

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE**

N° d'Ordre :.....

Série :.....

**MEMOIRE DE MAGISTER**

**Présenté Par**

**MR. BENSOUICI TAHAR**

**Option : Traitement du Signal**

**THEME**

*Implémentation Numérique RIF de Dérivateur  
et d'Intégrateur d'Ordre Fractionnaire Variable*

*Soutenu le : 04/12/2007 à 11<sup>h</sup>:00*

Examiné Par le Jury :

Président :	Dr. A. Bennia	Professeur	Université de Mentouri Constantine
Rapporteur :	Dr. A. Charef	Professeur	Université de Mentouri Constantine
Examineur :	Dr. N. Mansouri	Professeur	Université de Mentouri Constantine
Examineur :	Dr. M. Khamadja	Professeur	Université de Mentouri Constantine

*Année 2007*

## DEDICACES

*Je dédie ce mémoire*

*A mes chers parents pour tout les sacrifices consentis, pour leur soutient durant toute mes années d'études. Pour leur bonté et leur amour.*

*A mes sœurs et a mes frères.*

*A toute ma famille qui m'a aidé dans mes études.*

*A mes collègues de la promotion et mes amis.*

*A tous les membres du laboratoire de Traitement du Signal*



*BENSOUCI TAHAR*

## *Remerciements*

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de magister

Je tiens à remercier profondément mon encadreur : le professeur **ABDELFATAH CHAREF** pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements, et ses précieux conseils.

J'exprime ma gratitude envers Mr. **BENNIA ABDELHAK** professeur à l'université de Mentouri de Constantine de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury

Je tiens à remercier Mr. **KHAMADJA MOHAMMED** professeur à l'université Mentouri de Constantine, d'avoir accepter de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercie le Pr. **NORA MANSOURI**, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, d'avoir accepter faire patrie du jury

Je tiens à remercier, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes études et en particulier mes enseignants à l'université de Constantine

Enfin, je tiens aussi à remercier tous ce qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail et en particulier Mr. DEBCHI MUSTAFA, Mr. GUITANI ISSAM, Mr. LABOUD SAMIR, Mr. BENHAMOUD REDOUANE et Mr. ASSABAA MOHAMED pour leurs encouragements et leurs précieux conseils.

# SOMMAIRE

<b>Introduction Générale</b> .....	1
<b>Chapitre I Opérateurs d'ordre fractionnaire</b> .....	3
I.1 Définitions fondamentales.....	3
I.1.1 Définition de Riemann-Liouville .....	3
I.1.2 Définition de Caputo .....	3
I.1.3 Définition de Grundwald-Leitnikov .....	4
I.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	4
I.3 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	5
I.3.1 Cas continu .....	5
I.3.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les .....	5
I.3.1.1.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre fractionnaire.....	6
I.3.1.1.2 Méthode de Carlson .....	6
I.3.1.1.3 Méthode de Matsuda .....	7
I.3.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification .....	7
I.3.1.2.1 La méthode d'Oustaloup .....	8
I.3.1.2.2 La méthode de Charef .....	8
I.3.2 Cas discret .....	9
I.3.2.1 Approximation discret en utilisant l'intégration et l'expansion de série entière .....	9
I.3.2.2 Approximation discret en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue .....	10
I.4 Exemples de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire.....	11
I.4.1 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus (ou d'un sinus) .....	11
I.4.2 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un produit de fonctions exponentielle et sinusoïdale .....	11
<b>Chapitre II Approximation Analogique et discrétisation</b> .....	12
II.1 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	12
II.1.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire .....	12
II.1.2 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire .....	14

II.1.3	Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire .....	16
II.1.4	Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.....	18
II.2	Implémentation par des circuits électriques analogiques.....	20
II.2.1	Intégration d'ordre fractionnaire .....	20
II.2.2	Dérivée d'ordre fractionnaire .....	21
II.3	Discrétisation de la fonction d'approximation.....	21
II.3.1	Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire Euler, et Al-Alaoui.....	22
II.3.2	Exemple illustratif.....	24
II.3.3	Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire Euler, et Al-Alaoui.....	28
II.3.4	Exemple illustratif.....	30
<b>Chapitre III</b>	<b>Implémentation numérique .....</b>	<b>33</b>
III.1	Introduction .....	33
III.2	Implémentation numérique RII .....	33
III.2.1	Intégrateur d'ordre fractionnaire .....	33
III.2.2	Dérivateur d'ordre fractionnaire.....	35
III.3	Implémentation numérique RIF.....	37
III.3.1	Intégrateur d'ordre fractionnaire .....	37
III.3.2	Dérivateur d'ordre fractionnaire.....	38
III.4	Implémentation numérique RIF en structure de Farrow .....	39
III.4.1	Intégrateur d'ordre fractionnaire .....	40
III.4.1.1	Calcul des coefficients d'interpolation.....	42
III.4.1.2	Exemple illustratif .....	46
III.4.2	Dérivateur d'ordre fractionnaire .....	50
III.4.2.1	Calcul des coefficients d'interpolation.....	51
III.4.2.2	Exemple illustratif .....	55
<b>Chapitre IV</b>	<b>Applications des opérateurs d'ordre fractionnaire variable.....</b>	<b>60</b>
IV.1	Introduction .....	60
IV.2	Réponse temporelle d'un opérateur d'ordre fractionnaire.....	60
IV.3	Dérivation d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles.....	62
IV.3.1	La dérivée fractionnaire d'un Echelon .....	62

IV.3.2 La dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus (ou d'un sinus) .....	65
IV.3.3 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un produit de fonctions exponentielle et sinusoïdale .....	68
IV-4 Intégration d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles.....	71
<b>Conclusion Générale</b> .....	<b>75</b>
<b>Références</b> .....	<b>77</b>

## Listes des figures

<b>Figure II.1</b>	Tracés de Bode la fonction de transfert de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.5}$ et de son approximation Analogique .....	15
<b>Figure II.2</b>	Tracés de Bode la fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.75}$ et de son approximation Analogique .....	19
<b>Figure II.3</b>	Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire .....	20
<b>Figure II.4</b>	Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire .....	21
<b>Figure II.5</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.4}$ discrétisé (RII), et tronquer (RIF), par la transformation Bilinéaire .....	25
<b>Figure II.6</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.4}$ discrétisé (RII), et tronquer (RIF), par la transformation Backward .....	26
<b>Figure II.7</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.4}$ discrétisé (RII), et tronquer (RIF), par la transformation Al_Alaoui .....	27
<b>Figure II.8</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.65}$ discrétisé (RII), et tronquer (RIF), par la transformation Bilinéaire .....	30
<b>Figure II.9</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.65}$ discrétisé (RII), et tronquer (RIF), par la transformation Backward .....	31
<b>Figure II.10</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.65}$ discrétisé (RII), et tronquer (RIF), par la transformation Al_Alaoui .....	32
<b>Figure III.1</b>	Implémentation numérique RII de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire .....	35
<b>Figure III.2</b>	Implémentation numérique RII de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire .....	36
<b>Figure III.3</b>	Implémentation numérique RIF de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire .....	38

<b>Figure III.4</b>	Implémentation numérique RIF de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.....	39
<b>Figure III.5</b>	L'interpolation polynomial au Sens des moindres carrés de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire .....	45
<b>Figure III.6</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.5}$ discrétisée par la transformation Bilinéaire à la sortie de la structure de Farrow .....	47
<b>Figure III.7</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.5}$ discrétisée par la transformation Backward à la sortie de la structure de Farrow .....	48
<b>Figure III.8</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.5}$ discrétisée par la transformation Al_Alaoui à la sortie de la structure de Farrow .....	49
<b>Figure III.9</b>	Implémentation numérique RIF en structure de Farrow de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.....	50
<b>Figure III.10</b>	L'interpolation polynomial au Sens des moindres carrés de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire .....	54
<b>Figure III.11</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.4}$ discrétisée par la transformation Bilinéaire à la sortie de la structure de Farrow .....	56
<b>Figure III.12</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.4}$ discrétisée par la transformation Backward à la sortie de la structure de Farrow .....	57
<b>Figure III.13</b>	Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.4}$ discrétisée par la transformation Al_Alaoui à la sortie de la structure de Farrow .....	58
<b>Figure III.14</b>	Implémentation numérique RIF en structure de Farrow de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.....	59
<b>Figure IV.1</b>	Etapas de calcul de la réponse temporelle d'un opérateur d'ordre fractionnaire variable.....	61
<b>Figure IV.2</b>	La dérivation d'ordre fractionnaire de l'échelon par la transformation Al_Alaoui pour les différents valeurs de m.....	64
<b>Figure IV.3</b>	La dérivation d'ordre fractionnaire de l'échelon par la transformation Backward pour les différents valeurs de m .....	64



<b>Figure IV.4</b>	La dérivation d'ordre fractionnaire de l'échelon par la transformation Bilinéaire pour les différents valeurs de m.....	65
<b>Figure IV.5</b>	La dérivation d'ordre fractionnaire de $\cos(5t)$ selon la transformation Al_Alaoui pour les différents valeurs de m.....	67
<b>Figure IV.6</b>	La dérivation d'ordre fractionnaire de $\cos(5t)$ selon la transformation Backward pour les différents valeurs de m .....	67
<b>Figure IV.7</b>	La dérivation d'ordre fractionnaire de $\cos(5t)$ selon la transformation Bilinéaire pour les différents valeurs de m.....	68
<b>Figure IV.8</b>	La dérivation d'ordre fractionnaire de $\cos(10t) \exp(-2t)$ selon la transformation Backward pour les différentes valeurs de m, et pour un période d'échantillonnage $T=0.0025s$ .....	70
<b>Figure IV.9</b>	La dérivation d'ordre fractionnaire de $\cos(10t) \exp(-2t)$ selon la transformation Al_Alaoui pour les différentes valeurs de m, et pour un période d'échantillonnage $T=0.0025s$ .....	70
<b>Figure IV.10</b>	Intégration d'ordre fractionnaire de l'échelon par la transformation Al_Alaoui pour les différents valeurs de m, $T=0.01s$ .....	71
<b>Figure IV.11</b>	Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoïdale $\cos(5t)$ par la transformation Al_Alaoui pour les différentes valeur de m, $T=0.0025s$ .....	71
<b>Figure IV.12</b>	Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoïdale amortie $\exp(-2t)\cos(10t)$ par la transformation Al_Alaoui pour les différentes valeur de m , $T=0.0025s$ .....	72
<b>Figure IV.13</b>	Intégration d'ordre fractionnaire de l'échelon par la transformation Backward pour les différents valeurs de m, $T=0.01s$ .....	72
<b>Figure IV.14</b>	Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoïdale $\cos(5t)$ par la transformation Backward pour les différentes valeur de m, $T=0.0025s$ .....	72
<b>Figure IV.15</b>	Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoïdale amortie $\exp(-2t)\cos(10t)$ par la transformation Backward pour les différentes valeur de m , $T=0.0025s$ .....	73
<b>Figure IV.16</b>	Intégration d'ordre fractionnaire de l'échelon par la transformation Bilinéaire pour les différents valeurs de m, $T=0.01s$ .....	73
<b>Figure IV.17</b>	Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoïdale $\cos(5t)$ par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeur de m, $T=0.0025s$ .....	73
<b>Figure IV.18</b>	Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoïdale amortie $\exp(-2t)\cos(10t)$ par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeur de m , $T=0.0025s$ .....	74

## Listes des tableaux

<b>Tableau III.1</b>	Les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 1 correspondant à des points d'interpolation .....	42
<b>Tableau III.2</b>	Les coefficients du polynôme d'interpolation de degré $M=1,2,\dots,10$ .....	43
<b>Tableau III.3</b>	Les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 1 correspondant à des points d'interpolation .....	51
<b>Tableau III.4</b>	Les coefficients du polynôme d'interpolation de degré $M=1,2,\dots,10$ .....	52
<b>Tableau IV.1</b>	Amplitude et déphasage approximatés selon les trois transformations récentes pour Les différents valeurs de l'ordre fractionnaire $m$ de $\cos(5t)$ , $T=0.0025s$ .....	66
<b>Tableau IV.2</b>	Déphasage et amplitude calculés et approximatés selon la transformation Al_Alaoui et la transformation de Backward .....	69

## Résumé:

Ce travail traite l'implémentation numérique du dérivateur  $s^m$  et de l'intégrateur  $s^{-m}$  d'ordre fractionnaire variable pour  $0 < m < 1$ .

L'approche proposée est basée sur la méthode d'approximation de Charef de ces opérateurs par des fonctions rationnelles analogiques. La transformation du domaine analogique au domaine discret est faite en utilisant les transformations d'Euler, Bilinéaire et d'Al-Alaoui. Une troncation pour une longueur finie permet d'aboutir à des filtres RIF approximant ces opérateurs. Le dérivateur et l'intégrateur d'ordre fractionnaire numériques ainsi obtenus sont exprimés comme des filtres discrets RIF dont les coefficients sont donnés sous forme compacte en termes de la période d'échantillonnage et les paramètres d'approximation. Puis ces filtres discrets RIF sont alors implémentés en utilisant la structure de Forrow pour obtenir un dérivateur et d'intégrateur d'ordre fractionnaire variable.

Des simulations sont obtenues pour démontrer l'efficacité et l'utilité de cette approche et les résultats obtenus sont aussi présentés et discutés.

## **Introduction Générale**

Depuis les premiers travaux des dérivées d'ordre fractionnaire il y'a quelques siècles, la théorie du calcul fractionnaire a été développée pour la plupart par des mathématiciens. Dans les dernières années un intérêt considérable a été porté à la dérivation et l'intégration d'ordre fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [1-2]. A cause de leur représentation par des fonctions de transfert irrationnelles, les opérateurs d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Mais un grand effort a été fait pour essayer de mettre en pratique les résultats déjà établis. Seulement dans les quelques dernières décennies qu'on a pu trouver un progrès signifiant de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans les domaines d'ingénierie [3-5]. Donc, un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

L'objectif de ce mémoire est l'implémentation numérique RIF du dérivateur  $s^m$  et de l'intégrateur  $s^{-m}$  pour  $0 < m < 1$ . L'approche proposée est basée sur la méthode d'approximation de Charef [6] de ces opérateurs par des fonctions rationnelles analogiques. La transformation du domaine analogique au domaine discret est faite en utilisant les transformations d'Euler, Bilinéaire et d'Al-Alaoui [7-12]. Une troncation pour une longueur finie permet d'aboutir à des filtres RIF approximant ces opérateurs. Le dérivateur et l'intégrateur d'ordre fractionnaire numériques ainsi obtenus sont exprimés comme des filtres discrets RIF dont les coefficients sont donnés sous forme compacte en termes de la période d'échantillonnage et les paramètres d'approximation. Puis ces filtres discrets RIF sont alors implémentées en utilisant la structure de Farrow [7] pour obtenir un dérivateur et d'intégrateur d'ordre fractionnaire variable.

Des simulations sont obtenues pour démontrer l'efficacité et l'utilité de cette approche et les résultats obtenus sont aussi présentés et discutés.

Les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l'objet de ce mémoire sont présentés comme suit :

Le premier chapitre présente les définitions et les bases théoriques de ce travail de recherche.

Le deuxième chapitre traite la discrétisation et l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire, on a présenté une méthode simple qui est la méthode de Charef qui consiste à approximer, pour une bande de fréquence donnée, ces opérateurs d'ordre fractionnaire par des filtres discrets à réponse impulsionnelle finie (RIF) et infinie (RII), selon trois transformations récentes, la transformation Bilinéaire, la transformation Backward et la transformation Al-Alaoui.

Dans le troisième chapitre, nous étudions trois implémentations différentes de ces opérateurs: une implémentation sous forme du filtre RII et sous forme du filtre RIF le 3<sup>ème</sup> c'est une nouvelle implémentation sous forme de structure de Farrow, et qui seront étudiés d'une façon détaillée.

Le quatrième chapitre est réservé à l'application de la méthode proposée sur les fonctions les plus usuelles : l'échelon, sinusoïdale, et fonction sinusoïdale amortie, La méthode proposée sera ensuite décrite et les résultats de son évaluation, en termes de phase constante et amplitude linéaire dans la bande de fréquences désirée.

## Opérateurs d'ordre fractionnaire

### I.1 Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. On peut mentionner les trois définitions suivantes [14]:

#### I.1.1 Définition de Riemann-Liouville

L'intégrale dite de Riemann-Liouville est définie ainsi :

**Définition 1** Soient  $C$  et  $R$  les anneaux des nombres complexes et réels respectivement,  $\Re(.)$  symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient  $\lambda \in C$  avec  $\Re(\lambda) > 0$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[0, +\infty)$ .

L'intégrale d'ordre  $\lambda$  de  $f$  est définie par :

$${}_{RL}I^\lambda f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\varepsilon)^{\lambda-1} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (I-1)$$

avec  $t \geq 0$  et  $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt$  est la fonction gamma d'Euler.

**Définition 2** Soient  $\mu \in C$  avec  $\Re(\mu) > 0$ ,  $n$  un entier positif et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[0, +\infty)$ . La dérivée d'ordre  $\mu$  de  $f$  est définie par :

$${}_{RL}D^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\mu-1} f(\tau) d\tau \quad (I-2)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < \mu < n$ .

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (I-1) comme suit :

$${}_{RL}D^\mu f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{ I^{(n-\mu)} f(t) \} \quad (I-3)$$

#### I.1.2 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit :

$${}_C D^\mu f(t) = {}^\Delta I^{n-\mu} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{n-\mu-1}} d\tau \quad (I-4)$$

avec  $n$  est un entier positif vérifiant l'inégalité  $(n-1) < \mu < n$ .

### I.1.3 Définition de Grundwald-Leitnikov

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $\mu > 0$  de G-L est donnée par :

$${}_{GL}D^\mu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\mu}{k} f(t - k.h) \quad (I-5)$$

où  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$\binom{\mu}{k} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\mu-k+1)} = C_k^{(\mu)} \quad (I-6)$$

avec  $C_0^{(\mu)} = \binom{\mu}{0} = 1$ , sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1-z)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\mu}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(\mu)} z^k \quad (I-7)$$

La définition de Grundwald-Leitnikov de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$${}_{GL}D^\mu f(t) = {}_{GL}D^{-\mu} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\mu}{k} f(t - kh) \quad (I-8)$$

où  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients  $C_0^{(-\lambda)}$  avec  $C_0^{(-\lambda)} = \binom{-\lambda}{0} = 1$

Sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1-z)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\lambda}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(-\lambda)} z^k \quad (I-9)$$

## I.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [14]:

1. Si  $f(z)$  est une fonction analytique de  $z$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\mu f(z)$  est une fonction analytique de  $z$  et  $\mu$ .

2. Pour  $\mu = 0$  l'opération  $D^\mu f(z)$  est l'opérateur identité :

$$D^0 f(z) = f(z). \quad (I-10)$$

3. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires :

$$D^\mu [af(z) + bg(z)] = aD^\mu [f(z)] + bD^\mu [g(z)] \quad (I-11)$$

4. la transformée de Laplace  $F$ , fonction de l'opérateur de Laplace  $s$ , d'une fonction  $f$ , dépendant du temps  $t$  est définie par la relation:

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} f(t).e^{-st}.dt \quad (I-12)$$

Donc la transformation de Laplace de l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire peuvent être définies comme suit :

$$L\{D^{\mu} f(t)\} = s^{\mu} F(s) \quad (I-13)$$

$$L\{I^{\mu} f(t)\} = s^{-\mu} F(s) \quad (I-14)$$

### I.3 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Dans la suite nous allons présenter quelque méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire qui peuvent être divisées en deux catégories (continu ; discret), avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière [6] qui sera entièrement détaillée dans le chapitre (II).

#### I.3.1 Cas continu

##### I.3.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation

L'expansion des fractions continues [15] est une méthode d'évaluation des fonctions qui converge souvent beaucoup plus rapidement que le développement en série de puissances, et converge dans un domaine plus large du plan complexe. Le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle  $G(s)$ , peut être exprimé sous la forme

$$G(s) \cong a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \quad (I-15)$$

$$G(s) = a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \quad (I-16)$$

où  $a_i(s)$  et  $b_i(s)$  sont des fonctions rationnelles de la variable  $s$  ou des constantes.

L'application de cette méthode résulte en une fonction rationnelle  $\hat{G}(s)$ , qui est une approximation de la fonction irrationnelle  $G(s)$ .



D'autre part, pour l'interpolation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes, car elles permettent de modéliser les fonctions par des pôles.

Ces techniques sont basées sur l'approximation d'une fonction irrationnelle  $G(s)$  par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes de la variable  $s$  :

$$G(s) \cong R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(s)}{Q_\nu(s)} = \frac{p_0 + p_1s + \dots + p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1s + \dots + q_\nu s^\nu} \quad (\text{I-17})$$

qui passe par les points  $(s_i, G(s_i)); \dots (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$ .

Dans la suite nous présenterons quelques unes des méthodes les plus connues de ce type.

### **I.3.1.1.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégral-différentiels d'ordre fractionnaire**

En général, une approximation rationnelle de la fonction  $G(s) = s^\mu$  ;

$0 < \mu < 1$  (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions :

$$G_h(s) = \frac{1}{(1 + s.T)^\mu} \quad (\text{I-18})$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\mu \quad (\text{I-19})$$

Où  $G_h(s)$  est l'approximation pour les hautes fréquences ( $wT \gg 1$ ), et  $G_l(s)$  l'approximation pour les basses fréquences ( $wT \ll 1$ ).

### **I.3.1.1.2 Méthode de Carlson**

La méthode proposée par Carlson dans [15], dérivée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative de la racine d'ordre  $\alpha$ , peut être considérée comme appartenant à ce groupe. Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\mu} - G(s) = 0 \quad (\text{I-20})$$

$$H(s) = (G(s))^\mu \quad (\text{I-21})$$

En définissant  $\mu = \frac{1}{q}$ ,  $m = \frac{q}{2}$  à chaque itération, partant de la valeur initiale  $H_0(s) = 1$ , une fonction rationnelle approximée est obtenue sous la forme :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (\text{I-22})$$

### I.3.1.1.3 Méthode de Matsuda

La méthode proposée dans [15] est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle obtenue par l'expansion des fractions continues et l'ajustement de la fonction originale dans un ensemble de points logarithmiquement espacés. En supposant que les points choisis sont  $s_K$ ,  $K = 0,1,2,\dots$ , l'approximation prend la forme :

$$H(s) = a_0(s) + \frac{s-s_0}{a_1 +} \frac{s-s_1}{a_2 +} \frac{s-s_2}{a_3 +} \dots \quad (\text{I-23})$$

où 
$$a_i = v_i(s_i), \quad v_0(s) = H(s), \quad v_{i+1} = \frac{s-s_i}{v_i(s) - a_i} \quad (\text{I-24})$$

### I.3.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification

En général toutes les méthodes d'identification dans le domaine fréquentiel peuvent être appliquées pour obtenir une fonction rationnelle, dont la réponse fréquentielle se rapproche de celle de la fonction irrationnelle originale. Par exemple cela peut être la minimisation de la fonction coût suivante,

$$J = \int W(s) \left| G(w) - \hat{G}(w) \right|^2 dw \quad (\text{I-25})$$

où  $W(s)$  est une fonction de pondération,  $G(w)$  la réponse fréquentielle originale, et  $\hat{G}(w)$  est la réponse fréquentielle de la fonction rationnelle approximée.

Les deux approches les plus connues sont celles proposées par Oustaloup et Charef.

### I.3.1.2.1 La méthode d'Oustaloup

La méthode [15] est basée sur l'approximation d'une fonction de la forme :

$$H(s) = s^\mu \quad \mu \in R^+ \quad (\text{I-26})$$

Par une fonction rationnelle :

$$\hat{H}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + s/w_k}{1 + s/w'_k} \quad (\text{I-27})$$

En utilisant l'ensemble des formules de synthèse suivantes :

$$w'_0 = \alpha^{-0.5} \cdot w_u \quad w_0 = \alpha^{0.5} w_u \quad \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = \alpha \cdot \eta > 1 ; \quad (\text{I-28})$$

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \eta > 1 ; \quad \frac{w'_k}{w_k} = \alpha > 0 ; \quad N = \frac{\log(w_N / w_0)}{\log(\alpha \cdot \eta)} ; \quad \mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \cdot \eta)} \quad (\text{I-29})$$

$w_u$  étant le gain fréquentiel unité et la fréquence centrale d'une bande de fréquences distribuées géométriquement autour. Soit,  $w_u = \sqrt{w_h \cdot w_b}$   $w_h$  et  $w_b$  sont la haute et basse fréquence respectivement.

### I.3.1.2.2 La méthode de Charef

Dans le but d'implémentation numérique RIF et RII de dérivateur et intégrateur d'ordre fractionnaire présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "Méthode de la fonction de singularité" développée par Charef [6], qui est présentée dans cette section.

Cette méthode est basée sur l'approximation d'une fonction de la forme :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\mu} \quad (\text{I-30})$$

on peut réécrire la fonction (I-29) comme suit:

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\mu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I-31})$$

où  $(N + 1)$  est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système.

L'équation (I-31) peut être tronquée à un nombre fini  $N$ , et l'approximation devient :

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\mu} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I-32})$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_0 = p_t \sqrt{b}, p_i = p_0 (a.b)^i, z_i = a.p_0 (a.b)^i \quad (\text{I-33})$$

Avec

$$a = 10^{y/10(\mu-1)}, b = 10^{y/10,\mu}, a.b = 10^{y/10\mu(1-\mu)}, N = \frac{\log(w_{\max} / p_0)}{\log(a.b)} \quad (\text{I-34})$$

### I.3.2 Cas discret

#### I.3.2.1 Approximation discret en utilisant l'intégration et l'expansion de série entière

En utilisant la fonction génératrice correspondant à la règle de Backward  $w(z^{-1}) = (1 - z^{-1})$  et en utilisant l'expansion de série entière (PSE) de  $(1 - z^{-1})^\mu$ , la formule de **Grundwald-Leitnikov** de la dérivée d'ordre fractionnaire pour un ordre  $\mu$ , est obtenue :

$$\nabla_T^\mu f(nT) = T^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\mu}{k} f((n-k)T) \quad (\text{I-35})$$

L'exécution de la **PSE** de la fonction  $(1 - z^{-1})^\mu$  mène à la formule donnée par **Lubich** [16] pour l'intégral d'ordre fractionnaire d'ordre  $\mu$  :

$$\nabla_T^\mu f(nT) = T^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\mu}{k} f((n-k)T) \quad (\text{I-36})$$

La fonction de transfert résultante, rapprochant l'opérateur d'ordre fractionnaire est donnée par la relation :

$$Y(z) = T^{\mp\mu} PSE[(1 - z^{-1})^{\pm\mu}] F(z) \quad (\text{I-37})$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage,  $Y(z)$  est la transformée en  $z$  de la séquence de sortie  $y(nT)$ ,  $F(z)$  est la transformée en  $z$  de la séquence d'entrée  $f(nT)$ .  $PSE[u]$  dénote l'expression qui résulte de l'expansion de série entière de la fonction  $u$ , faire ainsi donné :

$$D^{\pm\mu}(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = T^{\mp\mu} PSE\left[(1-z^{-1})^{\pm\mu}\right] F(z) \quad (\text{I-38})$$

où  $D^{\pm\mu}(z)$  dénote l'équivalent discret de l'opérateur d'ordre fractionnaire.

Une autre possibilité pour l'approximation est l'utilisation de la règle trapézoïdale, comme une fonction génératrice :

$$w(z^{-1}) = 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (\text{I-39})$$

### I.3.2.2 Approximation discret en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue

Une méthode pour obtenir l'équivalent discret de l'opérateur d'ordre fractionnaire, qui combine la règle trapézoïdale et l'expansion des fractions continues [17], cette méthode implique : l'utilisation de la fonction génératrice :

$$w(z^{-1}) = 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

où  $z$  est la variable complexe,  $z^{-1}$  est l'opérateur de retard, et l'expansion de fraction continu (CFE) de :

$$\left(w(z^{-1})\right)^{\pm\mu} = \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^{\pm\mu} \quad (\text{I-40})$$

Pour obtenir les coefficients et le forma de l'approximation.

La fonction de transfert résultante, rapprochant l'opérateur d'ordre fractionnaire peut être

exprimée sous la forme :

$$D^{\pm\mu}(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = T^{\mp\mu} CFE \left[ \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^{\pm\mu} \right]_{p,q} \quad (\text{I-41})$$

$$= T^{\mp\mu} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} \quad (\text{I-42})$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage,  $CFE[u]$  dénote la fonction de transfert résultante de l'application de l'expansion continu de la fonction  $u$ ,  $Y(z)$  est la transformée en  $z$  de la

séquence de sortie  $y(nT)$ ,  $F(z)$  est la transformée en  $z$  de la séquence d'entrée  $f(nT)$ ,  $p$  et  $q$  sont les ordres de l'approximation,  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de degré  $p$  et  $q$  correspondant au variable  $z^{-1}$

#### I.4 Exemples de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire

Nous voyons ici quelques calculs basiques de dérivée d'ordre fractionnaire que nous exploiterons dans la suite de notre étude.

##### I.4.1 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus (ou d'un sinus)

En utilisant le fait qu'un cosinus (resp. un sinus) est égal à la partie réelle (resp. imaginaire) d'une exponentielle, et que l'opérateur dérivée non entière est linéaire [18], on peut déterminer facilement la dérivation fractionnaire d'ordre  $\mu$  d'un cosinus (resp. un sinus).

$$\text{Ainsi : } D^{(\mu)} [\cos(w_0.t - \varphi)] = w_0^\mu \cos(w_0.t - \varphi + \mu \cdot \frac{\pi}{2}) \quad (\text{I-43})$$

$$D^{(\mu)} [\sin(w_0.t - \varphi)] = w_0^\mu \sin(w_0.t - \varphi + \mu \cdot \frac{\pi}{2}) \quad (\text{I-44})$$

##### I.4.2 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un produit de fonctions exponentielle et sinusoidale

En utilisant le fait qu'un sinus est égal à la partie imaginaire d'une exponentielle et que l'opérateur dérivé d'ordre fractionnaire est linéaire [18], on trouve la relation suivante :

$$D^{(\mu)} [\sin(w_0.t) \cdot \exp(t/\tau)] = A^\mu \sin(w_0.t) \cdot \exp(t/\tau) \quad (\text{I-45})$$

Avec

$$A = \left| \frac{1}{\tau} + i.w_0 \right|, \text{ et } \psi = \text{Arg} \left( \frac{1}{\tau} + i.w_0 \right) \quad (\text{I-46})$$

## Approximation Analogique et discrétisation

### II.1 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

#### II.1.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégral d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^m} \quad (\text{II.1})$$

ou  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $m$  un nombre réel positif tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[w_b, w_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit [19] :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \quad (\text{II.2})$$

En supposant que pour  $w \in [w_b, w_h]$  on a  $w \gg w_c$ , on peut écrire :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{w_c}\right)^m} = \frac{K_I w_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} \quad (\text{II.3})$$

Avec  $K_I = 1/w_c^m$  et  $w_c$  est la fréquence de coupure de PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $w_b$  :  $w_c = w_b \sqrt{10^{(\varepsilon/10.m)} - 1}$  ou  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (II.1) et le PPF de l'équation (II.2) dans la bande de fréquence donnée  $[w_b, w_h]$ .

Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (II.2), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle [19].

La méthode d'approximation [6] consiste à approximer la pente de  $20\text{dB}/\text{dec}$  sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente  $20\text{dB}/\text{dec}$  et  $0\text{dB}/\text{dec}$  correspondant à une alternance de pôles et

de zéros sur l'axe réel négatif du plan  $s$  tel que  $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$  ;  
d'où l'approximation suivante :

$$H_I(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.4})$$

Où les  $p_i$  et les  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation.

En utilisant la méthode de la fonction de singularité (méthode graphique simple), les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par le choix d'une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $w_{\max}$ .

Pour déterminer le nombre  $N$ , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $w_{\max}$ " cette bande, telle que  $w_{\max}$  soit égal à  $\square\square$  fois  $w_h$ , son expression est donnée par [6] :

$$N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{w_{\max}}{p_0} \right]}{\log(a.b)} \right] + 1 \quad (\text{II.5})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = p_0 (a.b)^i \quad , \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = a.p_0 (a.b)^i \quad , \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1$$

Où  $a$  et  $b$  sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de  $y$  et  $m$  sont données par :

$$a = 10^{y/10(1-m)}, b = 10^{y/10.m}. \text{ Avec, } p_0 = w_c \sqrt{b} \quad , \quad z_0 = a.p_0$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, on doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires

$$H_I(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a p_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} \quad (\text{II.6})$$



Où les coefficients  $h_i$  sont les résidus qui sont déterminés par :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a p_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - (ab)^{(i-j)} \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II.7})$$

### II.1.2 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour un intégrateur d'ordre fractionnaire représenté par :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$$

Pour obtenir la fonction rationnelle d'approximation de cet opérateur d'ordre fractionnaire, on suppose que la bande de fréquence  $[w_b, w_h] = [0.1 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s}]$  ; et pour  $w_c = 0.001 * w_b$ , on obtient  $w_c = 0.0001$  et  $K_I = 100$  par suite le modèle PPF de cet opérateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$H(s) = \frac{100}{\left( 1 + \frac{s}{0.0001} \right)^{0.5}}$$

On choisit l'erreur du PPF par une fonction rationnelle  $y = 0.8 \text{ dB}$  et la bande fréquentielle d'approximation  $w_{\max} = 100 w_h = 10^3 \text{ rad/s}$ , les paramètres  $a, b, p_0, z_0$  et  $N$  peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

$$a = 1.4454, b = 1.4454, p_0 = 1.2022 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}, z_0 = 1.7378 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad N = 22.$$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes:

$$p_i = 1.2022 \cdot 10^{-4} (2.0892)^i, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 22$$

$$z_i = 1.7378 \cdot 10^{-4} (2.0892)^i, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 21$$

Les tracés de Bode de la fonction de transfert de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.5}$  et de son approximation Analogique sont présentés dans la Figure (II.1).

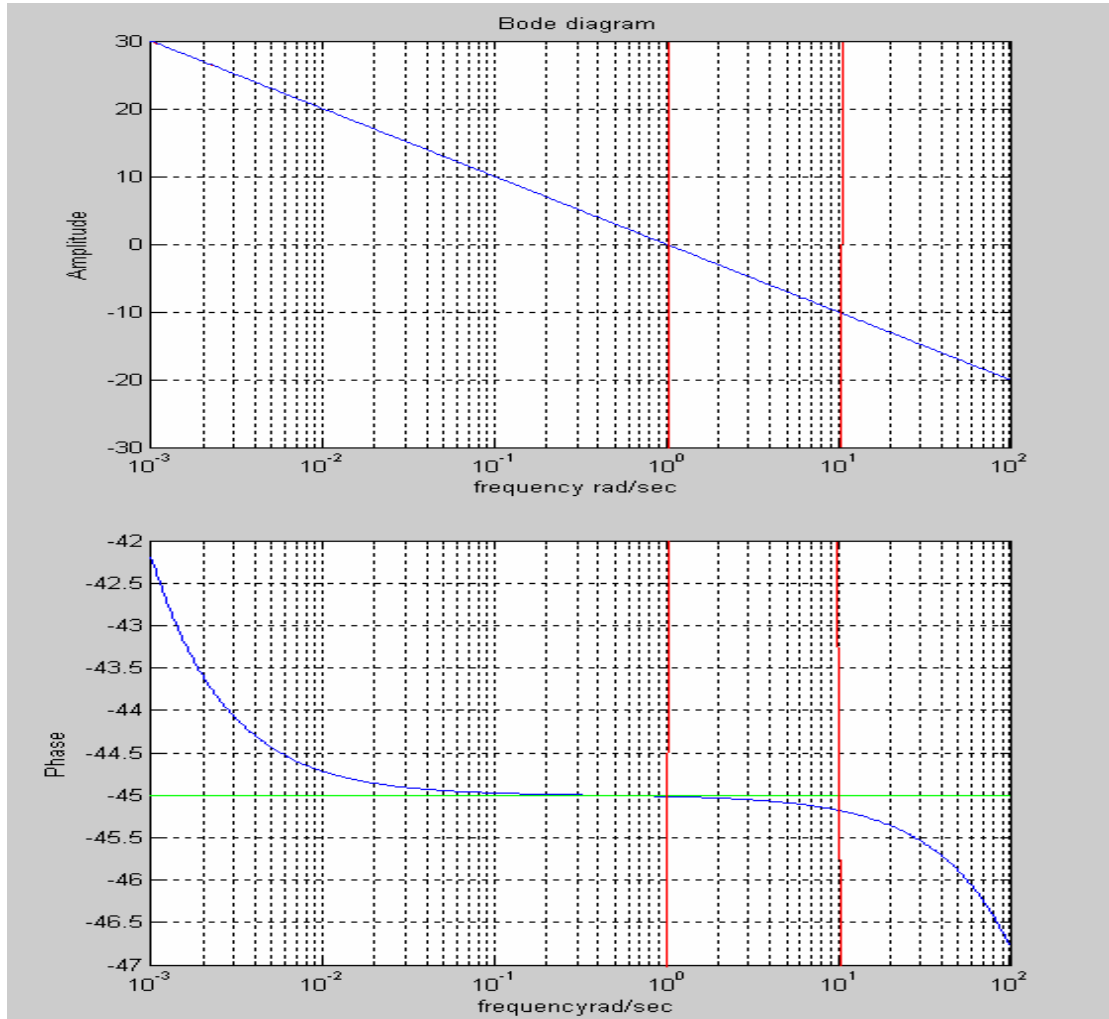


Figure (II.1) Tracés de Bode de la fonction de transfert de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.5}$  et de son approximation Analogique

Le tracé de Bode [20] de la fonction de transfert idéale donne une pente constant de  $(-m.20dB/dec)$ , et une phase en ligne horizontale de  $(-m.\pi/2)$ , avec  $m$  : exposant d'ordre fractionnaire, et par comparaisons avec les résultats obtenus on voit bien que dans la bande de fréquence  $[0.1rad/s, 10rad/s]$ , la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire *Intégrateur* : une pente de -10dB/dec (20m), et la phase de  $-45^\circ$ , ce qui implique la justesse de l'approximation.

### II.1.3 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (\text{II.8})$$

Où  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $m$  un nombre réel positif tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[w_b, w_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF)

$$\text{comme suit [19] : } G_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{w_c} \right)^m \quad (\text{II.9})$$

En supposant que pour  $w \in [w_b, w_h]$  on a  $w \gg w_c$ , on peut écrire :

$$G_D(s) = K_D \left( \frac{s}{w_c} \right)^m = \frac{K_D}{w_c^m} s^m = s^m \quad (\text{II.10})$$

Avec  $K_D = w_c^m$  et  $w_c$  est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $w_b$  :  $w_c = w_b \sqrt{10^{(\varepsilon/10.m)} - 1}$  ou  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (II.8) et le ZPF de l'équation (II.9) dans la bande de fréquence donnée  $[w_b; w_h]$ .

Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (II.9), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle [19].

La méthode d'approximation [6, 19] consiste à approximer la pente de  $20\text{dB}/\text{dec}$  sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente  $20\text{dB}/\text{dec}$  et  $0\text{dB}/\text{dec}$  correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan  $s$  tel que  $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$  ; d'où l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{w_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II.11})$$

En utilisant la méthode de la fonction de singularité (méthode graphique simple), les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par le choix d'une erreur d'approximation  $\gamma$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $w_{\max}$ .

Pour déterminer le nombre  $N$ , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $w_{\max}$ " cette bande [6, 19] :

$$N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{w_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II.12})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = z_0 (ab)^i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = a \cdot z_0 (ab)^i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$\text{Avec, } z_0 = w_c \sqrt{b} \text{ et } p_0 = a \cdot z_0$$

La fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera donc la suivante :

$$G_D(s) = K_D \cdot \left( 1 + \frac{s}{w_c} \right)^m \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0} \right)} \quad (\text{II.13})$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer  $\frac{G_D(s)}{s}$  en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} \cdot K_D \cdot \prod_{i=0}^N \frac{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0} \right)} \quad (\text{II.14})$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II.15})$$

avec  $G_0 = K_D$  et,

$$g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(-ab)^i a z_0 \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \text{ Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II.16})$$

### II.1.4 Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour un dérivateur d'ordre fractionnaire suivant :  $G_D(s) = s^{0.75}$

De la même façon que l'exemple de PPF, le modèle ZPF du dérivateur d'ordre

fractionnaire est donné par :  $G(s) = 0.001 \left( 1 + \frac{s}{0.0001} \right)^{0.75}$

Avec :  $K_D = 0.001$   $[w_b, w_h] = [0.1 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s}]$  ,  $w_c = 10^{-4}$

On choisit l'erreur du ZPF par une fonction rationnelle  $y = 0.8$  dB et la bande fréquentielle d'approximation  $w_{\max} = 100 w_h = 10^3 \text{ rad/s}$  , les paramètres  $a, b, p_0, z_0$  et  $N$  peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

$a = 2.0892$ ,  $b = 1.2783$ ,  $p_0 = 2.3622 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ ,  $z_0 = 1.1306 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$  et  $N = 17$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes :

$p_i = 2.3622 \cdot 10^{-4} (2.6709)^i$  , pour  $i = 0, 1, \dots, 17$

$z_i = 1.1306 \cdot 10^{-4} (2.6709)^i$  , pour  $i = 0, 1, \dots, 17$

Les tracés de Bode la fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.75}$  et de son approximation Analogique sont présentés dans la figure (II.2).

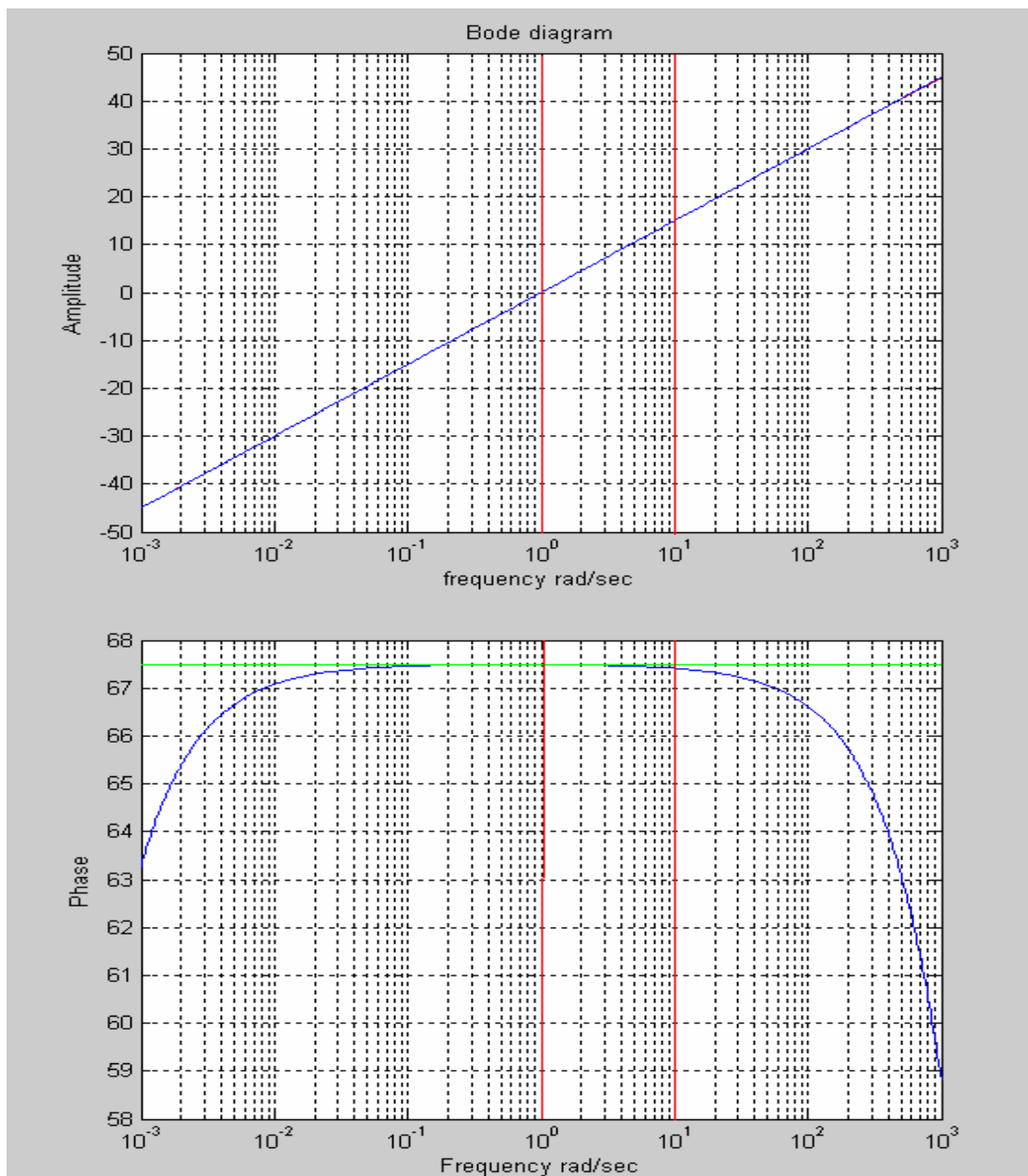


Figure (II.2) Tracés de Bode la fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.75}$  et de son approximation Analogique.

On remarque bien que dans la bande de fréquence  $[0.1 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s}]$ , la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire *Dérivateur*: une pente de 15dB/dec (20m), et la phase de  $67.5^\circ$ , ce qui implique la justesse de l'approximation.

On remarque aussi que cette méthode d'approximation donne de bons résultats par rapport a celles trouvées dans [7].

## II.2 Implémentation par des circuits électriques analogiques

### II.2.1 Intégration d'ordre fractionnaire

L'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme

$$H_I(s) = \frac{K_I}{s^m} = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.17})$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant

l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $H_I(s)$  donne : 
$$H_I(s) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.18})$$

Où les  $h_i$  sont les résidus des pôles donnés par l'équation (II.7).

Cette équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Forster de la 1<sup>ère</sup> forme dont le schéma est représenté dans la figure (II-3).

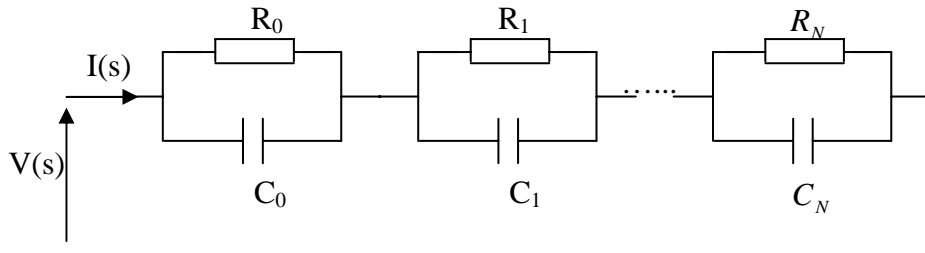


Figure (II.3) : Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

L'impédance de ce réseau est donnée par : 
$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{R_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (\text{II.19})$$

Que l'on peut faire correspondre à (II.18) en mettant :

$$R_i = h_i \quad , \quad C_i = \frac{1}{h_i p_i} \quad \text{Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II.20})$$

### II.2.2 Dérivée d'ordre fractionnaire

De la même manière, l'approximation rationnelle de la dérivée d'ordre fractionnaire peut être donnée par une fonction de la forme

$$G_D(s) = K_D s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.21})$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle obtenue donne :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.22})$$

Où les  $g_i$  sont les résidus donnés par (II.16).

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Forster de la 2<sup>ème</sup> forme, dont le schéma est représenté à la figure (II.4).

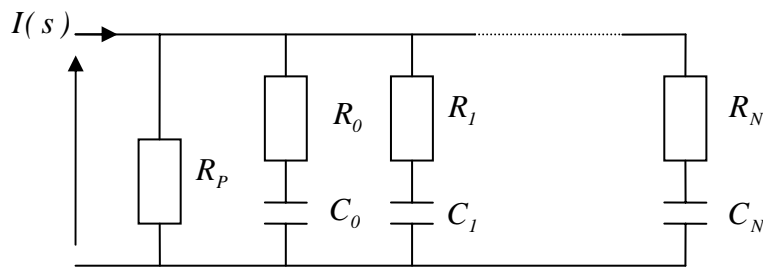


Figure (II.4) : Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

$$\text{L'admittance de ce réseau est de la forme : } Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left( \frac{s C_i}{1 + s R_i C_i} \right) \quad (\text{II.23})$$

Que l'on peut faire correspondre à (II.22) en mettant :

$$C_i = g_i \quad , \quad R_i = \frac{1}{g_i p_i} \quad \text{et} \quad R_p = \frac{1}{G_0} \quad \text{Pour } i = 0,1,\dots,N \quad (\text{II.24})$$

### II.3 Discrétisation de la fonction d'approximation

La simulation d'un modèle fractionnaire dans le domaine temporel est difficile c'est pour cela qu'on voit que les dernières années, plusieurs algorithmes ont été développée en utilisant les modèles rationnels continus et discrets dans le temps rapprochant les systèmes fractionnaires. Dans ce travail, on propose une nouvelle méthode pour la discrétisation de l'opérateur d'ordre fractionnaire, qui est basée sur les travaux de



Charef et qui donne une fonction rationnelle continue, l'opérateur de la Laplace  $s$  est substitué par son équivalent discret, ce dernier est calculé en utilisant de diverses méthode d'approximations, les plus récents sont Backward (Euler), Bilinéaire (Tustin), Simpson, Al-Alaoui [7,8,9,10,11,12]. Nous étudions dans la suite du chapitre trois méthodes classiques de discrétisation (la méthode Backward (Euler) [8], la méthode Bilinéaire (Tustin) [8], la méthode Al-Alaoui [11]). Donc les deux fonctions rationnelles obtenus par l'approximation précédente (méthode de Charef) est donnée par:

$$\text{Pour l'intégrateur d'ordre fractionnaire : } H_I(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.25})$$

$$\text{Pour dérivateur d'ordre fractionnaire : } G_D(s) = K_D \cdot \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.26})$$

### II.3.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui

L'étape clé dans l'implémentation numérique de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire est la discrétisation de la fonction rationnelle  $H_I(z)$  par trois méthodes suivantes :

$$\text{-1- La transformation bilinéaire est donnée par } s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (\text{II.27})$$

$$\text{-2- La transformation backward est donnée par } s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (\text{II.28})$$

$$\text{-3- La transformation Al-Alaoui est donnée par } s = \frac{8}{7T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1} / 7} \quad (\text{II.29})$$

où  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $z = \exp(j\omega T)$  est une variable complexe,  $T$  est la période d'échantillonnage.

Donc la discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par les transformations précédentes sont données par :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^m} \Bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad \text{Bilinéaire transformation} \quad (\text{II.30})$$

$$H_I(s) = \frac{1}{s^m} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \quad \text{Backward transformation} \quad (\text{II.31})$$

$$H_I(s) = \frac{1}{s^m} \Big|_{s=\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7}} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s=\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7}} \quad \text{Al-Alaoui transformation} \quad (\text{II.32})$$

Elle donne le filtre RII (Réponse Impulsionnelle Infinie) suivant :

$$H_{BIL}(z) = (z+1) \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left[\left(1 + \frac{2}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{2}{Tp_i} - 1\right)\right]} \quad (\text{II.33})$$

$$H_{BACK}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i z}{\left[\left(1 + \frac{1}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{1}{Tp_i}\right)\right]} \quad (\text{II.34})$$

$$H_{ALA}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i (z+1/7)}{\left[\left(1 + \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} - \frac{1}{7}\right)\right]} \quad (\text{II.35})$$

$$\text{On pose:} \quad \alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i} \quad \beta_i = \frac{2}{Tp_i} - 1 \quad (\text{II.36})$$

$$\delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i} \quad \chi_i = \frac{1}{Tp_i} \quad (\text{II.37})$$

$$\ell_i = 1 + \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} \quad \partial_i = \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} - \frac{1}{7} \quad (\text{II.38})$$

Par substitution de (II.36),(II.37),(II.38) dans les équations (II.33),(II.34),(II.35) respectivement on obtient :

$$H_{BIL}(z) = (z+1) \cdot \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{(\alpha_i \cdot z - \beta_i)} \quad (\text{II.39})$$

$$H_{BACK}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i \cdot z}{(\delta_i \cdot z - \chi_i)} \quad (\text{II.40})$$

$$H_{ALA}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i \cdot (z + 1/7)}{(\ell_i \cdot z - \partial_i)} \quad (\text{II.41})$$

La transformée en  $z$  inverse des équations (II.39), (II.40) et (II.41) donne les résultats suivants :

$$h_{BIL}(k) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) + \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (\text{II.42})$$

$$h_{BACK}(k) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^k u(k) \quad (\text{II.43})$$

$$h_{ALA}(k) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^k u(k) + \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (\text{II.44})$$

où  $u(k)$  est la fonction échelon unitaire.

La troncation du filtre RII de longueur infinie ou de longueur finie " $L$ " permet d'aboutir au filtre RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) suivant :

$$H_{(RIF)BIL} = \sum_{k=0}^L h_{BIL}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^L \left[ \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) + \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \quad (\text{II.45})$$

$$H_{(RIF)BACK} = \sum_{k=0}^L h_{BACK}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^L \left[ \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^k u(k) \right] z^{-k} \quad (\text{II.46})$$

$$H_{(RIF)ALA} = \sum_{k=0}^L h_{ALA}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^L \left[ \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^k u(k) + \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \quad (\text{II.47})$$

### II.3.2 Exemple illustratif

La discrétisation de l'opérateur  $H_I(s) = s^{-0.4}$ , par la transformation Bilinéaire, donne un filtre discret stable (filtre RII) et la troncation de ce dernier permet d'obtenir le filtre à phase linéaire (filtre RIF), avec  $T=0.1$ , dans une gamme de fréquences  $[\omega_b, \omega_h] = [1, 10]$ ,  $y = 0.5$ ,  $L=400$  a donné les résultats suivants :

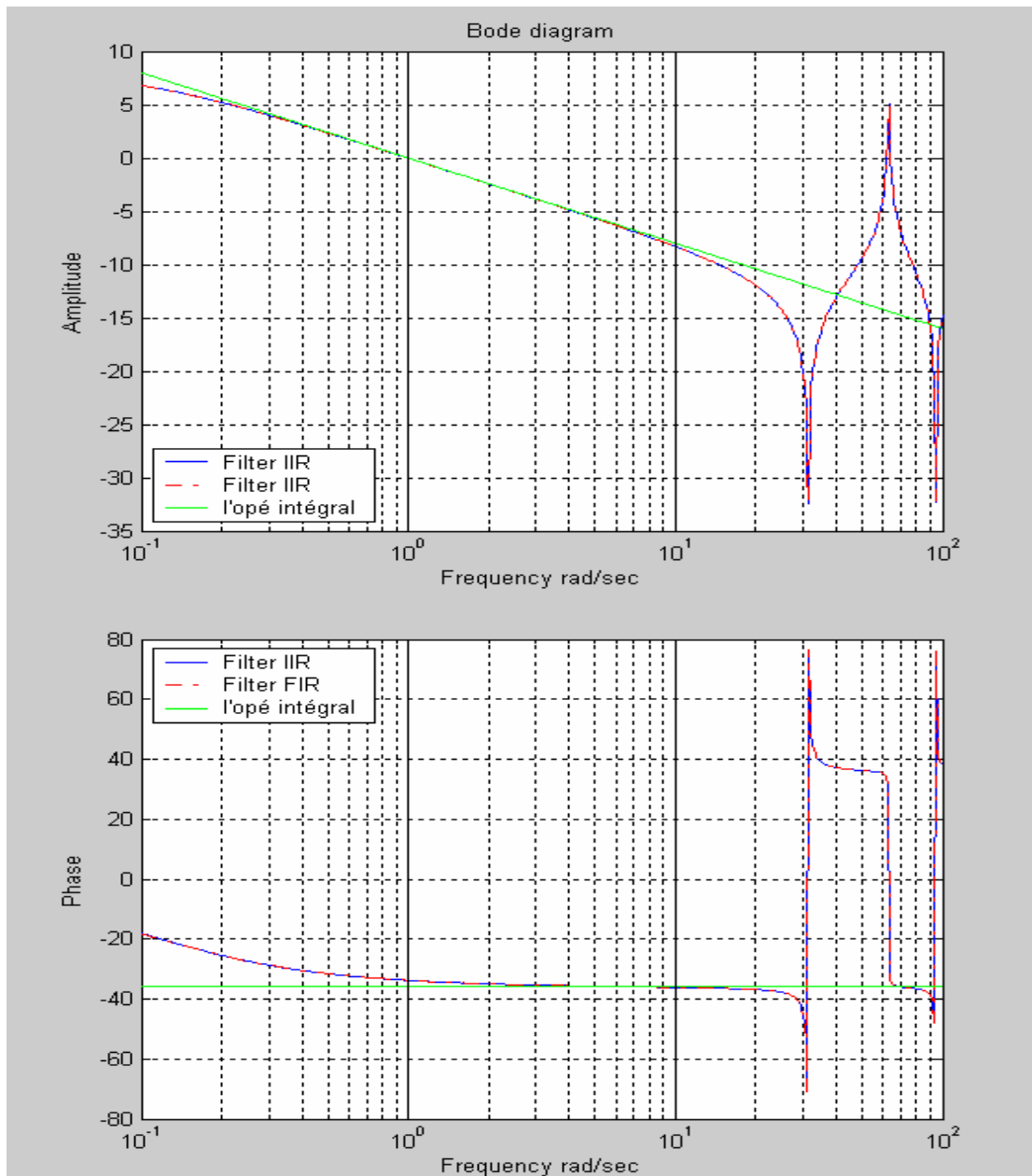


Figure (II.5) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.4}$  discrétisé (RII) et tronquer (RIF), par la transformation Bilinéaire

Et on également étudié la discrétisation (et la troncation) de l'opérateur  $H_I(s) = s^{-0.4}$ , par les deux transformations Backward, Al-Alaoui, avec  $T=0.1$ , dans une gamme de fréquences  $[\omega_b, \omega_h] = [1, 10]$ ,  $y = 0.5$ ,  $L=400$ . On a obtenu les résultats suivants:

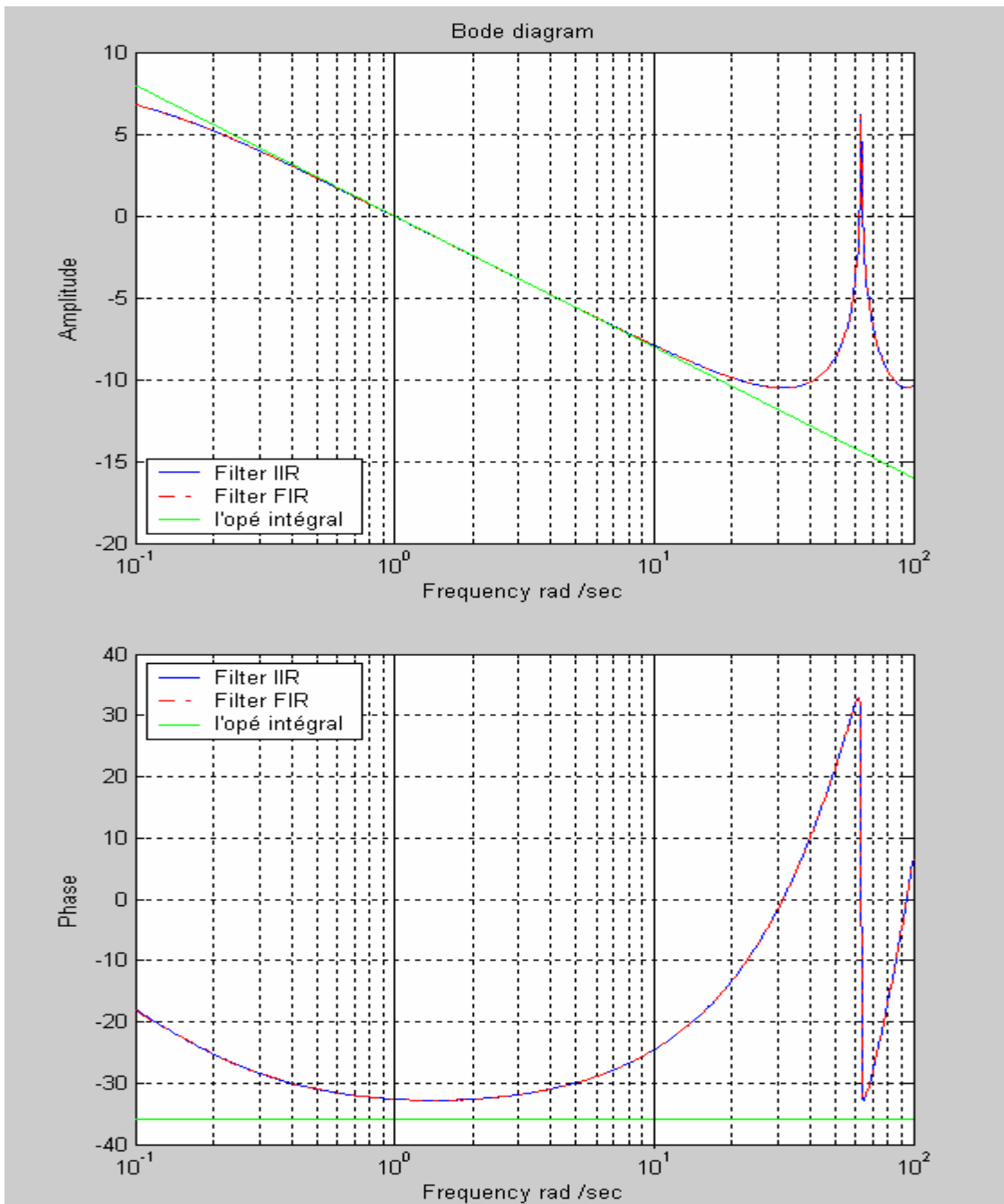


Figure (II.6) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.4}$  discrétisé (RII) et tronquer (RIF), par la transformation Backward

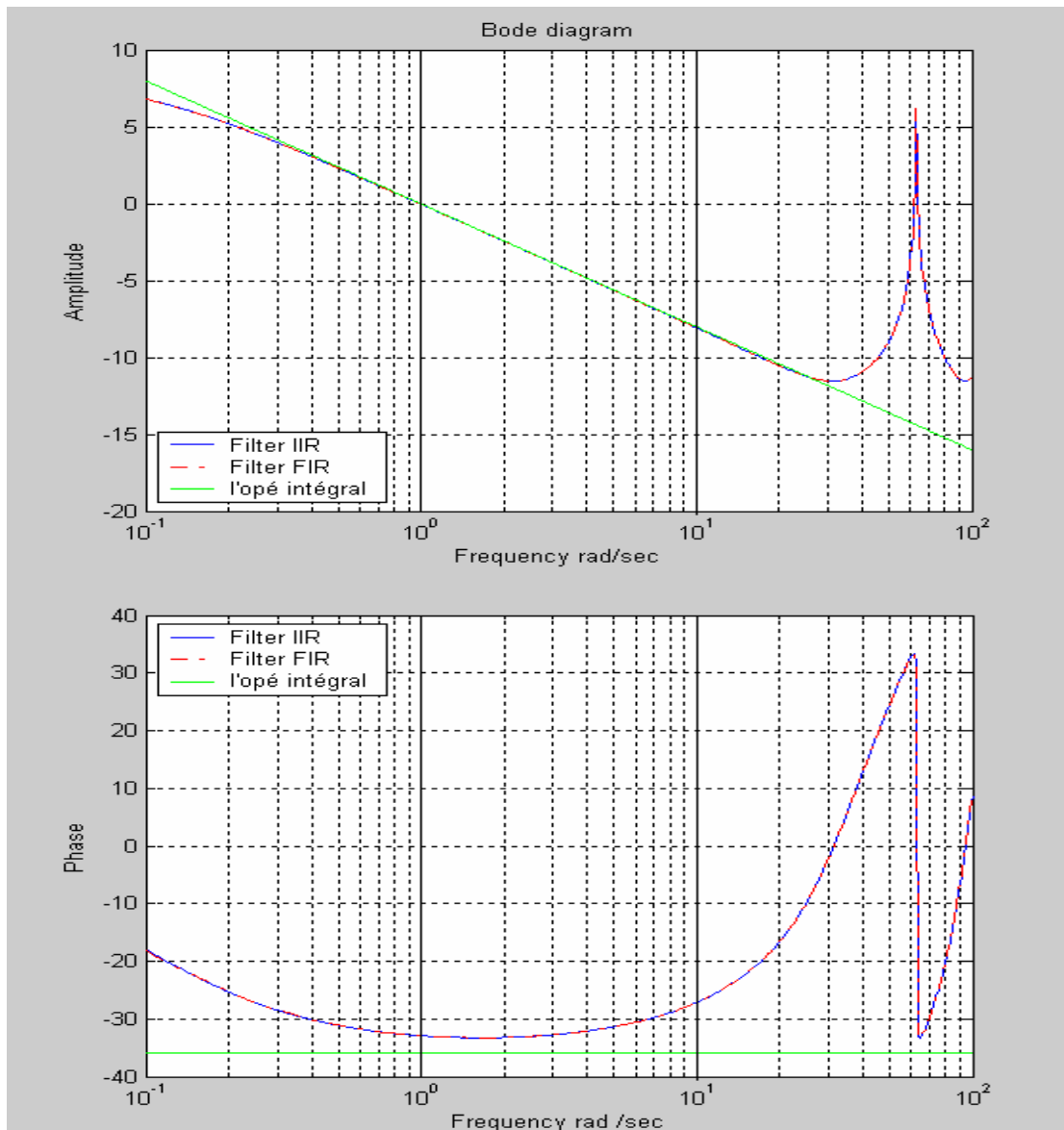


Figure (II.7) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.4}$  discrétisé (RII) et tronquer (RIF), par la transformation Al-Alaoui

A partir des résultats de simulations obtenus, on remarque que les résultats obtenus (traces de Bode amplitude-phase du filtre RII-RIF) par les différentes discrétisations de la fonction d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire et comparable à celles trouvées dans la littérature. On a aussi remarqué que les différentes discrétisations donnent un filtre (RII ou RIF) stable et linéaire, la phase est de -36 degrés, l'amplitude est une pente de -8dB/dec, pour l'opérateur intégrateur  $s^{-0.4}$ .

### II.3.3 Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation

#### Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui

Donc la discrétisation du dérivateur fractionnaire par les trois transformations précédentes suit cet acheminement :

$$\text{Bilinéaire: } G_D(s) = K_D s^m \Big|_{s=\frac{21-z^{-1}}{T1+z^{-1}}} \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s=\frac{21-z^{-1}}{T1+z^{-1}}} \quad (\text{II.48})$$

$$\text{Backward: } G_D(s) = K_D s^m \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (\text{II.49})$$

$$\text{Al-Alaoui: } G_D(s) = K_D s^m \Big|_{s=\frac{8-z^{-1}}{7Tz+1/7}} \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s=\frac{8-z^{-1}}{7Tz+1/7}} \quad (\text{II.50})$$

On trouve le filtre RII suivant :

$$G_{BIL}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i(z-1)}{\left[\left(1 + \frac{2}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{2}{Tp_i} - 1\right)\right]} \quad (\text{II.51})$$

$$G_{BACK}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i(z-1)}{\left[\left(1 + \frac{1}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{1}{Tp_i}\right)\right]} \quad (\text{II.52})$$

$$G_{ALA}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{8}{7T} \frac{g_i(z-1)}{\left[\left(1 + \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} - \frac{1}{7}\right)\right]} \quad (\text{II.53})$$

$$\text{On pose: } \alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i} \quad \beta_i = \frac{2}{Tp_i} - 1 \quad (\text{II.54})$$

$$\delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i} \quad \chi_i = \frac{1}{Tp_i} \quad (\text{II.55})$$

$$\ell_i = 1 + \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} \quad \partial_i = \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} - \frac{1}{7} \quad (\text{II.56})$$

Par substitution de (II.54),(II.55),(II.56) dans les équations (II.51),(II.52),(II.53) respectivement on obtient :

$$G_{BIL}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i(z-1)}{(\alpha_i z - \beta_i)} \quad (\text{II.57})$$

$$G_{BACK}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i(z-1)}{T(\delta_i z - \chi_i)} \quad (\text{II.58})$$

$$G_{ALA}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{8}{7} \frac{g_i(z-1)}{T(\ell_i z - \partial_i)} \quad (\text{II.59})$$

La transformée en  $z$  inverse de l'équation (II.57), (II.58) et (II.59) donne les résultats suivants :

$$g_{BIL}(k) = K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (\text{II.60})$$

$$g_{BACK}(k) = K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (\text{II.61})$$

$$g_{ALA}(k) = K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\ell_i} \left( \frac{\chi_i}{\ell_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (\text{II.62})$$

Avec  $u(k)$  est la fonction échelon unitaire,  $e(k)$  est l'impulsion Dirac

La troncation du filtre RII de longueur infinie ou de longueur finie " $L$ " permet d'aboutir au filtre RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) suivant :

$$\begin{aligned} G_{(RIF)BIL} &= \sum_{k=0}^L g_{BIL}(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^L \left[ K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

$$\begin{aligned} G_{(RIF)BACK} &= \sum_{k=0}^L g_{BACK}(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^L \left[ K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

$$\begin{aligned} G_{(RIF)ALA} &= \sum_{k=0}^L g_{ALA}(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^L \left[ K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\ell_i} \left( \frac{\chi_i}{\ell_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$



### II.3.4 Exemple illustratif

Soit l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire suivant:  $G_D(s) = s^{0.65}$

De la même façon que l'exemple de l'intégrateur, on obtient toujours un filtre discret stable RII, et filtre à phase linéaire RIF par les différentes méthodes de discrétisation, avec  $T=0.1$ , dans une gamme de fréquences  $[\omega_b, \omega_h] = [1, 10]$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $L=400$ , on trouve les résultats suivants :

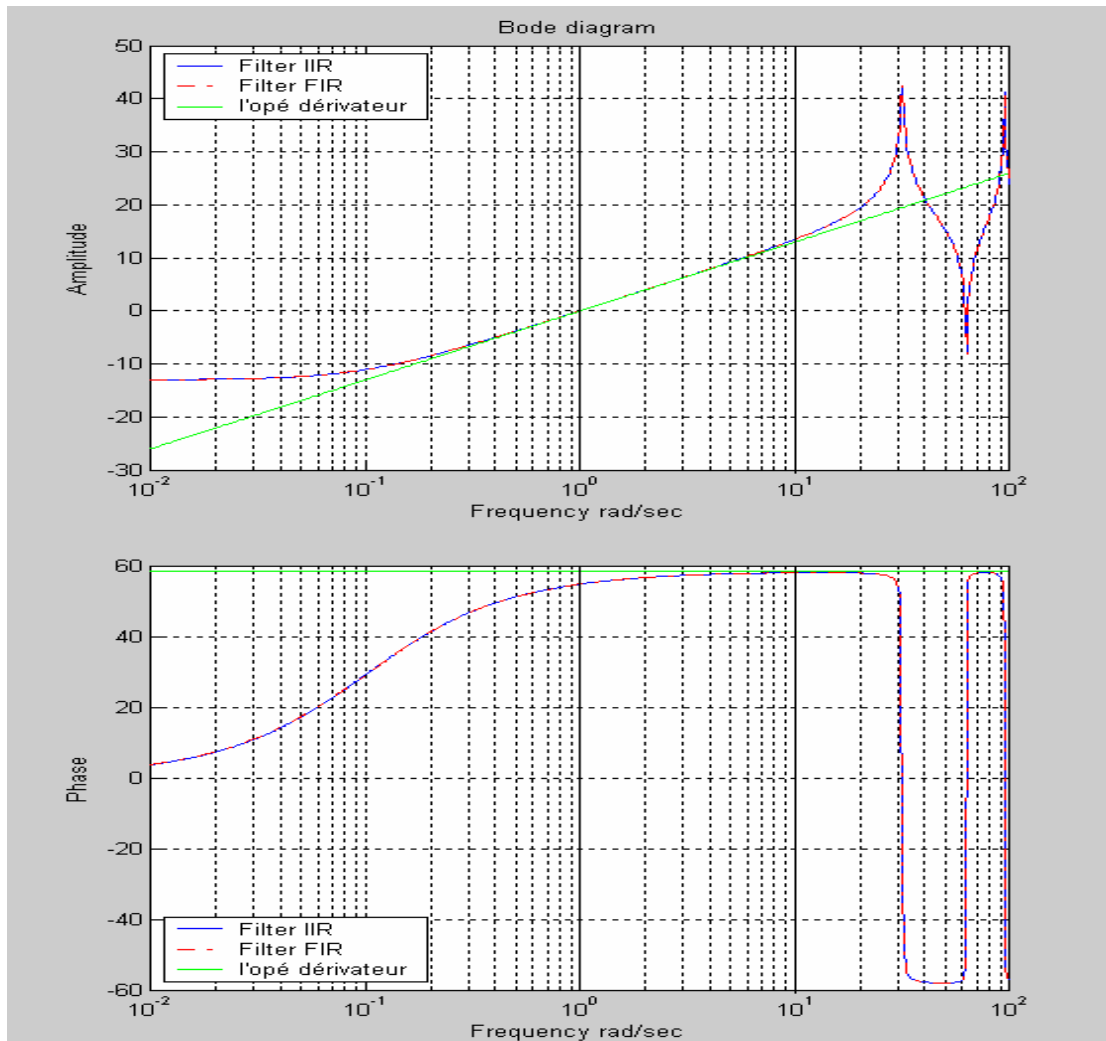


Figure (II.8) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur.

d'ordre fractionnaire  $s^{0.65}$  discrétisé (RII) et tronqué (RIF), par la transformation Bilinéaire

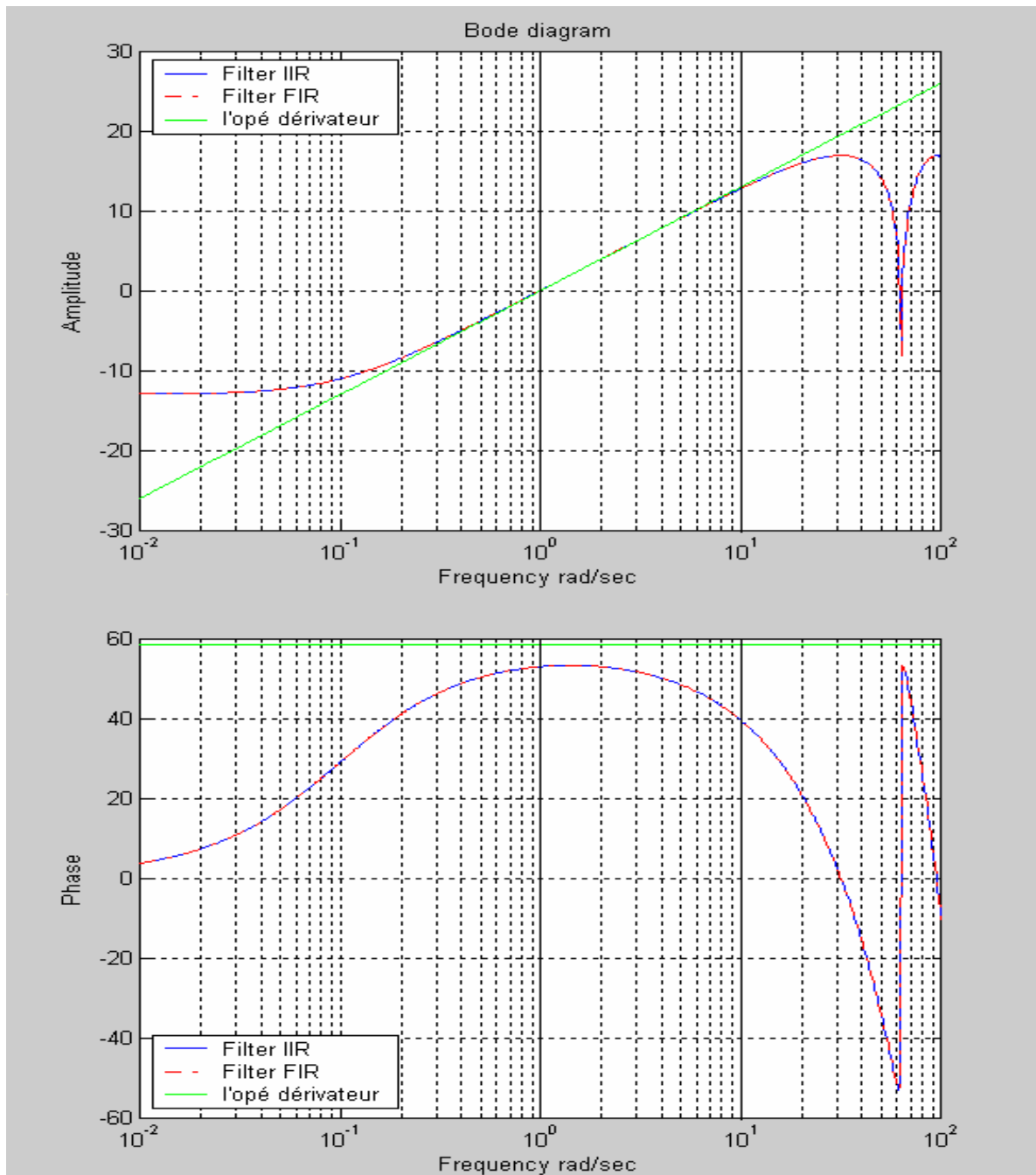


Figure (II.9) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.65}$  discrétisé (RII) et tronquer (RIF), par la transformation Backward

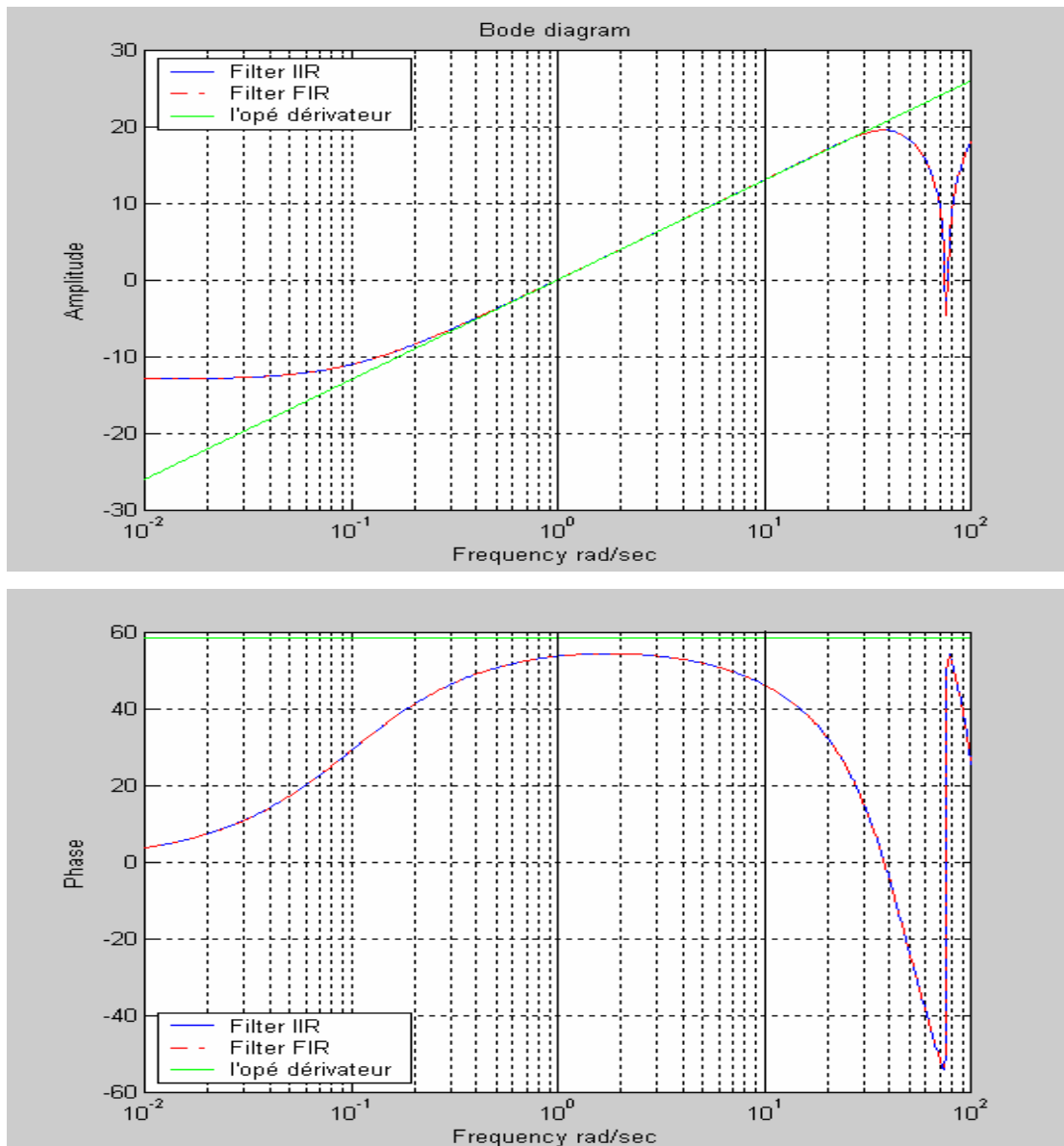


Figure (II.10) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.65}$  discrétisé (RII) et tronquer (RIF), par la transformation Al-Alaoui

À partir des résultats de simulation obtenue, on remarque que les différents discrétisation donnent un filtre (RII ou RIF) stable et linéaire, la phase est de  $58.5^\circ$ , l'amplitude a une pente de 13dB/dec, pour l'opérateur dérivateur  $s^{0.65}$ . Les résultats obtenues par la transformation Bilinéaire en terme d'amplitude constante, phase linéaire sont largement meilleures

## Implémentation numérique

### III.1 Introduction :

Nous avons défini les opérateurs d'ordre fractionnaires, et présenté leurs différentes méthodes d'approximations, avec un intérêt particulier à la méthode de Charef [6] qui est détaillée dans le chapitre (II), la discrétisation de cette dernière permet d'obtenir le filtre RII – RIF.

Le problème qui nous intéresse étant celui de la réalisation (implémentation numérique) de l'opérateur (intégrateur et dérivateur) d'ordre fractionnaire variable, nous étudions dans ce chapitre les implémentations les plus appropriées de dérivateur et d'intégrateur d'ordre fractionnaire.

Nous exposons trois implémentations différentes de ces opérateurs : la première sous forme du filtre RII et, la seconde sous forme du filtre RIF, la troisième c'est une nouvelle implémentation sous forme de structure de Farrow [13, 21].

### III.2 Implémentation numérique RII

#### III.2.1 Intégrateur d'ordre fractionnaire

La discrétisation de la fonction rationnelle de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire a permis d'obtenir le filtre RII suivant :

$$H_{BIL}(z) = (z + 1) \cdot \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{(\alpha_i \cdot z - \beta_i)} \quad (III.1)$$

$$\text{Avec:} \quad \alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i} \quad \beta_i = \frac{2}{Tp_i} - 1 \quad (III.2)$$

où les coefficients  $h_i$  sont les résidus de la fonction rationnelle qui sont déterminés par :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a p_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - (ab)^{(i-j)} \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (III.3)$$

Par substitution de (III.2) dans l'équation (III.1) devient :

$$H_{BIL}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i \cdot (z+1)}{(\alpha_i \cdot z - \beta_i)} \quad (III.4)$$

$$\text{On pose } p_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i} \quad \text{Pour } i=0,1,\dots,N \quad (III.5)$$

$$\delta_i = \frac{h_i}{\alpha_i} \quad \text{Pour } i=0,1,\dots,N \quad (III.6)$$

L'équation (III.4) devient :

$$H_{BIL}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{\delta_i \cdot (z+1)}{(z - p_i)} \quad (III.7)$$

On peut écrire l'équation (III.7) sous la forme suivante :

$$H_{BIL}(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \sum_{i=0}^N \frac{\delta_i \cdot (z+1)}{(z - p_i)} = C_1(z) + C_2(z) + C_3(z) + \dots + C_{N-1}(z) \quad (III.8)$$

$$= \sum_{i=0}^N \frac{Y_i(z)}{E_i(z)} = \sum_{i=0}^N C_i(z) \quad (III.9)$$

avec  $E(z)$  l'entrée de l'opérateur d'ordre fractionnaire,  $Y(z)$  la sortie.

A partir de l'équation (III.9) et (III.7) on peut écrire

$$C_i(z) = \frac{Y_i(z)}{E_i(z)} = \frac{\delta_i \cdot (z+1)}{(z - p_i)} \Rightarrow (z - p_i)Y_i(z) = \delta_i(z+1)E_i(z) \quad (III.10)$$

$$y_i(k) = \delta_i \cdot e_i(k-1) + \delta_i e_i(k) + p_i y_i(k-1) \quad (III.11)$$

Les équations (III.10) et (III.11) montrent la fonction de transfert en  $z$  et l'équation aux différences correspondante à la forme d'un filtre RII.

Donc l'implémentation numérique RII de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire est réalisée par une structure de la forme parallèle suivante :

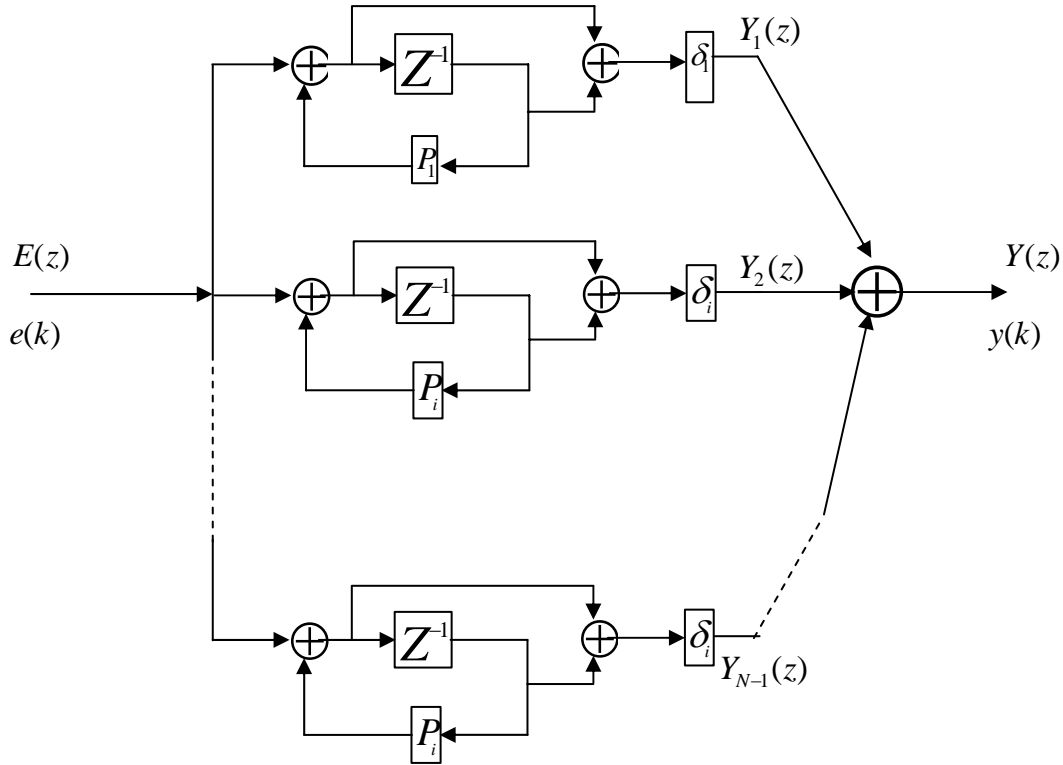


Figure (III.1) Implémentation numérique RII de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.

### III.2.2 Dérivateur d'ordre fractionnaire

Un raisonnement similaire est appliqué à la fonction rationnelle de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Bilinéaire et qui est définie comme suit :

$$G_{BIL}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i(z-1)}{(\alpha_i \cdot z - \beta_i)} \tag{III.12}$$

On pose  $p_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}$  Pour  $i=0,1,\dots,N$  (III.13)

$$\delta_i = \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \text{ Pour } i=0,1,\dots,N \tag{III.14}$$

L'équation (III.12) devient :

$$G_{BIL}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{\delta_i \cdot (z-1)}{(z-p_i)} \tag{III.15}$$

On peut écrire l'équation (III.15) sous la forme suivante :

$$G_{BIL}(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{\delta_i \cdot (z-1)}{(z-p_i)} = B_0 + C_1(z) + C_2(z) + C_3(z) + \dots + C_{N-1}(z) \quad (III.16)$$

$$= K_D + \sum_{i=0}^N \frac{Y_i(z)}{E_i(z)} = B_0 + \sum_{i=0}^N C_i(z) \quad (III.17)$$

A partir de l'équation (III.16) et (III.17) on peut écrire

$$B_0 = K_D \quad (III.18)$$

$$C_i(z) = \frac{Y_i(z)}{E_i(z)} = \frac{\delta_i \cdot (z-1)}{(z-p_i)} \Rightarrow (z-p_i)Y_i(z) = \delta_i(z+1)E_i(z) \quad (III.19)$$

$$y_i(k) = \delta_i \cdot e_i(k-1) - \delta_i e_i(k) + p_i y_i(k-1) \quad (III.20)$$

Donc l'implémentation numérique RII de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est réalisée par une structure de la forme parallèle suivante :

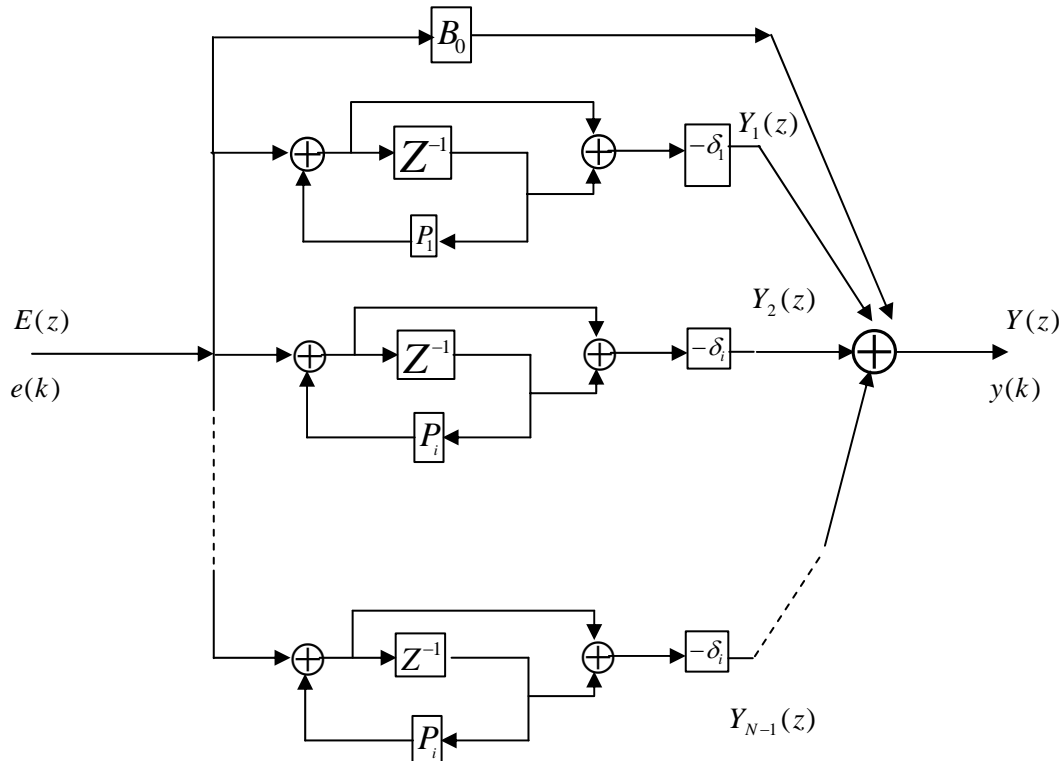


Figure (III.2) Implémentation numérique RII de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.

### III.3 Implémentation numérique RIF

#### III.3.1 Intégrateur d'ordre fractionnaire

Nous avons vu que la troncation du filtre RII de longueur infinie à la longueur finie "L" permet d'aboutir à un filtre RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) suivant :

$$H_{(RIF)BIL} = \sum_{k=0}^L h_{BIL}(k).z^{-k} \quad (III.21)$$

avec  $h_{BIL}(k)$  sont les coefficients de l'équation aux différences correspondante à la forme d'un filtre RII. Ils prennent la forme suivante :

$$h_{BIL}(k) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) + \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (III.22)$$

avec  $h_i$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont des constantes données respectivement par les équations (III.3) et (III.2).

On peut écrire l'équation (III.12) sous la forme suivante :

$$H_{(RIF)BIL} = \frac{Y(z)}{E(z)} = \sum_{k=0}^L h_{BIL}(k).z^{-k} \quad (III.23)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \sum_{k=0}^L h_{BIL}(k).E(z).z^{-k} \quad (III.24)$$

La transformée en  $z$  inverse de l'équation (III.15) permet d'aboutir à l'équation aux différences correspondante à la forme d'un filtre RIF suivant :

$$y(n) = \sum_{k=0}^L h_{BIL}(k).e(n-k) \quad n = 0.1.2.3.....N \quad (III.25)$$

$$= h_{BIL}(0).e(n) + h_{BIL}(1).e(n-1) + \dots + h_{BIL}(N-1).e(n-N+1) + h_{BIL}(N).e(n-N) \quad (III.26)$$

On peut en déduire immédiatement la structure directe d'un filtre RIF qui est représentée à la figure (III.3)



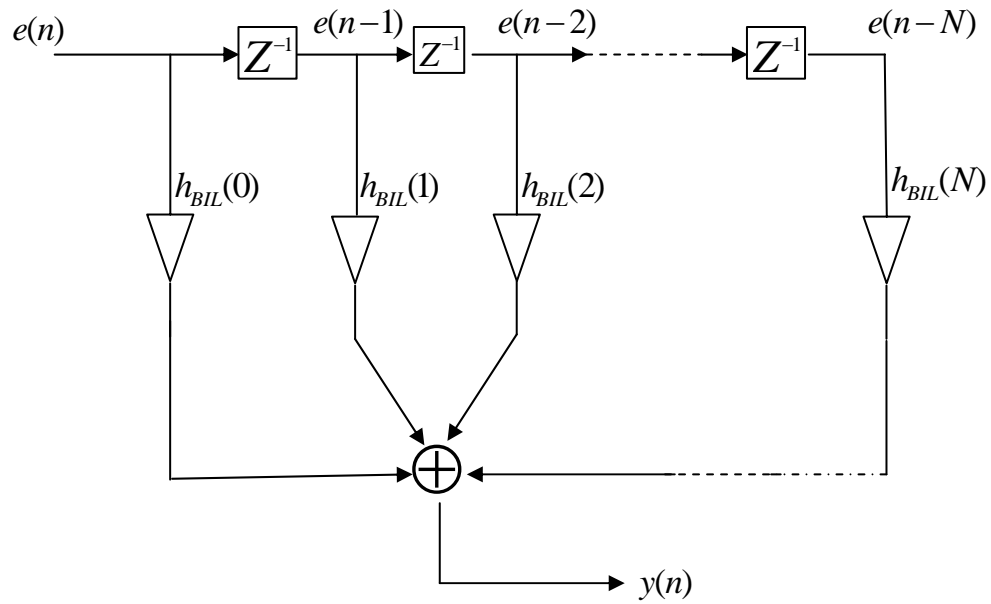


Figure (III.3) Implémentation numérique RIF de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.

### III.3.2 Dérivateur d'ordre fractionnaire

De la même manière on a obtenu l'implémentation numérique RIF de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire, sa fonction de transfert correspondante à la forme d'un filtre RIF est définie comme suit :

$$G_{(RIF)BIL} = \sum_{k=0}^L g_{BIL}(k)z^{-k} \quad (III.27)$$

avec  $g_{BIL}(k)$  sont les coefficients de l'équation aux différences correspondante à la forme d'un filtre RII. Ils prennent la forme suivante :

$$g_{BIL}(k) = K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (III.28)$$

On peut écrire l'équation (III.27) sous la forme :

$$G_{(RIF)BIL} = \frac{Y(z)}{E(z)} = \sum_{k=0}^L g_{BIL}(k) \cdot z^{-k} \quad (III.29)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \sum_{k=0}^L g_{BIL}(k) \cdot E(z) \cdot z^{-k} \quad (III.30)$$

La transformée en  $z$  inverse de l'équation (III.30) permet d'aboutir à l'équation aux différences correspondante à la forme d'un filtre RIF suivant :

$$y(n) = \sum_{k=0}^L g_{BIL}(k).e(n-k) \quad n = 0.1.2.3.....N \tag{III.31}$$

$$= g_{BIL}(0).e(n) + g_{BIL}(1).e(n-1) + \dots + g_{BIL}(N-1).e(n-N+1) + g_{BIL}(N).e(n-N) \tag{III.32}$$

Donc l'implémentation numérique RIF de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est réalisée par une structure de la forme directe suivante :

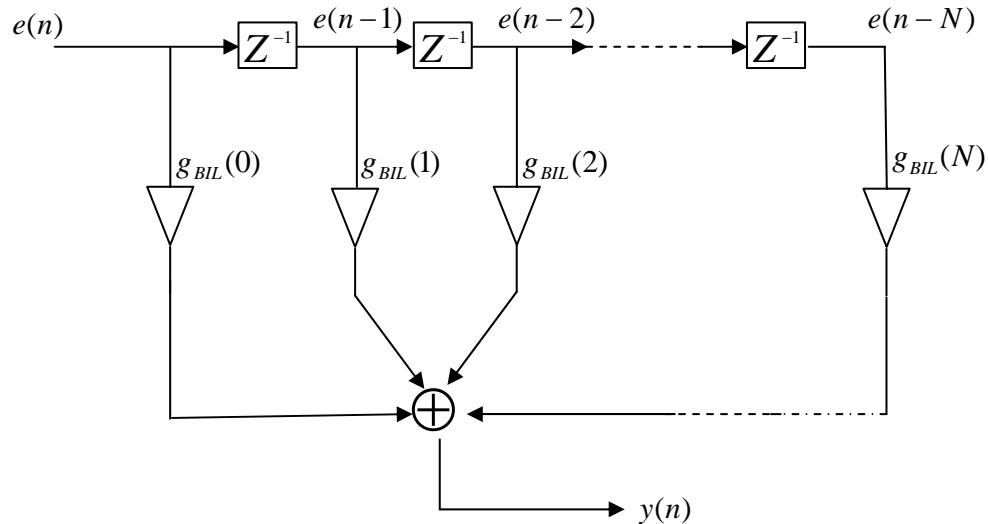


Figure (III.4) Implémentation numérique RIF de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.

De la même façon on obtient l'implémentation numérique RII et RIF de l'opérateur d'ordre fractionnaire discrétisé selon les différentes transformations.

### III.4 Implémentation numérique RIF en structure de Farrow

Avant de faire l'implémentation numérique RIF en structure de Farrow, on doit d'abord étudier les réponses fréquentielles de l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire à la sortie de la structure de Farrow, et comparer les résultats obtenus avec les résultats précédents.

Farrow [13] propose d'exprimer tous les coefficients d'un filtre RIF sous forme d'un polynôme d'ordre  $M$ . Ce qui conduit à la réalisation de  $M+1$  filtres RIF à coefficients constants.

Des méthodes nettement plus efficaces utilisent une base de polynômes Lagrangien ou Newtonien et des techniques d'ajustement de courbe (interpolation au sens des moindres carrés) [22, 23] pour résoudre le problème d'interpolation polynomiale en d'autres termes obtenir les polynôme d'interpolations d'ordre  $M$ .

En analyse numérique, l'interpolation polynomiale est une technique d'interpolation d'un ensemble de données ou d'une fonction par un polynôme. En d'autres termes, étant donné un ensemble de points (les coefficient d'un filtre RIF), on cherche un polynôme qui passe par tous ces points, de degré si possible le plus bas, et qui garantit les deux critères nécessaires phase constante et amplitude linéaire dans une gamme de fréquences donnée.

Sachant que la fonction de transfert d'un filtre RIF doit être définie pour les deux cas de figures suivants :

#### III.4.1 l'intégrateur d'ordre fractionnaire

La troncation de la fonction rationnelle approximée de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire a permis d'obtenir le filtre RIF suivant :

$$H_{(RIF)BIL}(z) = \sum_{k=0}^L h_{BIL}(k).z^{-k} \quad (III.33)$$

avec  $h_{BIL}(k)$  sont les coefficients de l'équation aux différences correspondante à l'opérateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Bilinéaire et qui est définie par (III.22) qu'on peut réécrire comme suit:

$$h_{BIL}(k) = \sum_{n=0}^M a_n m^n \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, L \quad (III.34)$$

où les coefficients  $a_n$  sont les coefficients de la fonction polynomial  $h_{BIL}(k)$  et par substitution dans (III.33) on obtient :

$$H_{(RIF)BIL}(z) = \sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^M a_n m^n .z^{-k} = \sum_{n=0}^M G_n(z).m^n \quad (III.35)$$

Sachant que les fonctions de transfert résultantes  $G_n(z)$  sont des polynômes d'ordre  $M$

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^L a_n z^{-k} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3 \dots M \quad (III.36)$$

et l'équation (III.35) représente la fonction de transfert définie à la sortie de la structure de Farrow et on peut réécrire comme suit :

$$H_{(RIF)BIL}(z) = H_{farrow}(z) = \sum_{n=0}^M G_n(z) \cdot m^n \quad (\text{III.37})$$

On cherche à résoudre le problème d'interpolation polynomiale par résolution du système linéaire obtenu en écrivant le système de  $M + 1$  équations à  $M + 1$  inconnus. On cherche donc l'unique polynôme de degré  $M$  passant par les points  $(m_i, h_i)$   $i = 0, 1, \dots, M$ . Les points  $(m_i)$   $i = 0, 1, \dots, M$  étant tous distincts. L'indice  $i$  : numéro du point de mesure

$$P(m_i) = \sum_{n=0}^M a_n m_i^n, \quad i = 0, \dots, M \quad (\text{III.38})$$

Cette équation (III.38) peut aussi être écrite comme suit :

$$P(m_0) = a_0 + a_1 \cdot m_0^1 + \dots + a_{M-1} \cdot m_0^M = h_{BIL}(k)$$

$$P(m_1) = a_0 + a_1 \cdot m_1^1 + \dots + a_{M-1} \cdot m_1^M = h_{BIL}(k)$$

$$P(m_2) = a_0 + a_1 \cdot m_2^1 + \dots + a_{M-1} \cdot m_2^M = h_{BIL}(k)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$P(m_M) = a_0 + a_1 \cdot m_M^1 + \dots + a_M \cdot m_M^M = h_{BIL}(k)$$

Soit en notation matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & m_0^1 & \dots & m_0^M \\ 1 & m_1^1 & \dots & m_1^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m_M^1 & \dots & m_M^M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{BIL}(k) \\ h_{BIL}(k) \\ \vdots \\ h_{BIL}(k) \end{bmatrix}$$

On peut écrire le système d'équations sous la forme :

$$U A = H$$

Ce système se résout par inversion de la matrice  $U$  qui est une **matrice de Vandermonde** Inversible. Une matrice de Vandermonde est une matrice avec une progression géométrique dans chaque ligne.

$$\text{D'où} \quad A = U^{-1} H$$

Cette approche est intéressante, mais elle est coûteuse en temps de calcul, ce que nous a mené dans notre étude à utiliser la méthode d'ajustement de courbe (curve fitting). Cette interpolation polynomial consiste à approcher la courbe liant les deux séries de données par un polynôme. Les coefficients optimaux de ce polynôme sont ceux qui minimisent la variance de l'erreur d'interpolation. Ce principe [22, 23] est connu sous le nom de la méthode des moindres carrés. La fonction "*polyfit*" retourne le polynôme  $P$  de degré  $M$  permettant d'approcher la courbe  $U = h_{BL}(0)$  au sens des moindres carrés.

#### III.4.1.1 Calcul des coefficients d'interpolation :

On veut interpoler le vecteur des valeurs  $H = [h_{BL}(0)]$  (les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 1) aux points  $U$  (vecteur des points d'interpolation,  $0.1 < m < 0.95$ ). Les valeurs sont données par le tableau (III.1) ci-dessous

$h_{BL}(0)$	0.73	0.63	0.54	0.47	0.40	0.35	0.30	0.26	0.22
U	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$h_{BL}(0)$	0.19	0.16	0.14	0.13	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06
U	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95

Tableau (III.1) Les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 1 correspondant à des points d'interpolation

Par un polynôme de degré  $M$  Il suffit d'utiliser les commandes

MATLAB suivantes :

```
>> U=linspace(0.1, 0.95, 18); % vecteur des points d'interpolation
```

```
>> H= [h(0)]; % vecteur des valeurs
```

```
>> p_M=polyfit(U, H, M)
```

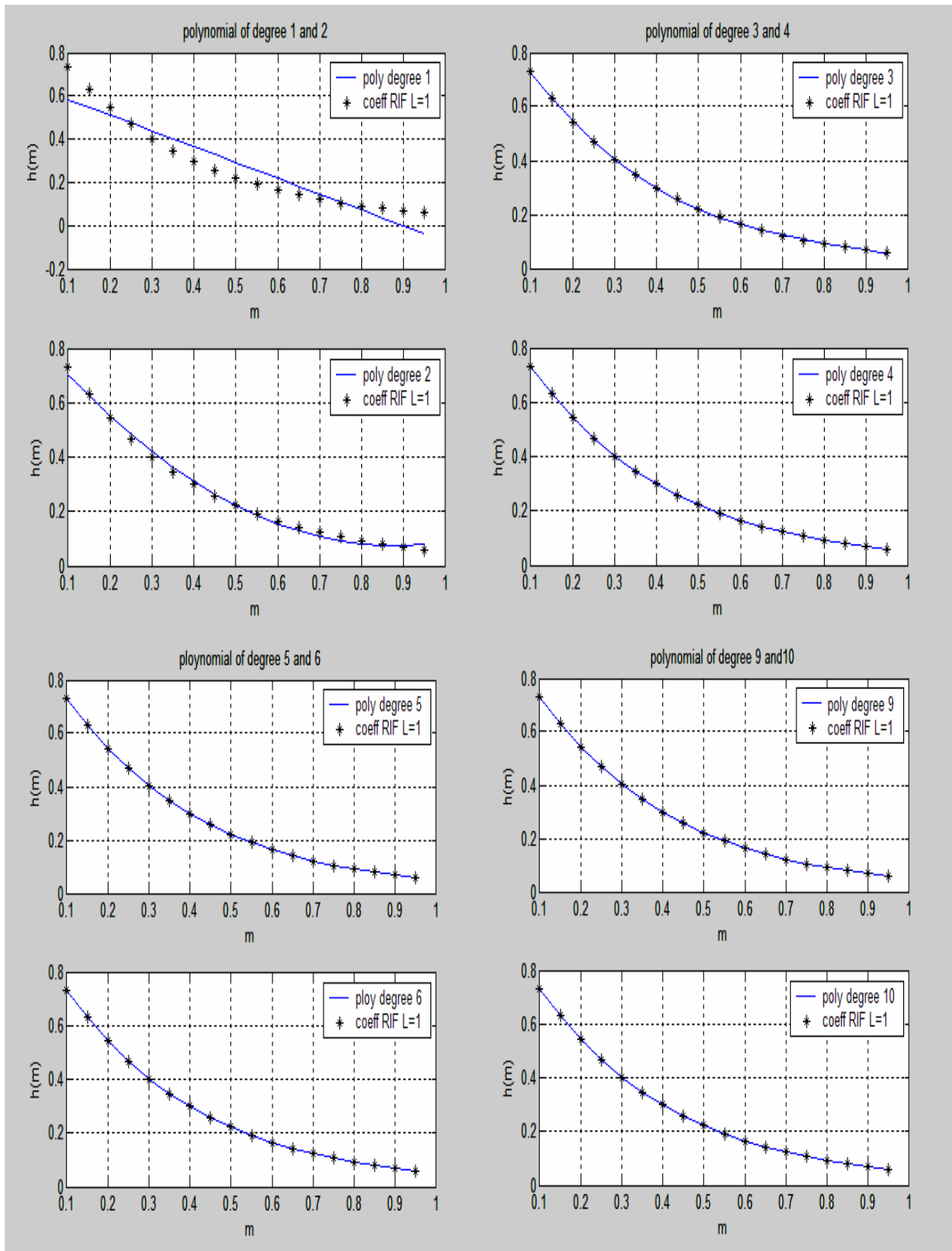
$p_M$  sont les vecteurs des coefficients du polynôme interpolant.

Donc après exécution du programme on obtient les coefficients du polynôme d'interpolation de degré  $M=1,2,\dots,10$  et qui sont données par le tableau (III.2) ci dessous

	$m^{10}$	$m^9$	$m^8$	$m^7$	$m^6$	$m^5$	$m^4$	$m^3$	$m^2$	$m^1$	$m^0$
$p_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.73	0.66
$p_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	1.04	-1.82	0.87
$p_3$	0	0	0	0	0	0	0	-1.01	2.64	-2.54	0.96
$p_4$	0	0	0	0	0	0	0.73	-2.56	3.73	-2.82	0.98
$p_5$	0	0	0	0	0	-0.30	1.52	-3.32	4.06	-2.90	0.98
$p_6$	0	0	0	0	0.11	-0.65	1.95	-3.58	4.14	-2.91	0.98
$p_7$	0	0	0	-4.75	17.56	-26.65	22.11	-12.24	6.17	-3.14	0.99
$p_8$ $\times 10^2$	0	0	25.45	-111.6	204.9	-204.3	120.9	-44.95	12.37	-3.75	1.01
$p_9$ $\times 10^3$	0	-0.09	0.46	-0.98	1.18	-0.87	0.41	-0.12	0.02	-0.004	0.001
$p_{10}$ $\times 10^3$	0.47	-2.56	6.08	-8.29	7.14	-4.04	1.51	-0.37	0.058	-0.007	0.001

Tableau (III.2) Les coefficients du polynôme d'interpolation de degré  $M=1,2,\dots,10$ 

Pour le but d'avoir quel et le degré du polynôme d'interpolation qui donne une bonne approximation pour ces données (*les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 1*) nous prenons des exemples pour différent degré du polynôme d'interpolation, et on obtient les figures suivants :



pour les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 15, on a obtenu les figures suivantes:

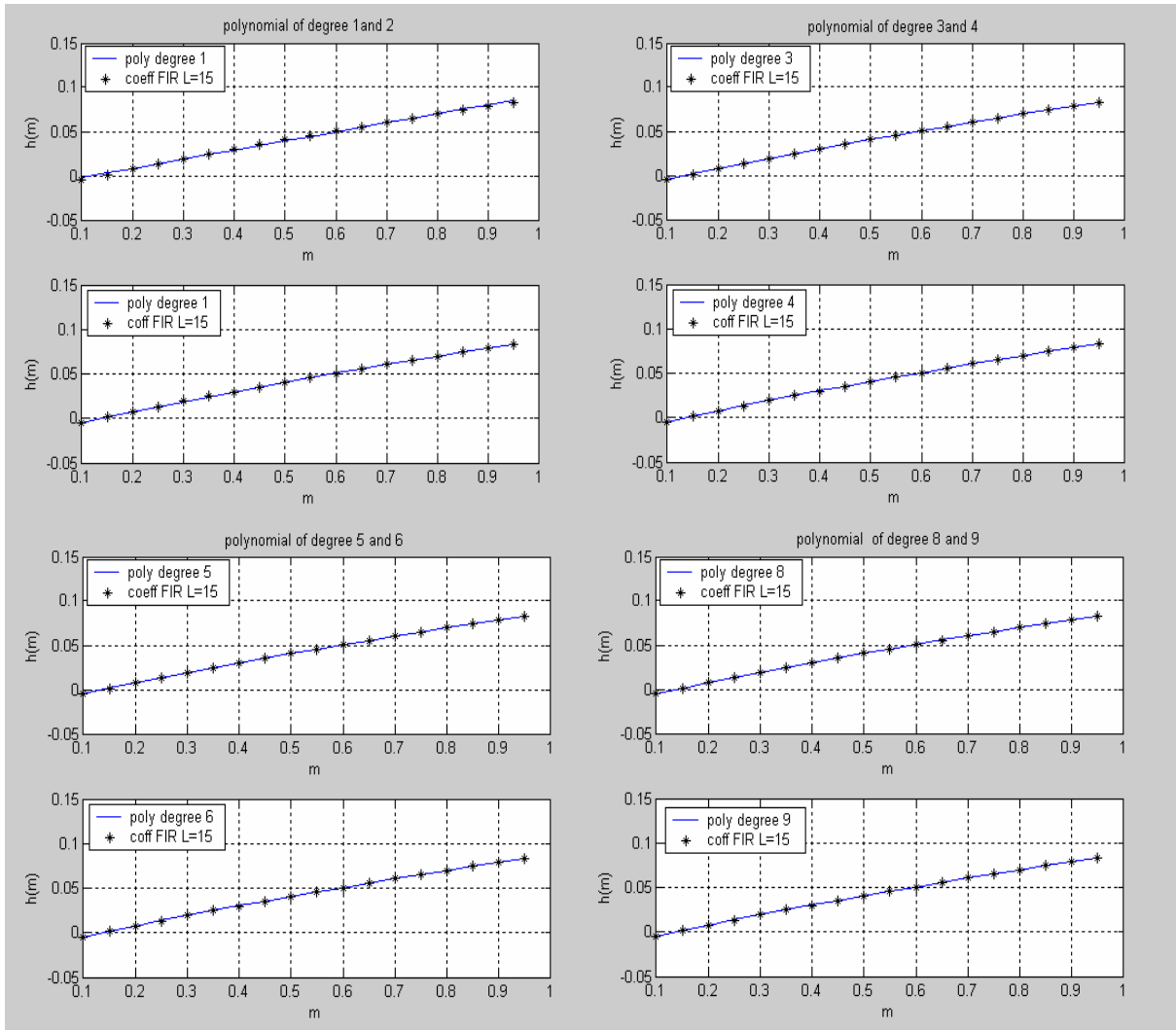


Figure (III.5) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire

On remarque ici que les polynômes d'interpolation d'ordre 1 et 2 ne sont pas une bonne approximation pour ces données. Par contre les polynômes d'ordre 3, 4 jusqu'à 10 donneront une meilleure approximation de ces données (*les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 1 et 15*). On observe qu'à partir de l'ordre 3 du polynôme d'interpolation les courbes sont presque les mêmes qui permettent de conclure que pour avoir une meilleure approximation des données on peut choisir un polynôme d'ordre 3, le choix de l'ordre 3 est suffisant.

Dans le cas suivant, on étudiera les réponses fréquentielles résultantes à la sortie de cette nouvelle structure, et qui est discrétisée selon les trois transformations récentes les résultats obtenus est présentés par des exemples suivants:



### III.4.1.2 Exemple illustratif

Afin d'illustrer un intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.5}$  à la sortie de la structure de Farrow, discrétisé par les trois transformations (Bilinéaire Backward, Al-Alaoui), prenons comme exemple :

$$H_{farrow}(z) = \sum_{n=0}^6 G_n(z) \cdot (0.5)^n$$

Les fonctions de transfert  $G_n(z) = \sum_{k=0}^{400} a_n z^{-k}$  sont déterminées comme montré précédemment au calcul des coefficients d'interpolation.

On suppose que la bande de fréquence  $[w_b, w_h] = [1 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s}]$  ; et pour  $w_c = 0.1 * w_b$ ,  $T=0.1$ ,  $y = 0.5$   $L=400$ ,  $M=6$ , on obtient les résultats suivants :

Les fonctions de transfert résultantes ( $G_n(z)$  sont des polynômes d'ordre 6) de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Bilinéaire sont données par les équations suivantes:

$$G_0(z) = (0.9844) + (0.0289) z^{-1} - (0.0271) z^{-2} + \dots - (4.684 \cdot 10^{-5}) z^{-399} - (4.617 \cdot 10^{-5}) z^{-400}$$

$$G_1(z) = -(2.9068) + (1.8143) z^{-1} + (0.1754) z^{-2} + \dots + (9.306 \cdot 10^{-4}) z^{-399} - (9.228 \cdot 10^{-4}) z^{-400}$$

$$G_2(z) = (4.1361) - (5.3531) z^{-1} + (1.1152) z^{-2} + \dots - (0.0065) z^{-399} - (0.0065) z^{-400}$$

$$G_3(z) = -(3.5767) + (7.3878) z^{-1} - (4.0534) z^{-2} + \dots + (0.0258) z^{-399} + (0.0248) z^{-400}$$

$$G_4(z) = (1.9520) - (6.0731) z^{-1} + (4.9023) z^{-2} + \dots - (0.0456) z^{-399} - (0.0453) z^{-400}$$

$$G_5(z) = -(0.6494) + (2.9576) z^{-1} - (2.9437) z^{-2} + \dots + (0.0429) z^{-399} + (0.0426) z^{-400}$$

$$G_6(z) = (.1106) - (0.6640) z^{-1} + (0.7297) z^{-2} + \dots - (0.0158) z^{-399} - (0.0149) z^{-400}$$

La fonction de transfert à la sortie de la structure de Farrow sera donc la suivante :

$$\begin{aligned} H_{farrow}(z) &= \sum_{n=0}^6 G_n(z) \cdot (0.5)^n \\ &= G_0(z) + G_1(z)(0.5)^1 + G_2(z)(0.5)^2 + G_3(z)(0.5)^3 + G_4(z)(0.5)^4 + G_5(z)(0.5)^5 + G_6(z)(0.5)^6 \end{aligned}$$

Les tracés de Bode de la fonction de transfert de l'opérateur intégrateur fractionnaire  $s^{-0.5}$  et de son implémentation numérique à la sortie de la structure de Farrow sont présentés dans les figures suivantes:

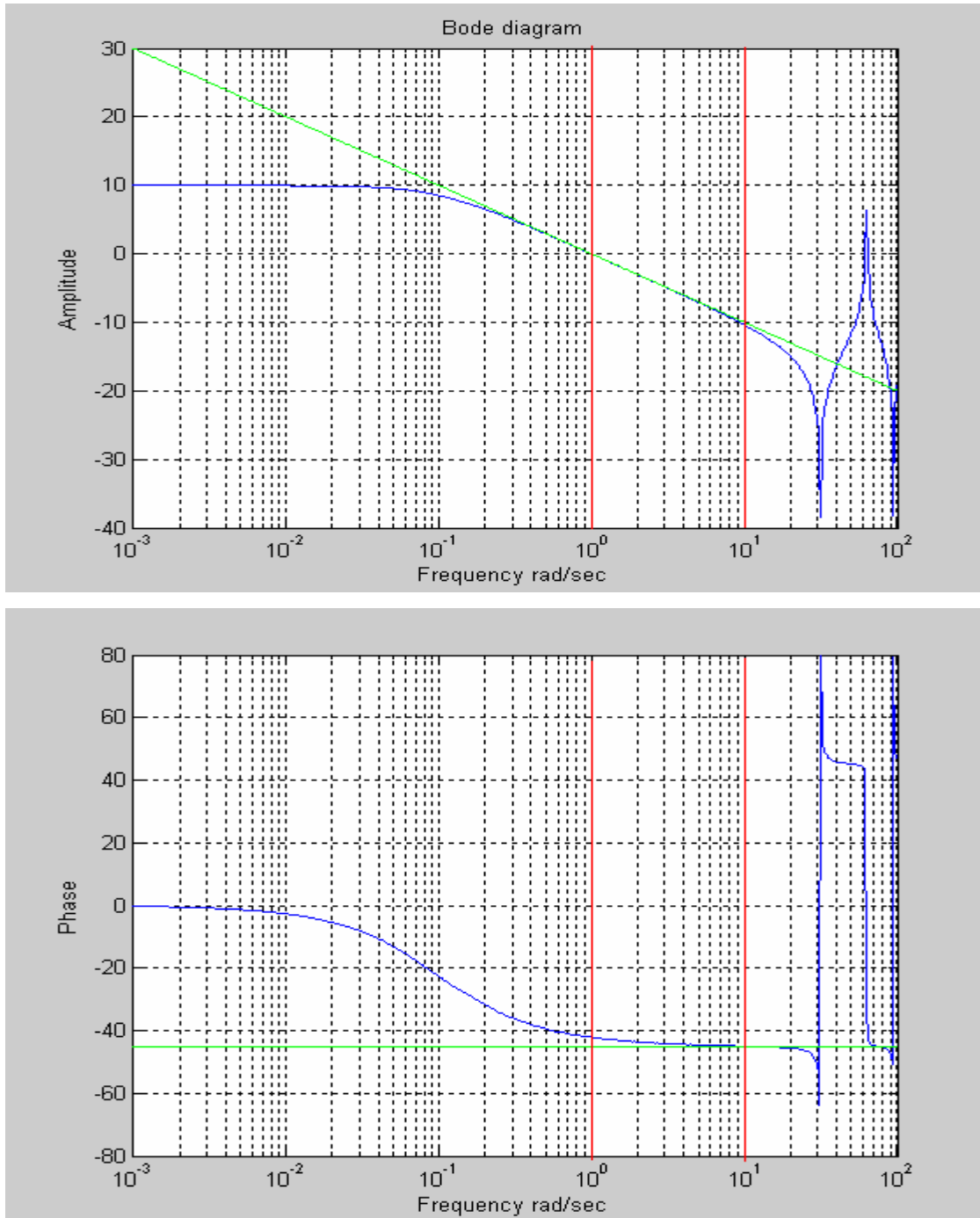


Figure (III.6) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.5}$  discrétisé par la transformation Bilinéaire à la sortie de la structure de Farrow

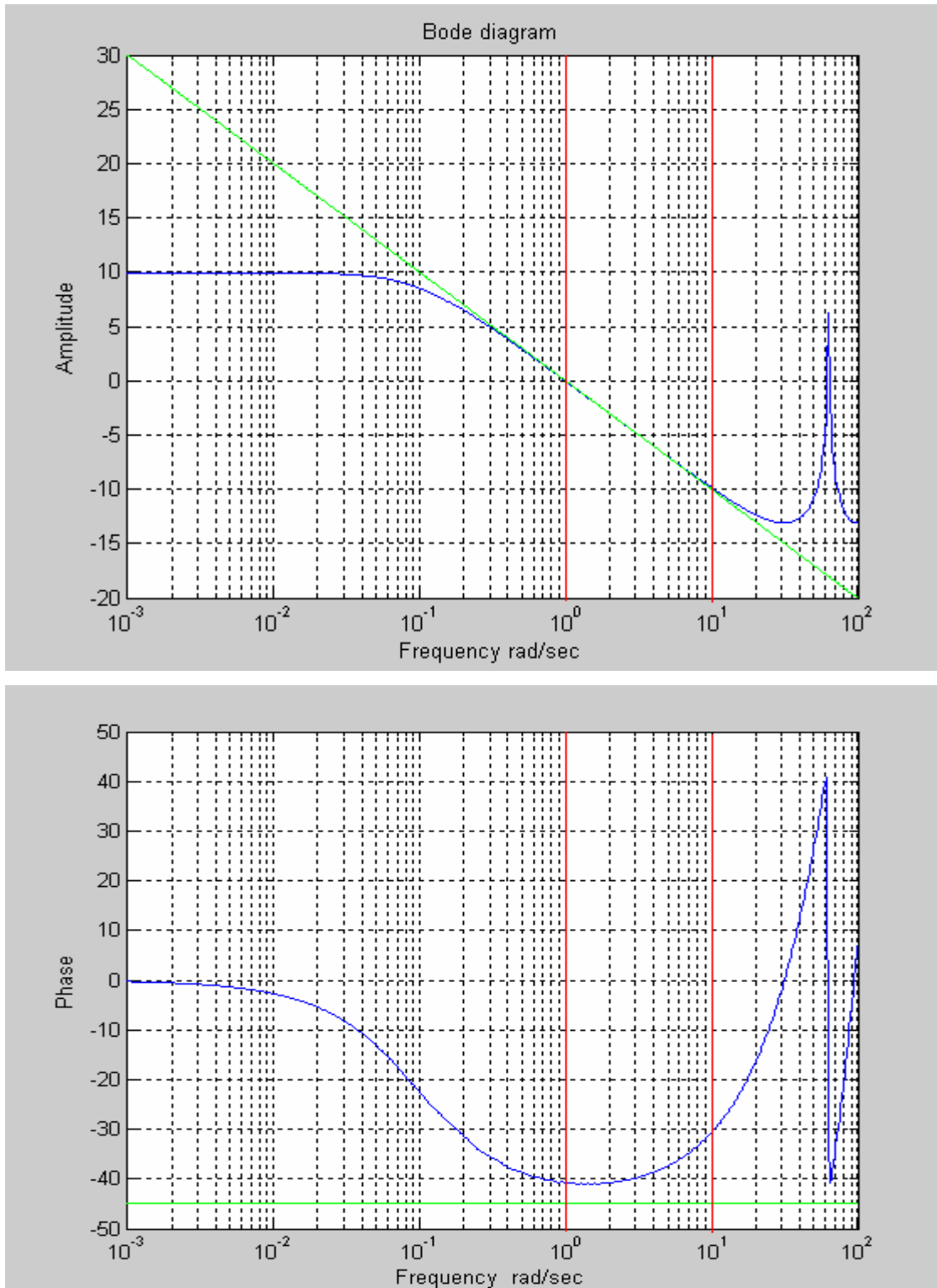


Figure (III.7) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.5}$  discrétisé par la transformation Backward à la sortie de la structure de Farrow

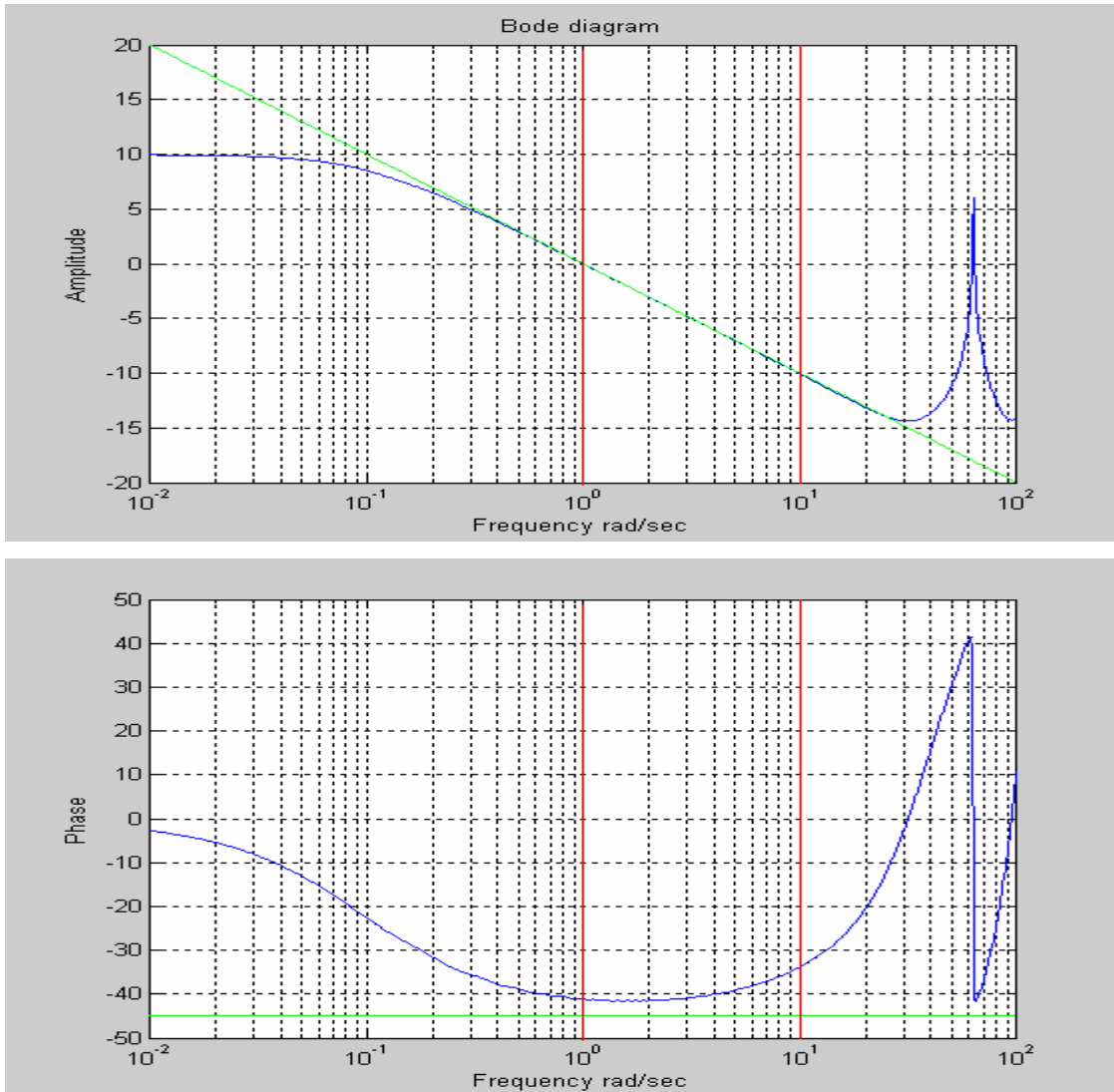


Figure (III.8) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.5}$  discrétisé par la transformation Al-Alaoui à la sortie de la structure de Farrow

On remarque :

- Les résultats de simulation obtenus (tracés de Bode amplitude-phase à la sortie de la structure Farrow) par les différentes discrétisations de la fonction d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire sont comparables à celles trouvées par Bode [20].
- Les différentes discrétisations donnent un filtre stable et linéaire, la phase est de  $-45^\circ$ , l'amplitude est une pente de  $-10$  dB/dec, pour l'opérateur intégrateur  $s^{-0.5}$ .

La structure de Farrow est généralement implémentée sous forme de schéma de Horner (voir [23]) pour des raisons de facilité de réalisation évidente :

$$H_{(RIF)BIL}(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{y(k)}{e(k)} = \sum_{n=0}^M G_n(z) \cdot m^n$$

$$= G_0(z) + m \cdot [G_1(z) + m \cdot [G_2(z) + \dots + m \cdot [G_{M-1}(z) + m \cdot G_M(z)]] \dots]$$
(III.43)

On peut maintenant l'implémenter sous la forme du schéma suivant (Figure (III-9)):

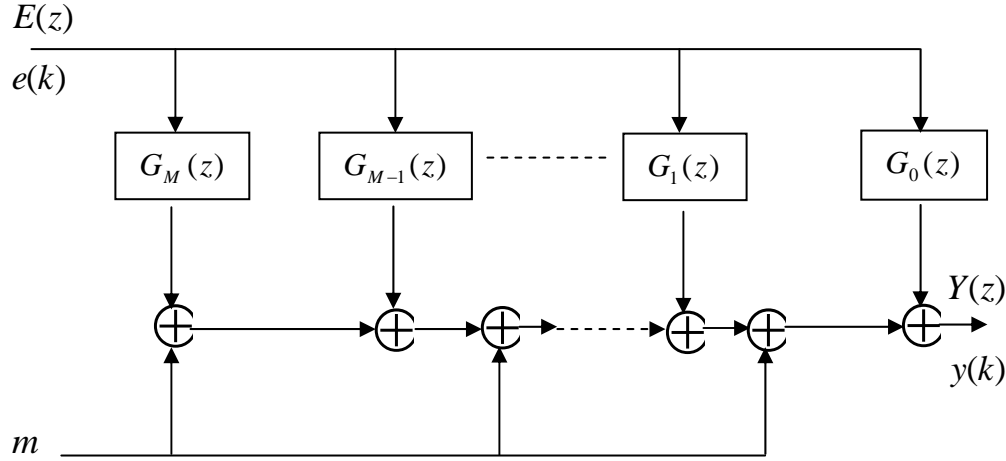


Figure (III.9) Implémentation numérique RIF en structure de Farrow de l'opérateur d'ordre fractionnaire

### III.4.2 Dérivateur d'ordre fractionnaire

Soit

$$G_{(RIF)BIL} = \sum_{k=0}^L g_{BIL}(k) \cdot z^{-k}$$
(III.39)

Avec  $g_{BIL}(k)$  sont les coefficients de l'équation aux différences correspondante de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Bilinéaire et qui est définie par l'équation suivant :

$$g_{BIL}(k) = K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1)$$
(III.40)

Avec  $g_i$ ;  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont des constantes données respectivement par les équations (II.16) ,(II.54)

De la même manière, la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire discrétisé par la transformation Bilineaire à la sortie de la structure de Farrow peut être donnée par une fonction de la forme :

$$G_{(RIF)BIL}(z) = G_{farrow}(z) = \sum_{n=0}^M F_n(z) \cdot m^n \quad (\text{III.41})$$

avec  $F_n(z)$  sont des fonctions de transfert polynomial qui peuvent être calculés par l'équation

$$\text{suivante:} \quad F_n(z) = \sum_{k=0}^L b_n z^{-k} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3 \dots M \quad (\text{III.42})$$

où les coefficients  $b_n$  sont les coefficients de la fonction polynomial  $g_{BIL}(k)$ .

Comme montré précédemment, le problème de l'interpolation polynomial considéré ici devra être résolu par la méthode des moindres carrés (interpolation au sens des moindres carrés), et l'exemple numérique suivant montré les différents étape de cet méthode.

#### III.4.2.1 Calcul des coefficients d'interpolation :

On veut interpoler le vecteur des valeurs  $H = [g_{BIL}(0)]$  (les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 1) aux points  $U$  (vecteur des points d'interpolation,  $0.1 < m < 0.95$ ). Les valeurs sont données par le tableau (III.3) ci-dessous

Par un polynôme de degré  $M$  Il suffit d'utiliser les commandes MATLAB suivantes :

```
>> U=linspace(0.1, 0.95, 18); % vecteur des points d'interpolation
```

```
>> H= [h(0)]; % vecteur des valeurs
```

```
>> p_M=polyfit(U, H, M)
```

$p_M$  sont les vecteurs des coefficients du polynôme interpolant.

Donc après exécution du programme on obtient les coefficients du polynôme d'interpolation de degré  $M=1, 2, \dots, 10$  et qui est données par le tableau (III.4) ci-dessous

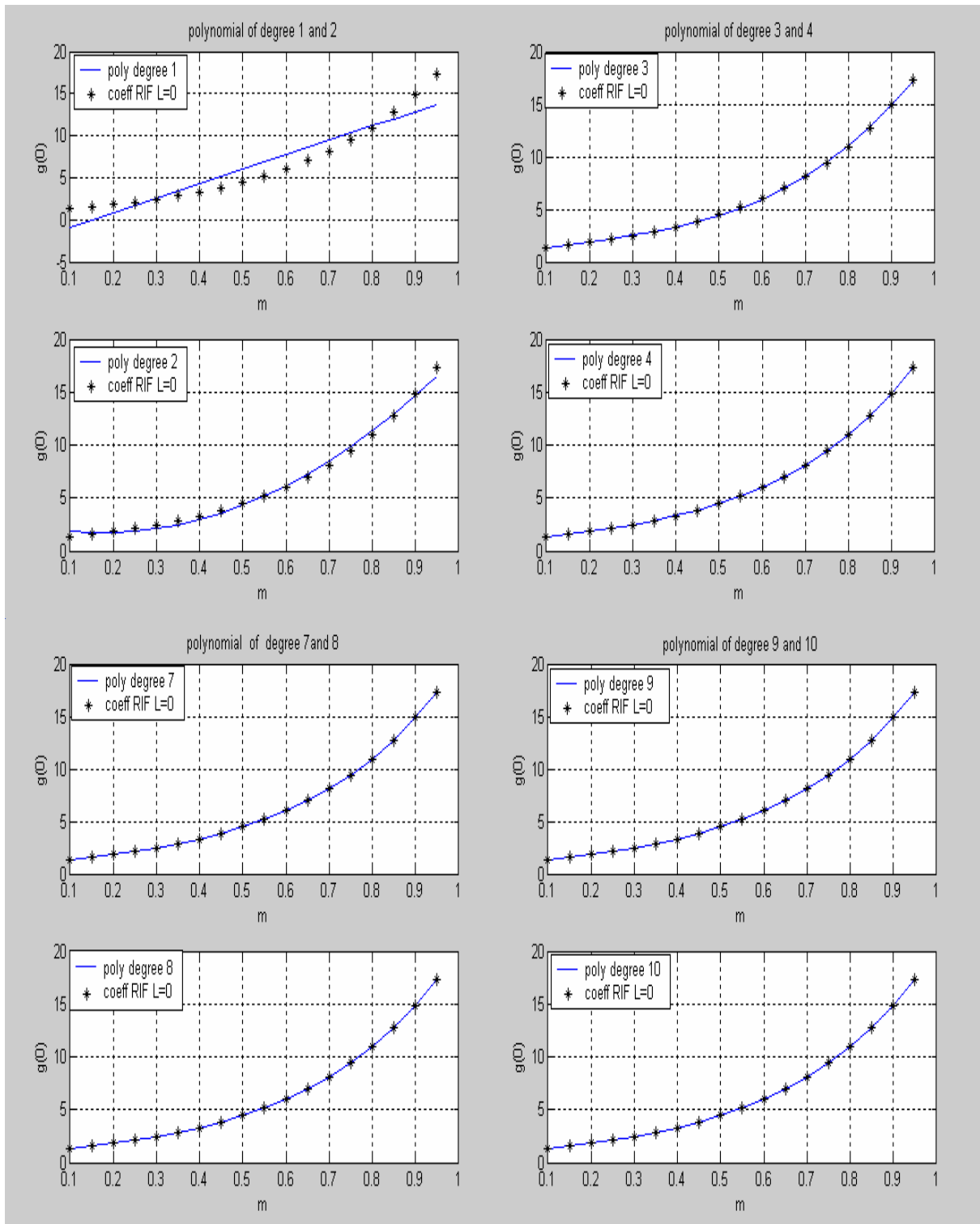
$g_{BIL}(0)$	1.35	1.57	1.82	2.11	2.45	2.84	3.30	3.84	4.45
U	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$g_{BIL}(0)$	5.18	6.02	6.99	8.11	9.42	10.95	12.77	14.86	17.27
U	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95

Tableau (III.3) Les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 1 correspondant à des points d'interpolation

	$m^{10}$	$m^9$	$m^8$	$m^7$	$m^6$	$m^5$	$m^4$	$m^3$	$m^2$	$m^1$	$m^0$
$p_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17.24	-2.64
$p_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	24.80	-8.80	2.52
$p_3$	0	0	0	0	0	0	0	24.75	-14.2	8.68	0.50
$p_4$	0	0	0	0	0	0	19.48	-16.16	14.69	0.91	1.14
$p_5$	0	0	0	0	0	10.99	-9.63	11.71	2.60	3.18	0.99
$p_6$	0	0	0	0	-24.4	88.07	-104	68.79	-14.9	5.70	0.86
$p_7$ $\times 10$	0	0	0	-17.58	62.18	-87.48	64.23	-25.20	6.04	-0.306	0.124
$p_8$ $\times 10^3$	0	0	-0.31	1.153	-1.70	1.334	-0.58	0.154	-0.01	0.004	0.001
$p_9$ $\times 10^4$	0	0.15	-0.75	1.564	-1.79	1.24	-0.53	0.143	-0.02	0.002	0.000
$p_{10}$ $\times 10^3$	0.13	-0.70	1.565	-1.97	1.556	-0.798	0.268	-0.058	0.007	-0.000	0.000

Tableau (III.4) Les coefficients du polynôme d'interpolation de degré  $M=1,2,\dots,10$ 

Pour le but d'avoir quel et le degré du polynôme d'interpolation qui est donné une bonne approximation pour ces données (*les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 1*) nous prenons des exemples pour différent degré du polynôme d'interpolation, et on obtient les figures suivants:



pour les coefficients d'un filtre RIF d'ordre 15, on a obtenu les figures suivantes:



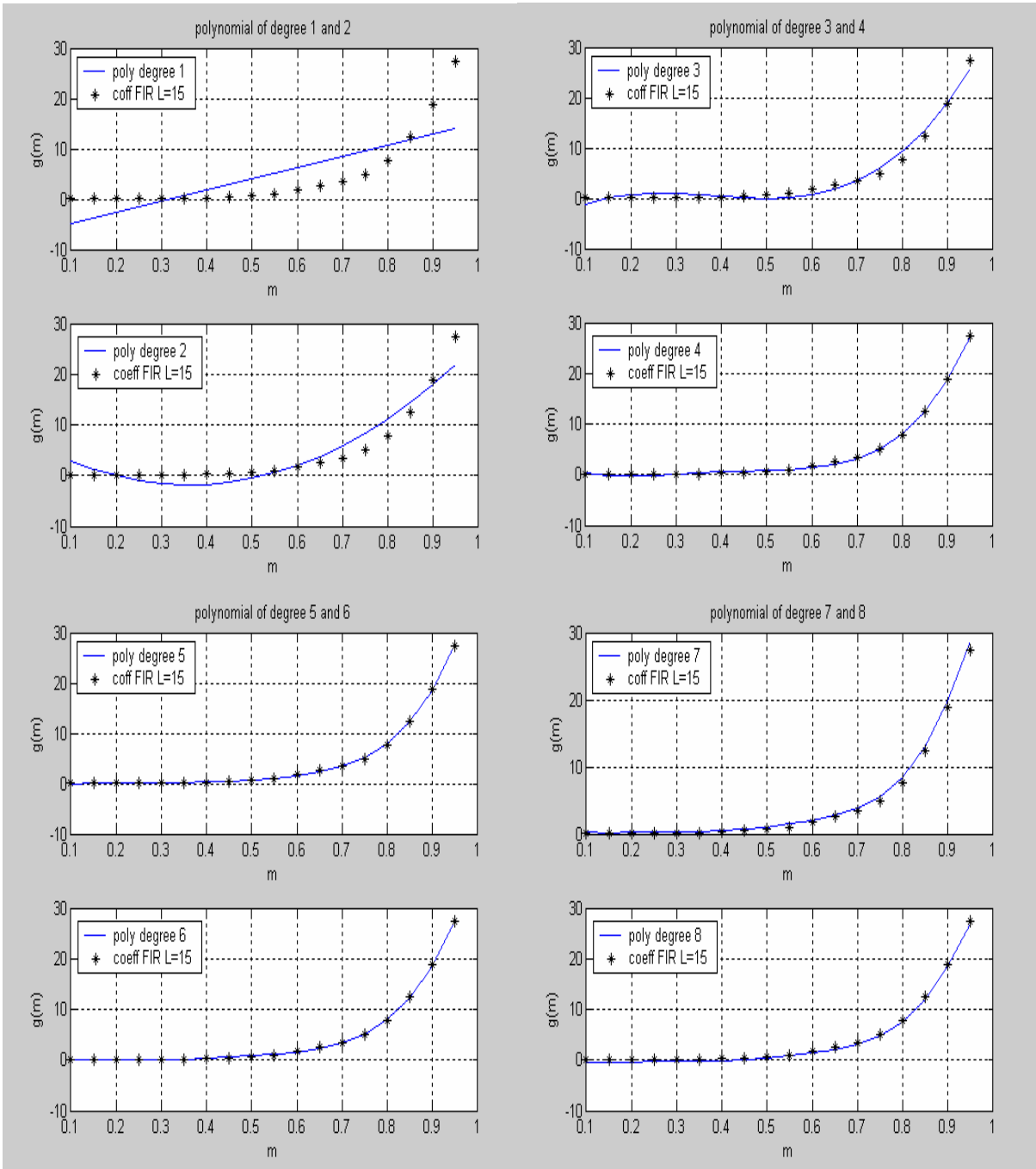


Figure (III.10) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire

- on peut tirer les mêmes remarques que les polynômes d'interpolation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.

De la même façon on obtient les polynômes d'interpolation qui interpolent les coefficients d'un filtre RIF d'ordre  $L$ , et les deux fonctions de transfert définies à la sortie de la structure de

Farrow correspondante de l'opérateur (dérivateur et intégrateur ) d'ordre fractionnaire discrétisé selon les deux transformations Backward, Al-Alaoui.

Maintenant renvoyant à l'étude des réponses fréquentielles résultantes à la sortie de cette nouvelle structure, et qui est discrétisé selon les trois transformations récentes les résultats obtenus est présentés par des exemples suivants:

### III.4.2.2 Exemple illustratif

Afin d'illustrer un dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.4}$  à la sortie de la structure de Farrow, discrétisé par les trois transformations (Bilinéaire Backward, Al-Alaoui), prenons comme exemple :

$$G_{farrow}(z) = \sum_{n=0}^{10} F_n(z) \cdot (0.4)^n$$

Pour obtenir les fonctions de transfert  $F_n(z) = \sum_{k=0}^{200} b_n z^{-k}$ , on peut suivre le même acheminement utiliser avec l'exemple numérique précédent, on suppose que la bande de fréquence  $[w_b, w_h] = [1rad/s, 10rad/s]$ ; et pour  $w_c = 0.1 * w_b$ ,  $T=0.1$ ,  $y = 0.5$   $L=200$ ,  $M=10$ , on obtient les résultats suivants :

Les fonctions de transfert résultantes ( $F_n(z)$  sont des polynômes d'ordre 10) de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire discrétisée par la transformation Bilinéaire sont donnés par les équations suivantes :

$$F_0(z) = (2.7052) - (5.8683) z^{-1} + (10.272) z^{-2} + \dots - (9.3387) z^{-199} + (9.5251) z^{-200}$$

$$F_1(z) = -(53.290) + (191.78) z^{-1} - (3.3924) z^{-2} + \dots + (319.42) z^{-199} - (325.50) z^{-200}$$

$$F_2(z) = (775.76) - (2.661 \cdot 10^3) z^{-1} + (4.65 \cdot 10^3) z^{-2} + \dots - (4.56 \cdot 10^3) z^{-199} + (4.648 \cdot 10^3) z^{-200}$$

$$F_3(z) = -(5.80 \cdot 10^3) + (2 \cdot 10^4) z^{-1} - (3.50 \cdot 10^4) z^{-2} + \dots + (3.61 \cdot 10^4) z^{-199} - (3.67 \cdot 10^4) z^{-200}$$

$$F_4(z) = (2.68 \cdot 10^4) - (9.23 \cdot 10^4) z^{-1} + (1.61 \cdot 10^5) z^{-2} + \dots - (1.75 \cdot 10^5) z^{-199} - (1.78 \cdot 10^5) z^{-200}$$

$$F_5(z) = -(7.98 \cdot 10^4) + (2.74 \cdot 10^5) z^{-1} - (4.80 \cdot 10^5) z^{-2} + \dots + (5.54 \cdot 10^5) z^{-199} - (5.62 \cdot 10^5) z^{-200}$$

$$F_6(z) = (1.55 \cdot 10^5) - (5.34 \cdot 10^5) z^{-1} + (9.35 \cdot 10^5) z^{-2} + \dots - (1.14 \cdot 10^6) z^{-199} + (1.16 \cdot 10^6) z^{-200}$$

$$F_7(z) = -(1.97 \cdot 10^5) + (6.77 \cdot 10^5) z^{-1} - (1.18 \cdot 10^6) z^{-2} + \dots + (1.55 \cdot 10^6) z^{-199} - (1.57 \cdot 10^6) z^{-200}$$

$$F_8(z) = -(1.56 \cdot 10^5) - (5.36 \cdot 10^5) z^{-1} + (9.37 \cdot 10^5) z^{-2} + \dots - (1.31 \cdot 10^6) z^{-199} + (1.32 \cdot 10^6) z^{-200}$$

$$F_9(z) = -(7.04 \cdot 10^4) + (2.41 \cdot 10^5) z^{-1} - (4.21 \cdot 10^5) z^{-2} + \dots + (6.30 \cdot 10^5) z^{-199} - (6.36 \cdot 10^5) z^{-200}$$

$$F_{10}(z) = (1.37 \cdot 10^4) - (4.68 \cdot 10^4) z^{-1} + (8.18 \cdot 10^4) z^{-2} + \dots - (1.30 \cdot 10^5) z^{-199} + (1.31 \cdot 10^5) z^{-200}$$

La fonction de transfert à la sortie de la structure de Farrow sera donc la suivante :

$$G_{farrow}(z) = \sum_{n=0}^{10} F_n(z) \cdot (0.4)^n$$

$$= [F_0(z) + F_1(z)(0.4)^1 + F_2(z)(0.4)^2 + F_3(z)(0.4)^3 + F_4(z)(0.4)^4 + F_5(z)(0.4)^5 + F_6(z)(0.4)^6 + F_7(z)(0.4)^7 + F_8(z)(0.4)^8 + F_9(z)(0.4)^9 + F_{10}(z)(0.4)^{10}]$$

Les tracés de Bode de la fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.4}$  et de son implémentation numérique à la sortie de la structure de Farrow sont présentés dans les figures suivantes :

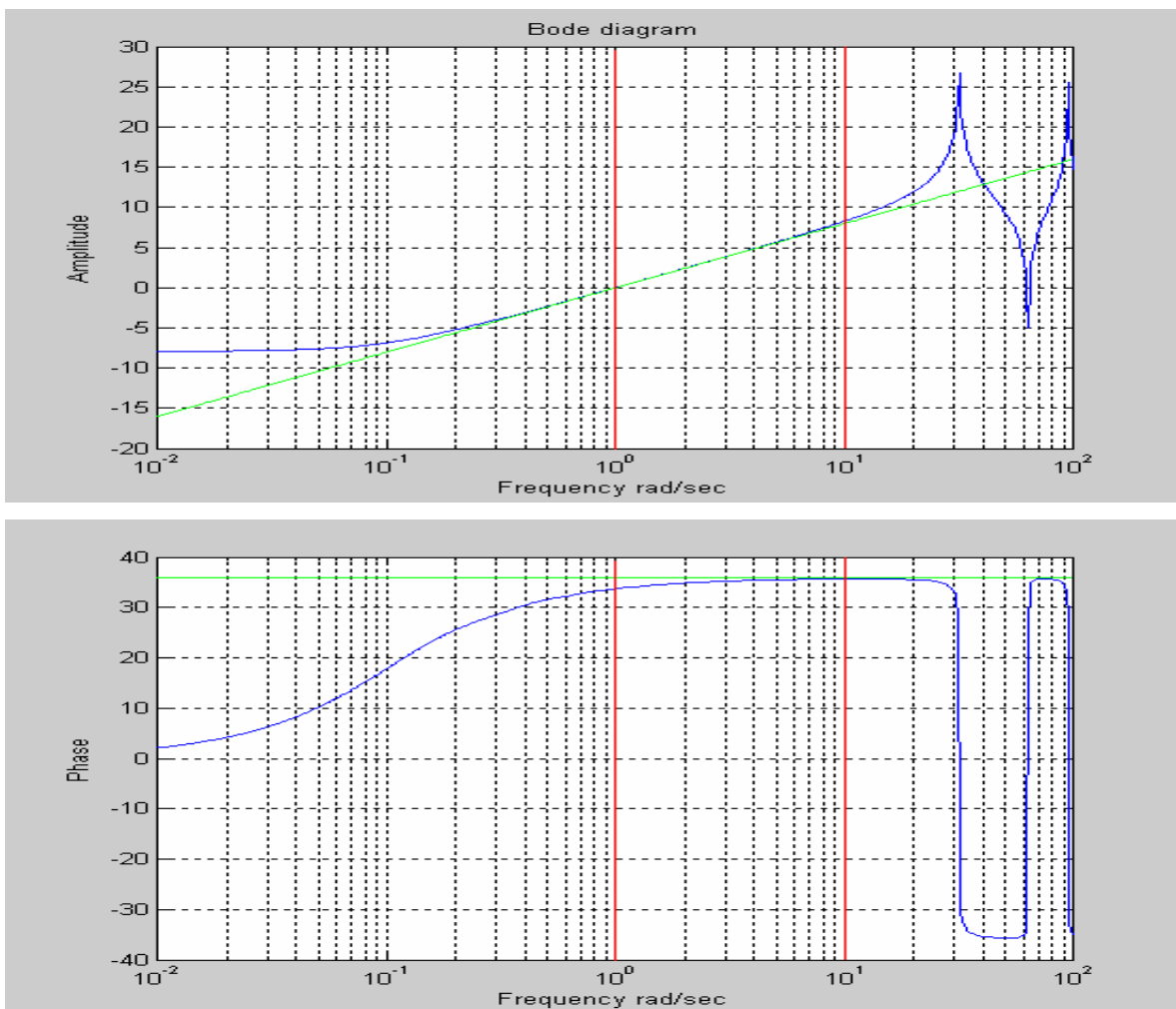


Figure (III.11) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.4}$  discrétisé par la transformation Bilinéaire à la sortie de la structure de Farrow

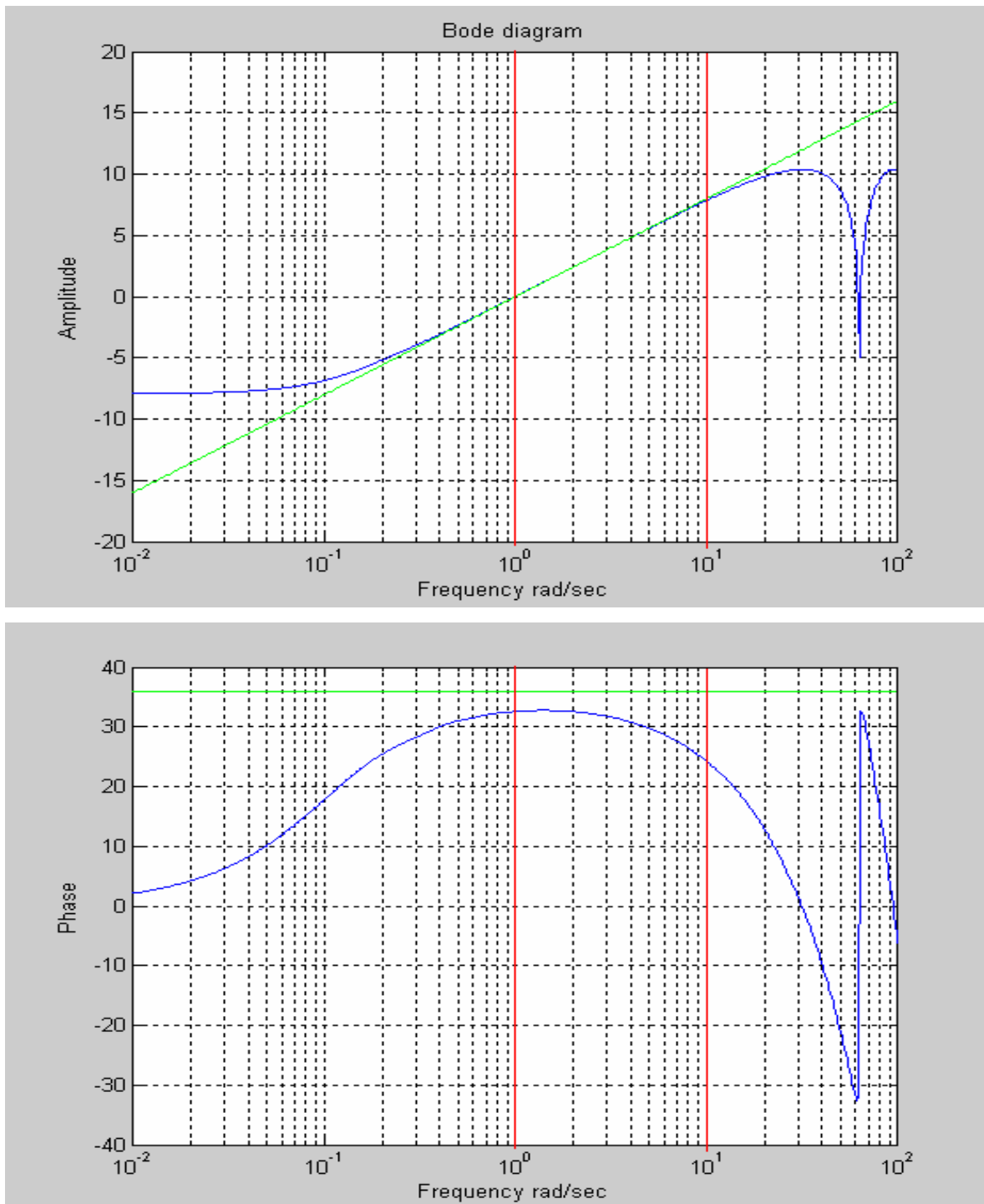


Figure (III.12) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.4}$  discrétisé par la transformation Backward à la sortie de la structure de Farrow

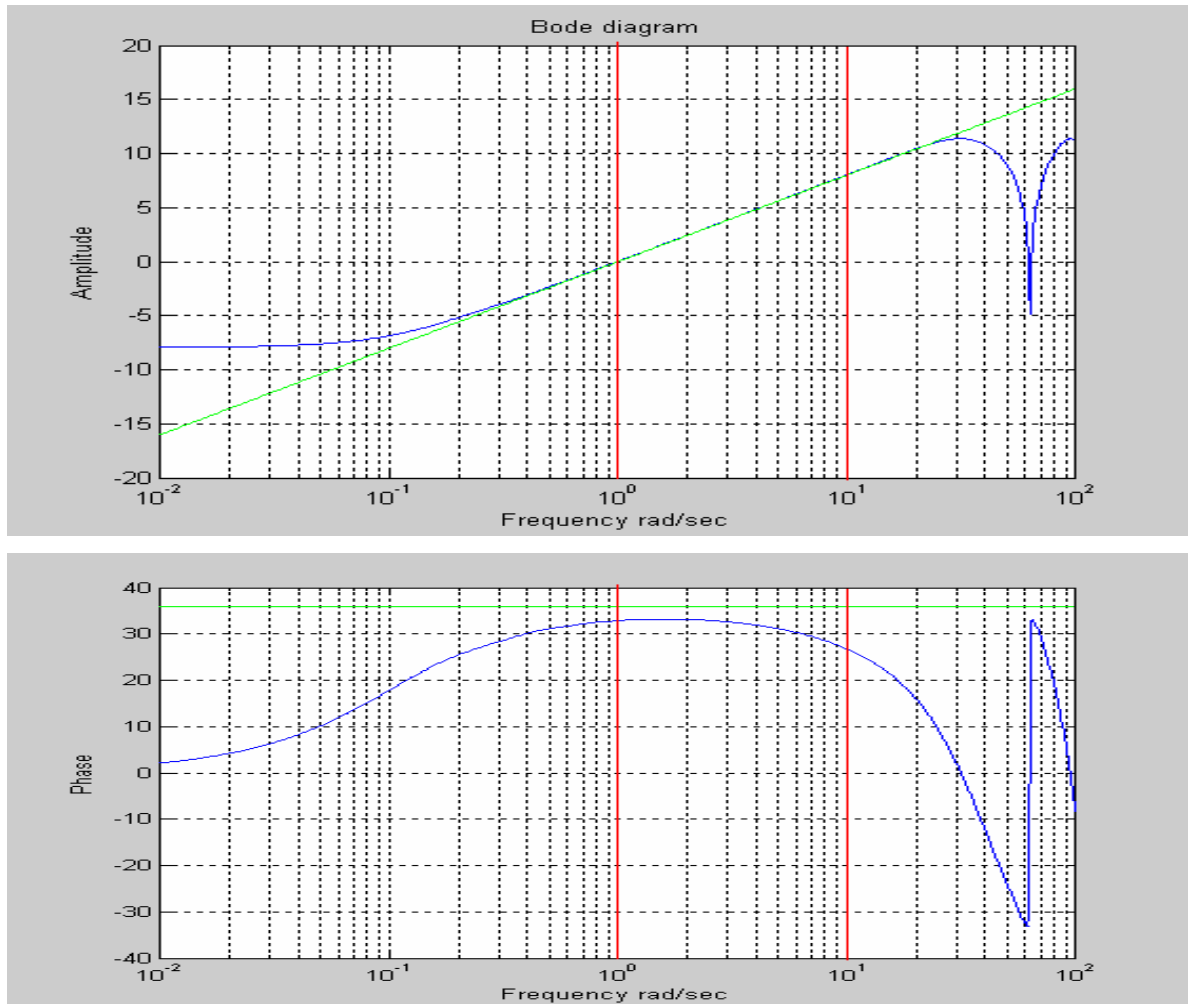


Figure (III.13) Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.4}$  discrétisé par la transformation Al-Alaoui à la sortie de la structure de Farrow

On remarque :

- Les différents discrétisations donnent un filtre stable et linéaire, la phase est de  $36^\circ$ , l'amplitude a une pente de 8dB/dec, pour l'opérateur dérivateur  $s^{0.4}$ . Et les résultats obtenus par la transformation Bilinéaire en terme d'amplitude constante, phase linéaire sont largement meilleures que celles trouvées par Al-Alaoui et Backward.

On a aussi varié l'ordre de polynôme d'interpolation pour les deux cas, intégrateur et dérivateur d'ordre fractionnaire et on a trouvé que pour obtenir de meilleurs résultats (phase constante et amplitude linéaire dans une gamme de fréquences donnée) on doit imposer les conditions suivantes :

$\text{deg } P \geq 6$  , pour le cas d'intégrateur

$\text{deg } P \geq 10$  , pour le cas de dérivateur

Avec  $(\text{deg } P)$  degré de polynôme d'interpolation.

En d'autres termes, l'ordre (degré) du polynôme d'interpolation est alors modifié de manière à maintenir la phase constante et l'amplitude linéaire dans une gamme de fréquences donnée.

Dans la suite nous présentons l'implémentation numérique RIF en structure de Farrow de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire et qui est définie par l'équation suivante :

$$G_{(RIF)BIL}(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{y(k)}{e(k)} = \sum_{n=0}^M F_n(z) \cdot m^n$$

$$= F_0(z) + m \cdot [F_1(z) + m \cdot [F_2(z) + \dots + m \cdot [F_{M-1}(z) + m \cdot F_M(z)]] \dots]$$
(III.43)

La figure (III-14) ci-dessous présente l'implémentation numérique RIF en structure de Farrow de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire

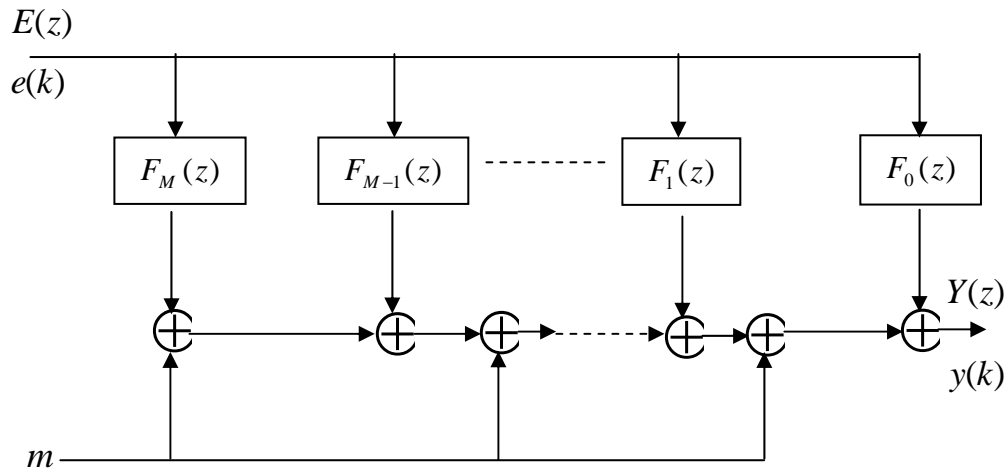


Figure (III.14) Implémentation numérique RIF en structure de Farrow de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire

Le principal avantage de la structure de Farrow réside dans le fait que les coefficients  $(G_n(z))$  pour l'intégrateur et  $F_n(z)$  pour le dérivateur) sont indépendants de  $m$  , donc constants pour une valeur fixe de  $M$  . Le filtre est alors directement commandé par  $m$  .

De la même façon on obtient l'implémentation numérique RIF en structure de Farrow de l'opérateur (intégrateur, dérivateur) d'ordre fractionnaire discrétisé selon les différentes transformations.

## Applications des opérateurs d'ordre fractionnaire variable

### IV.1 Introduction

Au cours du précédent chapitre, l'intérêt de l'implémentation numérique RIF en structure de Farrow a été démontré pour la réalisation d'un dérivateur (intégrateur) fractionnaire borné en fréquences. L'objectif de ce chapitre est d'utiliser les propriétés analysées précédemment pour calculer la réponse temporelle d'opérateur d'ordre fractionnaire.

Donc nous présentons dans la suite l'algorithme de calcul de la sortie d'un opérateur d'ordre fractionnaire selon la méthode indirecte (méthode de Charef), cet algorithme est développé autour de structure de Farrow.

### IV.2 Réponse temporelle d'un opérateur d'ordre fractionnaire

Plusieurs algorithmes ont été développés pour calculer la sortie du model rationnel de l'opérateur d'ordre fractionnaire, ils sont basés généralement sur la fonction de transfert ou sur la représentation d'espace d'état [24, 25].

Dans notre cas, on a commencé par la fonction de transfert fractionnaire, la fonction rationnel analogique est obtenu on remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire par une approximation entière dans une bande de fréquence bien définie. La transformation du domaine analogique au domaine discret est faite en utilisant les transformations d'Euler, Bilinéaire ou Tustin et d'Al-Alaoui. Une troncation pour une longueur finie permet d'aboutir à des filtres RIF approximant ces opérateurs, comme on a montré dans le deuxième chapitre. La réalisation d'un dérivateur (intégrateur) fractionnaire borné en fréquences est faite en utilisant les différent implémentation numérique de l'opérateur d'ordre fractionnaire variable (troisième chapitre).

Les principales étapes sont résumées dans le diagramme de la Figure VI-1.

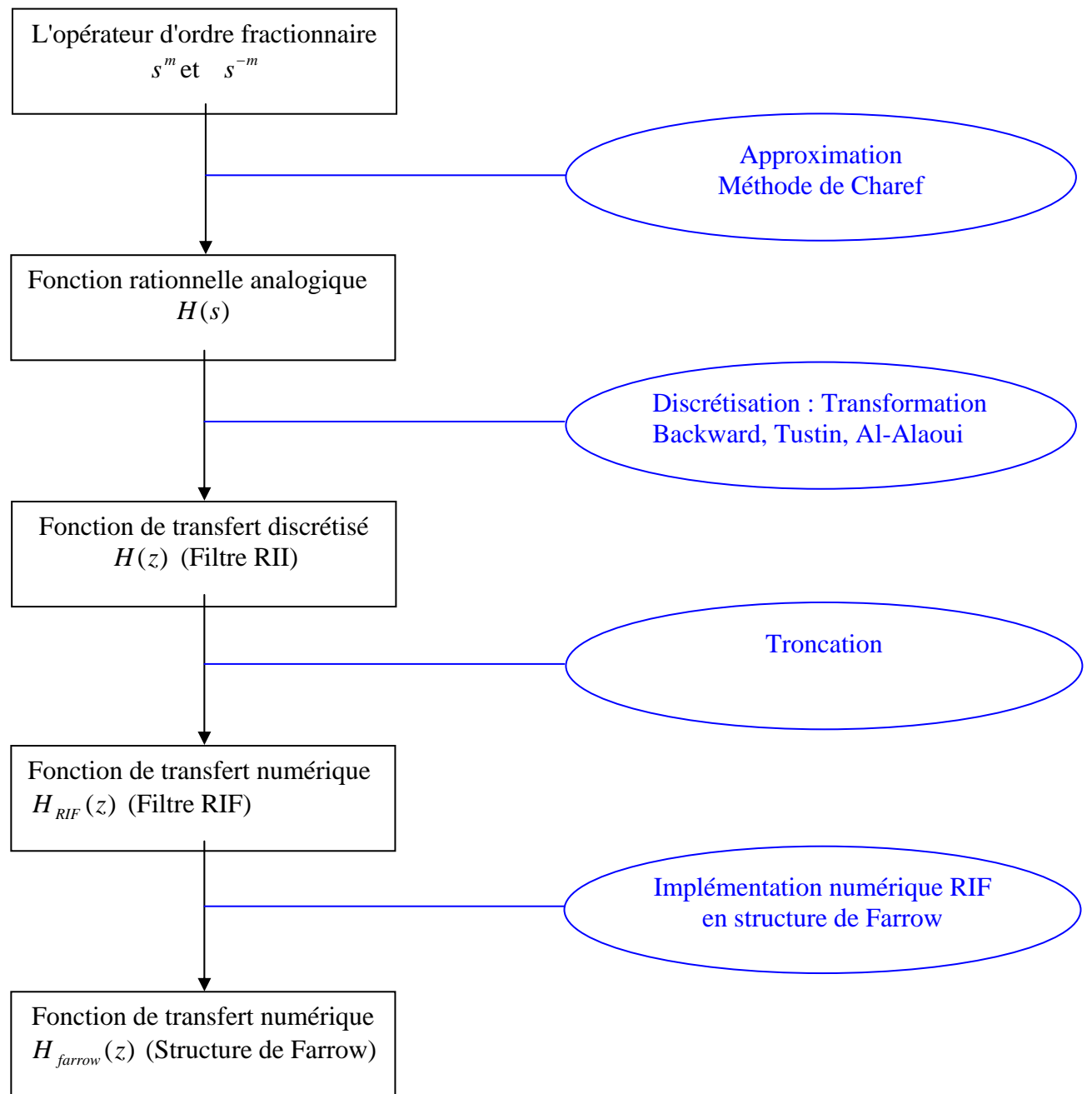
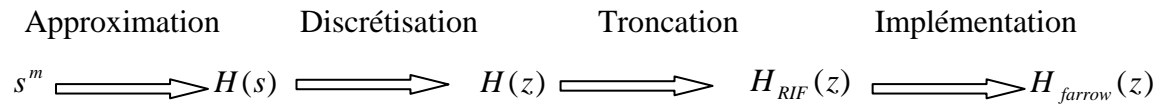
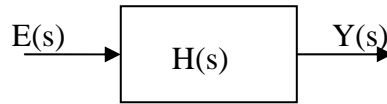


Figure VI.1. Etapes de calcul de la réponse temporelle d'un opérateur d'ordre fractionnaire variable



et on peut aussi résumer cet algorithme par les fonctions de transfert à la sortie de chaque étapes .

Avec  $E(s)$  l'entrée de l'opérateur d'ordre fractionnaire,  $Y(s)$  sa sortie, et  $H(s)$  sa fonction de transfert :



On a

$$Y(z) = H_{farrow}(z)E(z) \tag{IV-1}$$

Donc

$$y(kT) = Z^{-1}(H_{farrow}(z)E(z)) \tag{IV-2}$$

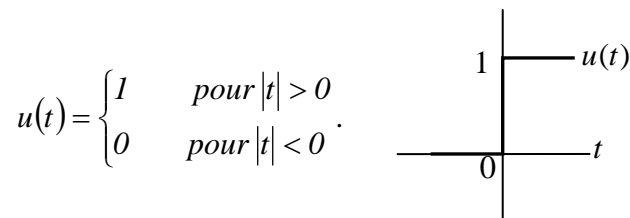
Avec  $E(z)$  l'entrée de la structure de Farrow ,  $Y(z)$  sa sortie, et  $H_{farrow}(z)$  sa fonction de transfert :

### IV.3 Dérivation d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles

Nous avons développé des programmes qui consistent à calculer la dérivation d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles : l'échelon, la fonction sinusoïdale (cosinus, sinus), le produit d'un exponentiel et d'un cosinus (sinus), selon les méthodes Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui.

#### IV.3.1 La dérivée fractionnaire d'un Echelon

La fonction Echelon unité suivante :



On sait que la transformée en Z d'un échelon est donnée par :

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \tag{IV-3}$$

Donc la sortie est :

$$y(kT) = Z^{-1}(H_{farrow}(z)E(z)) \tag{IV-4}$$

Avec  $H_{farrow}(z)$  et la fonction de transfert à la sortie de cette nouvelle structure, et qui est discrétisé selon les trois transformations récentes.

On a

$$H_{(RIF)BIL}(z) = H_{farrow}(z) = \sum_{n=0}^M G_n(z) \cdot m^n \quad (IV-5)$$

Avec  $G_n(z)$  sont des fonctions de transfert polynomial qui peuvent être calculés par

$$\text{l'équation suivante:} \quad G_n(z) = \sum_{k=0}^L a_n z^{-k} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3 \dots M \quad (IV-6)$$

Où les coefficients  $a_n$  sont les coefficients de la fonction polynomial  $g_{BIL}(k)$ , et qui est défini par l'équation (III-25).

L'équation de la sortie est donnée par l'équation :

$$Y(z) = H_{(RIF)BIL}(z) \cdot E(z) \quad (IV-7)$$

Donc :

$$Y(z) = H_{(RIF)BIL}(z) \cdot \frac{z}{z-1} \quad (IV-8)$$

Par application de la méthode d'inversion de la transformer en  $z$ , et l'utilisation de la propriété (*Translation temporelle*) on trouve comme résultat :

$$Y(z) = \sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^M a_n \cdot z^{-k} \cdot E(z) \cdot m^n \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^M a_n \cdot z^{-k} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot m^n \quad (IV-9)$$

$$y(iT) = \sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^M a_n \cdot e(i-k) \cdot m^n \quad (IV-10)$$

Donc la sortie est donnée par :

$$y(iT) = \sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^M a_n \cdot u(i-k) \cdot m^n \quad (IV-11)$$

Les résultats de la dérivation d'ordre fractionnaire de l'échelon unité est donné par :

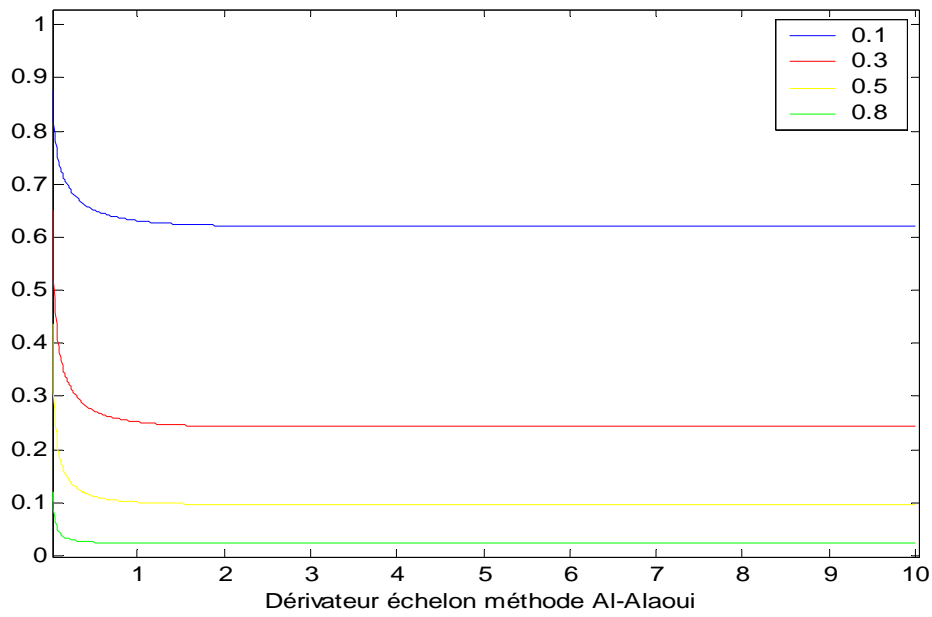


Figure (IV-2) La dérivation d'ordre fractionnaire de l'échelon par la transformation Al\_Alaoui pour les différentes valeurs de  $m$ .

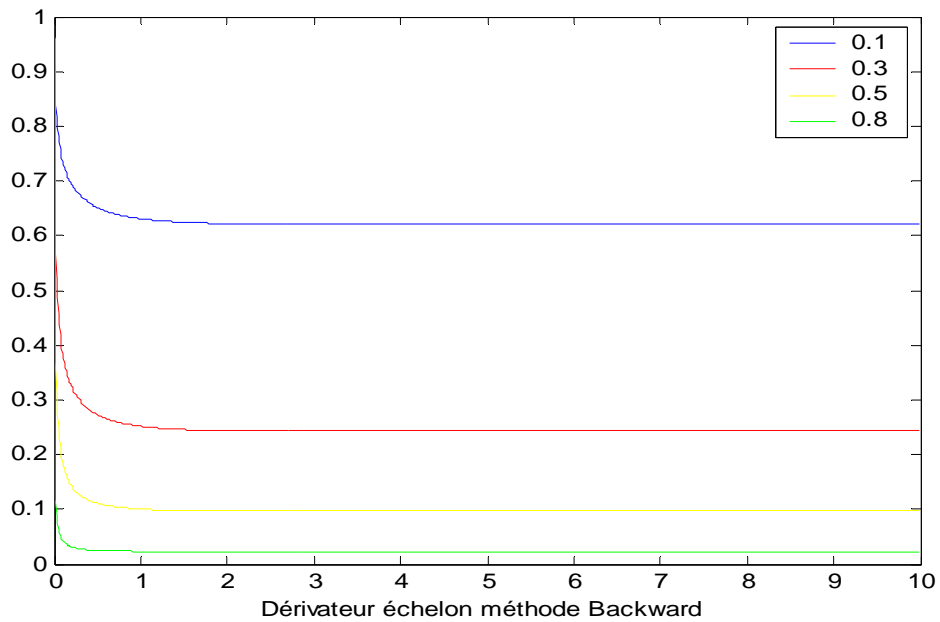


Figure (IV-3) La dérivation d'ordre fractionnaire de l'Echelon par la transformation Backward pour les différentes valeurs de  $m$ .

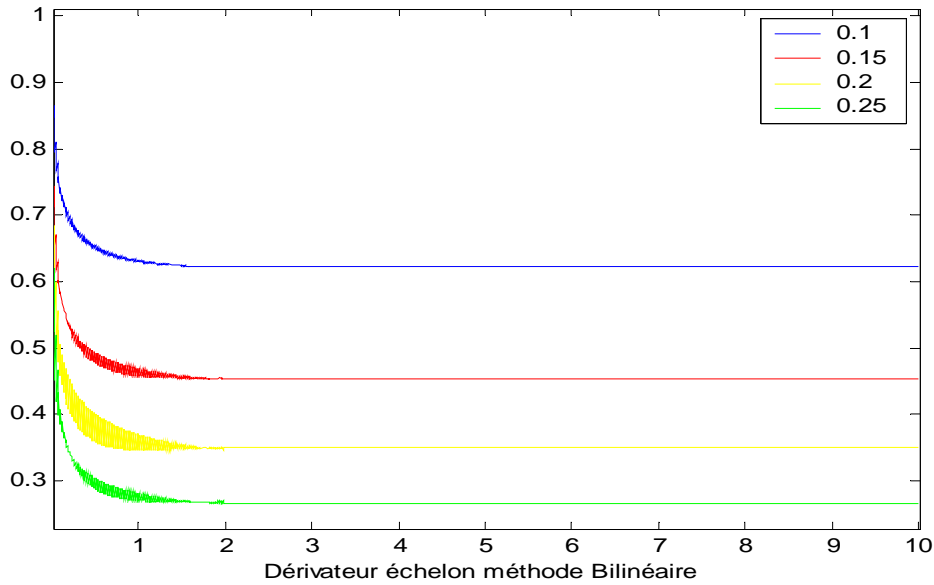


Figure (IV-4) La dérivée d'ordre fractionnaire de l'Echelon par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeurs de  $m$ .

#### IV-3-2 La dérivée d'ordre fractionnaire d'un cosinus (ou d'un sinus)

On a montré que la dérivée d'ordre fractionnaire d'un cosinus (resp. sinus) de pulsation  $\omega_0$  avec un déphasage  $\varphi$  en utilisant la méthode indirecte mentionnée précédemment, est équivalente à la relation suivante [18] :

$$D^{(m)}[\cos(\omega_0 t - \varphi)] = \omega_0^m \cdot \cos\left(\omega_0 t - \varphi + m \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{IV-12})$$

$$D^{(m)}[\sin(\omega_0 t - \varphi)] = \omega_0^m \cdot \sin\left(\omega_0 t - \varphi + m \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{IV-13})$$

Avec un déphasage de  $m \cdot \frac{\pi}{2}$  et une amplitude de  $\omega_0^m$ .

Soit

$$e(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow E(z) = \frac{z^2 - z \cos(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1} \quad (\text{IV-14})$$

Ainsi

$$Y(z) = \sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^M a_n \cdot z^{-k} \cdot \frac{z^2 - z \cos(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1} \cdot m^n \quad (\text{IV-15})$$

La sortie est donnée par

$$y(iT) = \sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^M a_n \cdot e(i-k)T \cdot m^n \quad (\text{IV-16})$$

Nous avons appliqué l'algorithme que nous avons développé pour calculer la dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus (sinus) par les trois méthodes précédentes, et l'avons comparé au calcul théorique effectué au chapitre I, avec une période d'échantillonnage  $T=0.0025s$ .

Le tableau suivant rapporte le déphasage et l'amplitude calculés, ainsi que le déphasage et l'amplitude approximées selon les méthode Bilinéaire, Al\_Alaoui et Backward

m ordre de la dérivation.	Déphasage calculé.	Déphasage approximé AL_Alaoui.	Déphasage approximé Backward.	Déphasage approximé Bilinéaire	Amplitude calculée.	Amplitude calculée. AL_Alaoui	Amplitude calculée Backward.	Amplitude calculée Bilinéaire..
0.1	0.1571	0.1698	0.1703	0.1661	0.6452	0.6498	0.6556	0.6150
0.2	0.3142	0.3417	0.3417	0.3292	0.4163	0.4247	0.4362	0.3821
0.3	0.4712	0.5114	0.5162	0.5012	0.2685	0.2776	0.2884	0.2341
0.4	0.6283	0.6883	0.6247	0.6603	0.1733	0.1810	0.1910	0.1464
0.5	0.7854	0.8541	0.8554	0.8279	0.1118	0.1183	0.1263	0.0883
0.6	0.9425	1.0300	0.0225	Instable	0.0721	0.0770	0.0833	Instable
0.7	1.0996	1.1921	1.1946	Instable	0.0425	0.0502	0.0551	Instable
0.8	1.2566	1.3553	1.3591	Instable	0.0300	0.0327	0.0363	Instable
0.9	1.4137	1.5312	1.5387	Instable	0.0194	0.0210	0.0240	Instable

Tableau (IV.1) Amplitude et déphasage approximés selon les trois transformations récentes pour les différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $m$  de  $\cos(5t)$ ,  $T=0.0025s$ .

(Instable): IL existe des oscillations sur la réponse temporelle

Les résultats de la dérivation d'ordre fractionnaire d'une fonction cosinus selon la transformation Bilinéaire, Backward et Al\_Alaoui sont donnés dans les graphes suivants.

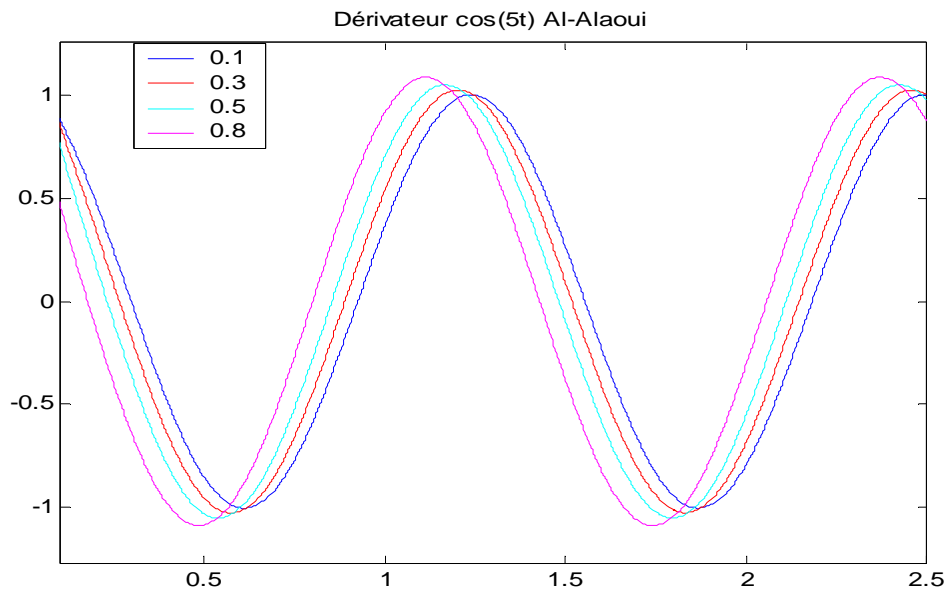


Figure (IV.5) La dérivation d'ordre fractionnaire de  $\cos(5t)$  selon la transformation Al\_Alaoui pour les différentes valeurs de  $m$ .

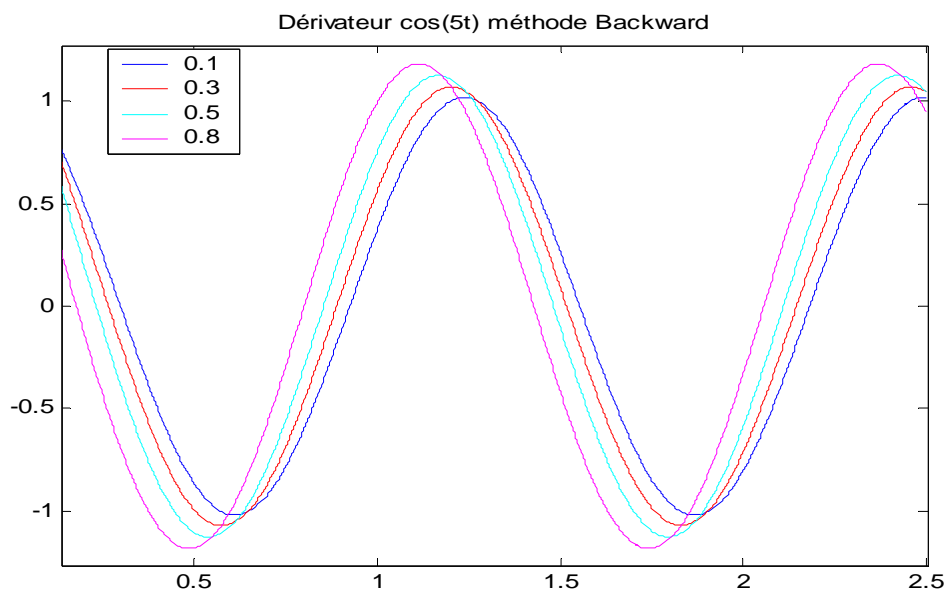


Figure (IV.6) La dérivation d'ordre fractionnaire de  $\cos(5t)$  selon la transformation Backward pour les différentes valeurs de  $m$ .

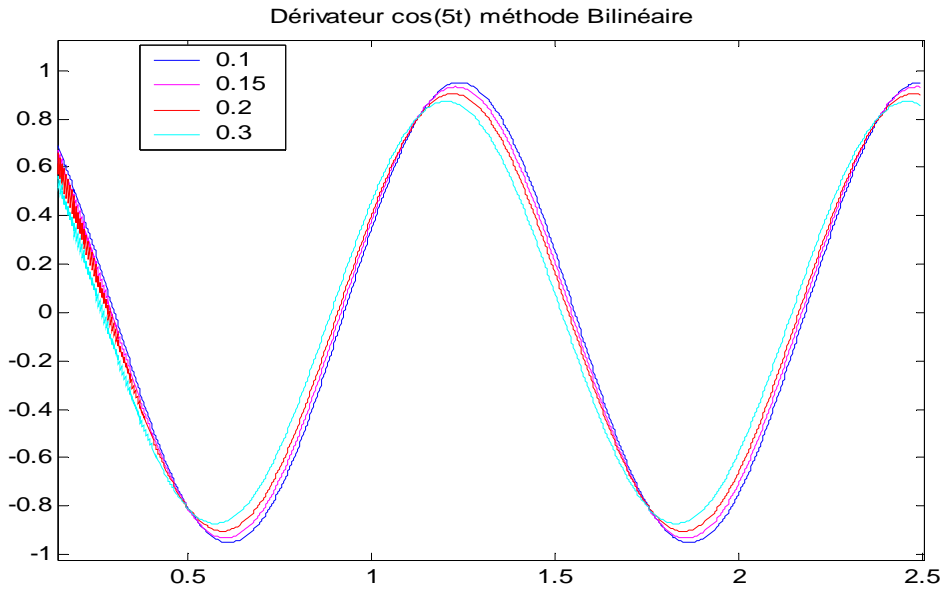


Figure (IV.7) La dérivation d'ordre fractionnaire de  $\cos(5t)$  selon la transformation Bilinéaire pour les différentes valeurs de  $m$ .

### IV-3-3 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un produit de fonctions exponentielle et sinusoïdale

On a montré que la dérivation d'ordre fractionnaire d'un produit de fonctions exponentielle et sinusoïdale, du type :  $\cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \exp(at)$ , en utilisant la méthode indirecte mentionné précédemment, est équivalente à la relation suivante [18]

$$D^{(m)}[\cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \exp(at)] = R^m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + m\varphi) \cdot \exp(at) \tag{IV-17}$$

Avec:  $R = |a + i \cdot \omega_0|$  et  $\varphi = \text{Arg}(a + i \cdot \omega_0)$  (IV-18)

Soit

$$e(t) = [\cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \exp(at)]$$

$$\Rightarrow E(z) = \frac{z^2 - z \cdot \exp(-aT) \cdot \cos(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \exp(-aT) \cdot \cos(\omega_0 T) + \exp(-2aT)} \tag{IV-19}$$

Donc

$$Y(z) = \sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^M a_n \cdot z^{-k} \cdot \frac{z^2 - z \cdot \exp(-aT) \cdot \cos(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \exp(-aT) \cdot \cos(\omega_0 T) + \exp(-2aT)} \cdot m^n \tag{IV-20}$$

L'équation de la sortie est donnée par

$$y(iT) = \sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^M a_n \cdot e(i-k)T \cdot m^n \tag{IV-21}$$

De la même manière, on a développé des programmes qui permettent de calculer la dérivation d'ordre fractionnaire d'un produit de fonctions exponentielle et sinusoidale avec un déphasage nul, pour une période d'échantillonnage  $T=0.0025s$ , et le tableau suivant rapporte le déphasage et l'amplitude calculés, ainsi que le déphasage et l'amplitude approximées selon la transformation Al\_Alaoui et la transformation Backward.

m ordre de la dérivation.	Déphasage calculé.	Déphasage approximé Al_Alaoui.	Déphasage approximé Backward.	Amplitude calculée.	Amplitude approximée Al_Alaoui	Amplitude approximée Backward.
0.1	0.1373	0.1428	0.1485	0.9348	0.8601	0.8628
0.2	0.2746	0.2858	0.2861	0.8740	0.7455	0.7534
0.3	0.4120	0.4120	0.4290	0.8170	0.6605	0.6645
0.4	0.5493	0.5693	0.5700	0.7639	0.5874	0.6012
0.5	0.6867	0.7117	0.7124	0.7141	0.5262	0.5296
0.6	0.8240	0.8465	0.8560	0.6676	0.4741	0.4770
0.7	0.9613	0.9868	1.0013	0.6241	0.4300	0.4316
0.8	1.0987	1.1287	1.1362	0.5835	0.3897	0.3917
0.9	1.2360	1.2760	1.2860	0.5455	0.3547	0.3563

Tableau (IV.2) Déphasage et amplitude calculés et approximés selon la transformation Al\_Alaoui et Backward.

Les résultats de la dérivation d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoidale amortie par les deux transformations Al\_Alaoui et Backward sont présentés dans les figures suivantes



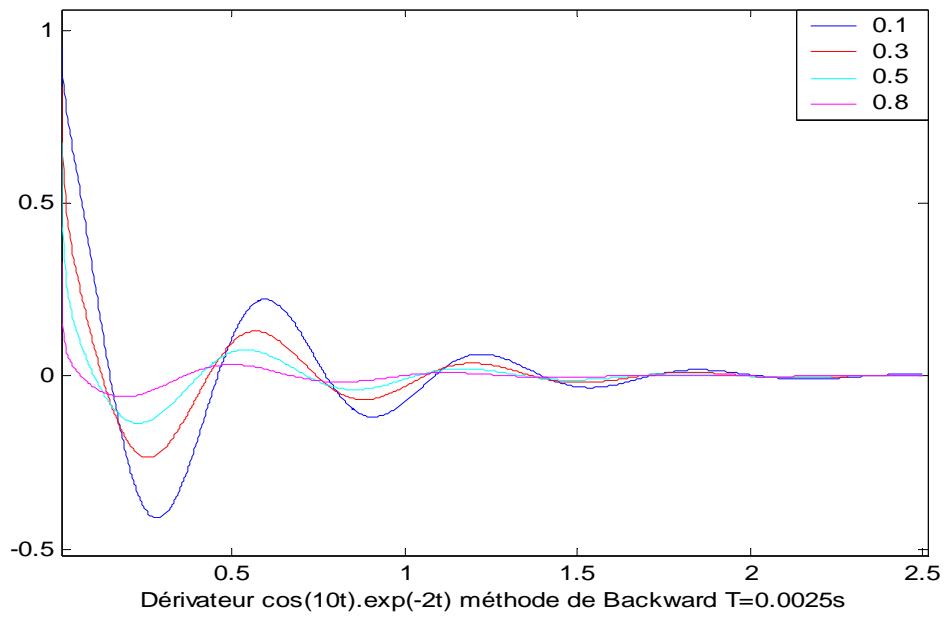


Figure (IV.8) La dérivation d'ordre fractionnaire de  $\cos(10t)\exp(-2t)$  selon la transformation Backward pour les différentes valeurs de  $m$ , et pour un période d'échantillonnage  $T=0.0025s$

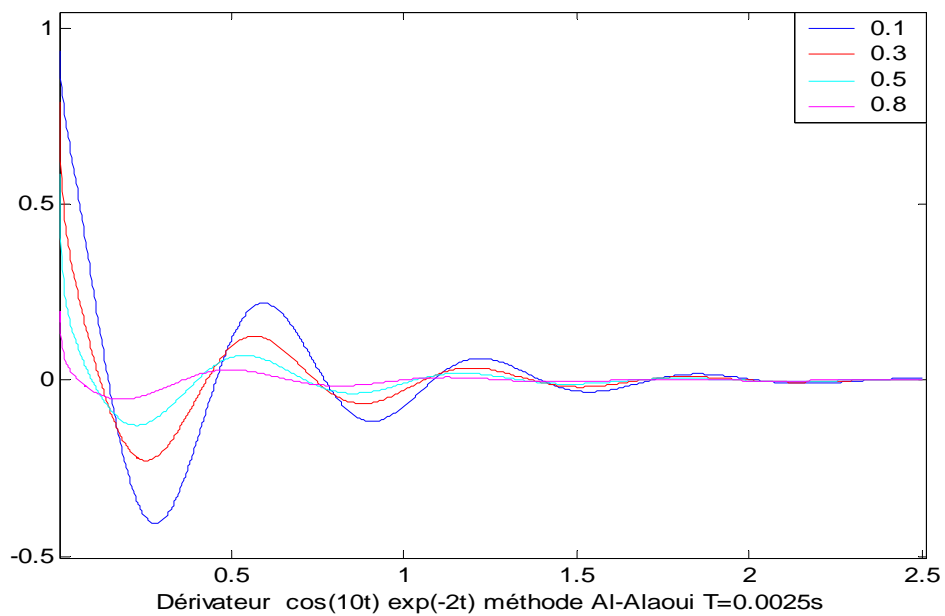


Figure (IV.9) La dérivation d'ordre fractionnaire de  $\cos(10t)\exp(-2t)$  selon la transformation Al\_Alauoi pour les différentes valeurs de  $m$ , et pour un période d'échantillonnage  $T=0.0025s$

#### IV-4 Intégration d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles

Dans ce même contexte, nous avons développé des programmes qui consistent à calculer l'intégration d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles : l'échelon, la fonction sinusoidale (cosinus, sinus), fonction sinusoidale amortie, selon les méthodes Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui. On obtient les résultats suivants :

##### La transformation Al\_Alaoui

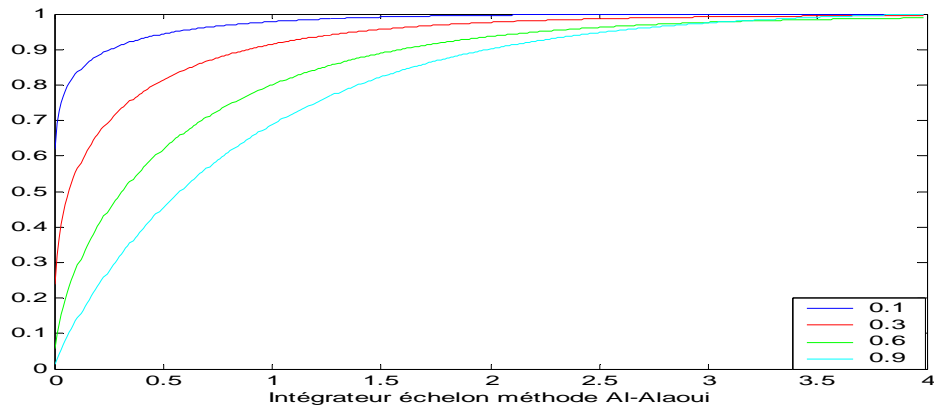


Figure (IV.10) Intégrateur de l'échelon par la transformation Al\_Alaoui pour les différentes valeurs de  $m$ ,  $T=0.01s$

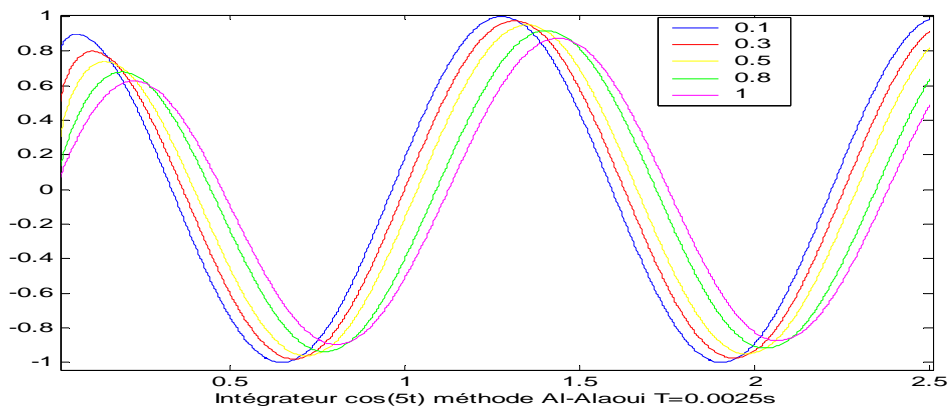


Figure (IV.11) Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoidale  $\cos(5t)$  par la transformation Al\_Alaoui pour les différentes valeurs de  $m$ ,  $T=0.0025s$ .

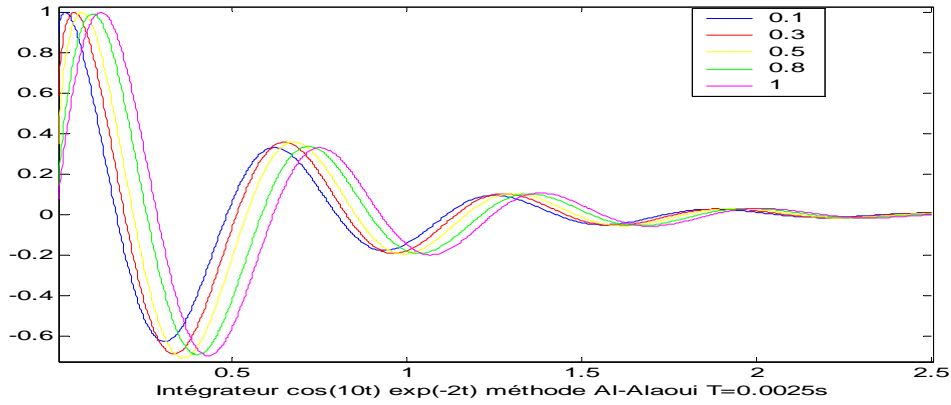


Figure (IV.12) Intégrateur d'ordre fractionnaire de la fonction sinusoidale amortie  $\exp(-2t)\cos(10t)$  par la transformation Al\_Alaoui,  $T=0.001s$ .

**La transformation de Backward (Euler)**

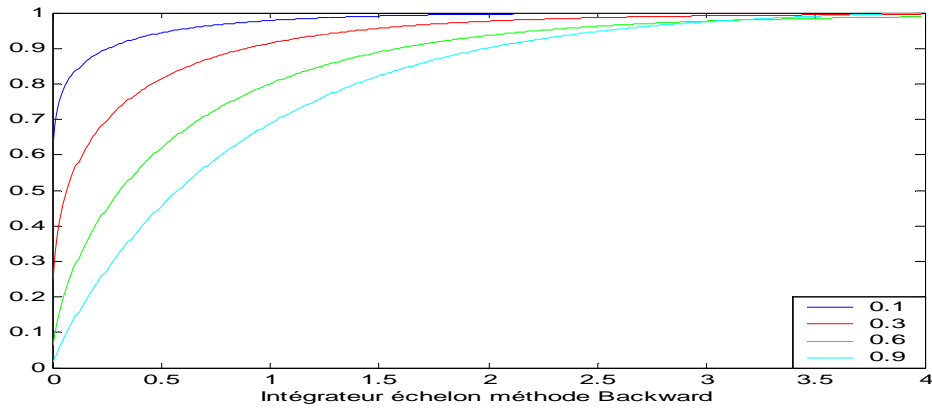


Figure (IV.13) Intégrateur de l'échelon par la transformation Backward pour les différentes valeurs de  $m$ ,  $T=0.01s$

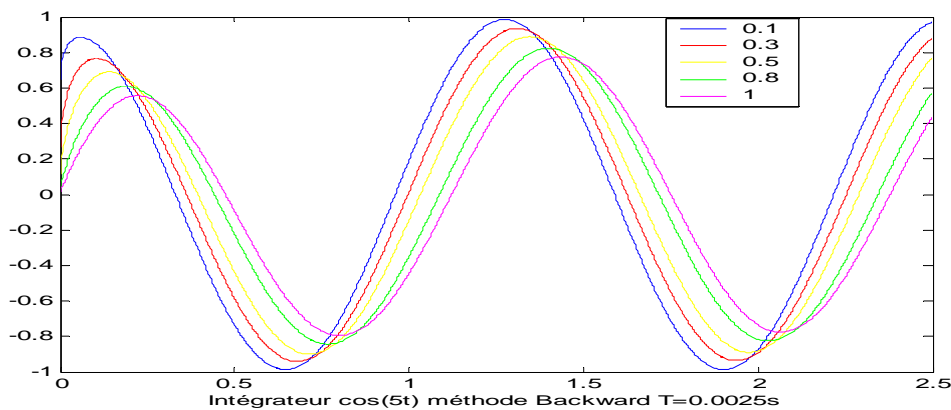


Figure (IV.14) Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoidale  $\cos(5t)$  par la transformation Backward pour les différentes valeur de  $m$ ,  $T=0.0025s$ .

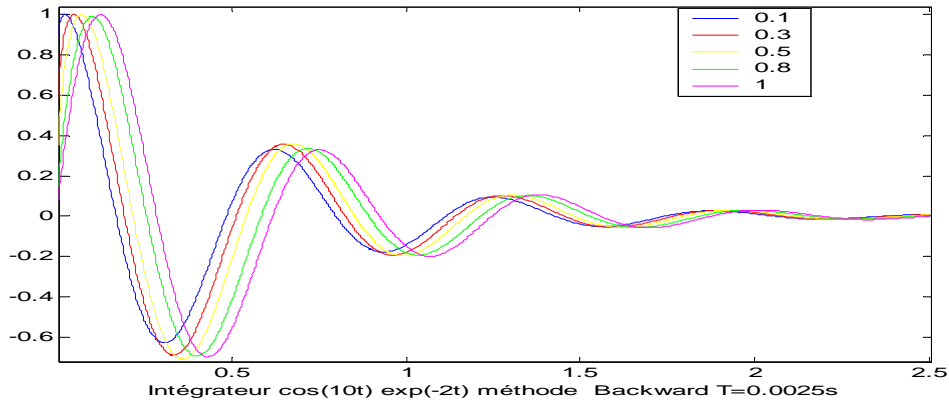


Figure (IV.15) Intégrateur d'ordre fractionnaire de la fonction sinusoidale amortie  $\exp(-2t)\cos(10t)$  par la transformation Backward,  $T=0.0025s$ .

**La transformation Bilinéaire**

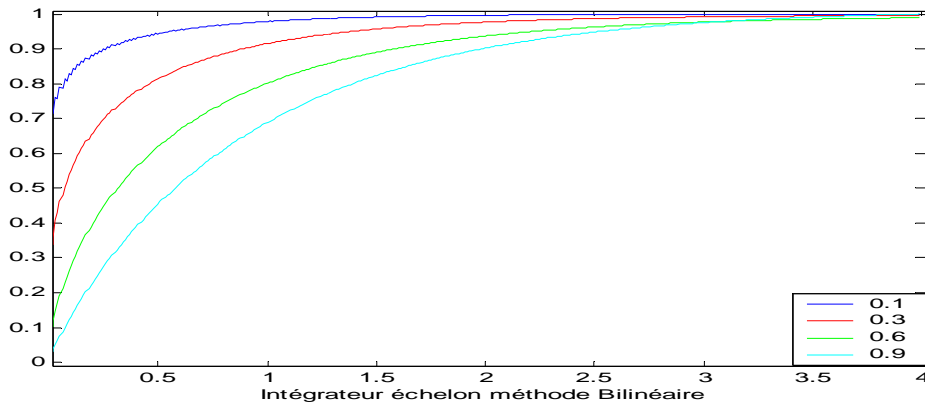


Figure (IV.16) Intégrateur de l'échelon par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeurs de  $m$ ,  $T=0.01s$

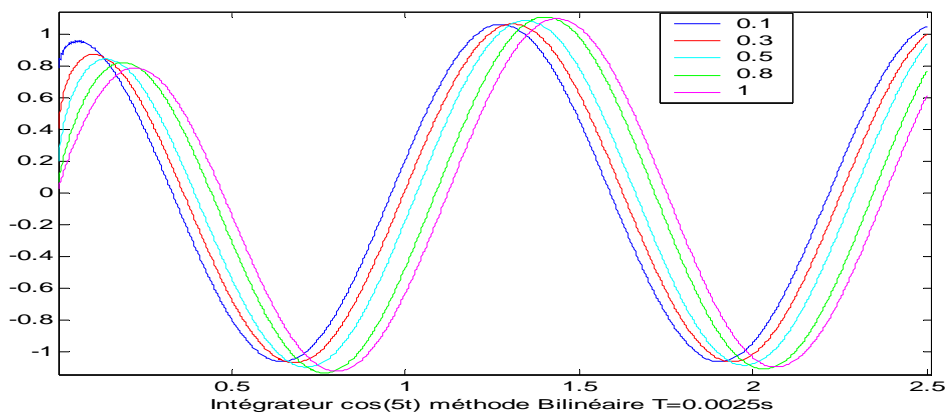


Figure (IV.17) Intégrateur d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoidale  $\cos(5t)$  par la transformation Bilinéaire pour les différentes valeur de  $m$ ,  $T=0.0025s$ .

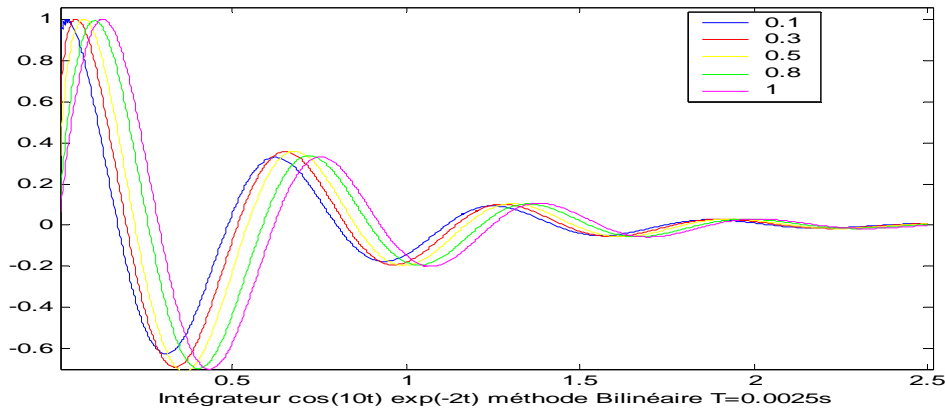


Figure (IV.18) Intégrateur d'ordre fractionnaire de la fonction sinusoïdale amortie  $\exp(-2t)\cos(10t)$  par la transformation Bilinéaire,  $T=0.0025s$

### Commentaires

- ✚ A partir des résultats de simulation obtenue, on remarque que l'algorithme développé autour de structure de Farrow, qui permis de calculer la dérivation (intégration) d'ordre fractionnaire des différentes fonctions usuelles, selon les trois transformations récentes donne de meilleurs résultats (l'efficacité des trois méthodes) avec la remarque que dans le cas de la dérivateur fractionnaire la transformation bilinéaire donne des réponses temporelles oscillant. Lorsque  $m$  tend vers 0 les oscillations diminuent. Inversement, lorsque  $m$  tend vers 1 les oscillations augmentent, par contre l'intégrateur d'ordre fractionnaire montre une meilleure réponse temporelle (l'absence des oscillations) dans le cas de la transformation Bilinéaire
- ✚ En Conclusion : Nous avons présenté un nouvel algorithme de calcul de la dérivation (intégration) d'ordre fractionnaire des différentes fonctions selon la méthode indirecte, les deux tableau (IV.1),(IV.2) rapporte les résultats obtenues avec l'utilisation des trois transformation (Al\_Alaoui Backward Bilinéaire) avec une période d'échantillonnage  $T=0.0025s$ , dans une gamme de fréquence de  $[1,10]$  pour les différentes valeur de l'ordre de dérivation d'ordre fractionnaire  $m$ , comparés avec des valeurs théoriques pour une fonction sinusoïdale et une fonction sinusoïdale amortie respectivement, ces résultats montrent l'efficacité des trois méthodes de discrétisation.

## Conclusion Générale

Le concept de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire est un prolongement de la dérivation et de l'intégration d'ordre entier. Récemment, les opérateurs d'ordre fractionnaire ont trouvés beaucoup d'applications dans le domaine de l'électronique. Mais ces opérateurs sont en général mathématiquement très difficile à manipuler.

Dans ce mémoire nous avons présenté une méthode simple et efficace qui consiste à approximer, pour une bande de fréquence donnée, ces opérateurs d'ordre fractionnaire par des filtres discrets à réponse impulsionnelle finie (RIF).

Alors, pour l'implémentation numérique de ces opérateurs d'ordre fractionnaire leurs fonctions de transfert sont premièrement approximées par une fonction rationnelle analogique dans une bande de fréquence donnée en se basant sur la méthode d'approximation de Charef. La transformation du domaine analogique au domaine discret est faite en utilisant les transformations d'Euler, Tustin et d'Al-Alaoui. Une troncation pour une longueur finie permet d'aboutir à des filtres RIF approximant ces opérateurs. Le dérivateur et l'intégrateur d'ordre fractionnaire numériques ainsi obtenus sont exprimés comme des filtres discrets RIF dont les coefficients sont donnés sous forme compacte en termes de la période d'échantillonnage et les paramètres d'approximation. Puis ces filtres discrets RIF sont alors implémentées en utilisant la structure de Farrow pour obtenir un dérivateur et d'intégrateur d'ordre fractionnaire variable. Alors, les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l'objet de ce mémoire sont présentés en quatre parties.

Dans le chapitre I, nous avons donné un bref rappel sur les principes généraux, différentes définitions de différentiation/intégration fractionnaire, leurs propriétés de base et les méthodes d'approximations les plus récentes.

Le chapitre II est réservé à la discrétisation et l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire .Elle comporte deux parties :

- La première partie, présente la méthode d'approximation de la fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle dans une bande fréquentielle donnée. Des circuits analogiques ont aussi été tirés. Des exemples numériques ont été présentés.

- Dans la deuxième partie, nous avons présentée la discrétisation de la fonction d'approximation selon les transformations de Backward (Euler), Al\_Alaoui et Bilinéaire (Tustin), la fonction rationnelle obtenue est un filtre discret de type RII, La troncation du filtre RII de longueur infinie ou de longueur finie permet d'aboutir au filtre RIF. Les résultats obtenus sont aussi présentés et discutés.

Dans le chapitre, III nous avons présentées trois implémentations différentes des opérateurs d'ordre fractionnaire : la première sous forme du filtre RII, la seconde sous forme du filtre RIF, la troisième est une nouvelle implémentation sous forme de structure de Farrow. Les réponses fréquentielles résultants à la sortie de cette nouvelle structure sont obtenues et discutés.

Dans le chapitre IV, nous avons utilisé la nouvelle implémentation numérique RIF en structure de Farrow pour la réalisation d'un dérivateur (intégrateur) d'ordre fractionnaire borné en fréquence. Ce dérivateur (intégrateur) sera utilisé pour calculer la réponse temporelle d'opérateur d'ordre fractionnaire, des différentes fonctions usuelles.

Comme perspective, je suggère l'utilisation de ces méthodes pour l'implémentation numérique en structure RII, RIF et Farrow des retards d'ordre fractionnaires.

---

## Références

- [1] Manabe, S., 'The non-integer integral and its application to control systems', ETJ Japan, 1961, 6, pp 83–87
- [2] Podlubny, I., 'Fractional-order systems and fractional-order controllers', UEF-03-94 Slovak Academy of Science, Kosice, 1994
- [3] Oustaloup, A., Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire : théorie et pratique, Editions Masson, Paris, 1983
- [4] Miller, K.S., and Ross, B., An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley & Sons Inc., New York, 1993
- [5] Sun, H.H., Charef, A, Tsao, Y.Y, and Onaral, B, 'Analysis of polarization dynamics by singularity decomposition method', Ann. Biomed. Eng., 1992, 20, pp 597–621
- [6] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, 'Fractal system as represented by singularity function', IEEE Trans. Auto. Control, sept 1992, 37, pp 1465-1470
- [7] B.M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez, and V. Feliu, 'Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications', Fractional Calculus & Applied Analysis, 2000, 3 (3), pp 231-248
- [8] Y.Q. Chen and B.M. Vinagre, 'A new IIR-type digital fractional order differentiator' Signal Processing, 2003, 83, pp 2359-2365
- [9] K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA, 1987
- [10] Y.Q. Chen, L. Kevin, and L. Moore, 'Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators', IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, 2002, 49 (3), pp 363-367
- [11] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny, 'Continued Fraction Expansion Approaches to Discretizing Fractional Order Derivatives - an Expository Review', Nonlinear Dynamics, 2004, 38, pp 155-170
- [12] M.A. Al-Alaoui, 'Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule' IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1994, 41(2), pp 186-187
- [13] Farrow, C. W., 'A continuously variable digital delay element', Proc.of the IEEE Int. Symp. on Circuit and Systems (ISCAS '88), 1988, vol. 3, pp 2641-2645
- [14] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999
- [15] Petras, I., Podlubny, I., O'Leary, P., Dorcak, L., and Vinagre, B.M., Analogue realization of fractional-order controllers, Fakulta Berg, TU Kosice, 2002



- 
- [16] C.H. Lubich, 'Discretized fractional calculus', SIAM Journal of Mathematical Analysis, 1986, 17(3), pp 704-719
- [17] B.M. Vinagre, Y.Q. Chen, and I. Petráš, 'Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator', Journal of the Franklin Institute, 2003, 340, pp 349-362
- [18] K.B. Oldham and J., Spanier. Fractional Calculus. Academic Press, New York, 1974
- [19] A. Charef, 'Analogue realisation of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controllers', IEE proceedings on control theory and Applications, 2006, Vol 153, Issue 6, pp 714-720
- [20] R.S. Barbosa, J.A.T. Machado, and I.M. Ferreira, 'Tuning of PID based on bode's ideal transfer function', Nonlinear Dynamics, 2004, 38, pp 305-321
- [21] C.-C. Tseng, 'Design of variable and adaptive fractional order FIR differentiator' Signal Processing, 2006, 86:2554–2566
- [22] W. Y. Yang, W. Cao, T. S. Chung, and J. Morris, Applied Numerical Methods Using MATLAB, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, USA, 2005
- [23] C. J. Zarowski, An Introduction to Numerical Analysis for Electrical and Computer Engineers, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, USA, 2004
- [24] A. Oustaloup, La dérivation non entière, Hermes, Paris, 1995
- [25] M. Aoun, R. Malti, F. Levron and A. Oustaloup, 'Numerical simulations of fractional systems', Proceedings of ASME Desi. Eng. Tech. Conferences, Sept 2-6, 2003, Chicago, Illinois, USA
- [26] I. Podlubny, 'Fractional order systems and  $PI^\lambda D^\mu$  controllers', IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44 (1), pp 208-214

## **Abstract:**

This work deals with the numerical implementation of the fractional-order differentiator  $s^m$  and integrator  $s^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ).

The proposed approach is based on Charef's approximation of these operators by analog rational functions. The transformation of the analog domain to the discrete domain was made by using Euler, Bilinear and Al-Alaoui transformations. The digital FIR filters approximation of the these operators are obtained by a finite length truncation. Thus the digital fractional order integrator and differentiator obtained are expressed as digital FIR filters whose coefficients are given in closed form in terms of the sampling period and the approximation parameters.

Then, these digital FIR filters are implemented by using the Farrow structure to obtain a differentiator and integrator of a variable fractional order.

Simulations are obtained to show the effectiveness and the utility of this approach and the results obtained are also presented and discussed.

## ملخص :

هذا الموضوع يعالج الإنشاء الرقمي (Numérique) للمكامل  $s^{-m}$  و المشتق  $s^m$  ذو الدرجة الناطقة المتغيرة من أجل  $(0 < m < 1)$ .

في هذه المذكرة إعتدنا على طريقة شارف (méthode de Charef) التي تقرب هذه المعاملات بواسطة دالة ناطقة داخل مجال محدد من التواترات.

الانتقال من النظام التماثلي إلى النظام الرقمي تم بواسطة التحويلات التالية:

- التحويل الثنائي ( Transformation Bilinéaire ou Tustin )
- التحويل التراجعي ( Transformation de Backward ou Euler )
- تحويل (Al-Alaoui)

للحصول على مصفاة RIF قمنا بتقريب هذه المعاملات بأخذ جزء من مجال محدود.

المكامل و المشتق ذو الدرجة الناطقة المتحصل عليهما عبر عنهما كمصافي RIF معاملاتهما معطاة بشكل متراص بدلالة دور العينة (période d'échantillonnage) و معطيات التقريب ( les paramètres d'approximation ).

ثم قمنا بتمثيل هذه المصافي الرقمية RIF فيما بعد بواسطة هيكل Farrow للحصول على مكامل و مشتق ذو الدرجة الناطقة متغيرة.

و قمنا بمناقشة و تحليل بعض الأمثلة التي توضح مدى فعالية و استعمال هذه الطريقة التقريبية،