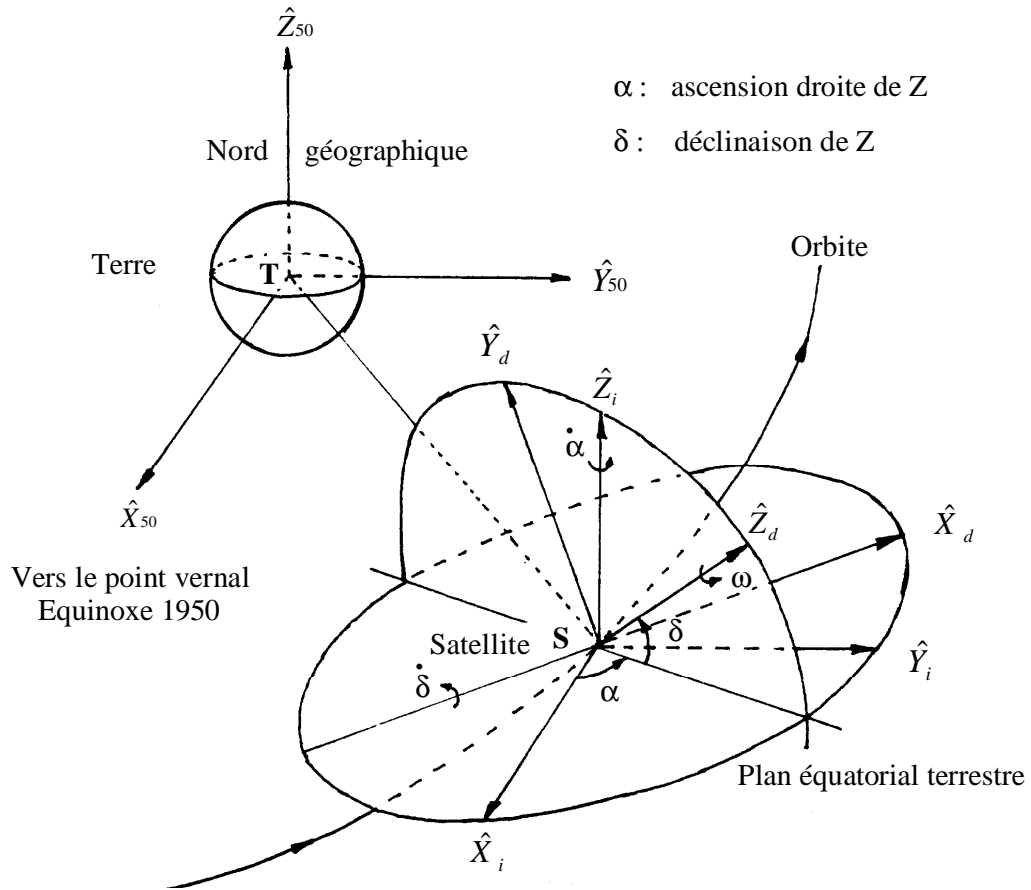


Figure 4.2. Repères et angles de définition d'attitude.

6.3. Equations du mouvement

6.3.1. Equations cinématiques [26]

Elles permettent de relier le vecteur rotation absolue $\overset{\mathbf{r}}{W}_S$ du satellite aux angles d'attitude (a, d) et à la rotation propre j . Si l'on désigne par w_{xd} , w_{yd} et w_{zd} les composantes du vecteur $\overset{\mathbf{r}}{W}_S$ dans le trièdre despinné $\hat{X}_d \hat{Y}_d \hat{Z}_d$ on obtient les équations suivantes:

$$w_{xd} = -\dot{d} \quad (4.13)$$

$$w_{yd} = \dot{a} \cos d \quad (4.14)$$

$$w_{zd} = \dot{a} \sin d + \dot{j} \quad (4.15)$$

6.3.2. Equations dynamiques [26]

Ces équations permettent de calculer les composantes du vecteur rotation absolue en fonction de l'ensemble des couples extérieurs appliqués au satellite, en vertu du théorème du moment cinétique.

$$\frac{\overset{\mathbf{r}}{dH}}{dt} = \overset{\mathbf{r}}{\Gamma} \quad (4.16)$$

Où :

$\overset{\mathbf{r}}{H}$: représente le moment cinétique du satellite

$\overset{\mathbf{r}}{\Gamma}$: résultante des couples extérieurs appliqués .

$\frac{\overset{\mathbf{r}}{dH}}{dt}$: désigne la dérivée absolue du vecteur H .

$$\text{Sachant que l'on a : } \overset{\mathbf{r}}{H} = I \overset{\mathbf{r}}{W}_S \quad (4.17)$$

Où I est le tenseur d'inertie du satellite :

$$I = \begin{bmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Si l'on se place dans le repère despinné $\hat{X}_d \hat{Y}_d \hat{Z}_d$ la dérivée absolue du vecteur $\dot{\mathbf{H}}$ s'écrit:

$$\frac{d\dot{\mathbf{H}}}{dt} / R_i = \dot{\mathbf{H}} / R_d + \mathbf{w}_d \times \mathbf{r} \quad (4.19)$$

Avec

$$\dot{\mathbf{H}} = I_t w_{xd} \hat{X}_d + I_t w_{yd} \hat{Y}_d + I_Z w_{zd} \hat{Z}_d \quad (4.20)$$

$$\mathbf{w}_s = w_{xd} X_d + w_{yd} Y_d + w_{zd} Z_d \quad (4.21)$$

$$\mathbf{r} \mathbf{w}_s = \mathcal{E} Z_i - \mathcal{D} X_d + \mathcal{J} Z_d \quad (4.22)$$

$$\mathbf{r} \mathbf{w}_d = \mathbf{r} \mathbf{w}_s - \mathcal{J} \hat{Z}_d = \mathcal{E} Z_i - \mathcal{D} X_d \quad (4.23)$$

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{H}} = \left(\frac{d\dot{\mathbf{H}}}{dt} \right) / R_d \quad (4.24)$$

Les équations dynamiques s'écrivent donc sous la forme :

$$I_t \dot{w}_{xd} + (I_Z - I_t) w_{yd} w_{zd} + I_t w_{yd} \mathcal{J} = \Gamma_{xd} \quad (4.25)$$

$$I_t \dot{w}_{yd} + (I_t - I_Z) w_{zd} w_{xd} - I_t w_{xd} \mathcal{J} = \Gamma_{yd} \quad (4.26)$$

$$I_Z \dot{w}_{zd} = \Gamma_{zd} \quad (4.27)$$

Où $\dot{\Gamma}_{xd}$, $\dot{\Gamma}_{yd}$ et $\dot{\Gamma}_{zd}$ sont les composantes du couple extérieur suivant le trièdre $\hat{Z}_d \hat{Y}_d \hat{X}_d$.

En remplaçant w_{yd} , w_{xd} , w_{zd} et leurs dérivées en fonction de α , d , j il vient :

$$I_t \mathcal{D} + (I_Z - I_t) \mathcal{E}^2 \sin d \cos d + I_Z \mathcal{J} \mathcal{E} \cos d = \Gamma_{xd} \quad (4.28)$$

$$I_t \mathcal{E} \cos d + (I_Z - 2I_t) \mathcal{E} \mathcal{D} \sin d + I_Z \mathcal{J} \mathcal{D} = \Gamma_{yd} \quad (4.29)$$

$$I_Z \mathcal{E} \sin d + I_Z \mathcal{E} \mathcal{D} \cos d + I_Z \mathcal{J} = \Gamma_{zd} \quad (4.30)$$

Ce sont les équations dynamiques complètes de l'attitude.

6.3.3. Cas ou la nutation est négligeable [26]

Dans le cas où l'évolution de l'attitude et de la vitesse de spin est lente et dans l'hypothèse de l'existence d'un amortisseur de nutation à bord du satellite, on peut considérer que le vecteur moment cinétique reste pratiquement porté par l'axe de spin Z_d et que l'on a :

$$\dot{\vec{H}} \approx I_z \dot{\hat{Z}}_d \tag{4.31}$$

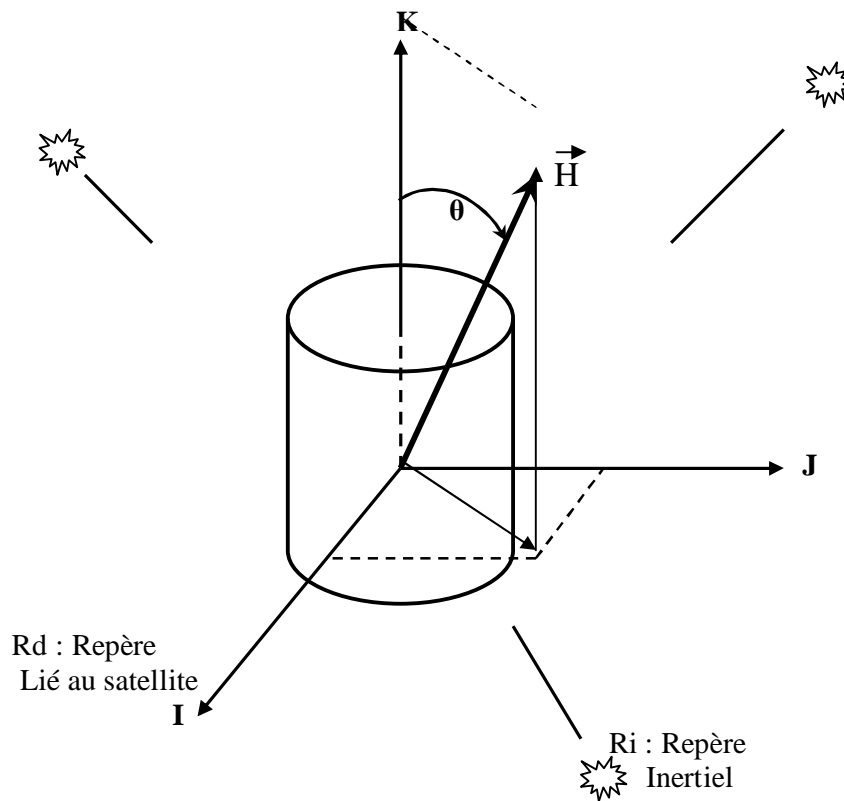


Figure 4.3. La nutation.

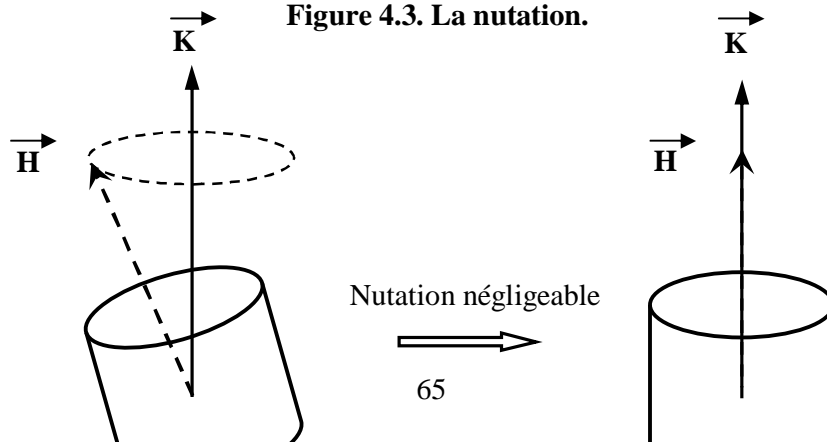


Figure 4.4. La nutation négligeable.

Dans ces conditions, l'application du théorème du moment cinétique et l'utilisation des équations cinématiques conduisent aux équations différentielles suivantes :

$$I_z \dot{\alpha} \cos d = \Gamma_{xd} \quad (4.32)$$

$$I_z \dot{d} = \Gamma_{yd} \quad (4.33)$$

$$I_z \dot{\beta} = \Gamma_{zd} \quad (4.34)$$

6.3.4. Expression du couple extérieur [25,26]

Le couple extérieur $\dot{\Gamma}$ résulte:

- Du couple de commande électromagnétique défini par la loi de Laplace:

$$\dot{\Gamma} = \dot{\mathbf{M}} \times \dot{\mathbf{B}}$$

$\dot{\mathbf{M}}$: est le moment magnétique créé à bord.

$\dot{\mathbf{B}}$: est le vecteur induction magnétique terrestre au point de l'orbite où se trouve le satellite.

- Des couples perturbateurs dus à l'environnement (couple dû au gradient de gravité, aux frottements et au freinage aérodynamique, la pression de radiation solaire, etc...).

Dans ce qui suit, on néglige les couple perturbateurs devant le couple de commande et, de ce fait, les composantes Γ_{xd} , Γ_{yd} et Γ_{zd} du couple extérieur appliqué au satellite s'écrivent :

$$\Gamma_{xd} = M_{yd} B_{zd} - M_{zd} B_{yd} \quad (4.36)$$

$$\Gamma_{yd} = M_{zd} B_{xd} - M_{xd} B_{zd} \quad (4.37)$$

$$\Gamma_{zd} = M_{xd} B_{yd} - M_{yd} B_{xd} \quad (4.38)$$

B_{xd} , B_{yd} et B_{zd} sont les composants de B suivant le trièdre $\hat{X}_d \hat{Y}_d \hat{Z}_d$

M_{xd} , M_{yd} , M_{zd} se déduisent des moments magnétiques M_x , M_y et M_z des bobines électromagnétiques par les équation :

$$M_{xd} = M_x \cos j - M_y \sin j \quad (4.39)$$

$$M_{yd} = M_x \sin j + M_y \cos j \quad (4.40)$$

$$M_{zd} = M_z \quad (4.41)$$

6.3.5. Modèle dynamique simplifier du mouvement [26]

Dans ce qui suit et dans le but d'élaborer les lois de mise sous tension des bobines (i.e. les lois, $M_x(t)$, $M_y(t)$ et $M_z(t)$).

L'évolution des angles d'attitude (a, d) et de la vitesse de spin $w = \mathbf{j}\&$ sera décrite par le modèle dynamique suivant:

$$I_Z w \& \cos d = M_{yd} B_{zd} - M_{zd} B_{yd} \quad (4.42)$$

$$I_Z w \& = M_{zd} B_{xd} - M_{xd} B_{zd} \quad (4.43)$$

$$I_Z \mathbf{w} = M_{xd} B_{yd} - M_{yd} B_{xd} \quad (4.44)$$

Sachant que M_{xd} , M_{yd} et M_{zd} sont définis par les équations (4.39,4.40 ,4.41).

1. Stratégies classiques de commande d'attitude et de vitesse de spin

1.1. Modification de l'attitude à vitesse de spin constante [25]

Pour réaliser une évolution de l'attitude, c'est-à-dire des deux angles a et d , à vitesse de spin w constante, il suffit de générer un dipôle magnétique suivant l'axe de spin \hat{Z} . En effet, soit :

$$\dot{\mathbf{M}} = M \hat{Z} = M \hat{Z}_d \tag{5.1}$$

Avec

$$|\mathbf{M}| \leq M_z \tag{5.2}$$

Où M_z est le dipôle magnétique maximal que peut générer la bobine d'axe Nous avons donc :

$$M_{xd} = M_{yd} = 0 \tag{5.3}$$

$$M_{zd} = M \tag{5.4}$$

En remplaçant M_{xd} , M_{yd} et M_{zd} par leurs valeurs dans (4.38, 4.39, 4.40), il vient

$$I_z \dot{\alpha} = 0 \tag{5.5}$$

$$I_z w \dot{\alpha} \cos d = - M B_{yd} \tag{5.6}$$

$$I_z w \dot{d} = M B_{xd} \tag{5.7}$$

Ce qui entraîne :

$$w = \text{constante} = w_0 \tag{5.8}$$

$$w_0 = I_z w \tag{5.9}$$

$$\dot{\alpha} = - M B_{yd} / (w_0 \cos d) \tag{5.10}$$

$$\dot{d} = M B_{xd} / w_0 \tag{5.11}$$

11.2. Modification de l'attitude et de la vitesse de spin simultanément

Pour réaliser une évolution simultanée de l'attitude et de la vitesse de spin, on peut :

- Soit mettre sous tension les trois bobines simultanément
- Soit mettre sous tension les deux bobines d'axes \hat{X} et \hat{Y} respectivement.

Dans ce qui suit, on ne considérera que la deuxième possibilité et, de ce fait, les équations décrivant le mouvement s'écrivent en faisant $M_{zd}=0$:

$$I_Z \dot{d} \cos d = M_{yd} B_{zd} \tag{5.12}$$

$$I_Z \dot{d} = - M_{xd} B_{zd} \tag{5.13}$$

$$I_Z \dot{d} = M_{xd} B_{yd} - M_{yd} B_{xd} \tag{5.14}$$

Cependant, il existe deux mouvements particulièrement intéressants :

- un mouvement où a et w évoluent à d constante, pour cela, il suffit d'avoir :

$$M_{xd} = 0 \tag{5.15}$$

$$\text{Donc : } M_x \cos j - M_y \sin j = 0 \tag{5.16}$$

Ce qui est réalisable, si l'on a :

$$M_x = e M \sin j \tag{5.17}$$

$$M_y = e M \cos j \tag{5.18}$$

$$\text{Avec } e = \pm 1 \tag{5.19}$$

Notons que le module du moment magnétique M_{yd} ne peut dépasser $M\sqrt{2}$

Dans ce cas, l'évolution de l'attitude est telle que l'axe de spine \hat{Z} décrive un cône de demi angle $(90^\circ - \delta)$ autour de l'axe inertiel $\hat{Z}_i = \hat{Z}_{50}$ (voire Figure 5.1).

- Un mouvement où δ et ω évoluent à α constante. Pour cela, il suffit d'avoir :

$$M_{yd} = 0 \tag{5.20}$$

$$M_x \sin j + M_y \cos j = 0 \tag{5.21}$$

Ce qui est possible si l'on retient les lois de commande :

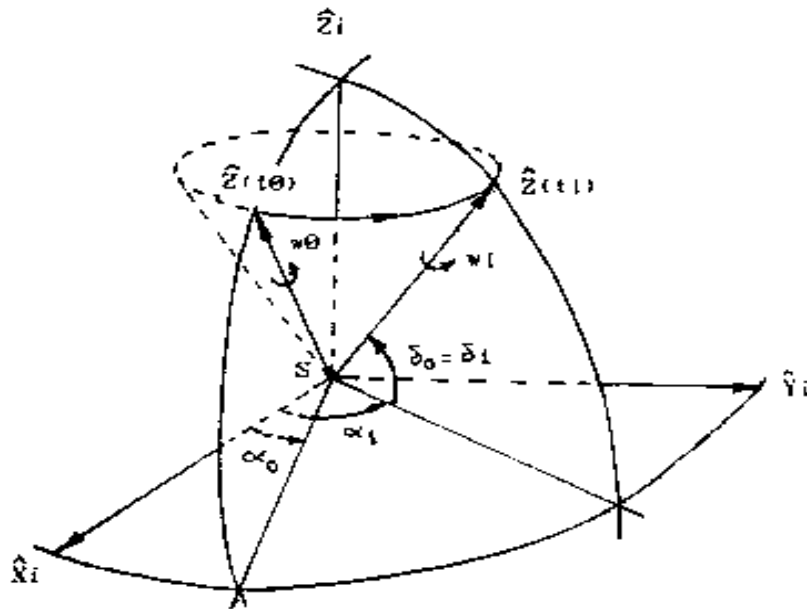
$$M_x = e M \cos j \tag{5.22}$$

$$M_y = -e M \sin j \tag{5.23}$$

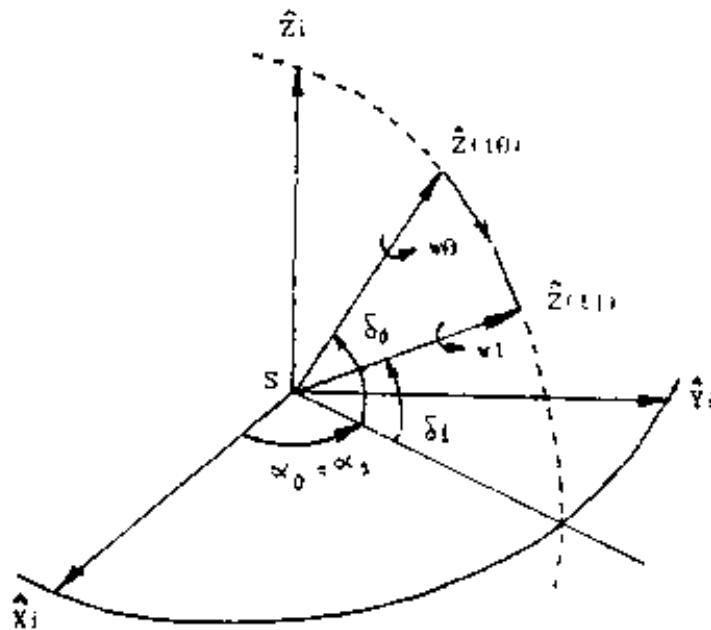
Avec $e = \pm 1$

De même, l'amplitude maximale de M_{xd} est égale à $M\sqrt{2}$.

Dans ce cas, l'axe de spin \hat{Z} décrit un cercle méridien passant par l'axe inertiel \hat{Z}_i et d'ascension droite α par rapport à \hat{X}_i (voire Figure 5.1).



(a) : Evolution de α et ω à d constante.



(b) : Evolution de d et w à a constante.

Figure5.1. Evolution de l'attitude et de la vitesse spin simultanément.

2. Commandes optimales en temps minimum [21]

2.1. Cas d'un changement d'attitude à vitesse de spin constante

Les équations décrivant l'évolution de l'attitude sont :

$$\dot{\alpha} = -\frac{M}{w I_z} B_{yd} / (w \cos d) \quad (5.24)$$

$$\dot{d} = \frac{M}{w I_z} B_{xd} / w \quad (5.25)$$

w : étant constante.

Sachant que les composantes B_{xd} et B_{yd} du champ géomagnétique sont des fonctions de t, a et δ (cf. annexe C) et en posant :

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T \stackrel{\Delta}{=} [\mathbf{B}_{xd}, \mathbf{B}_{yd}, \mathbf{B}_{zd}] \quad (5.26)$$

$$u = \mathbf{M} / w \mathbf{I}_z \quad (5.27)$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \stackrel{\Delta}{=} [\mathbf{a}, \mathbf{d}]^T \quad (5.28)$$

On aboutit à l'équation d'état :

$$\dot{\mathbf{x}} = u \cdot f(t, x) \quad (5.29)$$

Avec :

$$f_1(t, x_1, x_2) = -b_2 / \cos x_2 \quad (5.30)$$

$$f_2(t, x_1, x_2) = b_1 \quad (5.31)$$

On se propose de faire évoluer l'attitude depuis l'état initial

$$x_1(t_0) = \mathbf{a}_0, \quad x_2(t_0) = \mathbf{d}_0 \quad (5.32)$$

Jusqu'à l'état final :

$$x_1(t_f) = \mathbf{a}_f, \quad x_2(t_f) = \mathbf{d}_f \quad (5.33)$$

Tout en minimisant le critère :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0 \quad (5.34)$$

Autrement dit de réaliser le recalage en temps minimum, sachant que l'on a la contrainte :

$$|u| \leq U = \frac{\mathbf{M}_z}{\mathbf{I}_z w} \quad (5.35)$$

$$-U \leq u \leq +U \quad (5.36)$$

$$H = -1 + I_1 \dot{x}_1 + I_2 \dot{x}_2 \quad (5.37)$$

On définit le Hamiltonien H du système :

$$H = -1 - u \frac{I_1 b_2}{\cos x_2} + u \frac{I_2 b_1}{\cos x_2} \quad (5.38)$$

Ensuite, on écrit que la commande optimale doit maximiser H , ce qui donne en tenant compte de la contrainte.

$$u = U \cdot \text{sign} \left(-\frac{I_1 b_2}{\cos x_2} + \frac{I_2 b_1}{\cos x_2} \right) \quad (5.39)$$

Quant aux variables adjointes, leur évolution est décrite par le système différentiel

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = u \left(\frac{I_1}{\cos x_2} \frac{\partial b_2}{\partial x_1} - I_2 \frac{\partial b_1}{\partial x_1} \right) \quad (5.40)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = u \left[\left(\frac{\partial b_2}{\partial x_2} + b_2 \text{tg } x_2 \right) \frac{I_1}{\cos x_2} - I_2 \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \right] \quad (5.41)$$

Sachant que l'on doit satisfaire la condition de transversalité :

$$H(t_f) = 0$$

Il est clair que le calcul de la commande optimale exige la connaissance des composantes $\{ b_1(t), b_2(t) \}$, des dérivées partielles :

$$\left(\frac{\partial b_i(t)}{\partial x_j} \right) \text{ et } 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2$$

Du vecteur d'état $x(t)$ et du vecteur d'état adjoint $\lambda(t)$.

$$\text{Sachant que les } (b_i) \text{ } 1 \leq i \leq 2 \text{ et les } \left(\frac{\partial b_i(t)}{\partial x_j} \right) \text{ et } 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2$$

Sont fonctions de t et de x . La détermination de u nécessite alors la résolution d'un système différentiel non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (5.42)$$

$$\dot{\lambda} = G(t, x, \lambda) \quad (5.43)$$

Muni des condition initiales :

$$x(t_0) = [a_0, d_0]^T \quad (5.44)$$

Une méthode de résolution de ce problème consiste à choisir un vecteur adjoint initial $I(t_0)$, à intégrer le système différentiel ci-dessus dans le sens direct et à observer l'allure de la trajectoire obtenue dans le plan (x_1, x_2) jusqu'à un certain temps maximal fixé à l'avance. Si la trajectoire ne passe pas par l'état final désiré, ou même au voisinage de ce point, on choisit un autre vecteur $I(t_0)$ et on recommence.

Il est facile de constater que l'on risque de faire plusieurs "essais" ou de choisir $I(t_0)$ avant de trouver une trajectoire convenable. Dans le but de restreindre le domaine des $I(t_0)$ admissibles, on peut imposer une contrainte sur le module de $I(t_0)$ en exigeant que ce module soit égal à 1, soit :

$$I_1^2(t_0) + I_2^2(t_0) = 1 \quad (5.45)$$

Ce qui revient à choisir un angle γ compris entre 0^0 et 360^0 et tel que l'on ait :

$$I_1(t_0) = \cos g \quad (5.46)$$

$$I_2(t_0) = \sin g \quad (5.47)$$

2.2. Cas d'une changement simultané d'attitude et de vitesse de spin

2.2.1. Cas générale

Il s'agit de faire évoluer en temps minimum les trois paramètres α , δ , et ω simultanément.

Les équations dynamiques décrivant le mouvement sont :

$$\dot{\alpha} = M_{yd} B_{zd} / (I_z \omega \cos d) \quad (5.48)$$

$$\dot{\delta} = - M_{xd} B_{zd} / (I_z \omega) \quad (5.49)$$

$$\dot{\omega} = (M_{xd} B_{yd} - M_{yd} B_{xd}) / I_z \quad (5.50)$$

En posant :

$$b = [b_1, b_2, b_3]^T \stackrel{\Delta}{=} [B_{xd}, B_{yd}, B_{zd}] \quad (5.51)$$

$$u = [m_1, m_2]^T \stackrel{\Delta}{=} \left[\frac{M_{xd}}{I_z}, \frac{M_{yd}}{I_z} \right]^T \quad (5.52)$$

On obtient les équations d'état :

$$\dot{x}_1 = m_2 b_3 / (x_3 \cos x_2) \quad (5.53)$$

$$\dot{x}_2 = -m_1 b_3 / x_3 \quad (5.54)$$

$$\dot{x}_3 = m_1 b_2 - m_2 b_1 \quad (5.55)$$

On se propose de faire évoluer le système depuis l'état initial :

$$x(t_0) = [a_0, d_0, w_0]^T \quad (5.56)$$

Jusqu'à l'état final :

$$x(t_f) = [a_f, d_f, w_f]^T \quad (5.57)$$

Tout en minimisant le critère :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0 \quad (\text{critere temps minimum}) \quad (5.58)$$

Le Hamiltonien du système s'écrit :

$$H = -1 + I_1 \dot{x}_1 + I_2 \dot{x}_2 + I_3 \dot{x}_3 \quad (5.59)$$

$$H = -1 + I_1 F_1 + I_2 F_2 + I_3 F_3 \quad (5.60)$$

$$F_1(t, x, u) = m_2 b_3 / (x_3 \cos x_2) \quad (5.61)$$

$$F_2(t, x, u) = -m_1 b_3 / x_3 \quad (5.62)$$

$$F_3(t, x, u) = m_1 b_2 - m_2 b_1 \quad (5.63)$$

En tenant compte des contraintes :

$$|m_1| \leq M\sqrt{2} / I_z \quad (5.64)$$

$$|m_2| \leq M\sqrt{2} / I_z \quad (5.65)$$

La commande optimale, i.e. celle qui maximise le Hamiltonien, s'écrit

$$u = [m_1, m_2]^T \quad (5.66)$$

Avec :

$$m_1 = \frac{M\sqrt{2}}{I_z} \text{sign}(-I_2 b_3 / x_3 + I_3 b_2) \quad (5.67)$$

$$m_2 = \frac{M\sqrt{2}}{I_z} \text{sign} [I_1 b_3 / (x_3 \cos x_2) - I_3 b_1] \quad (5.68)$$

Le système adjoint s'écrit, tous calculs faits

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \left(\frac{I_1 m_2}{x_3 \cos x_2} + \frac{I_2 m_1}{x_3} \right) \frac{\partial b_3}{\partial x_1} - I_3 m_3 \frac{\partial b_2}{\partial x_1} + I_3 m_2 \frac{\partial b_1}{\partial x_1} \quad (5.69)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\left(\frac{\partial b_3}{\partial x_2} + b_3 \text{tg} x_2 \right) \frac{I_1 m_2}{x_3 \cos x_2} + \frac{I_3 m_1}{x_3} \frac{\partial b_3}{\partial x_2} - I_3 \left(m_1 \frac{\partial b_2}{\partial x_2} - m_2 \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \right) \quad (5.70)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \left(\frac{I_1 m_2}{\cos x_2} - I_2 m_2 \right) b_3 / x_3^2 \quad (5.71)$$

Le calcul des (b_i) $i = 1, 2, 3$ et des dérivées $\left(\frac{\partial b_i(t)}{\partial x_j} \right)$ et $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2$

est détaillé dans l'annexe à la fin de ce chapitre.

La condition de transversalité s'écrit :

$$H(t_f) = 0 \quad (5.72)$$

Les équations (5.69), (5.70), (5.71) définissent un système différentiel de la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = F(t, x, I) \quad (5.73)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = G(t, x, I) \quad (5.74)$$

Sachant que $x(t_0)$ et $x(t_f)$ sont donnés, et $I(t_f)$ défini par la condition.

Si l'on veut résoudre ce système par la méthode du choix du vecteur adjoint initial $I(t_0)$ et si l'on se restreint aux vecteurs de module unité, il est nécessaire de déterminer deux paramètres angulaires g_0 et h_0 compris entre 0^0 et 360^0 tels que l'on ait

$$I_1(t_0) = \sin g_0 \cos h_0 \quad (5.75)$$

$$I_2(t_0) = \sin g_0 \sin h_0 \quad (5.76)$$

$$I_3(t_0) = \cos g_0 \quad (5.77)$$

Cependant, on risque de faire beaucoup trop "d'essais" et d'intégrations coûteuses en temps de calcul avant d'aboutir à une solution convenable.

Le même problème de coût en temps machine se posera si l'on envisage de rechercher la solution par une méthode de gradient, sans que l'on connaisse de trajectoires (non optimale) pour démarrer les itérations.

Dans le but de calculer au moins une trajectoire sous optimale, on peut diminuer la dimension du vecteur d'état de 1 en recherchant des trajectoires (et des lois de commande) faisant évoluer en temps minimum deux paramètres seulement (*a et w*, ou *d et w*) en maintenant le troisième constant durant la manoeuvre. Deux cas sont envisageables.

2.2.2. Evolution en temps minimum de *a* et *w* à *d* constante

Les équations dynamiques à considérer sont :

$$\dot{\alpha} = M_{yd} b_3 / I_z w \cos d \quad (5.78)$$

$$\dot{w} = -M_{yd} b_1 / I_z \quad (5.79)$$

Avec *d* = constante En posant

$$u = M_{yd} / I_z \quad (5.80)$$

$$x = [x_1, x_2]^T \stackrel{\Delta}{=} [a, w]^T \quad (5.81)$$

$$\dot{x} = u f(t, x) \quad (5.82)$$

Avec

$$f_1(t, x) = b_3 / x_2 \cos d \quad (5.83)$$

$$f_2(t, x) = -b_1 \quad (5.84)$$

En appliquant la même procédure d'optimisation qu'au section (2.1), on peut tracer les trajectoires en temps minimum dans le plan (a, d) pour différentes valeurs du paramètre g_0 choisi entre 0^0 et 360^0 . On se fixera une durée maximale (limite absolue) pour la réalisation du recalage de l'état depuis (a_0, w_0) et jusqu'à (a_1, w_1) sachant que la déclinaison d restera constante et égale à sa valeur initiale d_0 .

2.2.3. Evolution en temps minimum de d et w a a constante

Les équations dynamiques s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{x}} = -M_{xd} \mathbf{b}_3 / I_z w \quad (5.85)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = M_{xd} \mathbf{b}_2 / I_z \quad (5.86)$$

Si l'on pose :

$$u = M_{xd} / I_z \quad (5.87)$$

$$x = [x_1, x_2]^T \stackrel{\Delta}{=} [d, w]^T \quad (5.88)$$

Les équations dynamiques s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{x}} = u f(t, x) \quad (5.89)$$

Avec :

$$f_1(t, x) = -b_3 / x_2 \quad (5.90)$$

$$f_2(t, x) = b_2 \quad (5.91)$$

On obtient, encore une fois, un système d'état analogue à celui du paragraphe (2.1) et, par conséquent, on peut appliquer la même procédure d'optimisation ; on calculera les trajectoires optimales en temps minimum au départ de l'état initial (d_0, w_0) en se fixant une durée maximale pour atteindre l'état final (d_1, w_1) à ascension droite a constante et égale à a_0 .

3. Méthode de commande d'attitude et de vitesse de spin en temps minimum

Le diagramme qui suit figure 5.2 résume la méthode de commande optimale en temps minimum pour le recalage de l'attitude et/ou de vitesse de spin d'un satellite stabilisé par rotation et équipé de bobines électromagnétiques.

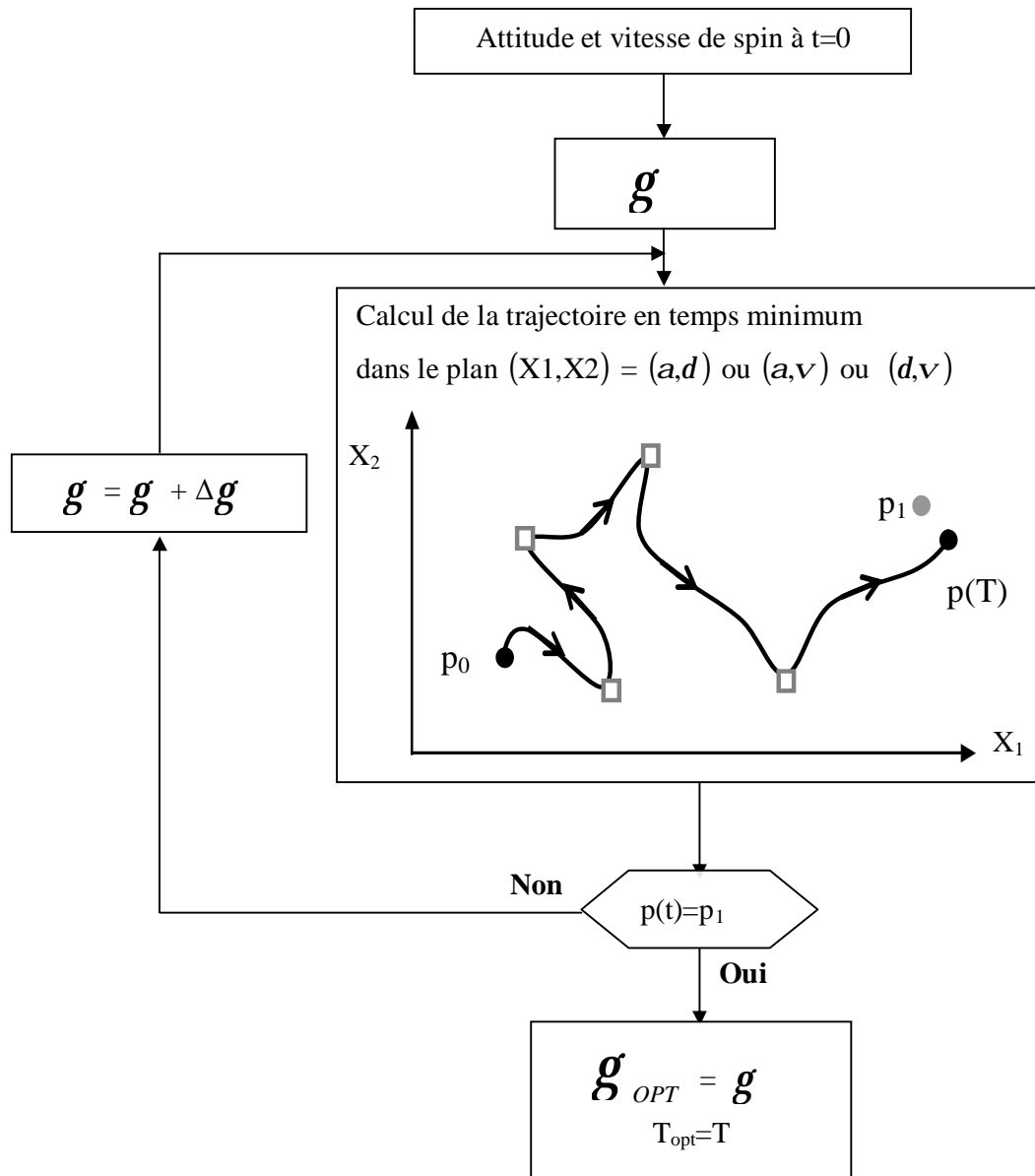


Figure 5.2. Méthode de commande d'attitude et /ou de vitesse de spin en temps minimum et en boucle ouverte.

La démarche à suivre est comme suit :

- **Choix de la (ou des) bobine (s) :**

S'il s'agit d'une manoeuvre de changement d'attitude (a et d) à vitesse de spin w constante, il faut commander la bobine d'axe aligné avec l'axe de spin ($\dot{\mathbf{M}} \parallel \hat{\mathbf{Z}}$).

§ S'il s'agit d'une manoeuvre de recalage simultané de l'attitude et de la vitesse de spin, on pourrait commander les 3 bobines simultanément ou bien seulement les deux bobines disposées suivant les axes d'inertie transverse ; dans ce dernier cas, on génère un dipôle magnétique constamment perpendiculaire à l'axe de spin ($\dot{\mathbf{M}} \perp \hat{\mathbf{Z}}$).

- **Construction des trajectoires optimales**

On calcule la commande optimale en intégrant les équations d'état et le système dynamique adjoint pour différentes valeurs du paramètre g_0 et on trace les trajectoires correspondantes en (a, d) , (a, w) ou (d, w) .

Dans le cas $\dot{\mathbf{M}} \parallel \hat{\mathbf{Z}}$, on choisira une trajectoire permettant d'approcher au mieux l'état final (a_1, d_1) et on notera la durée du recalage ainsi que le profil de la commande qui permet de le réaliser.

Dans le cas $\dot{\mathbf{M}} \perp \hat{\mathbf{Z}}$, l'optimisation se fera en 2 étapes :

- Une première pour la recherche d'une trajectoire optimale dans le plan (a, w)

Ou (d, w) au départ de (a_0, w_0) ou de (d_0, w_0) . Dans la majorité des cas, il faudra se contenter d'une trajectoire permettant de recalculer l'un des deux angles d'attitude a et d vers sa valeur finale, sans que l'on puisse atteindre la valeur finale désirée pour la vitesse de spin w et en maintenant l'autre angle à sa valeur initiale.

On aboutira alors à un état intermédiaire (a'_1, d'_1, w'_1) tel que l'on ait :

$$a'_1 = a_1 \quad , \quad d'_1 = d_0 \quad , \quad w'_1 \geq w_0$$

Ou bien :

$$a'_1 = a_0 \quad , \quad d'_1 = d_1 \quad , \quad w'_1 \geq w_0$$

- Une deuxième étape aura pour rôle la détermination de trajectoires optimales en temps minimum au départ de l'état intermédiaire ci-dessus. Si cet état est $(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_0, \mathbf{w}_1')$, on recherchera des trajectoires faisant évoluer \mathbf{d} et \mathbf{w} à \mathbf{a} constante ; dans l'autre cas, on calculera les trajectoires dans le plan (\mathbf{a}, \mathbf{w}) avec \mathbf{d} constante et ce jusqu'à se rapprocher de l'état final désiré $(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{w}_1)$.

Si le processus converge, autrement dit si l'état final est atteint avec une précision satisfaisante, c'est la fin des calculs. Dans le cas contraire, il faudra revenir à la première étape, choisir un autre état intermédiaire et recommencer le calcul des trajectoires. Il se pose alors le problème du domaine atteignable de cette commande en temps minimum, ce domaine étant lié, à priori, à l'attitude et à la vitesse de spin initiales, à l'orbite considérée et à la position du satellite à l'instant initial.

4. Manoeuvre de réorientation de l'axe de spin du satellite NOVA (Exemple d'application)

Le satellite américain de navigation militaire *NOVA* a été lancé en 1981. Nous choisirons ce satellite pour effectuer notre simulation. Ce satellite parcourt une orbite polaire basse caractérisée par les paramètres suivants:

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------|
| • altitude de l'apogée | $H_{ap}=860 \text{ Km}$ |
| • Altitude de périgée | $H_{pe}=450 \text{ Km}$ |
| • Excentricité | $e=0.029192$ |
| • Inclinaison | $i=89.99^\circ$ |
| • Période orbitale | $T=98 \text{ minutes}$ |
| • Argument de périgée | $w_p=24.87^\circ$ |
| • Ascension droite du nœud ascendant | $\Omega =336.6^\circ$ |

Par ailleurs, ce satellite est stabilisé par une rotation autour de son axe longitudinal Z avec une vitesse de spin $W=\dot{\varphi}=5 \text{ tours/minute}$ pour une inertie longitudinale de $I_z=34 \text{ Kg.m}^2$ et il est équipé d'une bobine électromagnétique d'axe Z et de dipôle magnétique maximal $M_z=70 \text{ A.m}^2$.

Une manœuvre typique de correction d'orbite exige la réorientation de l'axe de spin (en

même temps l'axe de poussée) depuis l'attitude initiale :

$$\alpha_0=45.2^\circ \quad \delta_0=35.1^\circ$$

et jusqu'à l'attitude finale :

$$\alpha_1=-45.0^\circ \quad \delta_1=-30.1^\circ$$

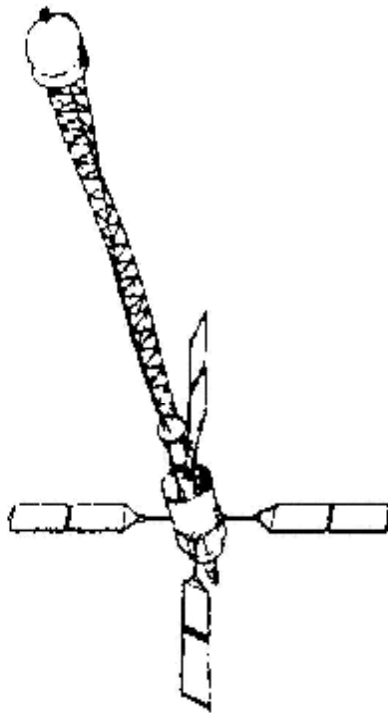


Figure 5.3. Sattelite NOVA.

- ***Présentation des Resultas***

Nous proposons de réaliser cette manœuvre en temps minimum. L'intégration numérique des équations dynamiques et du système différentiel adjoint a été menée par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 sous environnement matlab 6.5 et avec un pas de 1 seconde.

Cas pour : $\gamma_0=85^\circ$

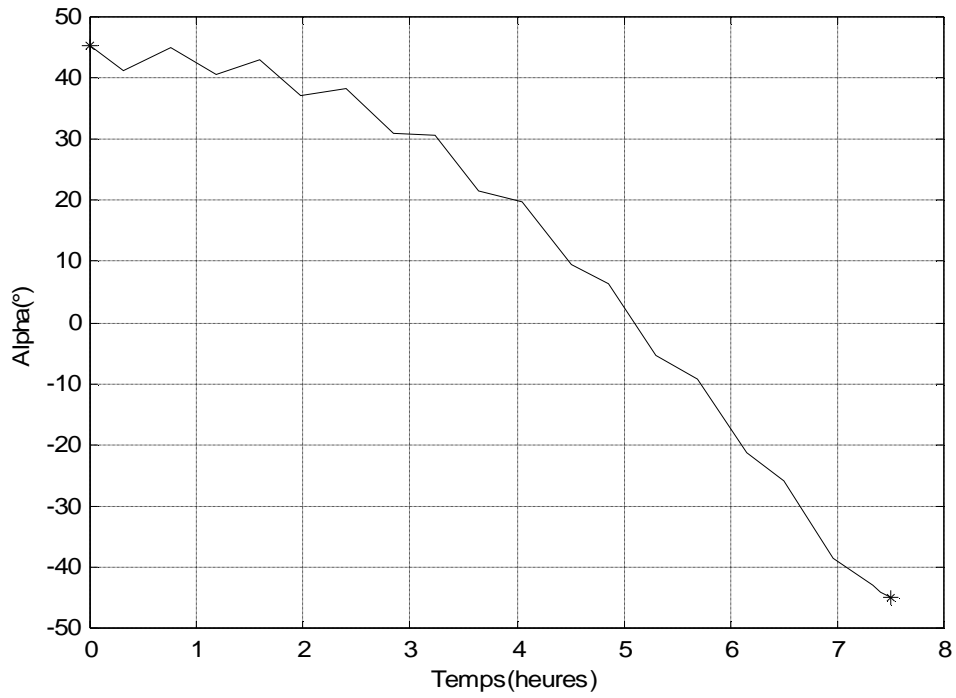


Figure 5.4. Evolution de l'ascension droite α pour $g_0=85^\circ$.

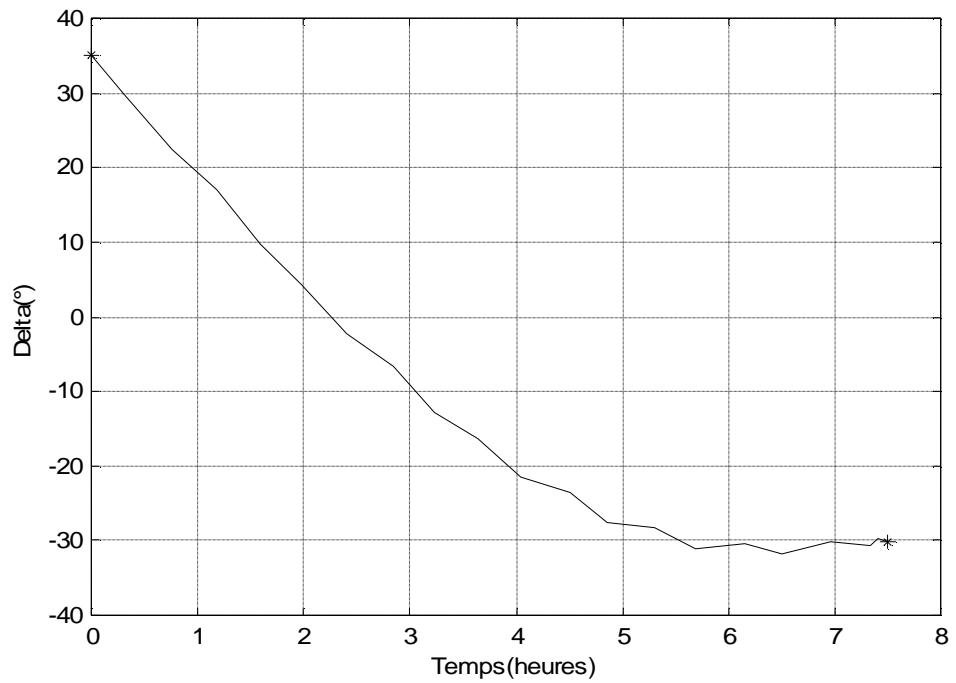


Figure 5.5. Evolution de la déclinaison δ pour $g_0=85^\circ$.

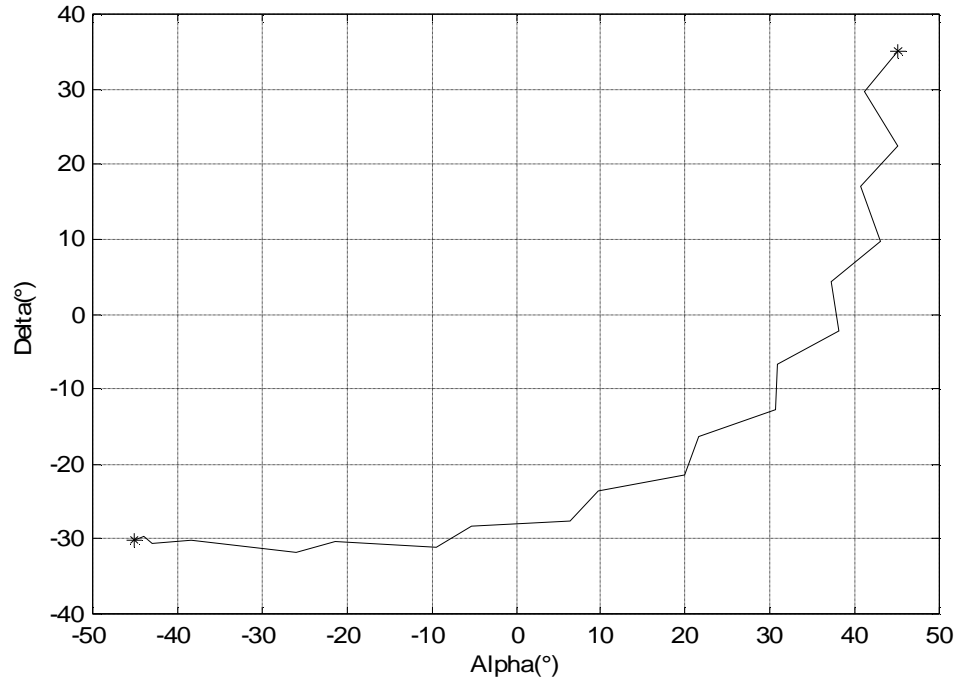


Figure 5.6. La trajectoire dans le plans (α, δ) pour $g_0=85^\circ$.

Cas pour : $\gamma_0=132^\circ$

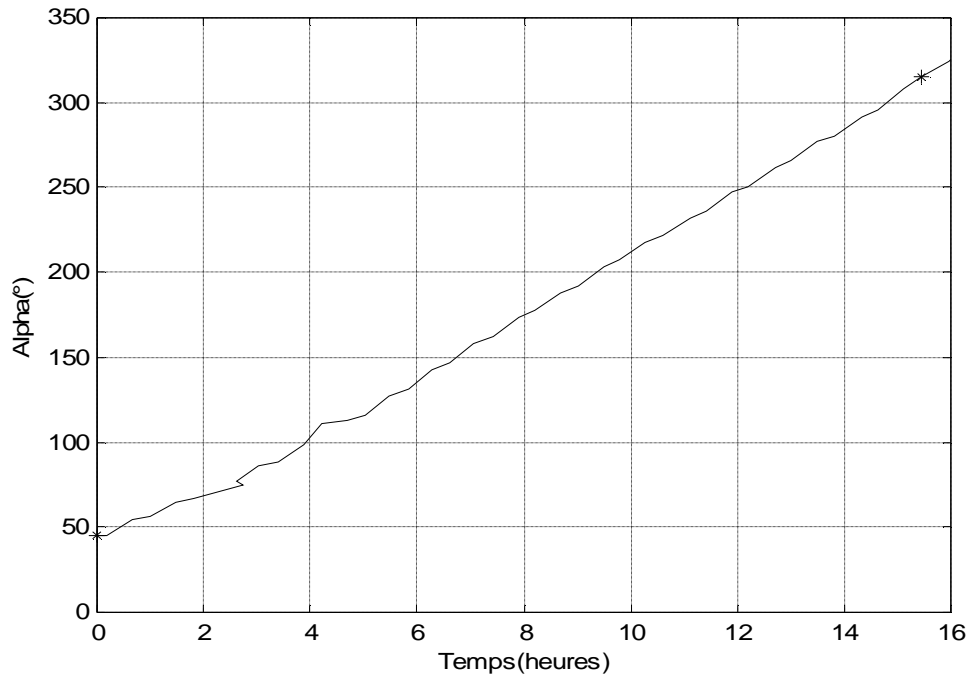


Figure 5.7. Evolution de l'ascension droite α pour $\gamma_0=132^\circ$.

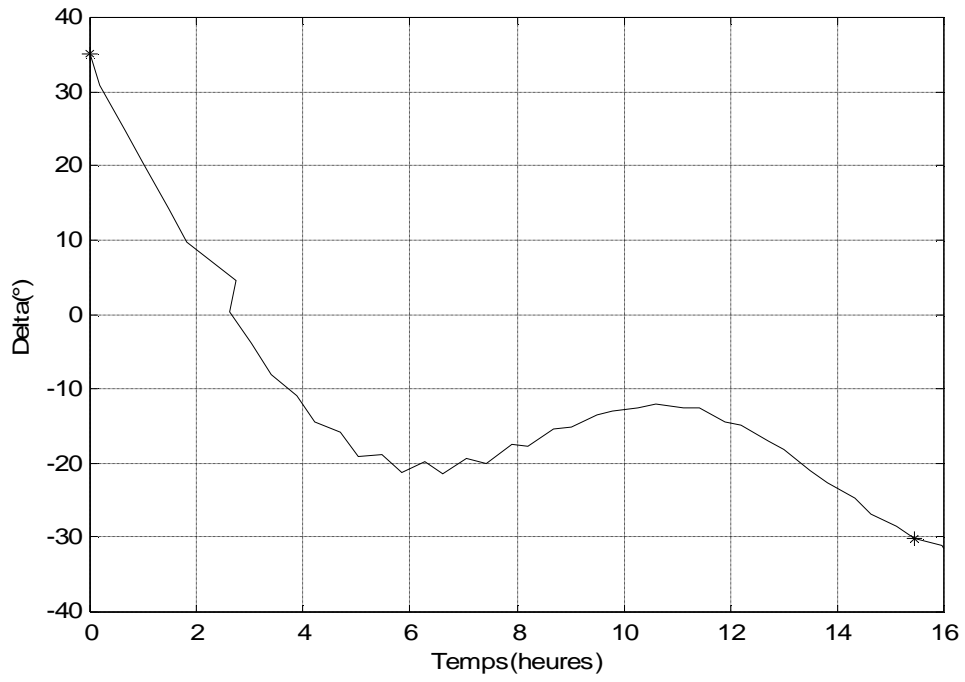


Figure 5.8. Evolution de la déclinaison δ pour $g_0=132^\circ$.

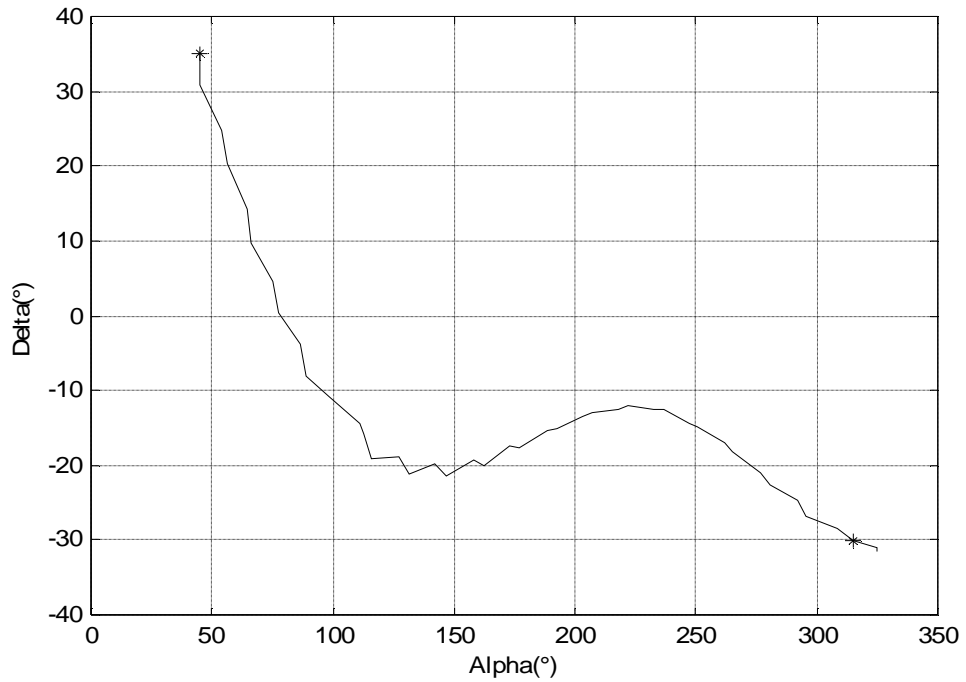


Figure 5.9. La trajectoire dans le plans (α, δ) pour $g_0=132^\circ$.

- **Recherche de la trajectoire optimale A et B dans le plans (α, δ)**

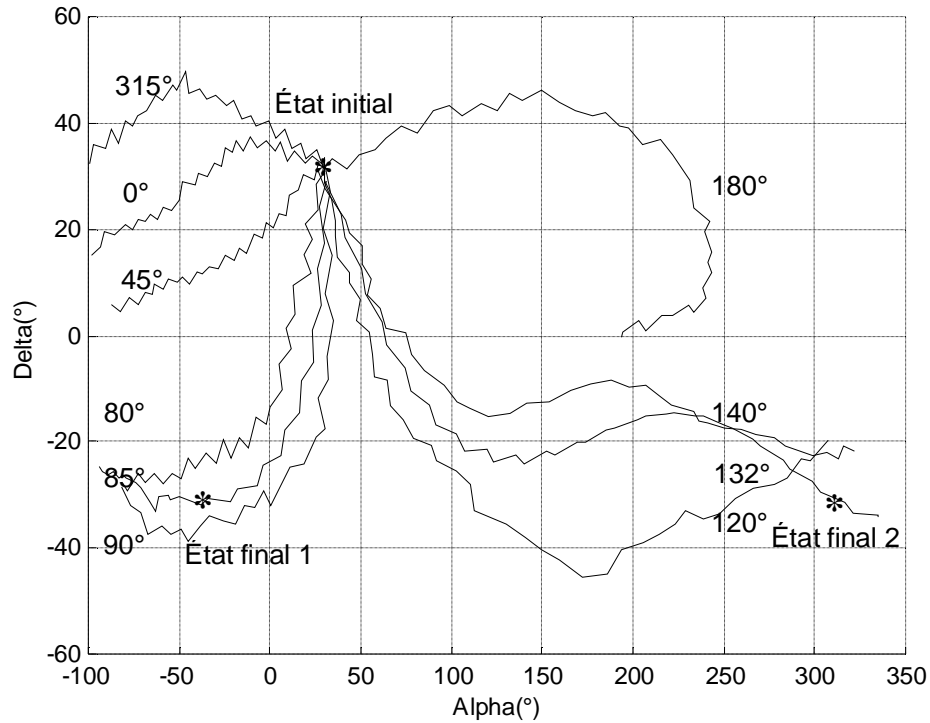


Figure 5.10. Trajectoires optimale dans le plans (α, δ).

- **Discussion des résultats**

Il existe deux trajectoires particulières permettant d'atteindre l'état final désiré

- La première, trajectoire A, correspond à $\gamma=85^\circ$ et pour laquelle le temps de recalage est de 7.5 heures environ.
- La deuxième, trajectoire B, correspondant à $\gamma=132^\circ$ est plus lente que la précédente puisque l'état final n'est atteint qu'après plus de 15 heures.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'application de la commande optimale en temps minimum et en boucle ouverte au contrôle d'attitude par magnéto coupleurs des satellites stabilisés par rotation.

A titre d'exemple ; on a montré les performances de la commande magnétique pour la ré-orientation de l'axe de spin à vitesse de spin constante d'un satellite de navigation en orbite polaire. Nous avons constaté que l'hypothèse d'une nutation négligeable permet de faciliter la recherche de la (ou les) trajectoires optimales.

1. Introduction

1.1. Position de problème

Cette note a pour but de montrer comment sur le plan informatique, on peut intégrer au mieux les équations du mouvement d'un solide autour de son centre d'inertie (satellite en particulier). C'est ce qu'on appelle les équations d'attitude, qui sont particulièrement utiles dans la mise en place d'un SCA (Système de Contrôle d'Attitude) notamment dans le cas où l'orientation peut être quelconque[8,9].

Le lecteur est certainement familiarisé avec le repérage de l'attitude d'un satellite dans l'espace, à l'aide des angles soient :

- d'Euler : précession ψ , nutation θ , rotation propre φ
- de Cardan : lacet Ψ , tangage Θ , roulis Φ

Ces deux repérages possèdent des indéterminations ou des non définitions d'angles dans certaines configurations, de plus la mise sous forme canonique des équations du mouvement s'avère très difficile voire impossible. Donc un problème sérieux se pose sur le plan numérique.

1.2. Introduction des quaternions

1.2.1. La rotation instantanée [9]

La Figure 2.1, montre :

- Ø La base $X Y Z$ de référence qui est en générale inertielle, et aussi le repère orbital.
- Ø la base mobile $x y z$ en générale liée au solide S en mouvement.
- Ø le vecteur rotation instantanée W du solide par rapport au repère inertielle. Dans le cas où la base mobile est liée au corps, c'est la rotation de cette base par rapport à la base absolue.

Donc :

$$W = pX + qY + rZ \tag{A.1}$$

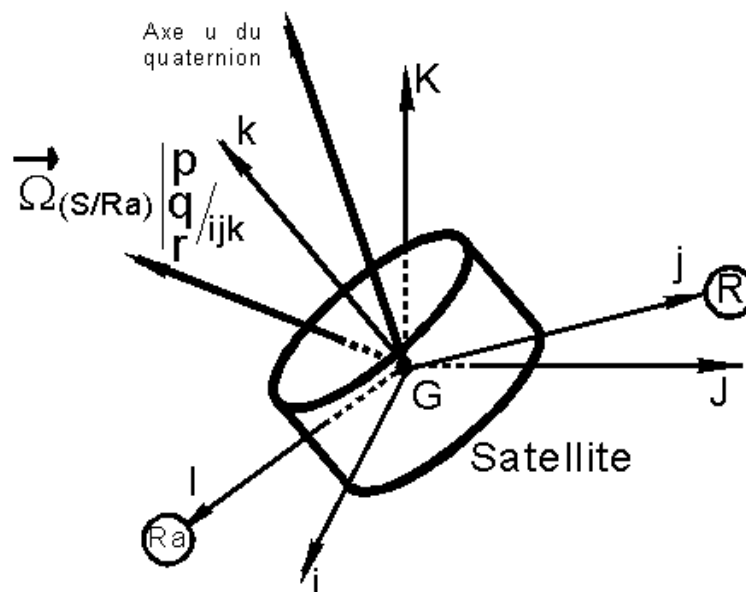


Figure A.1. La rotation instantanée

1.2.2. Introduction des quaternions et de l'algèbre des quaternions

1.2.2.1. Rotation et quaternion élémentaire [8,9,10]

Géométriquement, quelle que soit la configuration des bases $X Y Z$ et $x y z$, il existe deux rotations qui permettent de passer de la base $X Y Z$ à la base $x y z$

1- rotation d'axe, le vecteur $u = (a, b, g)$ et d'angle noté θ ($0 < \theta < 2\pi$).

2- rotation d'axe, le vecteur $-u = -(a, b, g)$ et d'angle $2\pi - \theta$ ($0 < 2\pi - \theta < 2\pi$).

- L'idée a donc été de créer un être mathématique nouveau q , à quatre composants, appelé le *quaternion*, représente cette transformation géométrique, qu'il ne faut pas confondre avec la rotation au sens de la mécanique qui est un vecteur matérialisant la vitesse angulaire et l'axe de la rotation.

$$q = \left(\cos \frac{q}{2}, m \sin \frac{q}{2} \right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{q}{2} \\ a \sin \frac{q}{2} \\ b \sin \frac{q}{2} \\ g \sin \frac{q}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

1.2.2.2. Définition de l'algèbre des quaternions [8,9,10]

L'algèbre des quaternions est le sous espace vectoriel, de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, engendré par la base (e, i, j, k)

-Un quaternion avec les composants a, b, c et d peut également être exprimé comme quatre nombres complexes du paramètre, avec une composante réelle q_0 et trois composantes imaginaires q_1, q_2 et q_3 , comme suit:

$$q = q_0 e + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Où : } e = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad i = (0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad j = (0 \ 0 \ 1 \ 0) \quad k = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

- La partie imaginaire est assimilable à un vecteur.
- Le quaternion pur a une partie réelle nulle.
- L'ensemble \mathbf{P} des quaternions purs est un sous espace vectoriel de dimension 3.
- Tout quaternion se décompose de manière unique en sa partie réelle et sa partie pure.

1.2.2.3. Opérations dans l'algèbre des quaternions [9]

1.. Le conjugué

Le conjugué de q est noté \bar{q}

$$q = q_0 e + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad \bar{q} = q_0 e - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

$$\text{Conjugué } (q.q') = \text{conjugué } (q') \cdot \text{conjugué } (q)$$

$$q \text{ quaternion pur} \Leftrightarrow \bar{q} = -q$$

2. Structure d'algèbre

- Ø Une multiplication par un scalaire de définition classique.
- Ø Une opération d'addition associative et commutative.
- Ø Une multiplication associative mais non commutative en générale, distributive par rapport à l'addition et satisfaisant aux règles de calcul suivantes, fournies par la table:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -e \quad e^2 = e$$

$$e.i = i.e = i \quad e.j = j.e = j \quad e.k = k.e = k$$

$$i.j = -j. i = k$$

$$j.k = -k.j = i$$

$$k.i = -i.k = j$$

3. Produit scalaire

$$q = q_0 e + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad q' = q_4 e + q_5 i + q_6 j + q_6 k$$

$$q.q' = (q_0 e + q_1 i + q_2 j + q_3 k). (q_4 e + q_5 i + q_6 j + q_6 k)$$

Donc:

$$q.q' = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

et :

$$\vec{q} \cdot \vec{q}' = \text{Re}(q.q') \quad (\text{A.5})$$

4. Norme

$$\text{Norme}(q) = |q| = \sqrt{\text{Re}(q.q')} \quad (\text{A.6})$$

$$|q.q'| = |q| \cdot |q'| \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Si : } q \neq 0 \text{ donc } q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \quad (\text{A.8})$$

- **Remarque**

La multiplication dans l'algèbre de deux quaternions purs s'explique aussi à l'aide du produit scalaire des quaternions et du produit vectoriel.

$$q.q' = -(\vec{q} \cdot \vec{q}') \cdot e + \vec{q} \wedge \vec{q}' \quad (\text{A.9})$$

NB : les vecteurs de base sont orthogonaux un à un et unitaires.

1.2.3. Ensembles des quaternions de norme 1 [10,11]

C'est des quaternions qui nous intéressent plus particulièrement pour représenter les rotations en tant qu'isométries.

q un élément de S, posons :

$$p \in P \Rightarrow f(p) \Rightarrow qp\bar{q}$$

On montre alors que l'application f se décompose de manière unique sous la forme :

$$q = \cos \frac{q}{2} + \vec{k} \sin \frac{q}{2} \quad (\text{A.10})$$

Ci-dessous la rotation d'angle θ et l'axe k qui transfère V en V', nous aurons en termes de quaternions:

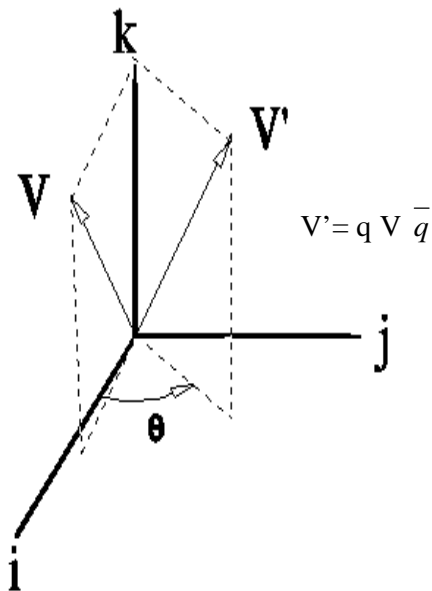


Figure A.2. Rotation d'angle q et l'axe k qui transfère V en V'

$$q = \left(\cos \frac{q}{2}, \vec{k} \sin \frac{q}{2} \right)$$

On établit donc une analogie simple entre les éléments de S et les rotations de l'espace \mathbb{R}^3 d'axe \vec{k} et d'angle θ .

1.2.3.1. Propriété

Si V est un vecteur initial, V_1 son image par la rotation ψ , V_2 l'image de V_1 par la rotation θ et V_3 l'image de V_2 par la rotation ϕ

$$\begin{cases} V_3 = q_3 V_2 \overline{q_3} \\ V_2 = q_2 V_1 \overline{q_2} \\ V_1 = q_1 V \overline{q_1} \end{cases} \quad \text{P} \quad V_3 = q_3 q_2 q_1 V \overline{q_1 q_2 q_3} = q V \overline{q} \quad (\text{A.11})$$

$$q = \left(\cos \frac{q}{2}, \vec{k} \sin \frac{q}{2} \right)$$

La comparaison avec la figure précédente Figure 2.2, donnera directement l'axe de la rotation et son angle θ , par :

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + c_2^2 + d_3^2}} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \cos \frac{q}{2} = a \\ \sin \frac{q}{2} = \sqrt{b_1^2 + c_2^2 + d_3^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

1.2.3.2. Transformation d'un vecteur

Si le vecteur V est l'image du vecteur U par une rotation de quaternion q alors V se calcule par:

$$q = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]$$

$$\vec{A} = q_1 \vec{X} + q_2 \vec{Y} + q_3 \vec{Z} \quad (\text{A.13})$$

$$\vec{V} = (2q_0^2 - 1)\vec{U} + 2q_0 \vec{A} \wedge \vec{U} + 2(\vec{A} \cdot \vec{U})\vec{A} \quad (\text{A.14})$$

On peut utiliser la matrice de passage p pour obtenir les nouvelles coordonnées

$$\vec{V} = \cos \theta \vec{U} + (1 - \cos \theta) [(\vec{k} \cdot \vec{U})\vec{U} - \vec{k} \wedge \vec{U}] \quad (\text{A.15})$$

2. Dynamique d'un satellite et quaternion d'attitude

2.1. Dérivation et rotation instantanée W [9]

Nous désignerons par I, J, K les quaternions de base de l'espace de référence absolu et par i, j, k ceux d'une base R mobile. Nous rappelons que la rotation instantanée ne concerne que le mouvement de R par rapport à Ra

Le quaternion q représente la rotation géométrique transformant à l'instant t la base I ,J,K en i,j,k. Ce quaternion, variable à priori, est donc fonction du temps t.

2.1.1. La dérivation temporelle d'un quaternion $q(t)$

Cette dérivation est définie comme pour les vecteurs, par exemple par la relation :

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = q_0 \dot{e} + q_1 \dot{I} + q_2 \dot{J} + q_3 \dot{K} \quad (\text{A.16})$$

En pratique la dérive d'un quaternion, comme le quaternion lui-même, n'a pas de lien avec la base, puisque elle caractérise l'évolution d'une transformation géométrique intrinsèque.

On veillera à ne pas confondre avec la dérivation d'un vecteur qui, elle est associée à une base de référence, tout comme la vitesse.

2.1.2. La rotation instantanée W

En définit la rotation instantanée comme suit :

$$W = 2 \dot{q} \bar{q} = -2 \bar{q} \dot{q} \quad (\text{A.17})$$

C'est purement imaginaire ou pur, représentant le vecteur rotation instantanée du repère R (*satellite*), exprimé dans la base d'écriture du quaternion

- **Exemple**

Soit le quaternion représentant la rotation géométrique d'angle θ autour de l'axe fixe K

$$q = \cos \frac{\theta}{2} e + 0I + 0J + \sin \frac{\theta}{2} K = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \vec{K} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

Sa dérivé, définie comme suite :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\dot{q}}{2} \left(-\sin \frac{q}{2} e + 0I + 0J + \cos \frac{q}{2} k \right)$$

La rotation instantanée du mouvement absolu, exprimée dans la base I J K est comme suite :

$$\Omega = 2 \dot{q} \bar{q} = \dot{q} K$$

- **Généralisation**

On utilise le quaternion $q(t)$ et son conjugué, représentant les rotation R_q et son inverse R_q^{-1} , variables de \mathbf{R}^3 , donc fonction du temps t .

$i(t), j(t), k(t)$ est la base mobile déduite de la base [I, J, K] inertielle, par la rotation géométrique associée à $q(t)$.

Ω_s Représentation en axes relatifs et Ω_I représentation en axes inertiels, sont les quaternions représentant la rotation géométrique Ω dans chaque base.

$$\begin{aligned} i(t) &= qI\bar{q} \\ \frac{di}{dt} &= \dot{q}I\bar{q} + qI\dot{\bar{q}} \end{aligned} \tag{A.18}$$

Mais $2 \dot{q} \bar{q}$ est pur, donc en posant :

$$pu \left[2 \dot{q} \bar{q} \right] = 2 \dot{q} \bar{q} = \Omega \in P$$

Nous retrouvons la définition classique du vecteur rotation de la mécanique et découvrons que ce vecteur est donné par :

$$\Omega_I = 2 \dot{q} \bar{q} = p_I I + q_I J + r_I K \Rightarrow \overset{\mathbf{r}}{\Omega}_S = p_I \overset{\mathbf{r}}{X} + q_I \overset{\mathbf{r}}{Y} + r_I \overset{\mathbf{r}}{Z} \tag{A.19}$$

Où le vecteur rotation est exprimé, en tant que quaternion, dans la base de référence absolue (I, J, K) des quaternions de S et ensuite comme vecteur sur la base absolue (X, Y, Z) de \mathbf{R}^3 :

$$\text{En axe inertiels} \quad \dot{q} = \frac{1}{2} \Omega_I q \tag{A.20}$$

Rappelons que la rotation instantanée est une notion intrinsèque ne dépendant que du mouvement et pas de la base d'expression du vecteur.

- **Remarque capitale et non évidente**

Il faut bien faire la différence entre le quaternion et le vecteur associé [9]. Ce sont les expressions des quaternions ou des vecteurs qui changent avec la base.

Il faut bien comprendre que dans l'espace affine R^3 , le vecteur rotation est une donnée intrinsèque. Donc si le quaternion q transforme la base des quaternions I J K (ou des vecteurs X Y Z) en la base des quaternions i j k (ou des vecteurs x y z), alors le vecteur Ω devient Ω' n'ayant pas changé de coordonnées et pour retrouver Ω intrinsèque, il faut effectuer la rotation inverse de quaternion conjugué de q .

Donc exprimé dans la base mobile, le vecteur rotation, en tant que quaternion, a un quaternion Ω_s qui se déduit de Ω_I par la rotation inverse de q donc par la rotation de quaternion conjugué de q

$$\Omega_s = R_q^{-1}(\Omega_I) = \bar{q} \left[2 \dot{q} \bar{q} \right] q = 2 \bar{q} \dot{q} \tag{A.21}$$

$$\Omega_s = pi + qj + rk \Rightarrow \Omega_s = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$

Où le vecteur rotation est exprimé, en tant que quaternion, dans la base de référence relative i j k des quaternions de S et ensuite comme vecteur sur la base relative x y z de R^3

Donc dans la base relative on a :

$$\Omega_s = 2 \bar{q} \dot{q} = pi + qj + rk \Rightarrow \Omega_s = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \tag{A.22}$$

- **Conclusion**

Le même vecteur rotation s'exprime dans chaque base comme ci-dessous :

- $\Omega_I = 2 \dot{q} \bar{q} = \begin{bmatrix} p_I \\ q_I \\ r_I \end{bmatrix}_{I,J,K}$: Rotation absolue exprimée en axes inertiels I J K ou X Y Z
- $\Omega_s = 2 \bar{q} \dot{q} = \begin{bmatrix} p_s \\ q_s \\ r_s \end{bmatrix}_{i,j,k}$: Rotation absolue exprimée en axes mobiles i j k ou x y z liés

au satellite.

2.2. Calcul de la matrice de passage [9,12]

$P(X, Y, Z \rightarrow x, y, z)$ est la matrice de passage de la base de référence absolue à la base mobile relative liée au satellite. Nous savons que les anciennes composantes s'expriment à l'aide de P et des nouvelles composantes.

Soit q un quaternion unité élément de S , donc associé à une rotation R_q :

$$(\overset{\bullet}{X}, \overset{\bullet}{Y}; \overset{\bullet}{Z}) \rightarrow [\overset{\bullet}{x} = R_q(\overset{\bullet}{X}), \overset{\bullet}{y} = R_q(\overset{\bullet}{Y}), \overset{\bullet}{z} = R_q(\overset{\bullet}{Z})] \quad (\text{A.23})$$

Où traduit en quaternion, appliqué à V :

$$R_q(\overset{\bullet}{V}) = qV\bar{q} \quad (\text{A.24})$$

Pour calculer la matrice de changement de base, on écrit :

$$\begin{aligned} x &= R_q(X) = p_{11}X + p_{21}Y + p_{31}Z \\ y &= R_q(Y) = p_{12}X + p_{22}Y + p_{32}Z \\ z &= R_q(Z) = p_{13}X + p_{23}Y + p_{33}Z \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Par la relation (2.25):

$$P \text{ (ij)} = q \cdot (XI + YJ + ZK) \cdot \bar{q} \quad (\text{A.26})$$

La transformé vectorielle de X qui donne le vecteur x

$$\begin{aligned} x &= R_q(X) = p_{11}X + p_{21}Y + p_{31}Z = qX\bar{q} \\ &= (q_0E + q_1I + q_2J + q_3K) \cdot X \cdot (q_0E - q_1I - q_2J - q_3K) \\ &= [(2(q_0^2 + q_1^2) - 1)X + 2(q_1q_2 + q_0q_3)Y + 2(q_1q_3 - q_0q_2)Z] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Donc:

$$P = \begin{pmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

2.3. Equation de comportement du quaternion en axes satellite [9]

Les équations en axes satellite sont les plus importantes dans les applications pratiques, puisqu' en mécanique il apparaît clairement que les axes satellite sont évidemment mieux placés par rapport au corps que ceux du référentiel fixe.

L'évolution temporelle du quaternion est donnée par l'équation :

$$\begin{aligned}\Omega_s &= 2\dot{q} = pi + qj + rk \\ \dot{q} &= \frac{1}{2}q\Omega_s\end{aligned}\quad (A.29)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2}(q_0e + q_1i + q_2j + q_3k) \cdot (pi + qj + rk) = \begin{bmatrix} -pq_1 - qq_2 - rq_3 \\ pq_0 - qq_3 + rq_2 \\ pq_3 + qq_0 - rq_1 \\ -pq_2 + qq_1 + rq_0 \end{bmatrix}$$

De Ω_s on trouve la relation fondamentale matricielle d'évolution du quaternion exprimé en axes satellite avec une matrice M_s

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}M_s q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}\quad (A.30)$$

$$\text{Donc : } M_s = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix}\quad (A.31)$$

2.4. Equation du mouvement d'un satellite autour de son centre d'inertie [9]

La résolution du problème de l'attitude d'un satellite dans l'espace consiste donc à résoudre sept (7) équations totalement couplées.

- une équation vectorielle équivalent à 3 équations différentielles scalaires, résultantes du théorème du moment cinétique appliqué au centre d'inertie du satellite et fournissant p, q, r donc la rotation instantanée absolue.
- une équation vérifiée par le quaternion q , équivalente à 4 équations différentielles scalaires, traduisant les équations d'évolution du quaternion d'attitude et nécessitant la connaissance de p, q, r calculés en parallèle. Son intégration fournit donc les quaternions donnant l'attitude du satellite.

Théorème du moment cinétique, donnant p, q, r grâce aux Conditions initiales sur Ω :

$$\frac{d}{dt} I\Omega + \Omega \wedge I\Omega = M_G\quad (A.32)$$

$$\dot{\Omega} = p\dot{x} + q\dot{y} + r\dot{z} \quad (\text{A.33})$$

$$\dot{\Omega} (t=t_0) = \dot{\Omega}_0 \quad (\text{A.34})$$

Équation d'évolution du quaternion d'attitude q et conditions initiales permettant le calcul de q :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} M_S \cdot q \quad (\text{A.35})$$

La connaissance de q permet le calcul de la matrice de passage de la base fixe à celle du satellite.

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$q (t=t_0) = q_0 \quad (\text{A.37})$$

Équation de redondance, permettant la vérification du bon fonctionnement de l'algorithme de calcul :

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (\text{A.38})$$

- **Le vecteur rotation relatif**

On peut aussi évaluer le vecteur rotation relatif du satellite par rapport à ce repère R, et calculer alors la matrice M_S qui permet de déterminer le quaternion d'attitude q du satellite par rapport à R.

Si le repère R a une rotation instantanée connue dans le repère absolu par ses composantes Ω_X, Ω_Y, Ω_Z, alors il faudra remplacer p, q, r par p*, q*, r* dans le calcul de M_S puisque c'est l'attitude dans le repère relatif R qui est alors recherchée.

$$\dot{\Omega} (Sat/R) = \dot{\Omega} (Sat/R_a) - \dot{\Omega} (R/R_a) \quad (\text{A.39})$$

et :

$$\begin{pmatrix} p^* \\ q^* \\ r^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{21} & c_{22} & c_{32} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

2.5. Quaternion associée à une rotation axiale uniforme [9,10]

On peut être amené à suivre l'évolution d'un repère tournant à vitesse constante autour d'un axe dit Δ .

On appelle ω la vitesse angulaire Δ l'axe et p, q, r les composantes du vecteur rotation instantanée Ω constant.

$$\left[\begin{array}{l} w = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \\ q = w(t - t_0) \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \\ q(t - t_0) - \left(\cos \frac{q}{2} + k \sin \frac{q}{2} \right) \end{array} \right] \Rightarrow q(t) = q(t_0).q(t-t_0) \quad (\text{A.41})$$

3. Rapport entre les quaternions et les angles d'Euler et les cosinus de direction [9,10]

Les cosinus de direction peuvent être exprimés en termes d'angles d'Euler ou quaternions:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos q \cos y & -\cos f \sin y + \sin f \sin q \cos y & \sin f \sin y + \cos f \sin q \cos y \\ \cos q \sin y & \cos f \cos y + \sin f \sin q \sin y & -\sin f \cos y + \cos f \sin q \sin y \\ -\sin q & \sin f \cos q & \cos f \cos q \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

$$= \begin{pmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

En comparant les éléments des équations ci-dessus, les éléments de quaternion peuvent être exprimés directement en termes d'angles d'Eluer ou cosinus de direction.

Pour des petits écarts angulaires, les paramètres de quaternion peuvent être dérivés en utilisant les rapports suivants :

$$q_0 = \frac{1}{2} (1 + c_{11} + c_{22} + c_{33})^{1/2} \quad (\text{A.45})$$

$$q_1 = \frac{1}{4a} (c_{32} - c_{31}) \quad (\text{A.46})$$

$$q_2 = \frac{1}{4a} (c_{13} - c_{31}) \quad (\text{A.47})$$

$$q_3 = \frac{1}{4a} (c_{21} - c_{12}) \quad (\text{A.48})$$

Par les angles d'Euler :

$$q_0 = \cos \frac{f}{2} \cos \frac{q}{2} \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{f}{2} \sin \frac{q}{2} \sin \frac{y}{2} \quad (\text{A.49})$$

$$q_1 = \sin \frac{f}{2} \cos \frac{q}{2} \cos \frac{y}{2} - \cos \frac{f}{2} \sin \frac{q}{2} \sin \frac{y}{2} \quad (\text{A.50})$$

$$q_2 = \cos \frac{f}{2} \sin \frac{q}{2} \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{f}{2} \cos \frac{q}{2} \sin \frac{y}{2} \quad (\text{A.51})$$

$$q_3 = \cos \frac{f}{2} \cos \frac{q}{2} \sin \frac{y}{2} + \sin \frac{f}{2} \sin \frac{q}{2} \cos \frac{y}{2} \quad (\text{A.52})$$

1. Rappels sur les polynômes et fonctions de Legendre [24]

Le polynômes de Legendre $p_n^m(q)$, ils sont définis par la formule suivante :

$$p_n^m(q) = \left[\left(\frac{(2-d_m^0)(n-m)!}{(n+m)!} \right) \right]^{1/2} \frac{(2n-m)!!}{(n-m)!} \sin^m q \times \left(\cos^{n-m} q - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-m-2} q + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{(2)(4)(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-m-4} q - \dots \right) \quad (\text{B.1})$$

Avec :

$$(2n-1)!! = (1)(3)(5)(2n-1).$$

En pratique .Les $p_n^m(q)$ sont les plus facilement calculés a partir de la relation :

$$p_n^m(q) = S_{n,m} P^{n,m}(q) \quad (\text{B.2})$$

Ou $S_{n,m}$ sont des coefficients définis par la formule :

$$p_n^m(q) = \left[\left(\frac{(2-d_m^0)(n-m)!}{(n+m)!} \right) \right]^{1/2} \frac{(2n-m)!!}{(n-m)!} \quad (\text{B.3})$$

et les $P^{n,m}(q)$ sont des coefficients de fonctions de Gauss que l'on peut obtenir à partir des formules récurrentes suivantes :

$$P^{0,0} = 1$$

$$P^{n,n} = \sin(q) P^{n-1,n-1} \quad (\text{B.4})$$

$$P^{n,m} = \cos(q) P^{n-1,m} - k^{n,m} P^{n-2,m}$$

Avec

$$k^{n,m} = \frac{(n-1)^2 - m}{(2n-1)(2n-3)} \quad \text{pour } n > 1 \quad (\text{B.5})$$

$$k^{n,m} = 0 \quad \text{pour } n=1$$

Le tableau A.2 donne les leurs des coefficients $S_{n,m}$ calculés jusqu'à l'ordre $n=3$ et les polynômes de Legendre $p_n^m(q)$ correspondants sont présentés dans le tableau A.2

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	0	1	2	3
1	1	1		
2	3/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3/2}$	
3	5/2	$5\sqrt{6}/4$	$\sqrt{15}/4$	$\sqrt{10}/4$

Tableau A.1. Valeurs de coefficients $S_{n,m}$ pour $n < 3$

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	0	1	2	3
0	1			
1	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$		
2	$3/2(\cos^2(\theta)-1/3)$	$\sqrt{3} \cos(\theta)\sin(\theta)$	$\sqrt{3/2} \sin^2(\theta)$	
3	$5/2(\cos^3(\theta)-3/2\cos(\theta))$	$5\sqrt{6}/4 \sin(\theta)(\cos^2(\theta)-1/5)$	$\sqrt{15}/4 \cos(\theta)\sin^2(\theta)$	$\sqrt{10}/4 \sin^3(\theta)$

Tableau A.2. Polynômes de Legendre $p_n^m(q)$ pour $n < 3$

2. Coefficients du model IGRF 1975 [24]

Dans ce travail, nous avons utilisé le model IGRF 1975 pour lequel les coefficients g_n^m et h_n^m ainsi que leurs dérivées g_n^{0m} et h_n^{0m} sont donnés par le tableau A.3.

n	m	g (nT)	h (nT)	g^0 (nT/an)	h^0 (nT/an)
1	0	-30186	----	25.6	
1	1	-2036	-15735	10.0	-10.2
2	0	-1691	----	-24.9	
2	1	2997	-12124	0.7	-3.0
2	2	1551	-37	4.3	-18.9
3	0	1299		-3.6	
3	1	-2144	-361	-10.6	6.9
3	2	1296	-249	-4.1	2.5
3	3	805	-253	-4.2	-5.0
4	0	951		-0.2	
4	1	807	148	-2.0	5.0
4	2	462	-264	-3.5	0.8
4	3	-393	37	-2.1	1.7
4	4	235	-307	-3.1	-1.0
5	0	-204		0.3	
5	1	368	39	-0.7	1.2
5	2	275	142	1.1	2.3
5	3	-20	-147	-1.6	-2.0
5	4	-161	-99	-0.5	1.32
5	5	-38	-74	1.0	1.1
6	0	46		0.2	
6	1	57	-23	0.5	-0.5
6	2	15	102	2.0	-0.1
6	3	-210	88	2.6	-0.2
6	4	-1	-43	0.0	-1.3
6	5	-8	-9	0.9	0.7
6	6	-114	-4	-0.1	1.7
7	0	66		0.0	
7	1	-57	-88	0.0	-1.4
7	2	-7	-26	0.0	-0.1
7	3	7	-6	0.6	0.3
7	4	-22	11	0.9	0.3
7	5	-9	27	0.3	-0.7
7	6	11	-17	0.3	0.1
7	7	-8	-14	-0.5	0.8
8	0	11		0.2	
8	1	13	4	0.3	0.2
8	2	3	-15	0.0	-0.4
8	3	-12	2	0.2	-0.2
8	4	-1	-19	-0.4	-0.3
8	5	-6	1	-0.3	0.4
8	6	2	18	0.5	-0.3
8	7	9	-6	-0.3	-0.6
8	8	3	-19	-0.1	0.3

Tableau A.3. Coefficients du model IGRF 1975

1. Equations cinématique du mouvement

Les équations de passage du repère inertiel $\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i$ au repère despiné $\hat{X}_d, \hat{Y}_d, \hat{Z}_d$ s'écrivent sous forme matricielle symbolique comme suit :

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_d \\ \hat{Y}_d \\ \hat{Z}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin a & \cos b & 0 \\ -\cos a \sin d & -\sin a \sin d & \cos d \\ \cos a \cos d & \sin a \cos d & \sin d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_i \\ \hat{Y}_i \\ \hat{Z}_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Sachant que le vecteur rotation absolue du satellite $\mathbf{r}_{\dot{w}_s}$ est définie

$$\mathbf{r}_{\dot{w}_s} = \mathbf{i}\dot{a}\hat{Z}_i - \mathbf{j}\dot{a}\hat{X}_i + \mathbf{j}\dot{d}\hat{Z}_d \quad \text{par :} \quad (\text{C.2})$$

Il vient, en utilisant la matrice de passage ci-dessus :

$$\mathbf{r}_{\dot{w}_s} = w_{xd} \hat{X}_d + w_{yd} \hat{Y}_d + w_{zd} \hat{Z}_d \quad (\text{C.3})$$

Avec :

$$w_{xd} = -\dot{d} \quad (\text{C.4})$$

$$w_{yd} = \dot{a} \cos d \quad (\text{C.5})$$

$$w_{zd} = \dot{a} \sin d + \dot{d} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{r}_{\dot{w}_d} = \mathbf{r}_{\dot{w}_s} - \mathbf{j}\dot{d}\hat{Z}_d = w_{xd} \hat{X}_d + w_{yd} \hat{Y}_d + w_{zd} \hat{Z}_d - \mathbf{j}\dot{d}\hat{Z}_d \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{r}_{\dot{w}_d} = w_{xd} \hat{X}_d + w_{yd} \hat{Y}_d + (w_{zd} - \dot{d}) \hat{Z}_d \quad (\text{C.8})$$

2. Calcul du vecteur induction magnétique terrestre dans le repère despiné

Le vecteur induction magnétique terrestre \mathbf{B} par rapport au repère inertiel géocentrique $\hat{X}_{50}, \hat{Y}_{50}, \hat{Z}_{50}$ s'écrit sous forme :

$$\mathbf{B} = B_{x50} \hat{X}_{50} + B_{y50} \hat{Y}_{50} + B_{z50} \hat{Z}_{50} \quad (\text{C.9})$$

Pour déterminer les composantes $b_1 = B_{xd}, b_2 = B_{yd}, b_3 = B_{zd}$ de \mathbf{B} dans le repère despiné

$\hat{X}_d, \hat{Y}_d, \hat{Z}_d$, on applique les formules de transformation :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xd} \\ \mathbf{B}_{yd} \\ \mathbf{B}_{zd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin a & \cos b & 0 \\ -\cos a \sin d & -\sin a \sin d & \cos d \\ \cos a \cos d & \sin a \cos d & \sin d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x50} \\ \mathbf{B}_{y50} \\ \mathbf{B}_{z50} \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Où α et δ sont respectivement l'ascension et la déclinaison de l'axe de spin $\hat{Z} = \hat{Z}_d$.

On calcule alors les dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial a} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos a & -\sin b & 0 \\ \sin a \sin d & -\cos a \sin d & 0 \\ -\sin a \cos d & \cos a \sin d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x50} \\ \mathbf{B}_{y50} \\ \mathbf{B}_{z50} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial d} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\cos a \cos d & -\sin a \cos d & -\sin d \\ -\cos a \sin d & -\sin a \sin d & \cos d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x50} \\ \mathbf{B}_{y50} \\ \mathbf{B}_{z50} \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

3. Calcul les équation dynamique complètes de l'attitude

Le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{\Gamma} \quad (\text{C.13})$$

Sachant que l'on a :

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{I} \dot{\mathbf{w}}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_t & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{xd} \\ w_{yd} \\ w_{zd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_t w_{xd} \\ \mathbf{I}_t w_{yd} \\ \mathbf{I}_z w_{zd} \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

Si l'on se place dans le repère despinné $\hat{X}_d \hat{Y}_d \hat{Z}_d$ la dérivée absolue du vecteur $\dot{\mathbf{H}}$ s'écrit

$$: \frac{d\dot{\mathbf{H}}}{dt} / R_i = \dot{\mathbf{H}} / R_d + \dot{\mathbf{w}}_d \times \mathbf{H}$$

$$\dot{\mathbf{H}} / R_d = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_t \dot{w}_{xd} \\ \mathbf{I}_t \dot{w}_{yd} \\ \mathbf{I}_z \dot{w}_{zd} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{w}}_d \times \mathbf{H} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ w_{xd} & w_{yd} & (w_{zd} - \mathcal{J}) \\ \mathbf{I}_t w_{xd} & \mathbf{I}_t w_{yd} & \mathbf{I}_z w_{zd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_z - \mathbf{I}_t) w_{yd} w_{zd} + \mathbf{I}_t w_{yd} \mathcal{J} \\ (\mathbf{I}_t - \mathbf{I}_z) w_{zd} w_{xd} - \mathbf{I}_t w_{xd} \mathcal{J} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{d\dot{\mathbf{H}}}{dt} / R_i = \dot{\mathbf{H}} / R_d + \dot{\mathbf{w}}_d \times \mathbf{r} = \begin{bmatrix} I_t \dot{w}_{xd} \\ I_t \dot{w}_{yd} \\ I_z \dot{w}_{zd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_Z - I_t) w_{yd} w_{zd} + I_t w_{yd} j \\ (I_t - I_Z) w_{zd} w_{xd} - I_t w_{xd} j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{d\dot{\mathbf{H}}}{dt} / R_i = \begin{bmatrix} I_t w_{xd} + (I_Z - I_t) w_{yd} w_{zd} + I_t w_{yd} j \\ I_t w_{yd} + (I_t - I_Z) w_{zd} w_{xd} - I_t w_{xd} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{xd} \\ \Gamma_{yd} \\ \Gamma_{zd} \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

$$I_t \dot{w}_{xd} + (I_Z - I_t) w_{yd} w_{zd} + I_t w_{yd} j = \Gamma_{xd}$$

$$I_t \dot{w}_{yd} + (I_t - I_Z) w_{zd} w_{xd} - I_t w_{xd} j = \Gamma_{yd} \quad (\text{C.18})$$

$$I_z \dot{w}_{zd} = \Gamma_{zd}$$

Où Γ_{xd} , Γ_{yd} et Γ_{zd} sont les composantes du couple extérieur suivant le Trièdre $\hat{Z}_d \hat{Y}_d \hat{X}_d$.

En remplaçant w_{yd} , w_{xd} , w_{zd} et leurs dérivées en fonction de a , d , j il vient :

$$\begin{aligned} I_t \dot{d} + (I_Z - I_t) \dot{a}^2 \sin d \cos d + I_z j \dot{a} \cos d &= \Gamma_{xd} \\ I_t \dot{a} \cos d + (I_Z - 2I_t) \dot{a} \dot{d} \sin d + I_z j \dot{d} &= \Gamma_{yd} \\ I_z \dot{a} \sin d + I_z \dot{a} \dot{d} \cos d + I_z j \dot{a} &= \Gamma_{zd} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Ce sont les équations dynamiques complètes de l'attitude.

Conclusion générale

Lors de ce travail, nous avons étudié deux procédures de commande d'attitude d'un satellite. La première procédure est l'application de l'algèbre des quaternions pour la commande d'attitude d'un satellite. Ces quaternions d'attitude conduisent à des solutions expriment les rotations absolues en axe relatif.

Nous avons défini par I, J, K les quaternions de base de l'espace de référence absolu et ceux i, j, k d'une base R mobile (satellite par exemple).

Nous rappelons également que la rotation instantanée ne concerne que le mouvement de R par rapporte à R_a .

Le quaternion q représente une rotation axiale. Par exemple en mécanique classique, la rotation géométrique permet de passer à l'instant t de la base I, J, K absolue à la base relative i, j, k .

Si la base relative est mobile, la rotation est évolutive, tant par son angle que par son axe de rotation.

Nous avons abordé l'utilisation des quaternions dans les magnéto-coupleurs et nous sommes arrivé à deux concepts : la position du satellite par rapport au repère orbital résulte de la rotation géométrique, et le mouvement instantané galiléen autour du centre d'inertie, est une rotation axiale de vitesse angulaire donnée par la rotation instantanée Ω de composantes (p, q, r) en axes absolus.

Nous avons aussi abordé l'utilisation des quaternions avec l'application aux déclencheurs pour le contrôle d'attitude des satellites.

Nous avons opté pour une commande simple mais techniquement utile. Celle-ci a consiste à induire l'anti-remontage et un intégrateur intelligent. Les simulations nos a permis de vérifie les avantages pratique de l'idée proposée. Les réponses transitoires excessives se sont améliorées jusqu'à un degré significatif par commande d'anti-remontage (AWC) et intégrateur intelligent (II).

La deuxième procédure est l'application de la commande optimale (équation d'Hamilton) en temps minimum et en boucle ouverte au contrôle d'attitude par magnéto coupleurs des satellites stabilisés par rotation.

Nous avons appliqué le principe de maximum pour la définition des lois de commande optimales et nous avons ramené la résolution du problème d'optimisation non linéaire avec des conditions aux deux bouts à une recherche unidimensionnelle du vecteur adjoint initial.

A titre d'exemple, nous avons montré les performances de la commande magnétique pour la réorientation de l'axe de spin à vitesse de spin constante d'un satellite de navigation en orbite polaire.

Par ailleurs, nous avons constaté que l'hypothèse d'une nutation négligeable permet de faciliter la recherche de la (ou les) trajectoires optimales et nous avons vérifié que l'action de la commande magnétique reste suffisamment douce pour ne pas amplifier les vitesses angulaires transverses du satellite.

Ce travail entré dans le cadre d'un projet de recherche nationale sur la mise et le maintien à poste des satellites en cours au laboratoire d'électromagnétisme et télécommunication. Les résultats obtenus représente à une partie du cahier de charges.

On peut relever deux points essentiels pour clore cette conclusion. Il nous a particulièrement utile d'aborder l'algèbre des quaternions, il serait très utile sur ce point d'approfondi le formalisme théorique du contrôle d'attitude en développant des travaux sur la base de l'algèbre de Clifford.

Liste des figures

Chapitre 2 :

Figure 2.1. Le satellite.....	14
Figure 2.2. Les angles d'Euler.....	16
Figure 2.3. Champ magnétique terrestre.....	19
Figure 2.4. Linge des nœuds.....	20
Figure 2.5. Schéma fonctionnel du contrôle d'attitude.....	22
Figure 2.6. Diagramme fonctionnel	27
Figure 2.7. Les variations des composantes de la rotation instantanée Ω	28
Figure 2.8. Les variations des vitesses de satellite pour une orbite géostationnaire.....	30
Figure 2.9. Les variations des vitesses de satellite pour une orbite héliosynchrone.....	31
Figure 2.10. Les variations des vitesses de satellite pour une orbite inclinée.....	31
Figure 2.11. Les variations des vitesses de satellite pour une orbite elliptique.....	32

Chapitre 3 :

Figure 3.1. Modèle de vaisseau spatial avec quatre roues de réaction.....	35
Figure 3.2. Élément non linéaire de bloc de saturation.....	36
Figure 3.3. Résultats de simulation des composants de quaternion pour le contrôleur régulier PID (plus intégrale plus dérivée).....	42
Figure 3.4. Résultats de simulation des composants de vitesse angulaire de satellite pour le contrôleur régulier PID (plus intégrale plus dérivée).....	43
Figure 3.5. Résultats de simulation des couples de commande de satellite pour le contrôleur régulier PID (plus intégrale plus dérivée).....	43
Figure 3.6. Contrôleur de PID augmenté avec AWC.....	45
Figure 3.7. Résultats de simulation de vitesse angulaire ω_1 de satellite pour le contrôleur AWC (anti-windup control).....	46
Figure 3.8. Résultats de simulation de vitesse angulaire ω_2 de satellite pour le contrôleur AWC (anti-windup control).....	47

Figure 3.9. Résultats de simulation de vitesse angulaire ω_3 de satellite pour le contrôleur AWC (anti-windup control).....	47
Figure 3.10. Résultats de simulation des couples de commande de satellite pour le contrôleur AWC (anti-windup control).....	48
Figure 3.11. Schéma fonctionnel pour l'intégrateur intelligent.....	48
Figure 3.12. Résultats de simulation de vitesse angulaire ω_1 de satellite pour le contrôleur II (Intégrateur Intelligent).....	50
Figure 3.13. Résultats de simulation de vitesse angulaire ω_2 de satellite pour le contrôleur II (Intégrateur Intelligent).....	51
Figure 3.14. Résultats de simulation de vitesse angulaire ω_3 de satellite pour le contrôleur II (Intégrateur Intelligent).....	51
Figure 3.15. Résultats de simulation des couples de commande de satellite pour le contrôleur II (Intégrateur Intelligent).....	52

Chapitre 4 :

Figure 4.1. Configuration générale du satellite.....	60
Figure 4.2. Repères et angles de définition d'attitude.....	62
Figure 4.3. La nutation.....	65
Figure 4.4. La nutation négligeable.....	65

Chapitre 5 :

Figure 5.1. Evolution de l'attitude et de la vitesse spin simultanément.....	71
Figure 5.2. Méthode de commande d'attitude et/ou de vitesse de spin en temps minimum et en boucle ouverte.....	79
Figure 5.3. Satellite NOVA.....	82
Figure 5.4. Evolution de l'ascension droite α pour $\gamma_0=85^\circ$	83
Figure 5.5. Evolution de la déclinaison δ pour $\gamma_0=85^\circ$	83
Figure 5.6. La trajectoire dans le plan (α, δ) pour $\gamma_0=85^\circ$	84
Figure 5.7. Evolution de l'ascension droite α pour $\gamma_0=132^\circ$	84
Figure 5.8. Evolution de la déclinaison δ pour $\gamma_0=132^\circ$	85
Figure 5.9. La trajectoire dans le plan (α, δ) pour $\gamma_0=132^\circ$	85
Figure 5.10. Trajectoires optimale dans le plan (α, δ)	86

Sommaire

Introduction générale1

Chapitre 1 :

Généralités sur le contrôle d'attitude d'un satellite

1. Introduction.....5

 1.1. Rôle de SCA5

 1.2. Fonctions assurées5

 1.2.1. Des détecteurs5

 1.2.2. Electronique et informatique de bord6

 1.2.3. Actuateurs ou actionneurs6

 1.2.4. Des amortisseurs de nutation7

 1.3. Nécessite du SCA.....7

 1.3.1. Maîtrise de l'attitude7

2. Exemple de spécification.....8

 2.1. Satellites scientifiques8

 2.2. Satellites d'imagerie8

 2.3. Satellites de télécommunications8

 2.4. Satellite radio amateur8

 2.5. Stations spatiales8

3. Rappelles succinctes sur les perturbations.....9

 3.1. Perturbations externes9

 3.2. Perturbations internes10

4. Rappel de mécanique.....10

 4.1. Théorème du moment cinétique10

 4.1.1. Calcul du moment cinétique H d'un solide11

 4.1.2. Dérivation du moment cinétique12

5. Conclusion.....13

Chapitre 2 :

Utilisation des quaternions d'attitude dans les magnéto-coupleurs

1. Introduction.....	14
1.1 <i>Le satellite</i>	14
1.2 <i>L'orbite</i>	15
1.3 <i>Repères-Nutation-Angles</i>	15
1.4 <i>Gradient de gravité</i>	16
1.5 <i>Champ magnétique terrestre</i>	17
1.5.1. <i>Généralités</i>	17
1.5.2. <i>Modèle simplifier du champ magnétique terrestre</i>	18
1.5.3. <i>Exemple de calcul des composantes de B dans le repère orbital local</i> <i>Pour une orbite héliosynchrone</i>	19
2. Control d'attitude par magnéto-coupleurs	21
2.1 <i>Le magnéto-coupleur</i>	21
2.1.1. <i>Notations et conventions</i>	22
2.1.2. <i>Couple dû aux magnéto-coupleurs</i>	23
2.2 <i>Commande portant sur le moment magnétique</i>	24
2.3 <i>couple perturbateurs</i>	25
3. Les quaternions	25
3.1 <i>Equation d'évolution du quaternion</i>	25
3.2 <i>La rotation relative au repère orbital</i>	25
4. Equations de mouvement.....	26
4.1 <i>Formulation du problème</i>	27
4.2. <i>Présentation des résultats numérique</i>	28
5. Les équations de navigation	29
5.1. <i>Equation de navigation exprimée par ses composantes</i>	29
5.2. <i>Résultats</i>	30
6. Conclusion	33

Chapitre 3 :

Commande d'attitude de satellite avec la saturation de déclencheur

1. Introduction.....	34
2. Grande manoeuvre d'angle.....	35
2.1. Dynamique et cinématique d'attitude	35
2.2. Grande loi de commande de rétroaction d'angle	35
2.3. Stabilité sous la saturation de déclencheur	38
3. Commande d'Anti-remontage.....	44
4. Intégrateur intelligent.....	48
5. Conclusion.....	53

Chapitre 4:

Commande optimale sur un satellite contrôlé par magnéto-coupleurs

1. Introduction.....	54
2. Principaux critère.	55
3. Formulation du problème.....	55
3.1. Mise en équation.....	55
3.2. Choix du critère d'optimalité	56
4. Détermination de la commande optimal.....	57
4.1 Equation canoniques d'Hamilton	57
5. Exemple d'application pratique importante.....	57
5.1 Principaux critères d'optimisation	57
5.1.1. la commande en temps minimum	58
5.1.2. La commande à consommation minimale	58
5.1.3. La commande à énergie minimale	58
6. Conventions et définition.....	58
6.1 Configuration générale de satellite	58
6.2 Définition de l'attitude	61
6.2.1. Repères de référence	61
6.2.2. Angles de définition de l'attitude	61

6.3. Équations du mouvement	62
6.3.1. Equations cinématiques	62
6.3.2. Equations dynamiques	63
6.3.3. Cas ou la nutation est négligeable	64
6.3.4. Expression du couple extérieur	66
6.3.5. Modèle dynamique simplifier du mouvement	67

Chapitre 5 :

La commande optimale en temps minimum d'attitude d'un satellite

1. Stratégies classique de commande d'attitude et de vitesse de spin.....	68
1.1. Modification de l'attitude à vitesse de spin constante.	68
1.2. Modification de l'attitude et de le vitesse de spin simultanément.	69
2. Commandes optimales en temps minimum.....	71
2.1. Cas d'un changement d'attitude a vitesse de spin constante	71
2.2. Cas d'une changement simultané d'attitude et de vitesse de spin	74
2.2.1. Cas générale	74
2.2.2. Evolution en temps minimum de α et ω a δ constante	77
2.2.3. Evolution en temps minimum de \mathbf{d} et \mathbf{w} a \mathbf{a} constante	78
3. Méthode de commande d'attitude et de vitesse de spin en temps minimum.....	79
4. Manoeuvre de réorientation de l'axe de spin du satellite NOVA	81
5. Conclusion.....	87
 <i>Conclusion générale</i>	 88

Annexe

Liste des figures

Bibliographie

Bibliographie

- [1] A.Boufersada. Optimisation de la mise à poste d'un satellite de télécommunications. Master Signal and Systems. April 2005 April 2005 Jijel University Algeria
- [2] F. Chebbara. Optimisation de la mise et du maintien à poste des satellites en constellation Master Microwaves Engineering . Mai 2005 Constantine University Algeria.
- [3] Al Ani Kinane. Optimisation de la mise à poste d'une constellation de satellites de télécommunications. Master Microwaves Engineering . Février 2006. Constantine University Algeria.
- [4] A.Belmerabet et S.Hamdane : Commande optimale en temps minimal au control d'attitude magnétique des satellites stabilisés par rotation. Projet d'Ingénieurs Juin 2004.
- [5] I. M. Achkar. Applications de la commande optimale au control d'attitude des satellites par magnéto-coupleurs. Thèse de Docteur d'Ingénieur ENSAE 1985 Toulouse France.
- [6] G. Robert. Système de contrôle d'attitude et d'orbite d'un satellite. L'école de l'air Marseille Cedex 13.1993.
- [7] G.Robert. Perturbations orbitalesL'école de l'air Marseille Cedex 13.1993.
- [8] D.G.Tiherton , J.L.Westion. Strap down inertial navigation technology. Printed in the UK.BN 0863412602.
- [9] G. Robert. Contrôle de satellite .L'école de l'air Marseille Cedex 13.1994.
- [10] J.Kuang , S.Tan. GPS-Based attitude determination gyostat satellite by quaternion estimation algorithm. The school of electrical and electronic engineering university. Singapore 639798-2002.

- [11] P.Doucon. Commande d'attitude et d'orbite des satellites. CNES. Division Stabilisation Structure Thermique 1984.
- [12] G.L.Wray et D.J.Flynn. An assessment of various solution of the navigation equation for a strap down inertial system. Royal aircraft establishment, technical report 79017. January 1979.
- [13] K.Bitting. Inertial navigation system analysis. Wiley interscience. New York 1971.
- [14] Wie, B., & Barba, P. M. (1985). Quaternion feedback for spacecraft large angle manoeuvres. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 8, 360–365.
- [15] Wie, B., & Weiss, H. (1989). Quaternion feedback regulator for spacecraft eigen axis rotations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 12, 375–380.
- [16] Hanu, R., Kinnaert, M., & Henrotte, J. L. (1987). Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method. *Automatica*, 23, 729–739.
- [17] Kothare, M. V., Campo, P. J., Morari, M., & Nett, C. N. (1994). A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, 30, 1869–1883.
- [18] Wie, B., Heiberg, C., & Bailey, D. (2001). Rapid multi-target acquisition and pointing control of agile spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25, 96–104.
- [19] Krikelis, N. J. (1980). State feedback integral control with intelligent integrators. *International Journal of Control*, 32, 465–473.
- [20] Robinett, R. D., et al. (1997). Lyapunov optimal saturated control for nonlinear systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20, 1083–1088.
- [21] S.R. Vadali, H. Schaub, K.T. Alfriend, Initial conditions and fuel optimal control for formation flying satellites, in: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, No. AIAA 99-4265, Portland, OR, 1999.
- [22] A.P.Sage et C.C.White. *Optimum systems control -second edition*. 1977 by Prentice-hall,inc. Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- [23] P.Naslin. *Théorie de la commande et conduite optimale*. Dunod - Paris 1969.
- [24] L.Pontriaguine et al. *Théorie mathématique des processus optimaux*. Traduction française Editions Mir 1974.

[25] M.Khemliche. Commande optimale avec contraintes sur l'état et sur le Contrôle
Projet de fin d'études ENP septembre 1993.

[26] G.W.Hoskins et R.J.Danchik.. La situation actuelle et l'avenir du système de
navigation par satellite de la NAVY. Navigation, revue de l'institut Français de
Navigation, n°129.Janvier 1985, pp.425-437.

REMERCIEMENT

Qu'il nous soit permis ici de dire notre gratitude à ceux qui nous ont donnés beaucoup de soin à l'élaboration de ce modeste travail et nous ont guidés sur le bon chemin, en espérant que ce mémoire soit le reflet de la bonne formation qu'on a reçu.

On tient à remercier vivement notre encadreur Professeur Mr Benslama pour le soutien et l'aide qu'il n'a jamais manqué de nous apporter, et pour nous avoir inspiré ce sujet si intéressant grâce au quel on a pu élargir nos connaissances, il à su nous faire partager son talent pédagogique et son expérience tout au long de la réalisation de ce travail.

Nous voudrions témoigner notre profonde reconnaissance au le Docteur D. Benatia pour ces conseils et ces orientations durant l'élaboration de ce travail.

Aussi nous remercions les membres de jury : Professeur B.Khaled, Professeur S.Fouzi et Professeur F.Salim pour nous avoir honoré et d'accepter d'évaluer le présent travail.

Enfin, on exprime également nos amples remerciements à nos collègues ; ainsi que tout les amies, qu'ils trouvent ici l'expression de notre amitié et sympathie.

Merci

Dédicace

Je dédie ce travail a :

@ *Mes très chers parents.*

@ *Ma belle famille.*

@ *Mes collègues du département d'électronique.*

@ *Mes amis.*