

9
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur

Université de Constantine

Institut d'Electronique

Thèse de Magistère

BOU
2817

présentée par: BOUTAMINA Brahim

thème

*Analyse comparative des algorithmes
de self-Tuning*

Soutenue le :

1995

, devant le jury.

M^r BENMAHAMMAD

Khier

Président

M^r BENNIA

Abdelhak

Examineur

M^r CHAREF

Abdelfatah

Examineur

M^r FILALI

Salim

Examineur

M^r BELARBI

Khaled

Rapporteur

9
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur

Université de Constantine

Institut d'Electronique

Thèse de Magistère

BOU
2817

présentée par: BOUTAMINA Brahim

thème

Analyse comparative des algorithmes

de self-Tuning

Soutenue le :

1995

, devant le jury.

M^r BENMAHAMMAD

Khier

Président

M^r BENNIA

Abdelhak

Examineur

M^r CHAREF

Abdelfatah

Examineur

M^r FILALI

Salim

Examineur

M^r BELARBI

Khaled

Rapporteur

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur

Université de Constantine

Institut d'Electronique

Thèse de Magistère

présentée par: **BOUTAMINA Brahim**

thème

Analyse comparative des algorithmes

de self-Tuning

Soutenue le : ,

, devant le jury.

M^r BENMAHAMMAD

M^r BENNIA

M^r CHAREF

M^r FILALI

M^r BELARBI

Khier

Abdelhak

Abdelfatah

Salim

Khaled

Président

Examineur

Examineur

Examineur

Rapporteur

DEDICACES

A ma femme SAMIA,

A mes enfants SARA , AMINE et LILIA dite RACHA,

A mes parents,

je dédie ce modeste travail.

REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères remerciements à:

- M^r BELARBI pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet.
- M^{rs} les membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail.
- A toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères remerciements à:

- M^r BELARBI pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet.
- M^{rs} les membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail.
- A toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères remerciements à:

- M^r BELARBI pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet.
- M^{rs} les membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail.
- A toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères remerciements à:

- M^r BELARBI pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet.
- M^{rs} les membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail.
- A toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I : COMMANDE SELF TUNING, LES PRINCIPES DE BASE

I-1 Introduction	4
I-2 Modèles de conception	4
I-3 les méthodes de self tuning	7
I-4 L'estimation des paramètres	7
I-4-1 Méthode des moindres carrés: principe de base	8
I-4-2 Les Moidres carrés récursifs	8

CHAPITRE II : METHODE DE LA VARIANCE MINIMALE GENERALISEE

II-1 Méthode de la variance minimale	11
II-1-1 Introduction	11
II-1-2 Le régulateur à variance minimale	11
II-1-3 Le régulateur à variance minimale en self-tuning	14
II-2 Le contrôleur à variance minimale	15
II-2-1 Introduction	16
II-2-2 Synthèse du contrôleur	16
II-2-3 Le contrôleur à variance minimale en self-tuning	21

CHAPITRE III : METHODE DU PLACEMENT DE POLES

III-1 Introduction	23
III-2 Méthode du placement des pôles	23
III-3 Le régulateur	24
III-3-1 Systèmes à paramètres connus ou constants	26
III-3-2 Systèmes à paramètres inconnus ou variables	27
III-4 Le contrôleur	28
III-4-1 Cas d'un système à paramètres constants et connus	28
III-4-2 Système à paramètres inconnus ou variables	30

CHAPITRE IV : LA COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE GAUSSIENNE

IV-1 Introduction	31
IV-2 Critères à minimiser	31
IV-3 Régulateur LQG	32
IV-3-1 Paramètres du modèle constants	32

IV-3 1.1 Remarques	34
IV-3-2 Paramètres du modèles variables ou inconnus	34
IV-4 Le contrôleur LQG	35
IV-4-1 Paramètres du modèle constants	35
IV-4-2 Paramètres du modèle inconnus ou variables	38

CHAPITRE V : LA COMMANDE PREDICTIVE GENERALISEE

V-1 Introduction	39
V-2 Modèle de base de la prédiction	40
V-2-1 Le modèle du système	40
V-2-2 Prédiction de la sortie future	41
V-2-3 Résolution de l'équation diophantine	42
V-3 Loi de commande prédictive	43
V-3-1 Introduction	44
V-3-2 Calcul de la loi de commande	44
V-4 Choix des différents paramètres	46
V-4-1 Horizon minimal de sortie N1	46
V-4-2 Horizon maximal de sortie N2	46
V-4-3 Horizon de commande Nu	47
V-5 Algorithme de GPC en self tuning	47

CHAPITRE VI : SIMULATION ET RESULTATS DES TESTS

VI-1 Introduction	48
VI-2 Simulation	49
VI-2-1 Signal de référence	49
VI-2-2 Résultats des tests	50

CONCLUSION	84
BIBLIOGRAPHIE	85

ABSTRACT

Après une présentation des concepts de base des algorithmes de self tuning, on présente dans ce mémoire les résultats en simulation d'une série de tests relatifs aux méthodes de placement de pôles, GMV, LQG et GPC.

Ainsi on a pu montrer l'aptitude de ces algorithmes à commander des systèmes en utilisant les sorties des systèmes et une certaine paramétrisation, supposée les modéliser correctement, abstraction faite des paramètres propres à la technique utilisée.

Les résultats obtenus montrent que les performances de certains algorithmes (placement de pôles, GMV, LQG) sont plus ou moins affectés par la paramétrisation ou le retard variable ou inconnu des systèmes et seul l'algorithme de GPC donne satisfaction pour l'ensemble des tests.

INTRODUCTION

Les perturbations pouvant affecter les performances d'un système de commande sont généralement de deux types :

- a- Les perturbations agissant sur les variables à régler
- b- Les perturbations (paramétriques) agissant sur les performances du système de commande .

La contre réaction est essentiellement utilisée dans les systèmes de régulation conventionnels pour réduire (ou éliminer) l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler .

Pour réaliser ceci , on mesure les variables puis on les compare aux valeurs désirées et les différences sont appliquées au régulateur qui génère la commande appropriée.

Les perturbations sur les performances apparaissent lorsque les paramètres du système à commander varient. De plus lorsque le modèle qui à servi à construire la commande est mal défini des dérives sur les performances apparaissent.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour maintenir les performances du système commandé en dépit de ces perturbations.

Une approche consiste à définir d'abord un indice de performance qui est une mesure des performances du système, ensuite il faut le mesurer et le comparer avec l'indice désiré. L'écart entre ces deux valeurs sera traité par un " mécanisme d'adaptation " dont la sortie va agir sur les paramètres du régulateur ou directement sur le signal de commande afin de modifier d'une manière appropriée les performances du système.

Cette dernière approche a donné naissance à la commande adaptative à modèle de référence [1]

Cependant avec la vulgarisation des micro-ordinateurs et leur application dans le domaine de la commande des processus industriels, une autre forme de commande adaptative, la commande auto-ajustable (self tuning) a été développée.

L'idée de la commande auto-ajustable est de construire la synthèse, l'implantation et la validation des contrôleurs en ligne. Essentiellement la commande auto-ajustable combine l'identification, la synthèse et la validation chaque fois qu'une nouvelle mesure de la sortie du système est enregistrée.

Ainsi certains algorithmes d'identification peuvent être combinés avec des algorithmes de commande de façon adaptative. Cette méthode trouve son application lorsque les paramètres du modèle du système à commander sont lentement variables dans le temps ou inconnus.

Ce fut Kalman [2] qui proposa l'idée de commande self tuning qu'il appella self optimizing. Ceci fut suivi par un autre algorithme "optimal" développé par Astrom et Wittenmark[3]. Cet algorithme est basé sur la minimisation de la variance de la sortie.

Les principaux inconvénients de cet algorithme furent corrigés par l'algorithme à variance minimal généralisée [4],[5].

Le manque de souplesse dans la conception et dans la compréhension de ces méthodes a conduit au développement d'algorithmes basés sur des approches plus classiques comme le placement des pôles [6],[7] ou le PID [8].

Enfin des algorithmes basés sur des approches dites modernes ont été développés: commande quadratique linéaire [9], [10] et commande prédictive [11].

Ainsi le choix de méthodes est vaste et chaque auteur proclame la supériorité d'une méthode.

Le but de ce mémoire est de présenter une analyse comparative des différents algorithmes de commande self-tuning.

Cette analyse concernera essentiellement la robustesse par rapport aux variations des paramètres et la fiabilité par rapport à certains choix implicites à la commande self-tuning: paramétrisation des modèles de base, choix du retard...

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le chapitre I expose brièvement la théorie de la commande auto-ajustable avec un rappel de la méthode des moindres carrés récursifs, utilisée pour estimer les paramètres du procédé.

Le chapitre II expose la théorie de la commande par variance minimale généralisée après un bref rappel sur la commande par variance minimale.

La méthode du placement des pôles est exposée dans le chapitre III.

Au chapitre IV est exposée la méthode de commande linéaire quadratique gaussienne qui utilise une représentation interne du système (représentation par variables d'état).

contrairement aux autres méthodes où le système est représenté par une relation entrée - sortie .

Le chapitre V est consacré à la méthode de la commande prédictive généralisée

Le chapitre VI regroupe les résultats des tests effectués pour toutes les méthodes exposées.

Enfin une conclusion est dégagée après ce chapitre.

CHAPITRE I

COMMANDE SELF TUNING: LES PRINCIPES DE BASE

1-1. INTRODUCTION.

Les paramètres d'un processus sont sujets à des perturbations dans le temps ou bien inconnus. Le but de la commande auto-adaptative (self tuning) est d'agir sur les paramètres du contrôleur de telle sorte que celui-ci converge vers les valeurs des paramètres du processus. Dans ce chapitre nous introduisons les principes de base communs aux algorithmes de self tuning et nous dégagerons les choix inhérents à ce type d'algorithmes. Pour cela, après avoir présenté la structure de base de la commande self tuning, nous décrirons les différents modèles sur lesquels ont été construits les différents algorithmes et l'algorithme d'identification qui permet d'estimer en lignes les paramètres de ces modèles.

1-2 MODELES DE CONCEPTION

Dans la commande self-tuning un modèle de base est nécessaire à la synthèse de la loi de commande. Ce modèle exprime une relation d'entrée - sortie sous forme d'une équation de transfert en z^{-1} (opérateur de retard) entre la sortie du système et la commande.

Pour que ce modèle soit le plus représentatif possible du procédé réel à commander, son expression doit comporter un terme représentant les perturbations qui peuvent agir sur les paramètres du système.

Généralement l'expression du modèle est donnée par la relation suivante :

$$a(z^{-1})y(t) = z^{-k} \cdot b(z^{-1})u(t) + (c(z^{-1})/d(z^{-1}))e(t) \quad (I-1)$$

où :

$$a(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} \quad (I-2)$$

$$b(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} \quad (I-3)$$

$$c(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n} \quad (I-4)$$

$$d(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_n z^{-n} \quad (I-5)$$

$y(t)$, $u(t)$ et $e(t)$ représentent respectivement la sortie du système, la commande et un bruit blanc de moyenne nulle et de variance notée σ^2 .

Plusieurs modèles sont disponibles du plus simple au plus général et les différences entre eux sont dues essentiellement à la modélisation de la perturbation qui agit sur la sortie du système.

Ainsi suivant l'expression du terme $c(z^{-1})/d(z^{-1})$ dans l'expression (I-1), on aura les classes de modèles suivants :

1-Modèle A-R-X (Auto Regressive eXogenous)

Ce modèle est caractérisé par : $nc = 0$ et $nd = 0$ et l'équation de celui-ci est donnée par la relation suivante :

$$a(z^{-1})y(t) = z^{-k} \cdot b(z^{-1})u(t) + e(t) \quad (I-6)$$

2- Modèle A-R-M-A-X (Auto Regressive Moving Average eXogenous)

Dans ce cas $nc > 0$ et $nd = 0$ et l'équation de ce modèle est la suivante :

$$a(z^{-1})y(t) = z^{-k} \cdot b(z^{-1})u(t) + c(z^{-1})e(t) \quad (I-7)$$

3- Modèle A-R-I-X (Auto Regressive Integrated eXogenous)

Ce type de modèle est caractérisé par : $n_c = 0$, $n_d = 1$ et $d(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$ et son équation a pour expression :

$$a(z^{-1})y(t) = z^{-k}.b(z^{-1})u(t) + e(t)/(1 - z^{-1}) \quad (I-8)$$

4-Modèle A-R-I-M-A-X (Auto Regressive Integrated Moving Average eXogenous)

Ce modèle est une généralisation du cas précédent avec $n_c > 0$ d'où l'équation du modèle :

$$a(z^{-1})y(t) = z^{-k}.b(z^{-1})u(t) + (c(z^{-1})/1 - z^{-1}).e(t) \quad (I-9)$$

On montre que le fait d'introduire $(1 - z^{-1})$ dans le dénominateur de la perturbation permet d'introduire une action intégrale dans la loi de commande [10].

Suivant le type de perturbation affectant le processus à commander, on choisira le modèle qui convienne le mieux au processus. Ainsi le modèle A-R-M-A-X modélise correctement les processus avec perturbations stationnaires, alors le modèle ARIMAX convient pour les processus perturbés par un mouvement brownien ou un offset [10].

Le schéma d'un tel contrôleur est représenté par la figure I.1

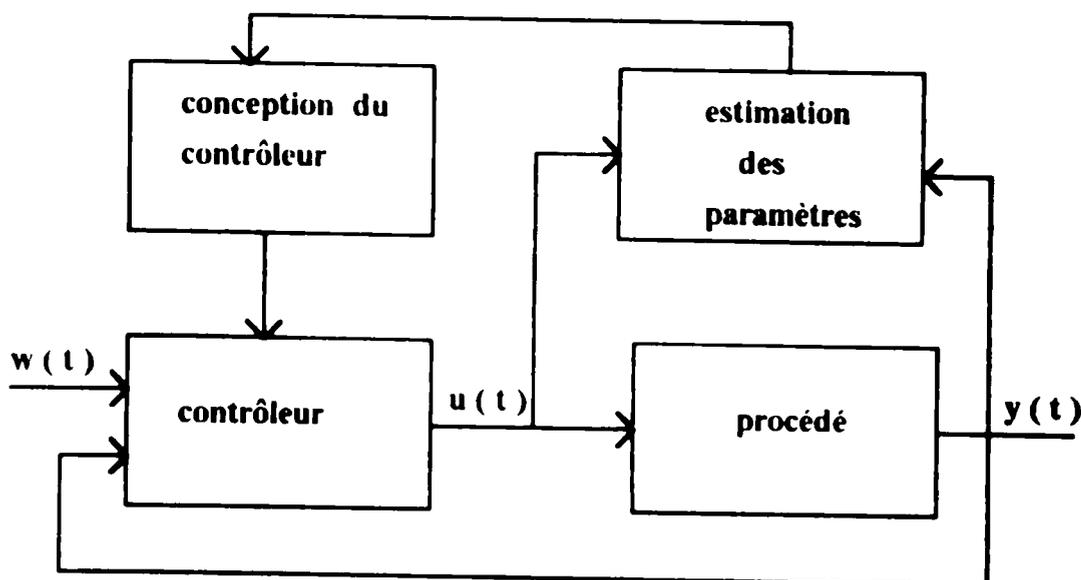


FIGURE I-1 SCHEMA D'UN CONTROLLEUR SELF-TUNING

Les paramètres inconnus (ou variables) sont estimés en ligne en utilisant une méthode

d'estimation récursive. Ces paramètres estimés sont utilisés à la place des vrais paramètres pour la conception du contrôleur self tuning.

On distingue deux types d'algorithmes self tuning : indirect et direct.

a / Self tuning indirect (explicite).

On estime les paramètres de la fonction de transfert du système et des perturbations.

On ne fait pas une mise à jour directe des paramètres mais indirectement via l'estimation du modèle du système.

b / Self tuning direct (implicite)

Dans ce cas on reparamétrise le modèle dans les paramètres du régulateur de façon que les paramètres de celui-ci peuvent être estimés directement.

Cette dernière méthode réduit le temps de calcul et l'occupation de la zone mémoire.

I-2 : LES METHODES DE SELF TUNING

Plusieurs méthodes ont été développées pour générer la commande self tuning. En général il suffit d'avoir la relation qui relie les paramètres de l'élément de commande aux paramètres du modèle pour pouvoir appliquer une des méthodes de commande en self tuning.

Les lois de commande les plus répandues sont :

- 1 / régulateur à variance minimale (M.V).
- 2 / contrôleur à variance minimale généralisée (G.M.V).
- 3 / commande par placement de pôles.
- 4 / la commande linéaire quadratique gaussienne (L.Q.G).
- 5 / la commande prédictive généralisée (G.P.C).

Les régulateurs à variance minimale et le contrôleur à variance minimale sont des algorithmes directs: les paramètres de la loi de commande sont directement estimés à partir des mesures tandis que le reste des algorithmes sont des algorithmes indirect: les paramètres du modèle sont estimés à partir des mesures et les paramètres de la loi de commande sont calculés en fonction de ces paramètres.

I-3 ESTIMATION DES PARAMETRES

L'estimation des paramètres est un élément clé dans la commande self tuning, car les paramètres du système varient parfois continuellement. Pour cette raison il est nécessaire de disposer de méthodes d'estimation qui permettent une mise à jour des paramètres. Parmi ces méthodes on distingue deux classes de méthodes utilisées

essentiellement pour leur simplicité dans les calculs: les méthodes basées sur les moindres carrés et les méthodes basées sur le maximum de vraisemblance.

I-3-1 Méthode des moindres carrés: principe de base

Cette méthode permet d'identifier directement un modèle paramétrique discret. En effet soit θ une grandeur à estimer et soit N le nombre d'observation de cette grandeur. On aura à estimer le vecteur θ de dimension $[N \times 1]$ tel que :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1N} \\ \Phi_{21} & & & \Phi_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Phi_{N1} & & & \Phi_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (I-10)$$

où e_1, e_2, \dots, e_N représentent les écarts entre les valeurs obtenues à partir du système et les valeurs mesurées.

Sous forme matricielle on aura :

$$[y] = [\Phi] \cdot [\theta] + [E] \quad (I-11)$$

La valeur estimée de $[\theta]$ est le vecteur pour lequel la somme des carrés des écarts e est minimale.

$$\text{si } J = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (I-12)$$

$$\frac{dJ}{d\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = [\Phi^T \cdot \Phi]^{-1} \cdot \Phi \cdot Y \quad (I-13)$$

La matrice $[\Phi^T \cdot \Phi]$ est appelée matrice de covariance des observations.

I-3-2 Méthodes des moindres carrés récursifs

Dans la commande self tuning, les observations sont obtenues de manière séquentielle en temps réel. Il est préférable d'arranger les calculs de telle sorte que les résultats obtenus à l'instant $(t-1)$ puissent servir au calcul des estimations à l'instant t .

En effet soit le système décrit par son équation récurrente :

essentiellement pour leur simplicité dans les calculs: les méthodes basées sur les moindres carrés et les méthodes basées sur le maximum de vraisemblance.

1-3-1 Méthode des moindres carrés: principe de base

Cette méthode permet d'identifier directement un modèle paramétrique discret. En effet soit θ une grandeur à estimer et soit N le nombre d'observation de cette grandeur. On aura à estimer le vecteur θ de dimension $[N \times 1]$ tel que :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1N} \\ \Phi_{21} & & & \Phi_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Phi_{N1} & & & \Phi_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

où e_1, e_2, \dots, e_N représentent les écarts entre les valeurs obtenues à partir du système et les valeurs mesurées.

Sous forme matricielle on aura :

$$[y] = [\Phi] \cdot [\theta] + [E] \quad (1-11)$$

La valeur estimée de $[\theta]$ est le vecteur pour lequel la somme des carrés des écarts e_i est minimale.

$$\text{si } J = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (1-12)$$

$$\frac{dJ}{d\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = [\Phi^T \cdot \Phi]^{-1} \cdot \Phi \cdot Y \quad (1-13)$$

La matrice $[\Phi^T \cdot \Phi]$ est appelée matrice de covariance des observations.

1-3-2 Méthodes des moindres carrés récursifs

Dans la commande self tuning, les observations sont obtenues de manière séquentielle en temps réel. Il est préférable d'arranger les calculs de telle sorte que les résultats obtenus à l'instant $(t-1)$ puissent servir au calcul des estimations à l'instant t .

En effet soit le système décrit par son équation récurrente :

$$y(t) = a_1 \cdot y(t-1) + a_2 \cdot y(t-2) + \dots + a_n \cdot y(t-n) + b_0 \cdot u(t-k) + b_1 \cdot u(t-k-1) + \dots + b_m \cdot u(t-k-m) + e(t) \quad (I-14)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système et $e(t)$ une perturbation.

Sous forme matricielle l'équation du système s'écrit :

$$y(t) = \Phi^T(t-1) \cdot \theta + e(t) \quad (I-15)$$

où

$$\Phi^T(t-1) = [y(t-1), \dots, y(t-n), u(t-k), \dots, u(t-k-m)] \quad (I-16)$$

$$\theta^T = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m] \quad (I-17)$$

L'algorithme des moindres carrés récursifs nous donne :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + k(t) \cdot [y(t) - \Phi^T(t-1) \cdot \hat{\theta}(t-1)] \quad (I-18)$$

$$\text{avec } k(t) = \frac{P(t) \cdot \Phi(t-1)}{\lambda + \Phi^T(t-1) \cdot P(t-1) \cdot \Phi(t-1)} \quad (I-19)$$

$$\text{et } P(t) = [I - k(t) \cdot \Phi^T(t-1)] \cdot \frac{P(t-1)}{\lambda} \quad (I-20)$$

λ : facteur d'oubli

À l'instant $t=1$ la matrice P_0 et le vecteur θ_0 doivent être spécifiés

I-4. ALGORITHME DE SELF TUNING

En résumé, un algorithme de self tuning comprend les étapes suivantes:

- 1- Estimation des paramètres;
- 2- Calcul de la loi de commande
- 3- mise à jour des paramètres pour la prochaine itération
- 4- Retour à l'étape 1.

Ainsi donc en plus des décisions et choix usuels associés à la commande par ordinateur tel que la période d'échantillonnage, la limitation de la commande..., l'implantation d'un algorithme de self-tuning nécessite des choix relatifs au modèle de base, à l'estimation des paramètres et au choix de la loi de commande.

Lors du choix du modèle de base les décisions critiques concernent la paramétrisation de ce modèle i.e le choix des degrés du numérateur et du dénominateur et la valeur du retard.

Pour l'estimation des paramètres les choix importants concernent:

a) Le choix des valeurs initiales des paramètres:

Toute connaissance à priori sur le modèle peut être incluse dans l'initialisation pour diminuer le temps d'adaptation

b) Le choix du facteur d'oubli:

En général, on montre [9] que lorsque les paramètres du système varient lentement, une valeur adéquate de ce paramètre devra être comprise entre 0.9 et 1.

c) Le choix de la matrice de covariance P initiale.

Enfin l'algorithme de commande doit être facile à implanter, ne pas impliquer de gros calculs (n'oublions pas que self tuning fonctionne en temps réel) et surtout avoir des paramètres de réglage ('tuning knobs' [8]) faciles à comprendre et à interpréter par l'ingénieur.

CHAPITRE II

METHODE DE LA VARIANCE MINIMALE GENERALISEE

II-1 METHODE DE LA VARIANCE MINIMALE

II-1-1-Introduction

En général tout processus industriel est conduit de façon que le produit fini ait une qualité constante, chose difficile à réaliser compte tenu des perturbations qui agissent sur le système

En pratique on ne peut que réduire les variations ou les fluctuations des grandeurs de sortie et ceci au sens des moindres carrés

Le critère le plus adapté et le plus fonctionnel consistant à minimiser la variance de la sortie a donné naissance à la méthode de la variance minimale

Dans ce chapitre nous introduisons dans cette section la méthode de la variance minimale telle que développée dans [3], dans la section suivante nous introduirons la méthode de la variance minimale généralisée telle que développée dans [4].

Le critère à minimiser dans le cas de la variance minimale (cas de la régulation) est [3] :

$$J = E_{cs} (y^2 (t)) \quad (II-1)$$

II-1-2 Le régulateur à variance minimale

Considérons le système discret linéaire décrit par le modèle ARMAX suivant:

$$y(t+k) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot u(t) + \frac{c(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot e(t+k) \quad (\text{II-2})$$

où k désigne le retard du système exprimé en période d'échantillonnage.

Compte tenu de l'information disponible jusqu'à l'instant t , les quantités $e(t)$, $e(t-1)$, ... peuvent être calculées à partir de l'équation (II-2) et les variables aléatoires $e(t+k)$, $e(t+k-1)$, ..., $e(t+1)$ sont indépendantes des observations $y(t)$, $y(t-1)$, ... La quantité $c(z^{-1})$ peut être décomposée de la manière suivante:

$$c(z^{-1}) = a(z^{-1}) \cdot f(z^{-1}) + z^{-k} \cdot g(z^{-1}) \quad (\text{II-3})$$

où $f(z^{-1})$ et $g(z^{-1})$ sont des polynômes de degré respectifs $(k-1)$ et $(n-1)$ si le degré du polynôme $a(z^{-1})$ est n donc:

$$f(z^{-1}) = 1 + f_1 \cdot z^{-1} + f_2 \cdot z^{-2} + \dots + f_{k-1} \cdot z^{-(k-1)} \quad (\text{II-4})$$

$$g(z) = g_0 + g_1 \cdot z^{-1} + g_2 \cdot z^{-2} + \dots + g_n \cdot z^{-(n-1)} \quad (\text{II-5})$$

L'équation (II-2) s'écrira alors:

$$y(t+k) = f(z^{-1}) \cdot e(t+k) + \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot u(t) + \frac{g(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot e(t) \quad (\text{II-6})$$

L'équation (II-2) écrite à l'instant t nous donne:

$$e(t) = \frac{a(z^{-1})}{c(z^{-1})} \cdot y(t) - \frac{b(z^{-1})}{c(z^{-1})} \cdot u(t) \cdot z^{-k} \quad (\text{II-7})$$

En éliminant $e(t)$ au niveau des équations (II-6) et (II-7) et compte tenu de l'équation (II-3) on aura:

$$y(t+k) = f(z^{-1}) \cdot e(t+k) + \frac{g(z^{-1})}{c(z^{-1})} \cdot y(t) + \frac{b(z^{-1}) \cdot f(z^{-1})}{c(z^{-1})} \cdot u(t) \quad (\text{II-8})$$

La variance de la sortie $y(t)$ est :

$$E_{\infty}(y^2(t+k)) = E_{\infty}(f(z^{-1}).e(t+k) + \frac{g(z^{-1})}{c(z^{-1})}.y(t) + \frac{b(z^{-1}).f(z^{-1})}{c(z^{-1})}.u(t))^2 \quad (\text{II-9})$$

$$\text{Or } E_{\infty}(f(z^{-1}).e(t+k))^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{k-1}^2 \quad (\text{II-10})$$

$$\text{donc : } E_{\infty}(y^2(t+k)) \geq 1 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{k-1}^2 \quad (\text{II-11})$$

L'égalité ayant lieu si on choisit une loi de commande vérifiant l'expression suivante :

$$b(z^{-1}).f(z^{-1}).u(t) + g(z^{-1}).y(t) = 0 \quad (\text{II-12})$$

La sortie du système sera :

$$y(t) = f(z^{-1}).e(t) \quad (\text{II-13})$$

C'est un processus à moyenne glissante d'ordre k .

Le schéma fonctionnel du régulateur à variance minimale est donné par la figure (II-1)

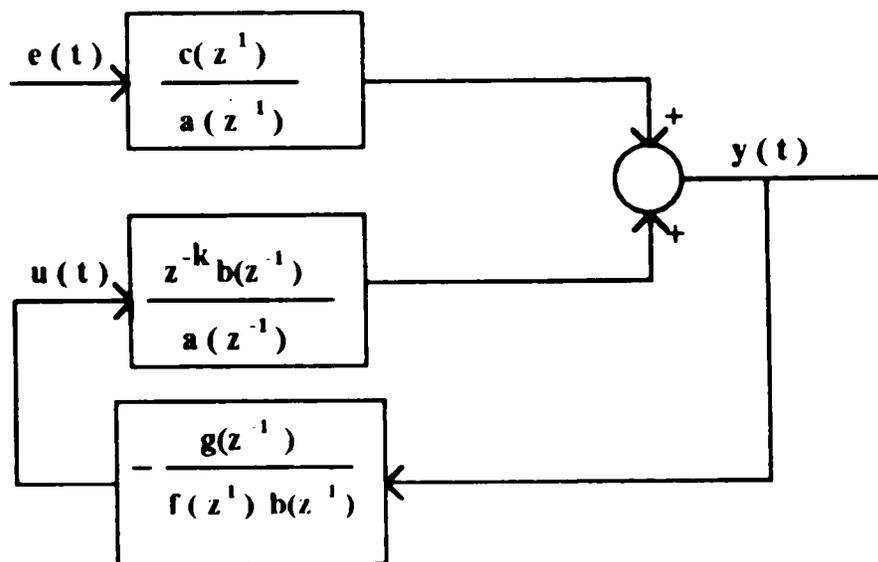


FIGURE II-1 SCHEMA FONCTIONNEL DU REGULATEUR A VARIANCE MINIMALE

Pour obtenir le régulateur donné par l'équation (II-12), on doit résoudre l'identité (II-3), qui peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$[c \ a] = R.W \quad (\text{II-14})$$

où :

$$[c \ a]^T = [c_1 \ a_1, c_2 \ a_2, \dots, c_n \ a_n, 0, \dots, 0] \quad (\text{II-15})$$

et dimension de $[c \ a]^T = (n + k - 1).1$

$$W^T = [f_1, f_2, \dots, f_{k-1}, g_0, g_1, \dots, g_{n-1}] \quad , \quad \dim W^T = (n + k - 1).1 \quad (\text{II-16})$$

Si $k = 2$ et $n = 3$ la structure de la matrice R est de la forme :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-17})$$

II-1-3 Le régulateur à variance minimale en self tuning

Considérons la classe des systèmes qui peuvent être représentés par l'équation discrète suivante (ARX: on suppose $c(z^{-1}) = 1$):

$$a(z^{-1}).y(t) = b(z^{-1}).u(t - k) + e(t) \quad (\text{II-18})$$

Pour réguler un tel système dans le cas où les paramètres du modèle sont inconnus ou variables, l'algorithme de self tuning consiste en deux étapes :

étape 1:

Estimer les paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés récurrents.

étape 2 :

Calculer la loi de contrôle qui correspond à la stratégie minimisant la variance de la sortie $y(t)$ en résolvant l'identité (II-3) dans laquelle on a pris soin de remplacer les vrais paramètres par leur estimés respectifs.

Ceci devra être fait chaque fois qu'une nouvelle mesure est effectuée.

Le schéma bloc d'un tel régulateur et du processus est représenté par la figure II-2.

$$[c \ a] = R.W \quad (\text{II-14})$$

où :

$$[c \ a]^T = [c_1 \ a_1, c_2 \ a_2, \dots, c_n \ a_n, 0, \dots, 0] \quad (\text{II-15})$$

et dimension de $[c \ a]^T = (n + k - 1).1$

$$W^T = [f_1, f_2, \dots, f_{k-1}, g_0, g_1, \dots, g_{n-1}] \quad , \quad \dim W^T = (n + k - 1).1 \quad (\text{II-16})$$

Si $k = 2$ et $n = 3$ la structure de la matrice R est de la forme :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-17})$$

II-1-3 Le régulateur à variance minimale en self tuning

Considérons la classe des systèmes qui peuvent être représentés par l'équation discrète suivante (ARX: on suppose $c(z^{-1}) = 1$):

$$a(z^{-1}).y(t) = b(z^{-1}).u(t - k) + e(t) \quad (\text{II-18})$$

Pour réguler un tel système dans le cas où les paramètres du modèle sont inconnus ou variables, l'algorithme de self tuning consiste en deux étapes :

étape 1 :

Estimer les paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés récurrents.

étape 2 :

Calculer la loi de contrôle qui correspond à la stratégie minimisant la variance de la sortie $y(t)$ en résolvant l'identité (II-3) dans laquelle on a pris soin de remplacer les vrais paramètres par leur estimés respectifs.

Ceci devra être fait chaque fois qu'une nouvelle mesure est effectuée.

Le schéma bloc d'un tel régulateur et du processus est représenté par la figure II-2.

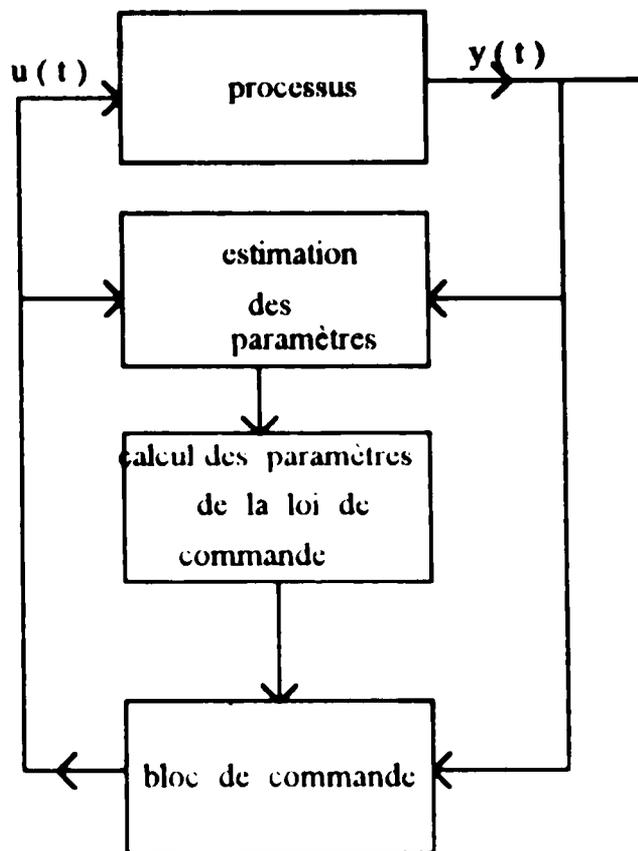


FIGURE II-2 SCHEMA FONCTIONNEL DU REGULATEUR SELF TUNING A VARIANCE MINIMALE

Cependant une méthode plus simple consiste à reparamétriser le modèle du système en fonction des paramètres du contrôleur et estimer directement ces paramètres dans l'étape d'identification. Ces paramètres seront directement utilisés pour calculer la commande.

En effet l'équation du système à commander peut se réécrire:

$$y(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i y(t-k-i) = \beta_0 (u(t-k-1) + \sum_{i=1}^l \beta_i u(t-k-i)) + e(t) \quad (\text{II-19})$$

avec $l = n+k+1$

La séquence $e(t)$ est un processus stochastique à moyenne glissante d'ordre k . L'expression de la stratégie de contrôle se simplifie alors:

$$u(t) = \frac{1}{\beta_0} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y(t+1-i) - \sum_{i=1}^l \beta_i u(t-i) \right) \quad (\text{II-20})$$

L'algorithme direct de self tuning à variance minimale consiste en les étapes suivantes:

Etape 1: Identification:

A chaque période d'échantillonnage, utiliser le modèle:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i y(t-k-i) - \beta_0 (u(t-k-1)) + \sum_{i=1}^l \hat{\beta}_i u(t-k-i-1) + e(t) \quad (\text{II-21})$$

pour estimer les paramètres $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}_i$.

Étape 2: Commande:

A chaque période d'échantillonnage, calculer la commande $u(t)$ à partir de:

$$u(t) = \frac{1}{\beta_0} \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i y(t+1-i) - \sum_{i=1}^l \hat{\beta}_i u(t-i) \quad (\text{II-22})$$

Dans cet algorithme donc, on reparamétrise le modèle du système en fonction des paramètres du contrôleur $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}_i$, et on utilise une méthode d'identification, par exemple, les moindres carrés récursifs pour les estimer, ensuite on calcul directement la commande $u(t)$. Ainsi on évite le calcul des paramètres du contrôleur en fonction des paramètres de la fonction de transfert. Il en résulte alors un gain de temps de calcul et un gain d'espace mémoire.

II-1-4 Le contrôleur à variance minimale

III-1-4-1 Introduction

Les applications du régulateur self tuning pour certains systèmes ont montré l'apparition de quelques difficultés d'ordre pratique (en particulier le contrôle $u(t)$ élevé...)

De plus l'action du régulateur ne concerne que la sortie du processus sans tenir compte de la réponse transitoire du système due à des variations du point de fonctionnement (de la consigne)

Pour pallier à ces difficultés plusieurs algorithmes ont été proposés et en particulier celui développé par Clarke [4], [5], qui constitue une généralisation du régulateur self tuning. La conséquence de ces travaux a donné lieu à la méthode de la variance minimale généralisée (G-M-V)

II-1-4-2 Synthèse du contrôleur G-M-V

Dans la synthèse de ce contrôleur, CLARKE [3], [4] suggère de déterminer le contrôle qui minimise une sortie auxiliaire $S(t)$ au lieu de la sortie du système $y(t)$.

En effet considérons le système décrit par l'équation suivante (modèle ARMAX):

$$a(z^{-1}).y(t) = z^{-1}.b(z^{-1}).u(t) + c(z^{-1}).e(t) \quad (\text{II-23})$$

et la sortie auxiliaire $S(t)$ définie par :

$$S(t) = p(z).y(t) + q(z).u(t - k) - r(z).w(t - k) \quad (\text{II-24})$$

où :

$w(t)$ représente la consigne

k le retard du système

$p(z^{-1})$, $q(z^{-1})$, $r(z^{-1})$ sont des fonctions de transfert échantillonnées que l'on notera :

$$p(z^{-1}) = \frac{pn(z^{-1})}{pd(z^{-1})} \quad (\text{II-25})$$

$$q(z^{-1}) = \frac{qn(z^{-1})}{qd(z^{-1})} \quad (\text{II-26})$$

$$r(z^{-1}) = \frac{rn(z^{-1})}{rd(z^{-1})} \quad (\text{II-27})$$

Le schéma bloc du système et de la sortie auxiliaire est représenté par la figure (II-3)

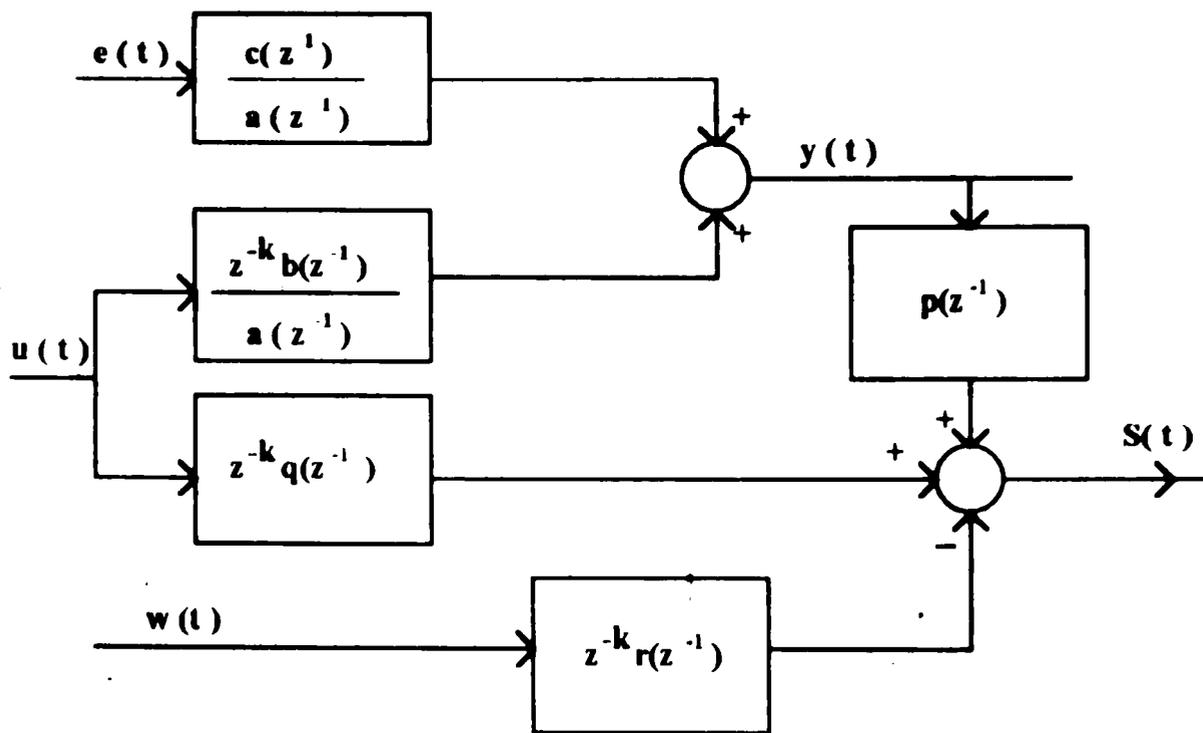


FIGURE II-3 SCHEMA FONCTIONNEL DU PROCÉDE ET DE LA SORTIE AUXILIAIRE

Soit la quantité :

$$\Psi(t) = p(z^{-1}) \cdot y(t) \quad (\text{II-28})$$

A l'instant $(t-k)$ les quantités $q(z^{-1}) \cdot u(t-k)$ et $r(z^{-1}) \cdot w(t-k)$ sont connus, la prédiction de la sortie auxiliaire $S(t)$ se réduit à la prédiction de $\Psi(t)$

Compte tenu de l'équation du système, la quantité $\Psi(t+k)$ s'exprimera en fonction du contrôle $u(t)$ et de la perturbation $e(t)$ par la relation suivante :

$$\Psi(t+k) = \frac{b(z^{-1}) \cdot p(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot u(t) + \frac{c(z^{-1}) \cdot p(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot e(t+k) \quad (\text{II-29})$$

Le deuxième terme du second membre de l'équation (II-29) est une combinaison linéaire des variables aléatoires $e(t+k), e(t+k-1), \dots, e(t+1), e(t), \dots$,

A l'instant t ce 2^{ème} terme comprend des termes pouvant être calculés exactement à partir des observations $e(t), e(t-1), \dots$, et des termes qui sont indépendants de celles-ci car elles sont situées dans le futur ($e(t+k), e(t+k-1), \dots, e(t+1)$).

Pour expliciter ceci décomposons le 2^{ème} terme du second membre de l'équation (II-29), on aura :

$$\frac{c(z^{-1}).pn(z^{-1})}{a(z^{-1}).pd(z^{-1})} = e(z^{-1}) + z^{-k} \cdot \frac{f(z^{-1})}{a(z^{-1}).pd(z^{-1})} \quad (\text{II-30})$$

Les polynômes $c(z^{-1})$ et $f(z^{-1})$ ont pour degrés respectifs $(k-1)$ et $\sup(na + npd - 1, nc + npn - k)$.

nc, na, npd , et npn sont les degrés des polynômes $c(z^{-1}), a(z^{-1}), pd(z^{-1})$ et $pn(z^{-1})$.

Compte tenu de l'équation (II-30) l'équation (II-29) s'écrira :

$$\Psi(t+k) = \frac{b(z^{-1}).p(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot u(t) + \left\{ \frac{z^{-k}.f(z^{-1})}{a(z^{-1}).pd(z^{-1})} + e(z^{-1}).\frac{1}{1} \right\} \cdot e(t+k) \quad (\text{II-31})$$

Cette dernière relation peut être écrite de la manière suivante :

$$\Psi(t+k) = e(z^{-1}).e(t+k) + \frac{g(z^{-1})}{c(z^{-1})} \cdot u(t) + \frac{f(z^{-1})}{c(z^{-1}).pn(z^{-1})} \cdot \Psi(t) \quad (\text{II-32})$$

où

$$g(z^{-1}) = c(z^{-1}).b(z^{-1}) \quad (\text{II-33})$$

La relation (II-32) donnant la sortie $\Psi(t)$ comprend des termes dépendant des observations et des termes qui n'en dépendent pas

Soit $\hat{\Psi}(t)$ une fonction quelconque des observations $\Psi(t), \Psi(t-1), \dots$, et considérons la variance de l'expression $(\Psi(t+k) - \hat{\Psi})$, on aura :

$$E_{\omega} \left\{ (\Psi(t+k) - \hat{\Psi})^2 \right\} = E_{\omega} \left\{ e(z^{-1}).e(t+k) + \frac{g(z^{-1})}{c(z^{-1})} \cdot u(t) + \frac{f(z^{-1})}{c(z^{-1}).pn(z^{-1})} \cdot \Psi(t) - \hat{\Psi} \right\}^2 \quad (\text{II-34})$$

$$\text{donc } E_{\omega} \left\{ \Psi(t+k) - \hat{\Psi} \right\}^2 \geq E_{\omega} \left\{ e(z^{-1}).e(t+k) \right\}^2 \quad (\text{II-35})$$

l'égalité ayant lieu pour un choix de $\hat{\Psi}$ tel que :

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(t+k/t) = \frac{g(z^{-1})}{c(z^{-1})} \cdot u(t) + \frac{f(z^{-1})}{c(z^{-1}).pn(z^{-1})} \cdot \Psi(t) \quad (\text{II-36})$$

La prédiction à l'instant $(t+k)$ de la sortie auxiliaire compte tenu de l'information disponible jusqu'à l'instant (t) se déduit en remplaçant l'expression de $\hat{\Psi}(t+k/t)$ dans l'équation (II-24), d'où on aura :

$$\hat{S}(t+k/t) = \hat{\Psi}(t+k/t) + q(z^{-1}) \cdot u(t) - r(z^{-1}) \cdot w(t) \quad (\text{II-37})$$

La loi de contrôle doit être choisie de façon à ce que la prédiction $\hat{S}(t+k/t)$ soit nulle. On aura l'expression de la loi de contrôle suivante :

$$u(t) = \frac{r(z^{-1}) \cdot w(t) - \hat{\Psi}(t+k/t)}{q(z^{-1})} \quad (\text{II-38})$$

En tenant compte de l'expression de $\hat{\Psi}(t+k/t)$ (II-36), l'équation (II-38) s'écrira :

$$u(t) = \frac{c(z^{-1}) \cdot r(z^{-1}) \cdot w(t) - f(z^{-1}) \cdot y(t) / pd(z^{-1})}{g(z^{-1}) + c(z^{-1}) \cdot q(z^{-1})} \quad (\text{II-39})$$

Le schéma bloc du système en boucle fermée est représenté par la figure II-4

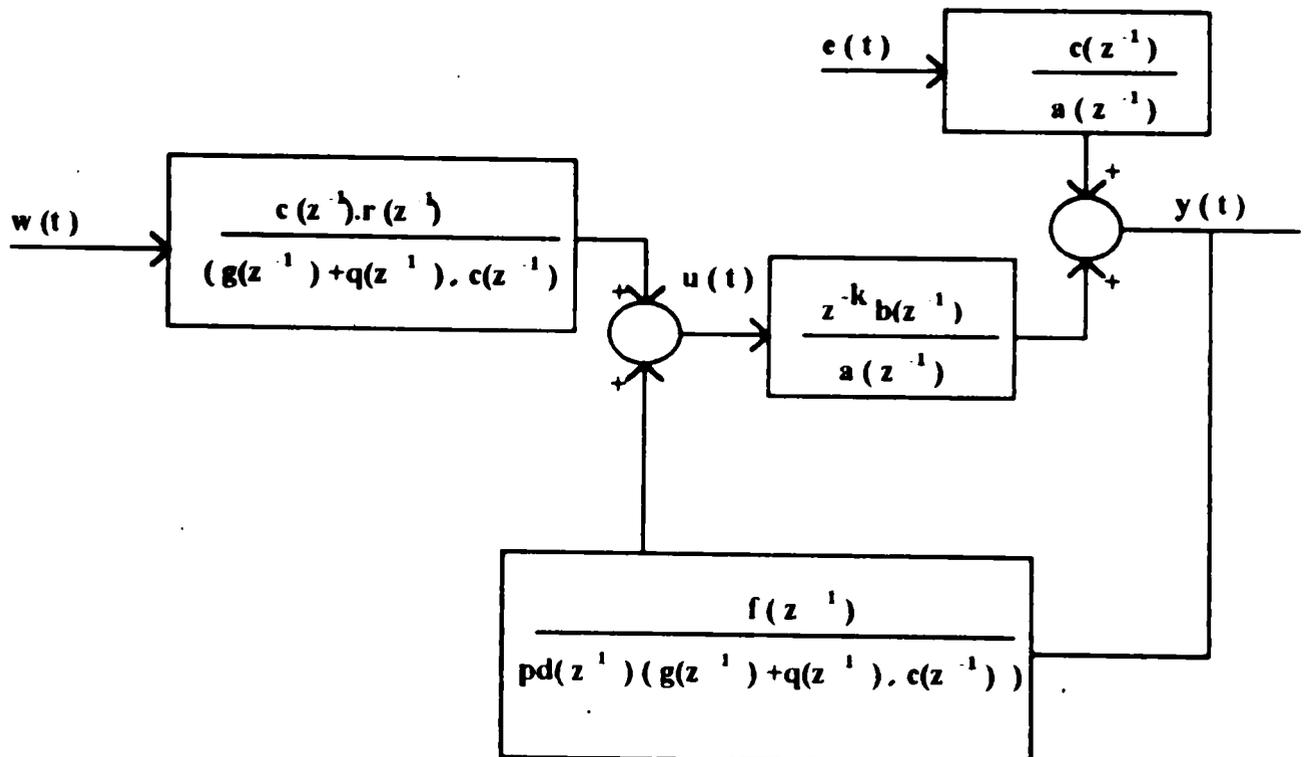


FIGURE II-4 SCHEMA FONCTIONNEL DU SYSTEME EN BOUCLE FERMEE

II-1-5 Le contrôleur G-M-V en self tuning

La synthèse de ce contrôleur est basée sur les deux points suivants :

- estimation des paramètres par moindres carrés
- calcul de la loi de commande $u(t)$ en prenant les valeurs estimés des paramètres à la place des vrais valeurs :

L'équation (II-36) peut être réécrite de la manière suivante :

$$c(z^{-1}) \cdot \hat{\Psi}(t/t-k) = g(z^{-1}) \cdot u(t-k) + \frac{f(z^{-1})}{pd(z^{-1})} \cdot y(t-k) \quad (\text{II-40})$$

Cette dernière relation peut être écrite sous forme matricielle en introduisant les notations suivantes :

$$\hat{\Phi}^T(t) = \left\{ u(t), u(t-1), \dots, \frac{y(t)}{pd(z^{-1})}, \frac{y(t-1)}{pd(z^{-1})}, \dots, \hat{\Psi}(t+k-1/t-1), \dots \right\} \quad (\text{II-41})$$

$$\text{et } \hat{\theta}^T(t) = \{ g_0, g_1, \dots, f_1, f_2, \dots, c_1, c_2, \dots \} \quad (\text{II-42})$$

$$\hat{\Psi}(t/t-k) = \Phi^T(t-k) \cdot \theta(t) \quad (\text{II-43})$$

L'estimation du vecteur paramètre est donnée par les équations suivantes [3], [4] :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P^{-1}(t-k) \cdot \hat{\Phi}(t-k) \cdot \{ \Psi(t/t-k) - \hat{\Phi}(t-k) \cdot \hat{\theta}(t-1) \} \quad (\text{II-44})$$

$$P(t) = P(t-1) + \hat{\Phi}(t) \cdot \hat{\Phi}^T(t) \quad (\text{II-45})$$

avec $P(0) = P_0 > 0$

la loi de contrôle est donnée par :

$$u(t) = \frac{r(z^{-1}) \cdot w(t) - \hat{\Psi}(t+k/t)}{q(z^{-1})} \quad (\text{II-46})$$

II-1-6 Conclusion

La méthode G-M-V exposée dans ce chapitre est une méthode prédictive dans la mesure où la loi de commande est calculée de façon que la sortie auxiliaire soit nulle à l'instant $(t+k)$ quand on est à l'instant (t) .

L'utilisation pratique de cette méthode pose quelques problèmes en particulier le choix des polynômes $p(z^{-1})$, $q(z^{-1})$ et $r(z^{-1})$ qui dépendent beaucoup du concepteur.

CHAPITRE III

METHODE DU PLACEMENT DE PÔLES

III-1-INTRODUCTION

Historiquement la méthode du placement de pôles a été développée par WELLSTEAD et al [6] pour corriger certains inconvénients de la commande par variance minimale, en particulier le mauvais comportement de celle-ci dans la commande de certains systèmes tels que les systèmes à phase non minimale ou instables.

L'idée introduite par WELLSTEAD et al consiste à déterminer le régulateur ou le contrôleur de telle sorte que la loi de commande implique le placement des pôles et des zéros en des positions spécifiées par le concepteur.

Cette stratégie permet à l'analyste de spécifier la réponse du système en boucle fermée tout en lui permettant de tenir compte des contraintes d'engineering non explicitées dans le modèle du système : (en particulier les limitations sur la valeur du contrôle introduites par la conversion $a \rightarrow n$). Dans ce chapitre nous allons présenter l'algorithme de self-tuning tout d'abord dans le cas du régulateur (réjection de perturbations) [6] ensuite dans le cas du contrôleur (poursuite) [7].

III-2-Méthode du placement des pôles

On suppose que le système continu a la représentation discrète suivante (ARMAX) :

$$a(z^{-1}).y(t) - z^{-h}.b(z^{-1}).u(t) + c(z^{-1}).e(t) \quad (\text{III-1})$$

$$\text{où } a(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} \quad (\text{III-2})$$

$$b(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} \quad (\text{III-3})$$

$$c(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_p z^{-p} \quad (\text{III-4})$$

k est le retard du système exprimé en période d'échantillonnage.

Les signaux $y(t)$, $u(t)$, $e(t)$ sont des séquences au temps $t = 0, 1, 2, \dots$ représentant la version uniformément échantillonnée de la sortie, du contrôle et d'un bruit blanc qui représente une perturbation $e(t)$ non observable.

L'équation (III-1) peut être réécrite sous la forme :

$$y(t) = \frac{z^{-k} b(z^{-1}) u(t)}{a(z^{-1})} + \frac{c(z^{-1}) e(t)}{a(z^{-1})} \quad (\text{III-5})$$

qui peut être représentée par le schéma bloc de la figure III-1

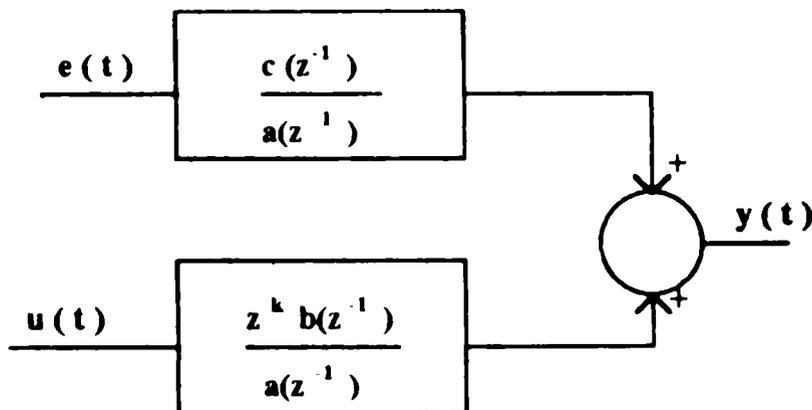


figure III-1 SCHEMA FONCTIONNEL DU PROCEDE
ET DE LA PERTURBATION

si on choisit une loi de commande :

$$u(t) = \frac{g(z^{-1})}{f(z^{-1})} y(t) \quad (\text{III-6})$$

la fonction de transfert en boucle fermée sera donnée par l'expression ci-dessous

$$y(t) = \frac{c(z^{-1}) f(z^{-1}) e(t)}{a(z^{-1}) f(z^{-1}) + z^{-k} b(z^{-1}) g(z^{-1})} \quad (\text{III-7})$$

où

$$f(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots + f_m z^{-m} \quad (\text{III-8})$$

$$g(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_n z^{-n}. \quad (\text{III-9})$$

Les pôles du système en boucle fermée sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$a(z^{-1}) \cdot f(z^{-1}) + z^{-k} b(z^{-1}) g(z^{-1}) = 0 \quad (\text{III-10})$$

La méthode du placement des pôles permet de localiser les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée en des positions bien spécifiées par le choix d'un polynôme $T(z^{-1})$ tel que :

$$a(z^{-1}) \cdot f(z^{-1}) + z^{-k} \cdot b(z^{-1}) g(z^{-1}) - c(z^{-1}) T(z^{-1}) \quad (\text{III-11})$$

alors l'équation (III-7) s'écrira :

$$y(t) = \frac{f(z^{-1})c(z^{-1})}{c(z^{-1})T(z^{-1})} \cdot e(t) = \frac{f(z^{-1}) \cdot e(t)}{T(z^{-1})} \quad (\text{III-12})$$

Et le schéma fonctionnel du système en boucle fermée est représenté à la figure III-2

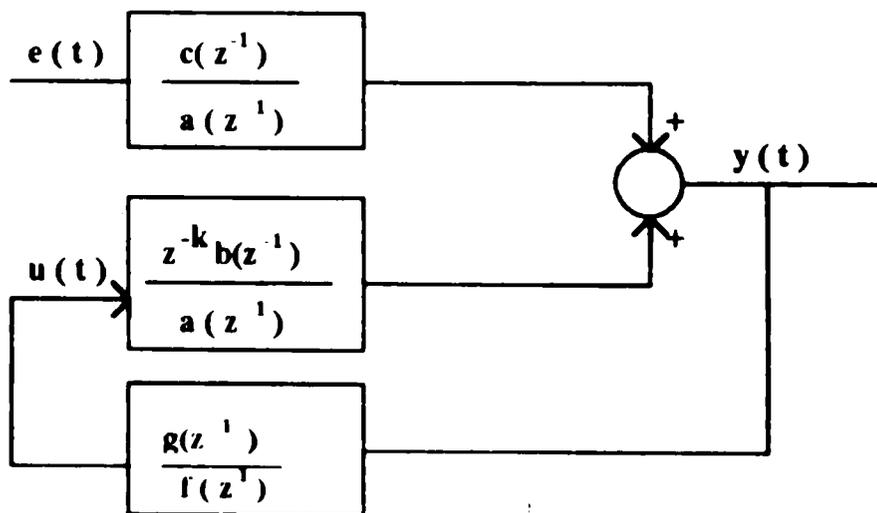


FIGURE III-2 SCHEMA FONCTIONNEL DU SYSTEME EN BOUCLE FERMEE

III-3-Le régulateur

III-3-1 -Systèmes à paramètres connus ou constants

Dans ce paragraphe nous allons établir les relations de base du régulateur, en considérant que les paramètres du modèle sont constants et connus.

Pour déterminer les paramètres du régulateur dans ce cas, on doit résoudre l'équation (III-11), c'est à dire déterminer les polynômes f et g qui sont solutions de l'équation avec un polynôme $T(z)$ de degré nt choisi par le concepteur. En prenant $c(z^{-1})=1$ il vient :

$$a(z^{-1}).f(z^{-1}) + z^{-k}.b(z^{-1}).g(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (\text{III-13})$$

Pour pouvoir résoudre cette équation il faut que :

$$nf = m+k-1 \quad (\text{III-14})$$

$$ng = n-1 \quad (\text{III-15})$$

$$nt = n + m + k - nc \quad (\text{III-16})$$

où nf, ng, n, m, nc, nt représentent respectivement les degrés des polynômes f, g, a, b, c et T

Par identification des termes en z^{-1} l'équation peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\Omega.R = [T \ a] \quad (\text{III-17})$$

avec :

$$R^T = [f_1, f_2, \dots, f_{nf}, g_0, g_1, \dots, g_{ng}] \quad (\text{III-18})$$

$$[T \ a]^T = [t_1 - a_1, t_2 - a_2, \dots, t_m - a_m, -a_{m+1}, \dots, -a_n, 0, 0, \dots, 0] \quad (\text{III-19})$$

Ω est une matrice carrée de dimension $(nf + ng + 1) \cdot (nf + ng + 1)$

Avant de déterminer la structure de Ω il faut déterminer nf et ng connaissant le retard k

Un exemple de calcul de la matrice Ω est donné ci dessous pour $n=3, m=2$ et $k=1$ on aura $nf=2$ et $ng=2$ d'où

$$f(z^{-1}) = 1 + f_1.z^{-1} + f_2.z^{-2} \quad (\text{III-20})$$

$$g(z^{-1}) = g_0 + g_1.z^{-1} + g_2.z^{-2} \quad (\text{III-21})$$

La structure de Ω est la suivante :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-22})$$

La première ligne représente le coefficient de z^{-1}

La deuxième ligne représente le coefficient de z^{-2} et ainsi de suite

La solution de l'équation est :

$$R = \Omega^{-1} \cdot [T \ a] \quad (\text{III-23})$$

La loi de contrôle est :

$$u(t) = -y(t) \cdot \frac{g(z^{-1})}{f(z^{-1})} \quad (\text{III-24})$$

III-3-2 Système à paramètres inconnus ou variables

A partir des relations de base développées au paragraphe précédente le calcul du régulateur self tuning se fera en résolvant l'équation suivante :

$$\hat{a}(z^{-1}) \cdot f(z^{-1}) + z^{-k} \cdot \hat{b}(z^{-1}) \cdot g(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (\text{III-25})$$

où $\hat{a}(z^{-1})$ et $\hat{b}(z^{-1})$ sont des polynômes obtenus en remplaçant les vrais paramètres des polynômes $a(z^{-1})$ et $b(z^{-1})$ par leur estimés, obtenus par la méthode des moindres carrés récursifs

La loi de contrôle est :

$$u(t) = -\frac{g(z^{-1})}{f(z^{-1})} \cdot y(t) \quad (\text{III-26})$$

Le schéma fonctionnel du régulateur self tuning est représenté par la figure III-3

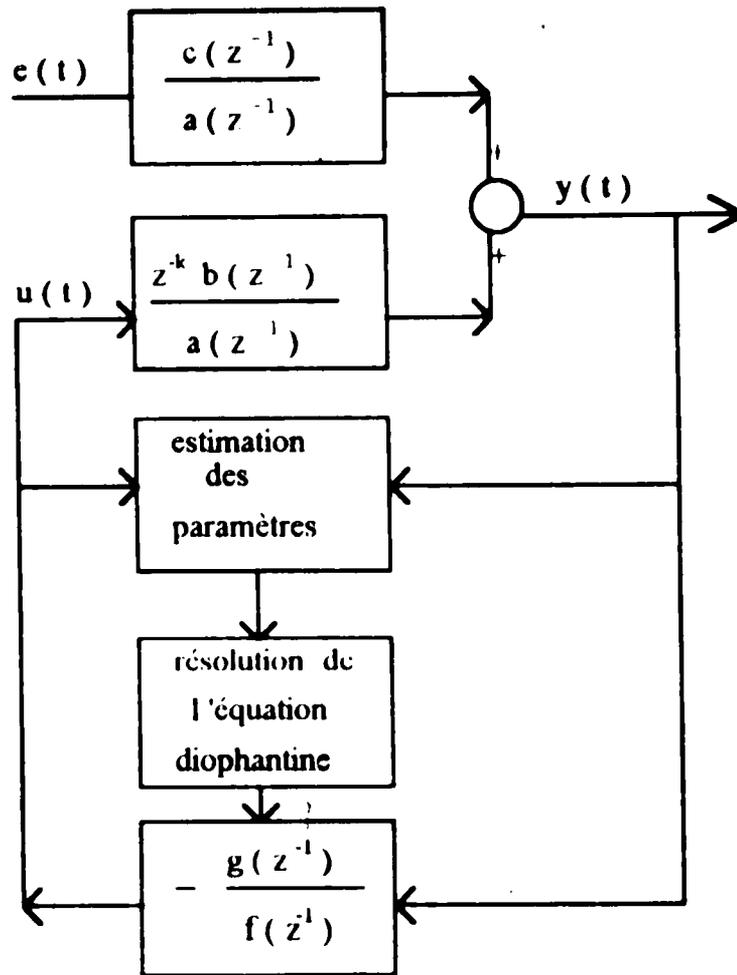


FIGURE III-3 SCHEMA FONCTIONNEL DU REGULATEUR SELF TUNING

III-4-CONTROLEUR SELF TUNING

III-4-1-Cas d'un système à paramètres constants et connus

De la même façon que pour le régulateur nous allons établir dans ce paragraphe les relations de base du contrôleur à placement de pôles. Le système est décrit par l'équation (III-5) en présence de perturbations aléatoires. Si on voudrait que notre système suive une consigne y_r , introduisant la fonction écart $\zeta(t) = y(t) - y_r$ dans l'équation (III-5) on aura :

$$y(t) - y_r = z^{-k} \cdot \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot u(t) + \frac{c(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot e(t) - y_r \quad (\text{III-27})$$

considérons l'incrément de contrôle $\Delta \cdot u(t) = u(t) - u(t-1)$ qui peut s'écrire :

$$\Delta \cdot u(t) = \Delta_{op} \cdot u(t) \quad (\text{III-28})$$

où $\Delta_{op} = 1 - z^{-1}$ est l'opérateur différentiel

le contrôle $u(t)$ s'écrira compte tenu de (III-28) :

$$u(t) = \frac{\Delta \cdot u(t)}{1 - z^{-1}} \quad (\text{III-29})$$

en remplaçant $u(t)$ par sa valeur l'équation (III-27) s'écrit :

$$y(t) = y_r \cdot z^{-k} \cdot \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})} \cdot \Delta u(t) + \frac{c(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot e(t) - y_r \quad (\text{III-30})$$

où en remplaçant $y(t) - y_r$ par $\zeta(t)$ qui représente l'écart entre $y(t)$ et la consigne y_r , on aura :

$$\zeta(t) = z^{-k} \cdot \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})} \cdot \Delta u(t) + \frac{c(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot e(t) - y_r \quad (\text{III-31})$$

En choisissant une loi de contrôle telle que :

$$\Delta \cdot u(t) = - \frac{g(z^{-1})}{f(z^{-1})} \cdot \zeta(t) \quad (\text{III-32})$$

l'équation (III-31) s'écrit :

$$\zeta(t) = - z^{-k} \cdot \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})} \cdot \frac{g(z^{-1})}{f(z^{-1})} \cdot \zeta(t) + \frac{c(z^{-1})}{a(z^{-1})} \cdot e(t) - y_r \quad (\text{III-33})$$

d'où l'expression de $y(t)$

$$y(t) = \frac{c(z^{-1}) \cdot f(z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})}{a(z^{-1}) \cdot f(z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1}) + z^k \cdot b(z^{-1}) \cdot g(z^{-1})} \cdot e(t) + \frac{z^{-1} \cdot b(z^{-1}) \cdot g(z^{-1})}{a(z^{-1}) \cdot f(z^{-1}) + z^k \cdot b(z^{-1}) \cdot g(z^{-1})} y_r \quad (\text{III-34})$$

Si on voudrait que les pôles de la fonction de transfert du système en boucle fermée soient localisés en des positions précisées par un polynôme $T(z^{-1})$ on doit résoudre l'équation diophantine suivante :

$$a(z^{-1})f(z^{-1}).(1 - z^{-1}) + z^{-k}b(z^{-1})g(z^{-1}) - c(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (\text{III-35})$$

Dans ce cas la sortie du système sera donnée par la relation suivante :

$$y(t) = \frac{f(z^{-1}).(1 - z^{-1})}{T(z^{-1})} \cdot e(t) + \frac{z^{-k}.b(z^{-1}).g(z^{-1})}{c(z^{-1}).T(z^{-1})} \cdot y_r \quad (\text{III-36})$$

La résolution de l'équation (III-35) se fera de la même manière que celle du régulateur en changeant $a(z^{-1})$ par le polynôme $a(z^{-1}).(1-z^{-1})$.

Le schéma fonctionnel du contrôleur est représenté à la figure III-4.

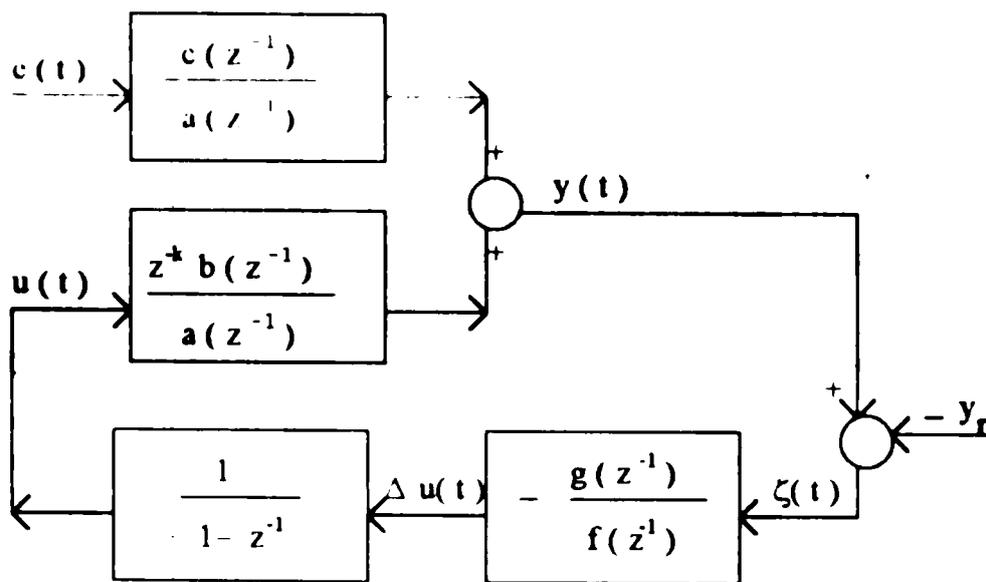


FIGURE II -4 SCHEMA FONCTIONNEL DU CONTROLEUR

III-4-2 Système à paramètres inconnus ou variables

Le calcul du contrôleur se fait de la même manière que précédemment en remplaçant les valeurs des paramètres du modèle par leur estimés obtenus par la méthode des moindres carrés récurrents. Il faut résoudre dans ce cas l'équation suivante :

$$\hat{a}(z^{-1}).f(z^{-1}).(1 - z^{-1}) + z^{-k}.\hat{b}(z^{-1}).g(z^{-1}) = c(z^{-1}).T(z^{-1}) \quad (\text{III-37})$$

CHAPITRE IV

LA COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE GAUSSIENNE (L-Q-G)

IV-1-INTRODUCTION :

Les méthodes de commande vues aux chapitres précédents (placement de pôles ,G-M-V) sont basées sur une représentation du procédé par une relation d'entrée - sortie (fonction de transfert). Clarke et all [9], [10] ont proposé une méthode de synthèse basée sur une représentation interne du système à commander (représentation par variables d'état).

La commande obtenue est une commande par retour d'état qui minimise un critère quadratique .

les perturbations considérées seront aléatoires et de type gaussien d'où l'appellation de cette méthode : la commande linéaire quadratique gaussienne (L-Q-G)

IV-2 -Critères à minimiser

Dans le cas d'un régulateur autour d'une référence nulle et en présence de perturbations à moyenne nulle, la fonction coût à minimiser est généralement [9] :

$$J_1 = y^2(N) + \sum_{i=0}^{N-1} y^2(i) + \lambda \cdot u^2(i) \quad (IV-1)$$

$y(t)$: sortie du système

$u(t)$: commande du système

λ : facteur de pondération

Dans le cas d'un système de servocommande la fonction coût considérée est [9]:

$$J_2 = (y(N) - w(N))^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (y(i) - w(i))^2 + \lambda \cdot u^2(i) \quad (IV-2)$$

où $w(t)$ est le signal de référence.

Ce type de fonction introduit un statisme nul et en général une erreur nulle pour une commande non nulle, ce qui rend J_2 non minimale.

Pour remédier à ce problème la fonction coût suivante a été suggérée [9]:

$$J_1 = \{ \Psi(N) - w(N) \}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (\Psi(i) - w(i))^2 + \lambda \cdot (q(z^{-1}) \cdot u(i))^2 \quad (IV-3)$$

où $\Psi(t) = p(z^{-1}) \cdot y(t)$ est une sortie auxiliaire

$p(z^{-1})$ et $q(z^{-1})$ sont des fonctions de transfert telles que :

$$p(z^{-1}) = \frac{pn(z^{-1})}{pd(z^{-1})} \quad \text{et} \quad p(1) = 1 \quad (IV-4)$$

$$q(z^{-1}) = \frac{qn(z^{-1})}{qd(z^{-1})} \quad \text{et} \quad q(1) = 0 \quad (IV-5)$$

En fait le polynôme $p(z^{-1})$ représente approximativement l'inverse de la fonction de transfert en boucle fermée du système. En effet quand λ est petit ($\Psi(t) - w(t)$) tend vers zéro et donc $p(z^{-1})y(t)$ tend vers $w(t)$ alors $y(t) = w(t)/p(z^{-1})$.

IV-3-Régulateur I-Q-G

Soit le système décrit par le modèle CARMA suivant :

$$a(z^{-1}) \cdot y(t) = z^{-k} \cdot b(z^{-1}) \cdot u(t) + c(z^{-1}) \cdot e(t) \quad (IV-6)$$

$a(z^{-1})$, $b(z^{-1})$, $c(z^{-1})$ sont des polynômes en (z^{-1}) de degrés respectifs n_a , n_b et n_c

k est le retard du système

Soit $n = \text{maximum}(n_a, n_b, n_c)$

IV-3-1 Paramètres du modèle constants

Une réalisation de la fonction de transfert du système donné par l'équation (IV-6) peut être donnée par les équations d'état suivantes :

$$X(t+1) = A.X(t) + B.u(t) + E.e(t) \quad (\text{IV-7})$$

$$y(t) = C^T.X(t) + e(t) \quad (\text{IV-8})$$

où

$$B^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n] \quad \dim [B] = 1 \cdot (n+k) \quad (\text{IV-9})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 0 & & \dots & 1 & \dots & \dots \\ -a_{n+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ 0 & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \dots \\ 0 & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-10})$$

$$C^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad \dim [C] = 1 \cdot (n+k) \quad (\text{IV-11})$$

$$E^T = [c_1 - a_1 \quad c_2 - a_2 \quad \dots \quad c_n - a_n \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad \dim [E] = 1 \cdot (n+k) \quad (\text{IV-12})$$

$X(t)$: vecteur d'état du système

En utilisant les états du système, l'expression de la fonction coût sera donnée par la relation suivante :

$$J = X^T(N).S.X(N) + \sum_{i=0}^{N-1} X^T(i).Q.X(i) + \lambda.u^2(i) \quad (\text{IV-13})$$

où :

$$S = Q - C.C^T \quad (\text{IV-14})$$

La minimisation du critère J est donnée par la résolution de l'équation de RICCATI [9] à savoir :

$$K_{rk}(t) = (\lambda + B^T.P(t+1).B)^{-1}.B^T.P(t+1).A \quad (\text{IV-15})$$

$$P(t) = Q + A^T.P(t+1).A - A^T.P(t+1).B.(\lambda + B^T.P(t+1).B)^{-1}.B^T.P(t+1).A \quad (\text{IV-16})$$

avec $P(N) = S$

La commande optimale est donnée par la relation :

$$u(t) = -K_{ric}(t) \cdot X(t) \quad (IV-17)$$

IV-3-1-1 Remarques :

IV-3-1-1-1 Horizon de contrôle

Selon que l'horizon de contrôle est fini ou infini, on envisagera les deux cas suivants :

IV-3-1-1-a N fini (horizon fixe)

L'équation de RICCATI est itérée N fois pour chaque instant (t) avec l'initialisation $P(t+N) = S$

IV-3-1-1-b Horizon infini (horizon libre)

L'équation de RICCATI est itérée une seule fois, en utilisant à chaque instant (t) la matrice de covariance $P(t-1)$ calculée précédemment pour la détermination de $P(t)$

IV-3-1-2 Vecteur d'état

L'équation (IV-17) permet de calculer la commande $u(t)$ dans le cas où le vecteur d'état $X(t)$ est observable à chaque instant (t).

Dans le cas contraire l'état du système $X(t)$ est remplacé dans le calcul de $u(t)$ par l'état estimé $\hat{X}(t/t)$ obtenu par un filtre du type modèle des innovations qui est une variante du filtre de KALMAN et sera donnée la relation :

$$u(t) = -K_{ric}(t) \cdot \hat{X}(t/t) \quad (IV-18)$$

IV-3-2-Paramètres du modèle variables ou inconnus

Le calcul du régulateur I-Q-G en self tuning est obtenu de la même manière que dans le cas déterministe en remplaçant dans les matrices A, B, E les paramètres a_i , b_i , c_i par leurs estimés obtenus par moindres carrés récurrents

L'algorithme de calcul de ce régulateur est constitué des étapes suivantes :

étape 1 : estimation des paramètres

étape 2 : déterminer la représentation par variables d'état correspondante

étape 3 : résolution de l'équation de RICCATI

avec $P(N) = S$

La commande optimale est donnée par la relation :

$$u(t) = -K_{ric}(t) \cdot X(t) \quad (IV-17)$$

IV-3-1-1 Remarques :

IV-3-1-1-1 Horizon de contrôle

Selon que l'horizon de contrôle est fini ou infini, on envisagera les deux cas suivants :

IV-3-1-1-a N fini (horizon fixe)

L'équation de RICCATI est itérée N fois pour chaque instant (t) avec l'initialisation $P(t+N) = S$

IV-3-1-1-b Horizon infini (horizon libre)

L'équation de RICCATI est itérée une seule fois, en utilisant à chaque instant (t) la matrice de covariance $P(t-1)$ calculée précédemment pour la détermination de $P(t)$

IV-3-1-1-2 Vecteur d'état

L'équation (IV-17) permet de calculer la commande $u(t)$ dans le cas où le vecteur d'état $X(t)$ est observable à chaque instant (t).

Dans le cas contraire l'état du système $X(t)$ est remplacé dans le calcul de $u(t)$ par l'état estimé $\hat{X}(t/t)$ obtenu par un filtre du type modèle des innovations qui est une variante du filtre de KALMAN et sera donnée la relation :

$$u(t) = -K_{ric}(t) \cdot \hat{X}(t/t) \quad (IV-18)$$

IV-3-2-Paramètres du modèle variables ou inconnus

Le calcul du régulateur I-Q-G en self tuning est obtenu de la même manière que dans le cas déterministe en remplaçant dans les matrices A, B, E les paramètres a_i , b_i , c_i par leurs estimés obtenus par moindres carrés récursifs

L'algorithme de calcul de ce régulateur est constitué des étapes suivantes :

étape 1 : estimation des paramètres

étape 2 : déterminer la représentation par variables d'état correspondante

étape 3 : résolution de l'équation de RICCATI

avec $P(N) = S$

La commande optimale est donnée par la relation :

$$u(t) = -K_{ric}(t) \cdot X(t) \quad (IV-17)$$

IV-3-1-1 Remarques :

IV-3-1-1-1 Horizon de contrôle

Selon que l'horizon de contrôle est fini ou infini, on envisagera les deux cas suivants :

IV-3-1-1-a N fini (horizon fixe)

L'équation de RICCATI est itérée N fois pour chaque instant (t) avec l'initialisation $P(t+N) = S$

IV-3-1-1-b Horizon infini (horizon libre)

L'équation de RICCATI est itérée une seule fois, en utilisant à chaque instant (t) la matrice de covariance $P(t-1)$ calculée précédemment pour la détermination de $P(t)$

IV-3-1-1-2 Vecteur d'état

L'équation (IV-17) permet de calculer la commande $u(t)$ dans le cas où le vecteur d'état $X(t)$ est observable à chaque instant (t).

Dans le cas contraire l'état du système $X(t)$ est remplacé dans le calcul de $u(t)$ par l'état estimé $\hat{X}(t/t)$ obtenu par un filtre du type modèle des innovations qui est une variante du filtre de KALMAN et sera donnée la relation :

$$u(t) = -K_{ric}(t) \cdot \hat{X}(t/t) \quad (IV-18)$$

IV-3-2-Paramètres du modèle variables ou inconnus

Le calcul du régulateur I-Q-G en self tuning est obtenu de la même manière que dans le cas déterministe en remplaçant dans les matrices A, B, E les paramètres a_j , b_j , c_j par leurs estimés obtenus par moindres carrés récursifs

L'algorithme de calcul de ce régulateur est constitué des étapes suivantes :

étape 1 : estimation des paramètres

étape 2 : déterminer la représentation par variables d'état correspondante

étape 3 : résolution de l'équation de RICCATI

étape 4 : estimation de l'état du système par le filtre de KALMAN

étape 5 : calcul de la commande à appliquer à l'instant suivant

étape 6 : retour à l'étape 1 pour la prochaine itération

IV-4 LE CONTROLEUR L-Q-G

IV-4-1- Paramètres du modèle sont constants

Pour le calcul du contrôleur CLARKE et al [9] suggèrent un système décrit par le modèle CARIMA ci-dessous :

$$a(z^{-1}).y(t) - b(z^{-1}).u(t-k) + d(z^{-1}).v(t-k') + c(z^{-1}).e(t) / \Delta_{\sigma} \quad (IV-19)$$

où $v(t)$ est une perturbation mesurable

k' est le retard de la perturbation

Δ_{σ} est l'opérateur $(1 - z^{-1})$

le but du contrôleur est d'amener la sortie du système à suivre un signal de référence $w(t)$

Le critère à minimiser dans ce cas est :

$$J_3 = [\Psi(t) - w(t)]^2 + \sum_{i=0}^{N-1} (\Psi(i) - w(i))^2 + \lambda.(Q.u(i))^2 \quad (IV-20)$$

en multipliant les deux membres de l'équation (IV-19) par $P(z^{-1})$ on aura :

$$\begin{aligned} a(z^{-1}).pd(z^{-1}).[p(z^{-1}).y(t)] &= [z^{-k+1}.pn(z^{-1}).b(z^{-1}).u(t-1)] + \\ &+ [z^{-k'}.pn(z^{-1}).d(z^{-1}).v(t)] + \\ &+ [pn(z^{-1}).c(z^{-1}).e(t) / \Delta_{\sigma}] \end{aligned} \quad (IV-21)$$

En posant :

$$\Psi(t) = \frac{pn(z^{-1})}{pd(z^{-1})}.y(t) \quad (IV-22)$$

L'équation (IV-21) s'écrit :

$$\begin{aligned} a(z^{-1}).\Delta_{\sigma}pd(z^{-1}).\Psi(t) &= [z^{-k+1}.pn(z^{-1}).b(z^{-1}).\Delta_{\sigma}.u(t-1)] + \\ &+ [z^{-k'}.pn(z^{-1}).d(z^{-1}).\Delta_{\sigma}.v(t)] + \\ &+ [pn(z^{-1}).c(z^{-1}).e(t)] \end{aligned} \quad (IV-23)$$

D'où on déduit la forme des matrices qui interviennent dans les calculs du signal de contrôle :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\tilde{a}_1 & 1 & 0 & - & - & - & - & 0 \\ -\tilde{a}_2 & 0 & 1 & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & 1 & - & - & - & - \\ - & 0 & - & - & 1 & - & - & - \\ -\tilde{a}_{n-1} & 0 & - & - & - & 1 & - & - \\ 0 & - & - & - & - & - & 1 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & 1 \\ 0 & - & - & - & - & - & - & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-34})$$

$$\tilde{B}^T = [0 \quad - \quad 0 \quad \tilde{b}_0 \quad \tilde{b}_1 \quad - \quad - \quad \tilde{b}_{n-1}] \quad (\text{IV-35})$$

$$\tilde{C}^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 0] \quad (\text{IV-36})$$

$$\tilde{E}^T = [\tilde{c}_1 \quad \tilde{a}_1 \quad \tilde{c}_2 \quad \tilde{a}_2 \quad \quad \tilde{c}_{n-1} \quad \tilde{a}_{n-1} \quad 0 \quad - \quad 0] \quad (\text{IV-37})$$

$$\tilde{f}^T = [1 \quad \tilde{f}_1 \quad \tilde{f}_2 \quad - \quad \tilde{f}_n \quad 0 \quad - \quad 0] \quad (\text{IV-38})$$

$$\tilde{D}^T = [\tilde{d}_0 \quad \tilde{d}_1 \quad - \quad - \quad \tilde{d}_n \quad 0 \quad - \quad 0] \quad (\text{IV-39})$$

IV-4-1-1 Etat du système observable

Le signal de commande est donnée par la relation suivante

$$\Delta_{op} u(t) = -K_{rc} \tilde{X}(t) \quad (\text{IV-40})$$

IV-4-1-2 Etat du système non observable

Dans ce cas on estime l'état du système à partir d'un modèle des innovations [9] et le signal de commande est :

$$\Delta_{op} u(t) = -K_{rc} \hat{\tilde{X}}(t/t) \quad (\text{IV-41})$$

IV-4-2 Paramètres du modèle inconnus ou variables

Le calcul du contrôleur self tuning est mené de la même manière que précédemment en remplaçant les vrais paramètres du modèle par leurs estimés, obtenus par moindres carrés récurrents.

L'algorithme de calcul du contrôleur self tuning comprend les mêmes étapes que celui du régulateur self tuning.

CHAPITRE V

COMMANDE PREDICTIVE GENERALISEE

V-1 - INTRODUCTION

Le concept de commande prédictive a été introduit [11] vers la fin des années 70 simultanément par RICHALET et CUTLER-RAMAKER.

Les contrôleurs obtenus sont basés sur la prédiction du comportement futur du processus à contrôler. Parmi les méthodes utilisant ce concept, la méthode G-M-V vue au chapitre II qui est une commande prédictive à un pas.

Les contrôleurs issus des méthodes présentées aux chapitres précédents présentent certains inconvénients à savoir essentiellement :

- Le contrôleur issu de la méthode du placement des pôles peut donner lieu à des commandes excessives surtout quand le processus est surparamétrisé.
- Le contrôleur G-M-V ne donne pas des résultats satisfaisants avec certains systèmes instables, à phase non minimale et particulièrement ceux dont le temps de retard est mal connu.
- Le contrôleur I-Q-G s'adapte mal à la commande des systèmes surparamétrisés

Devant le fait qu'aucune de ces méthodes ne se prête à la généralisation de la commande stable de la majorité des processus réels, plusieurs scientifiques introduisirent pour la première fois en 1986, un régulateur basé sur la prédiction du comportement futur du processus à contrôler : le régulateur à commande prédictive (G-P -C)

La commande générée par ce type de régulateur se calcule en minimisant un critère qui fait intervenir :

- un certain nombre de sorties futures : $y(t+d)$, -----, $y(t+d+Ny)$

- un certain nombre de commandes futures associées aux sorties futures : $u(t), \dots, u(t+Nu)$

- des coefficients de pondération sur chacune des commandes .

En 1987 , Clarke et Mohtadi [11] proposèrent une méthode de commande prédictive sur tout un horizon mobile basée sur la minimisation du critère suivant :

$$J = E_{\sigma} \left[\sum_{j=N1}^{N2} [y(t+j) - r(t+j)]^2 + \lambda \cdot \sum_{j=1}^{Nu} (\Delta u(t+j))^2 \right] \quad (V-1)$$

où $N1$ est appelé horizon minimal de sortie

$N2$: horizon maximal de sortie

Nu : horizon de commande

et $\Delta u(t+j) = 0$ pour $j = Nu, \dots, N2$

V-2 Modèle de base de la prédiction

V-2-1 Le modèle du système

Considérons le système linéaire discret décrit par l'équation suivante :

$$a(z^{-1}) \cdot y(t) = b(z^{-1}) \cdot u(t-1) + x(t) \quad (V-2)$$

où $x(t)$ est une perturbation considérée généralement comme un bruit à à moyenne mobile de la forme :

$$x(t) = c(z^{-1}) \cdot e(t) \quad (V-3)$$

avec $c(z^{-1})$ est un polynôme monique en (z^{-1}) de degré nc , $e(t)$ est une séquence de bruit non corrélée ,à moyenne nulle.

En remplaçant $x(t)$ par son expression dans l'équation (VI-2-1) on aura l'expression du modèle carma représenté par l'équation suivante :

$$a(z^{-1}) \cdot y(t) = b(z^{-1}) \cdot u(t-1) + c(z^{-1}) \cdot e(t) \quad (V-4)$$

Bien que servant de modèle de base dans la théorie des self-tuners , celui-ci semble inapproprié pour beaucoup d'applications industrielles ,dans lesquelles les perturbations sont non stationnaires .

En pratique deux types de perturbations sont rencontrées :

- les perturbations non aléatoires ayant lieu à des temps aléatoires
- les mouvements browniens (qu'on rencontre dans les systèmes basées sur l'équilibre d'énergie)

Dans ces deux cas , le modèle de perturbation approprié est [11]:

$$x(t) = (c(z^{-1})/\Delta_{op}).e(t) \quad (V-5)$$

En remplaçant $x(t)$ par sa nouvelle expression dans l'équation (V-2) ,on obtient le modèle carima représenté par l'équation suivante :

$$a(z^{-1}).y(t) = b(z^{-1}).u(t-1) + (c(z^{-1})/\Delta_{op}).e(t) \quad (V-6)$$

En général $c(z^{-1})$ est choisi égal à 1 .

V-2-2 Prédiction de la sortie future

La méthode G-P-C doit nous permettre de connaître avec j pas à l'avance la valeur de la sortie future $y(t+j)$ du système .

Pour obtenir l'expression de cette sortie, considérons l'identité suivante :

$$e_j(z^{-1}).a(z^{-1}).\Delta_{op} + z^{-j}.f_j(z^{-1}) = 1 \quad (V-7)$$

où $e_j(z^{-1})$ et $f_j(z^{-1})$ sont des polynômes de degrés respectifs $(j-1)$ et na , définis, uniquement par la connaissance de $a(z^{-1})$ et j .

En multipliant l'équation (V-6) par $e_j(z^{-1}).\Delta_{op}.z^j$ on obtient :

$$e_j(z^{-1}).a(z^{-1}).\Delta_{op}y(t+j) = e_j(z^{-1}).b(z^{-1}).\Delta_{op}u(t+j-1) + e_j(z^{-1}).e(t) \quad (V-8)$$

En remplaçant $e_j(z^{-1}).a(z^{-1}).\Delta_{op}$ par sa valeur tirée de (V-7) dans l'équation (V-8) on aura l'expression de la sortie future :

$$y(t+j) = e_j(z^{-1}).b(z^{-1}).\Delta_{op}u(t+j-1) - f_j(z^{-1}).y(t) + e_j(z^{-1}).e(t+j) \quad (V-9)$$

Les composantes du bruit sont toutes dans le futur si bien que l'équation du prédicteur s'écrit :

$$\hat{y}(t + j/t) = g_j(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} u(t + j - 1) + f_j(z^{-1}) \cdot y(t) \quad (V-10)$$

où

$$g_j(z^{-1}) = e_j(z^{-1}) \cdot b(z^{-1}) \quad (V-11)$$

j variant d'une valeur minimale à une valeur maximale appelées respectivement horizon minimal et horizon maximal de prédiction.

V-2-3 Résolution de l'équation diophantine

Pour déterminer la prédiction $\hat{y}(t + j/t)$ donnée par l'expression (V-10), on doit déterminer les polynômes $g_j(z^{-1})$ et $f_j(z^{-1})$.

Pour cela on considère la relation (V-7) à deux instants successifs

$$e_j(z^{-1}) \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} + z^{-j} \cdot f_j(z^{-1}) = 1 \quad (V-12)$$

$$e_{j+1}(z^{-1}) \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} + z^{-j-1} \cdot f_{j+1}(z^{-1}) = 1 \quad (V-13)$$

en soustrayant ces deux égalités membre à membre on aura :

$$(e_{j+1}(z^{-1}) - e_j(z^{-1})) \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} + z^{-j} \cdot (z^{-1} \cdot f_{j+1}(z^{-1}) - f_j(z^{-1})) = 0 \quad (V-14)$$

Le polynôme $e_{j+1}(z^{-1}) - e_j(z^{-1})$ est de degré j et peut se mettre sous la forme :

$$e_{j+1}(z^{-1}) - e_j(z^{-1}) = r(z^{-1}) + r_j \cdot z^{-j} \quad (V-15)$$

où $r(z^{-1})$ est un polynôme de degré $(j-1)$ et r_j le coefficient du dernier élément de $e_{j+1}(z^{-1})$.

En remplaçant l'expression de $e_{j+1}(z^{-1}) - e_j(z^{-1})$ dans l'équation (V-14) et en mettant (z^{-j}) en facteur on aura :

$$a(z^{-1}) \cdot r(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} + z^{-j} \cdot [z^{-1} \cdot f_{j+1}(z^{-1}) - f_j(z^{-1}) + r_j \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op}] = 0 \quad (V-16)$$

Cette dernière relation doit être vérifiée quelque soit j, pour cela il faut que :

$$a(z^{-1}) \cdot r(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} = 0 \quad (V-17)$$

$$z^{-1} \cdot f_{j+1}(z^{-1}) - f_j(z^{-1}) - r_j \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} \quad (V-18)$$

De la 1^{ère} égalité on déduit $r(z^{-1}) = 0$ et en remplaçant cette valeur dans l'expression (V-15) on aura :

$$e_{j+1}(z^{-1}) = e_j(z^{-1}) + r_j \cdot z^{-1} \quad (V-19)$$

$$f_{j+1}(z^{-1}) = z \cdot (f_j(z^{-1}) - r_j \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op}) \quad (V-20)$$

Le développement de l'équation (V-20) donne :

$$f_{j+1,0} + f_{j+1,1} \cdot z^{-1} + \dots + f_{j+1,m} \cdot z^{-m} = z(f_{j,0} + f_{j,1} \cdot z^{-1} + \dots + f_{j,m} \cdot z^{-m}) - z \cdot (r_j + r_j \cdot \tilde{a}_1 \cdot z^{-1} + \dots + r_j \cdot \tilde{a}_m \cdot z^{-m}) \quad (V-21)$$

Par identification entre les différentes puissances de z on aura l'ensemble des relations suivantes :

$$\begin{aligned} r_j &= f_{j,0} \\ f_{j+1,0} &= f_{j,1} - r_j \cdot \tilde{a}_1 \\ &\dots \\ f_{j+1,1} &= f_{j,2} - r_j \cdot \tilde{a}_{1,1} \end{aligned} \quad (V-22)$$

donc on peut calculer d'une manière récurrente à tout instant $e_{j+1}(z^{-1})$ et $f_{j+1}(z^{-1})$

Pour initialiser les calculs on considère l'équation (V-7) à j = 1 qui s'écrit :

$$e_1(z^{-1}) \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} + z^{-1} \cdot f_1(z^{-1}) = 1 \quad (V-23)$$

Par identification on aura :

$$e_1(z^{-1}) = 1 \quad \text{et} \quad f_1(z^{-1}) = z \cdot (1 - a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op}) \quad (V-24)$$

V-3 - LOI DE COMMANDE PREDICTIVE

Cette dernière relation doit être vérifiée quelque soit j, pour cela il faut que :

$$a(z^{-1}) \cdot r(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} = 0 \quad (V-17)$$

$$z^{-1} \cdot f_{j+1}(z^{-1}) - f_j(z^{-1}) - r_j \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} \quad (V-18)$$

De la 1^{ère} égalité on déduit $r(z^{-1}) = 0$ et en remplaçant cette valeur dans l'expression (V-15) on aura :

$$e_{j+1}(z^{-1}) = e_j(z^{-1}) + r_j \cdot z^{-j} \quad (V-19)$$

$$f_{j+1}(z^{-1}) = z \cdot (f_j(z^{-1}) - r_j \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op}) \quad (V-20)$$

Le développement de l'équation (V-20) donne :

$$f_{j+1,0} + f_{j+1,1} \cdot z^{-1} + \dots + f_{j+1,m} \cdot z^{-m} = z(f_{j,0} + f_{j,1} \cdot z^{-1} + \dots + f_{j,m} \cdot z^{-m}) - z \cdot (r_j + r_j \cdot \tilde{a}_1 \cdot z^{-1} + \dots + r_j \cdot \tilde{a}_m \cdot z^{-m}) \quad (V-21)$$

Par identification entre les différentes puissances de z on aura l'ensemble des relations suivantes :

$$\begin{aligned} r_j &= f_{j,0} \\ f_{j+1,0} &= f_{j,1} - r_j \cdot \tilde{a}_1 \\ &\dots \\ f_{j+1,1} &= f_{j,2} - r_j \cdot \tilde{a}_{1,1} \end{aligned} \quad (V-22)$$

donc on peut calculer d'une manière récurrente à tout instant $e_{j+1}(z^{-1})$ et $f_{j+1}(z^{-1})$

Pour initialiser les calculs on considère l'équation (V-7) à $j = 1$ qui s'écrit :

$$e_1(z^{-1}) \cdot a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} + z^{-1} \cdot f_1(z^{-1}) = 1 \quad (V-23)$$

Par identification on aura :

$$e_1(z^{-1}) = 1 \quad \text{et} \quad f_1(z^{-1}) = z \cdot (1 - a(z^{-1}) \cdot \Delta_{op}) \quad (V-24)$$

V-3 - LOI DE COMMANDE PREDICTIVE

V-3-1 Introduction

L'objectif de la loi de commande est de mener les sorties futures $y(t+j)$ aussi proches que possible de la séquence de référence $w(t+j)$ en utilisant une approche à horizon mobile.

La commande $u(t)$ à appliquer au système à l'instant t est calculée en minimisant le critère J donné par la relation (V-1).

On remarque que ce critère de performance est composé de deux parties :

L'une, le premier terme du membre de droite est l'accumulation sur l'horizon de prédiction des carrés des erreurs entre les consignes futures et les valeurs correspondantes (prédites) de la sortie du système.

L'autre, représente la somme des carrés des valeurs successives de l'incrément de commande $\Delta_{op} u(t)$ sur l'horizon de commande, pondérée par un facteur λ .

V-3-2-Calcul de la loi de commande

Pour déterminer la loi de commande, considérons les différentes sorties futures données par l'équation (V-10) on aura :

$$\hat{y}(t+1) = g_1(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} u(t) + f_1(z^{-1}) \cdot y(t)$$

$$\hat{y}(t+2) = g_2(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} u(t+1) + f_2(z^{-1}) \cdot y(t) \quad (V-25)$$

$$\hat{y}(t+j) = g_j(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} u(t+j-1) + f_j(z^{-1}) \cdot y(t)$$

Introduisons la fonction $F_{i,j}(z^{-1})$ qui regroupe les composantes de $y(t+j)$ connues jusqu'à l'instant t on aura pour :

$$j=1 \quad F(t+1) = [G_1(z^{-1}) - g_{10}] \cdot \Delta_{op} u(t) + f_1(z^{-1}) \cdot y(t)$$

$$j=2 \quad F(t+2) = [g_1(z^{-1}) - g_{10}] \cdot \Delta_{op} u(t) + f_1(z^{-1}) \cdot y(t)$$

$$\dots = \dots \quad (V-26)$$

$$j=N \quad F(t+N) = z^{N-1} \cdot [g_N(z^{-1}) - g_{N0} - \dots - g_{N,N-1} \cdot z^{-N+1}] \cdot \Delta_{op} u(t) + f_N(z^{-1}) y(t)$$

Où :

$$g_i(z^{-1}) = g_{i0} + g_{i1} \cdot z^{-1} + g_{i2} \cdot z^{-2} + \dots \quad (V-27)$$

En tenant compte de ces dernières relations la sortie prédite $\hat{y}(t+j/t)$ s'écrit :

$$\hat{y}(t+j) = g_j(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} u(t) + F(t+j) \quad (V-28)$$

En posant : $\hat{u}(t) = \Delta_{op} u(t)$ (V-29)

on aura la relation matricielle suivante :

$$\hat{y} = G \cdot \hat{u} + F \quad (V-30)$$

où

$$\hat{y} = [\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \dots, \hat{y}(t+N)] \quad (V-31)$$

$$\hat{u} = [\Delta_{op} u(t), \Delta_{op} u(t+1), \dots, \Delta_{op} u(t+N-1)] \quad (V-32)$$

$$F = [F(t+1), F(t+2), \dots, F(t+N-1)] \quad (V-33)$$

Sachant que $g_j(z^{-1}) = e_j(z^{-1}) \cdot b(z^{-1})$, on aura l'expression de la matrice G :

$$G = \begin{bmatrix} g_{10} & 0 & - & - & - & - & 0 \\ g_{21} & g_{20} & 0 & - & - & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - & g_{N-1,0} & 0 \\ g_{N,N-1} & - & - & - & - & - & - & g_{N,0} \end{bmatrix} \quad (V-34)$$

$$g_j = g_j$$

La matrice G sera alors de la forme :

En tenant compte de ces dernières relations la sortie prédite $\hat{y}(t+j/t)$ s'écrit :

$$\hat{y}(t+j) = g_j(z^{-1}) \cdot \Delta_{op} u(t) + F(t+j) \quad (V-28)$$

En posant : $\hat{u}(t) = \Delta_{op} u(t)$ (V-29)

on aura la relation matricielle suivante :

$$\hat{y} = G \cdot \hat{u} + F \quad (V-30)$$

où

$$\hat{y} = [\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \dots, \hat{y}(t+N)] \quad (V-31)$$

$$\hat{u} = [\Delta_{op} u(t), \Delta_{op} u(t+1), \dots, \Delta_{op} u(t+N-1)] \quad (V-32)$$

$$F = [F(t+1), F(t+2), \dots, F(t+N-1)] \quad (V-33)$$

Sachant que $g_j(z^{-1}) = e_j(z^{-1}) \cdot b(z^{-1})$, on aura l'expression de la matrice G :

$$G = \begin{bmatrix} g_{10} & 0 & - & - & - & - & - & 0 \\ g_{21} & g_{20} & 0 & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & g_{N-1,0} & 0 \\ g_{N,N-1} & - & - & - & - & - & - & - & g_{N,0} \end{bmatrix} \quad (V-34)$$

$$g_{ij} = g_j$$

La matrice G sera alors de la forme :

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & - & - & - & - & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - & g_0 \\ g_{N-1} & - & - & - & - & - & g_0 \end{bmatrix} \quad (V-35)$$

Pour déterminer la commande, on doit minimiser le critère J de la relation (V-1) qui s'écrit en tenant compte de la relation matricielle (V-29):

$$J = E_{\infty} [(\hat{y} - w)^T \cdot (\hat{y} - w) + \lambda \cdot \hat{u}^T \cdot \hat{u}] \quad (V-36)$$

où

$$w = [w(t+1), w(t+2), \dots, w(t+N-1)] \quad (V-37)$$

est le vecteur des références futures que nous supposons connus à l'instant t .

En remplaçant \hat{y} par sa valeur (V-30), l'expression du critère à minimiser devient :

$$J_1 = E_{\infty} [(G \cdot \hat{u} + F \cdot w)^T \cdot (G \cdot \hat{u} + F \cdot w) + \lambda \cdot \hat{u}^T \cdot \hat{u}] \quad (V-38)$$

Et la loi de commande tel que $\frac{dJ_1}{d\hat{u}} = 0$ est donnée par la relation suivante :

$$\hat{u} = (G^T \cdot G + \lambda \cdot I)^{-1} \cdot G^T (F \cdot w) \quad (V-39)$$

V-4-CHOIX DES DIFFERENTS PARAMETRES

V-4-1 Horizon minimal de sortie N_1

Si le retard k du système est connu avec certitude il est inutile de fixer N_1 plus petit que celui-ci, car il y aurait des calculs supplémentaires où les sorties correspondantes ne seront plus affectées par l'action de la commande $u(t)$

V-4-2 Horizon maximal de sortie N_2

En général N_2 est choisi de telle sorte qu'il corresponde au temps de montée du système. Pour un système à phase non minimale N_2 doit être supérieur au degré du polynôme $b(z^{-1})$.

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & - & - & - & - & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 & - & - & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - & g_0 & 0 \\ g_{N-1} & - & - & - & - & - & - & g_0 \end{bmatrix} \quad (V-35)$$

Pour déterminer la commande, on doit minimiser le critère J de la relation (V-1) qui s'écrit en tenant compte de la relation matricielle (V-29):

$$J = E_{\infty} [(\hat{y} - w)^T \cdot (\hat{y} - w) + \lambda \cdot \hat{u}^T \cdot \hat{u}] \quad (V-36)$$

où

$$w = [w(t+1), w(t+2), \dots, w(t+N-1)] \quad (V-37)$$

est le vecteur des références futures que nous supposons connus à l'instant t .

En remplaçant \hat{y} par sa valeur (V-30), l'expression du critère à minimiser devient :

$$J_1 = E_{\infty} [(G \cdot \hat{u} + F \cdot w)^T \cdot (G \cdot \hat{u} + F \cdot w) + \lambda \cdot \hat{u}^T \cdot \hat{u}] \quad (V-38)$$

Et la loi de commande tel que $\frac{dJ_1}{d\hat{u}} = 0$ est donnée par la relation suivante :

$$\hat{u} = (G^T \cdot G + \lambda \cdot I)^{-1} \cdot G^T (F \cdot w) \quad (V-39)$$

V-4-CHOIX DES DIFFERENTS PARAMETRES

V-4-1 Horizon minimal de sortie $N1$

Si le retard k du système est connu avec certitude il est inutile de fixer $N1$ plus petit que celui-ci, car il y aurait des calculs supplémentaires où les sorties correspondantes ne seront plus affectées par l'action de la commande $u(t)$

V-4-2 Horizon maximal de sortie $N2$

En général $N2$ est choisi de telle sorte qu'il corresponde au temps de montée du système. Pour un système à phase non minimale $N2$ doit être supérieur au degré du polynôme $b(z^{-1})$.

V-4-3-Horizon de commande N_u

Pour un système stable en boucle ouverte avec retard et phase non minimale N_u est pris égal à 1, ceci donne généralement une commande satisfaisante .

Lorsque N_u augmente , la commande et la sortie deviennent plus actives jusqu' au moment où toute augmentation de N_u ne produise aucun effet .

Pour les systèmes complexes , une bonne commande est réalisée lorsque N_u est au moins égal au nombre de pôles instables ou mal amortis .

V-5 - ALGORITHME DE G-P-C EN SELF TUNING

Pour l' utilisation de la méthode G-P-C en self tuning , on remplace les paramètres du modèle par leurs estimés , obtenus par la méthode des moindres carrés récurrents .

L' algorithme de G-P-C est donc le suivant :

étape 1 : Spécification du modèle et initialisation des différents paramètres de l' estimateur

étape 2 : Estimation des paramètres

étape 3 : Calcul de la loi de commande $u(t)$

étape 4 : Génération de la commande et calcul de la sortie prédite

étape 5 : Mise à jour des différents paramètres de l' estimateur

étape 6 : retour à l' étape 1 jusqu' à épuisement du nombre d' itération spécifié.

V-4-3-Horizon de commande N_u

Pour un système stable en boucle ouverte avec retard et phase non minimale N_u est pris égal à 1, ceci donne généralement une commande satisfaisante .

Lorsque N_u augmente , la commande et la sortie deviennent plus actives jusqu' au moment où toute augmentation de N_u ne produise aucun effet .

Pour les systèmes complexes , une bonne commande est réalisée lorsque N_u est au moins égal au nombre de pôles instables ou mal amortis .

V-5 - ALGORITHME DE G-P-C EN SELF TUNING

Pour l' utilisation de la méthode G-P-C en self tuning , on remplace les paramètres du modèle par leurs estimés , obtenus par la méthode des moindres carrés récurrents .

L' algorithme de G-P-C est donc le suivant :

étape 1 : Spécification du modèle et initialisation des différents paramètres de l' estimateur

étape 2 : Estimation des paramètres

étape 3 : Calcul de la loi de commande $u(t)$

étape 4 : Génération de la commande et calcul de la sortie prédite

étape 5 : Mise à jour des différents paramètres de l' estimateur

étape 6 : retour à l' étape 1 jusqu' à épuisement du nombre d' itération spécifié.

CHAPITRE VI

SIMULATION ET RESULTATS DES TESTS

VI-1 Introduction

Pour mener à bien le travail qu'on s'était fixé au départ à savoir : l'étude, la comparaison et l'application à la commande auto-ajustable des différentes méthodes vues aux chapitres précédents (GMV, placement de pôles, LQG et GPC), on a réalisé une série de test pour différents types de modèles à commander.

Ces tests ont été réalisés grâce à la mise au point d'un logiciel pour chaque méthode. Pour se rapprocher le plus possible de la réalité, la sortie du procédé à commander est obtenue en résolvant directement l'équation différentielle du modèle par la méthode de RUNGE-KUTTA.

Les modèles utilisés pour comparer les performances des différentes méthodes sont:

1- Modèle du 1^{er} ordre :

Il est caractérisé par sa fonction de transfert $Y(p) [1+10p] = U(p)$
où p désigne l'opérateur de LAPLACE

2- Modèle du 1^{er} ordre avec perturbation.

La sortie de ce modèle est la même que celle du modèle précédent à laquelle on a ajouté la perturbation ci-dessous en fonction du nombre d'itérations :

$$120 < t < 125$$

$$y(t) = y(t) + 10$$

$$145 < t < 150$$

$$y(t) = y(t) - 10$$

$$150 < t < 180$$

$$y'(t) = y(t) + 3$$

$$210 < t < 240$$

$$y(t) = y(t) + 8 * (\text{rand} - 0.5)$$

$$270 < t < 275$$

$$y(t) = y(t) + 10$$

$$295 < t < 300$$

$$y(t) = y(t) - 10$$

3- Modèle du 1^{er} ordre avec retard.

Dans ce cas le retard est pris égal à trois (3) périodes d'échantillonnage et sa fonction de transfert est :

$$Y(p) [1+10p] = e^{-3p}.U(p)$$

4- Modèle du 2^{ème} ordre :

Il a pour fonction de transfert $Y(p) [40p^2 + 10p + 1] = U(p)$

5-Modèle instable

Sa fonction de transfert est : $Y(p) [p^2 + p + 1] = U(p)$

6- Modèle à phase non minimale :

Il a pour fonction de transfert : $Y(p) [2 p^2 + p + 1] = (-0.2 p + 1) U(p)$

7- Modèle variable

Il est constitué d'une série de modèles avec ou sans retard dont la représentation graphique en fonction du nombre d'itération. Si T est le nombre d'itération on aura :

$$0 < T < 200 \quad \text{modèle 4}$$

$$200 < T < 400 \quad \text{modèle 4 avec un retard égal à 3}$$

$$400 < T < 600 \quad \text{modèle 3}$$

$$600 < T < 800 \quad \text{modèle 1}$$

$$800 < T < 1000 \quad \text{modèle de fonction de transfert } y(p)[25 p^2 + 10 p] = u(p)$$

VI-II - SIMULATION

VI-II-1 SIGNAL DE REFERENCE

Pour les six premiers modèles chaque test est effectué sur 450 itérations et le signal de référence que doit suivre la sortie du procédé est le suivant :

$$0 < t \leq 150$$

$$y_r = 10$$

$$150 < t \leq 300$$

$$y_r = 30$$

$$300 < t \leq 450$$

$$y_r = 10$$

Pour le modèle variable le test est effectué sur 1000 itérations et le signal de référence pour les 200 premières itérations est le suivant :

$0 < t \leq 30$	$y_r = 0$
$30 < t \leq 60$	$y_r = 10$
$60 < t \leq 130$	$y_r = 50$
$130 < t \leq 190$	$y_r = 10$
$190 < t \leq 200$	$y_r = 0$

A partir de la valeur 200 le signal de référence se répète toutes les 200 itérations et devient :

$200 < t \leq 210$	$y_r = 0$
$210 < t \leq 260$	$y_r = 10$
$260 < t \leq 330$	$y_r = 50$
$330 < t \leq 390$	$y_r = 10$
$390 < t \leq 400$	$y_r = 0$

VI-II-2 RESULTATS DES TESTS

VI-II-2-1 test 1: modèle du 1^{er} ordre

a- Paramètres utilisés

G-M-V :

$$\begin{array}{lll} na = 2 & nb = 2 & nc = 1 \\ pn(z^{-1}) = 1 + 0.3z^{-1} & qn(z^{-1}) = 1 + 0.2z^{-1} & m(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1} \end{array}$$

PLACEMENT DE POLES:

$$na = 2 \qquad nb = 2 \qquad T(z^{-1}) = 1 + 0.7z^{-1}$$

L-Q-G:

$$\begin{array}{lll} na = 2 & nb = 2 & \lambda = 0.5 \\ p(z^{-1}) = 4 - 3z^{-1} & & \end{array}$$

G-P-C:

$$\begin{array}{lll} na = 4 & nb = 3 & Nu = 1 \\ Nj = 4 & \lambda = 0.1 & p(z^{-1}) = 1 - 0.9z^{-1} \end{array}$$

b- Commentaire

En comparant les résultats représentés aux figures VI-1 (G-M-V), VI-2 (placement de pôles), VI-3 (LQG) et VI-4 (GPC), on déduit les remarques suivantes:

- La sortie du modèle suit le signal de référence en présentant quelques oscillations dans le cas du placement de pôles.
- Le signal de commande est plus actif dans le cas du placement de pôles, ceci est dû au fait que la commande n'est pas pondérée. Il présente des pics bien nets dans les cas GMV et LQG à chaque changement de consigne.

c-Conclusion

Toutes les méthodes donnent un résultat satisfaisant avec un avantage certain pour G-P-C

VI-II-2-2 TEST 2 : modèle du 1^{er} ordre avec perturbation

a- Paramètres utilisés

G-M-V :

$$\begin{array}{lll} na = 2 & nb = 2 & nc = 1 \\ pn = 1 + 0.3 z^{-1} & qn = 1 + 0.1 z^{-1} & rn = 1 - 0.15 z^{-1} \end{array}$$

PLACEMENT DE POLES:

$$\begin{array}{lll} na = 3 & nb = 3 & T(z^{-1}) = 1 + 0.5 z^{-1} \end{array}$$

L-Q-G:

$$\begin{array}{lll} na = 3 & nb = 4 & \lambda = 2 \\ p(z^{-1}) = 4 - 3z^{-1} & & \end{array}$$

G-P-C:

$$\begin{array}{lll} na = 4 & nb = 3 & Nu = 1 \\ Nj = 4 & \lambda = 0.1 & p(z^{-1}) = 1 - 0.9 z^{-1} \end{array}$$

b- Commentaire

En comparant les résultats représentés aux figures VI-5 (G-M-V), VI-6 (placement de pôles), VI-7 (LQG) et VI-8 (GPC), on déduit les remarques suivantes:

- Les perturbations sont bien prises en charge par toutes les méthodes et le signal de commande pour les rejeter est plus actif pour les méthodes du placement des pôles et GPC.

c-Conclusion

La commande GMV rejette mieux les perturbations autour d'une valeur stable de la sortie du système. Ceci est dû au fait que GMV se comporte aussi bien que GPC lorsque le système est paramétrisé correctement.

VI-II-2-3 TEST 3 : modèle du 1^{er} ordre avec retard

Durant tout ce test le retard du modèle est fixé à 3

a- Paramètres utilisés

G-M-V :

$$n_a = 2$$

$$p_n = 1 + 0.3z^{-1}$$

$$n_b = 2$$

$$q_n = 1 + 0.2z^{-1}$$

$$n_c = 1$$

$$m = 1 + 0.5z^{-1}$$

PLACEMENT DE POLES:

$$n_a = 3$$

$$n_b = 5$$

$$T(z^{-1}) = 1 + 0.4z^{-1}$$

L-Q-G:

$$n_a = 2$$

$$p(z^{-1}) = 4 - 3z^{-1}$$

$$n_b = 4$$

$$\lambda = 3$$

G-P-C:

$$n_a = 4$$

$$N_j = 4$$

$$n_b = 3$$

$$\lambda = 0.1$$

$$N_u = 1$$

$$p(z^{-1}) = 1 - 0.9z^{-1}$$

b- Commentaire

Les résultats sont représentés aux figures VI-9 (G-M-V), VI-10 (placement de pôles), VI-11 (LQG) et VI-12 (GPC), et on les comparant, on remarque une plus grande activité du signal de commande dans le cas du placement de pôles

c-Conclusion

La commande GPC s'adapte mieux à la commande des systèmes avec retard

VI-II-2-4 TEST 4: modèle du 2^{ème} ordre

a- Paramètres utilisés

G-M-V :

$$n_a = 4$$

$$N_j = 4$$

$$n_b = 3$$

$$\lambda = 0.1$$

$$N_u = 1$$

$$p(z^{-1}) = 1 - 0.9z^{-1}$$

b- Commentaire

En comparant les résultats représentés aux figures VI-17 (G-M-V), VI-18 (placement de pôles), VI-19 (LQG) et VI-20 (GPC), on remarque que toutes les méthodes donnent un résultat satisfaisant malgré quelques oscillations sur le signal de sortie dans les cas GMV, placement de pôles et LQG.

c-Conclusion

La commande GPC présente un signal de commande moins important que les autres méthodes.

VI-II-2-6 TEST 6 : modèle à phase non minimale

a- Paramètres utilisés

G-M-V :

$$n_a = 2$$

$$p_n = 1 + 0.46z^{-1}$$

$$n_b = 2$$

$$q_n = 1 - 0.2z^{-1}$$

$$n_c = 1$$

$$m = 1 + 0.8z^{-1}$$

PLACEMENT DE POLES:

$$n_a = 3$$

$$n_b = 3$$

$$T(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1}$$

L-Q-G:

$$n_a = 2$$

$$p(z^{-1}) = 4 - 3z^{-1}$$

$$n_b = 3$$

$$\lambda = 10$$

G-P-C:

$$n_a = 5$$

$$N_j = 4$$

$$n_b = 4$$

$$\lambda = 0.1$$

$$N_u = 1$$

$$p(z^{-1}) = 1 - 0.95z^{-1}$$

b- Commentaire

D'après les résultats représentés aux figures VI-21 (G-M-V), VI-22 (placement de pôles), VI-23 (LQG) et VI-24 (GPC), on remarque que toutes les méthodes donnent un bon résultat.

c-Conclusion

Les méthodes LQG et GPC présentent un léger avantage concernant le signal de commande.

VI-II-2-7 TEST 7 : modèle variable

a- Paramètres utilisés

G-M-V :

$$n_a = 2$$

$$p_n = 1 + 0.3z^{-1}$$

$$n_b = 2$$

$$q_n = 1 + 0.2z^{-1}$$

$$n_c = 1$$

$$m = 1 + 0.5z^{-1}$$

PLACEMENT DE POLES:

$$n_a = 4$$

$$n_b = 6$$

$$T(z^{-1}) = 1 + 0.2z^{-1}$$

L-Q-G:

$$n_a = 4$$

$$p(z^{-1}) = 2 - z^{-1}$$

$$n_b = 4$$

$$\lambda = 100$$

G-P-C:

$$n_a = 4$$

$$N_j = 10$$

$$n_b = 4$$

$$\lambda = 0.01$$

$$N_u = 1$$

$$p(z^{-1}) = 1$$

b- Commentaire

En comparant les résultats représentés aux figures VI-25 (G-M-V), VI-26 (placement de pôles), VI-27 (LQG) et VI-28 (GPC), on remarque que les méthodes GMV, placement de pôles et LQG n'arrivent à commander le système que partiellement suivant la paramétrisation utilisée pendant le test.

c-Conclusion

Seul la méthode GPC donne un résultat satisfaisant et permet de surmonter les problèmes liés au retard et à la paramétrisation du système.

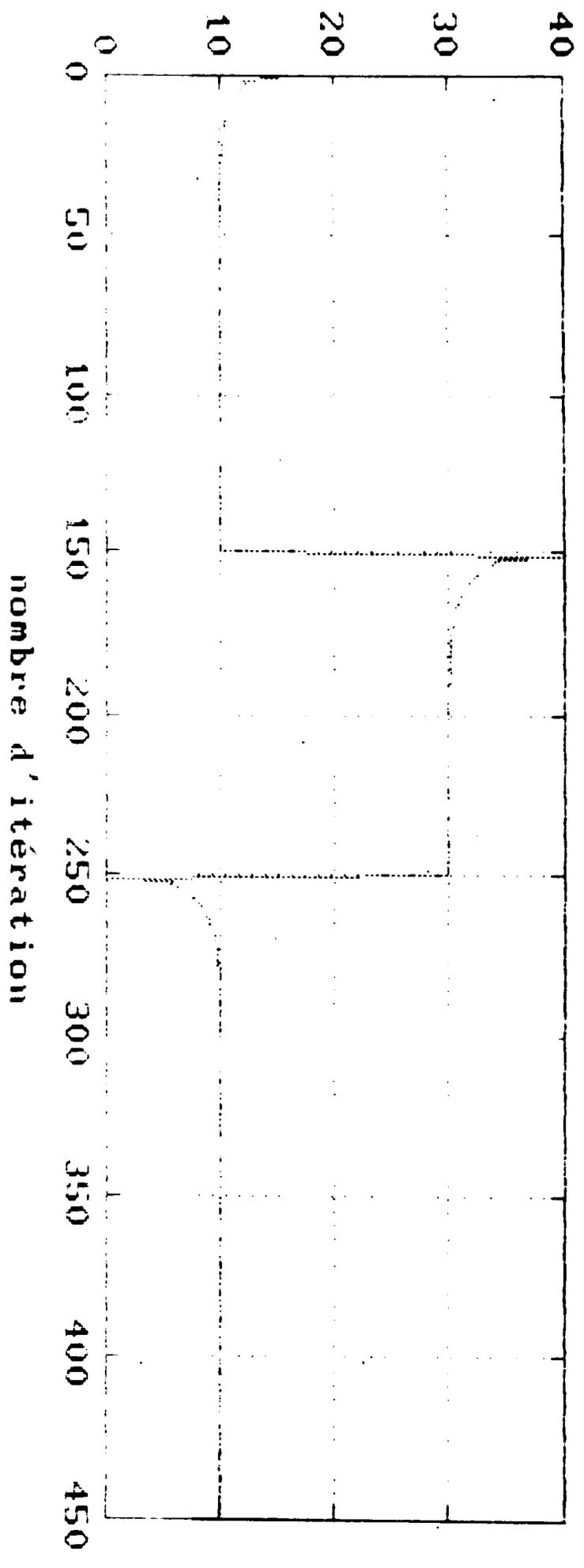
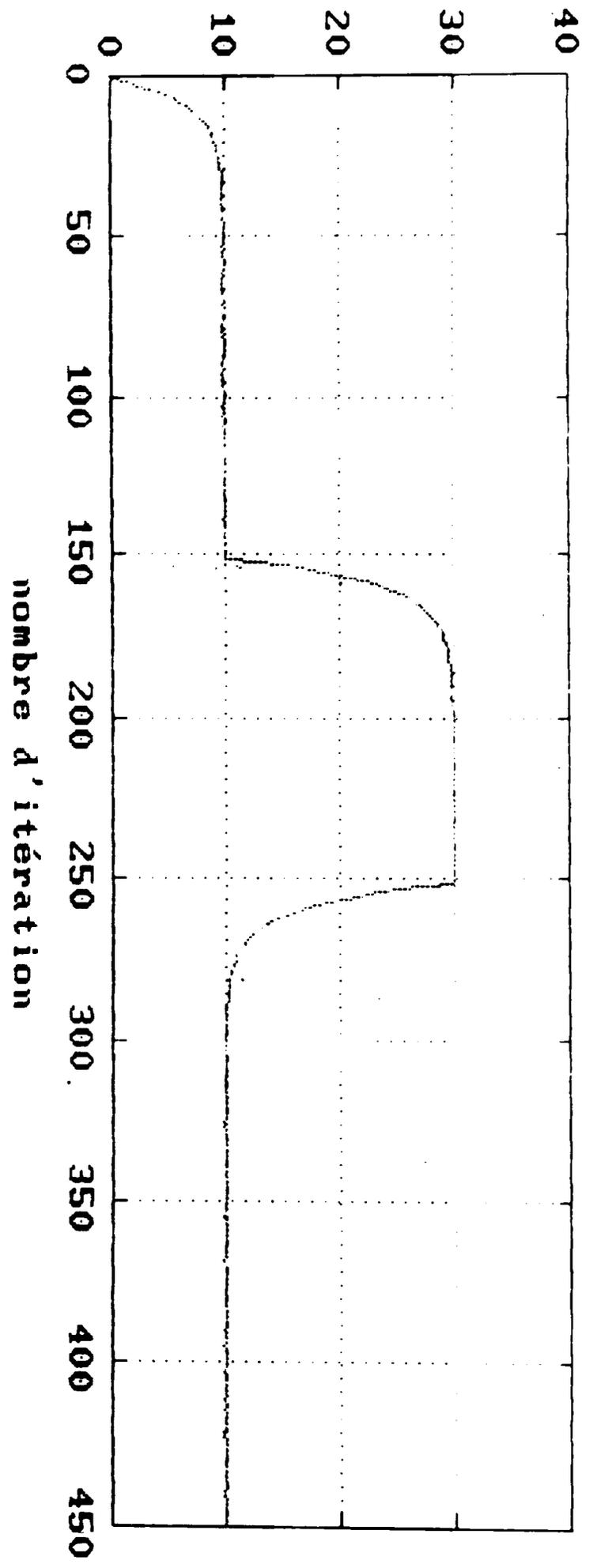


Fig VI - 1 TEST 1 GMV

commande du systeme

sortie du systeme

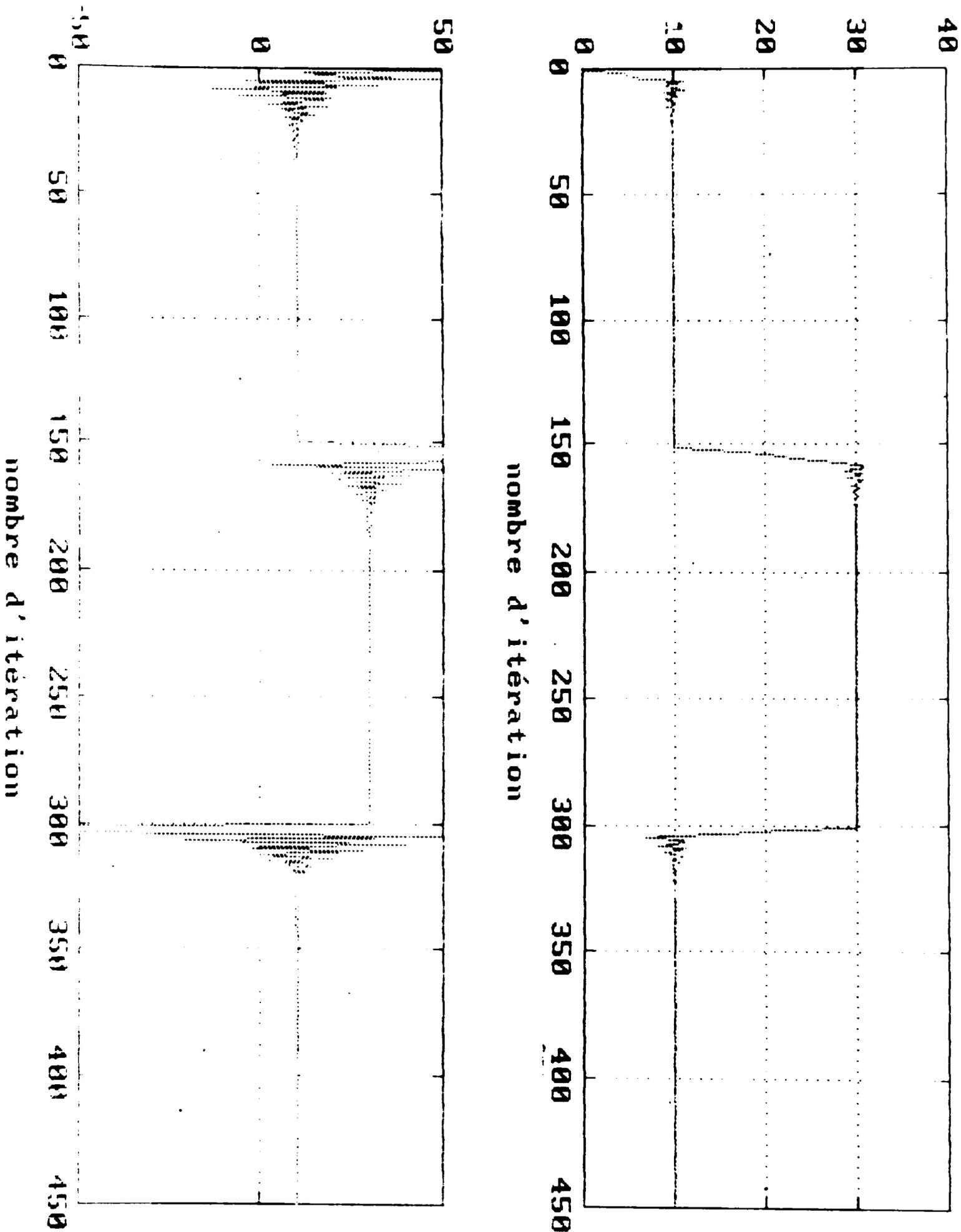


Fig VI-2 TEST 1 Placement de pôles

commande du système

sortie du système

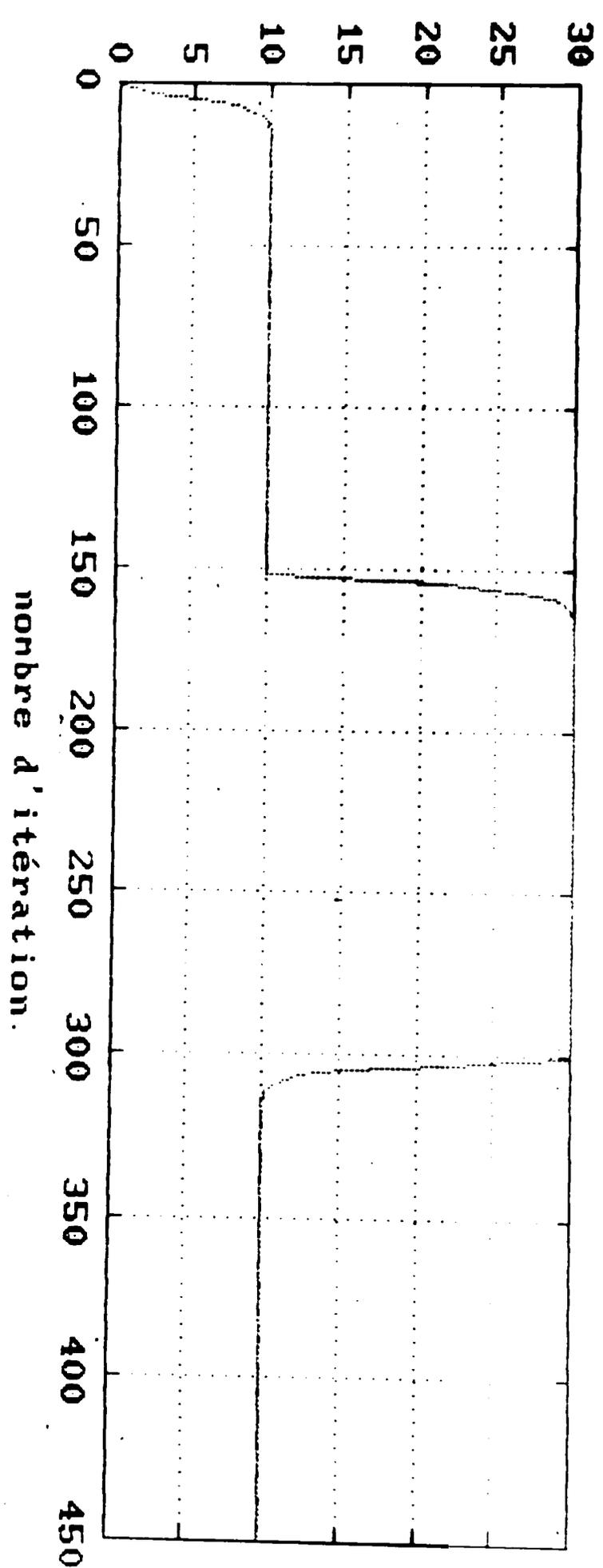
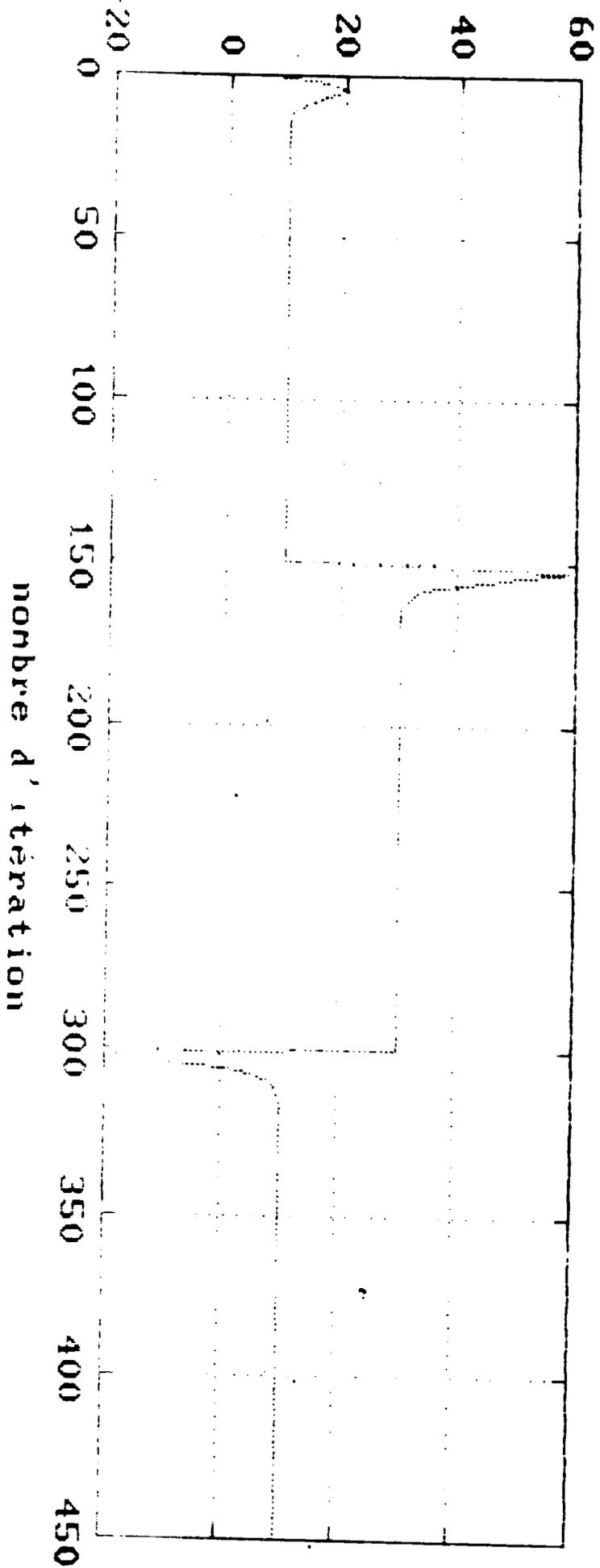
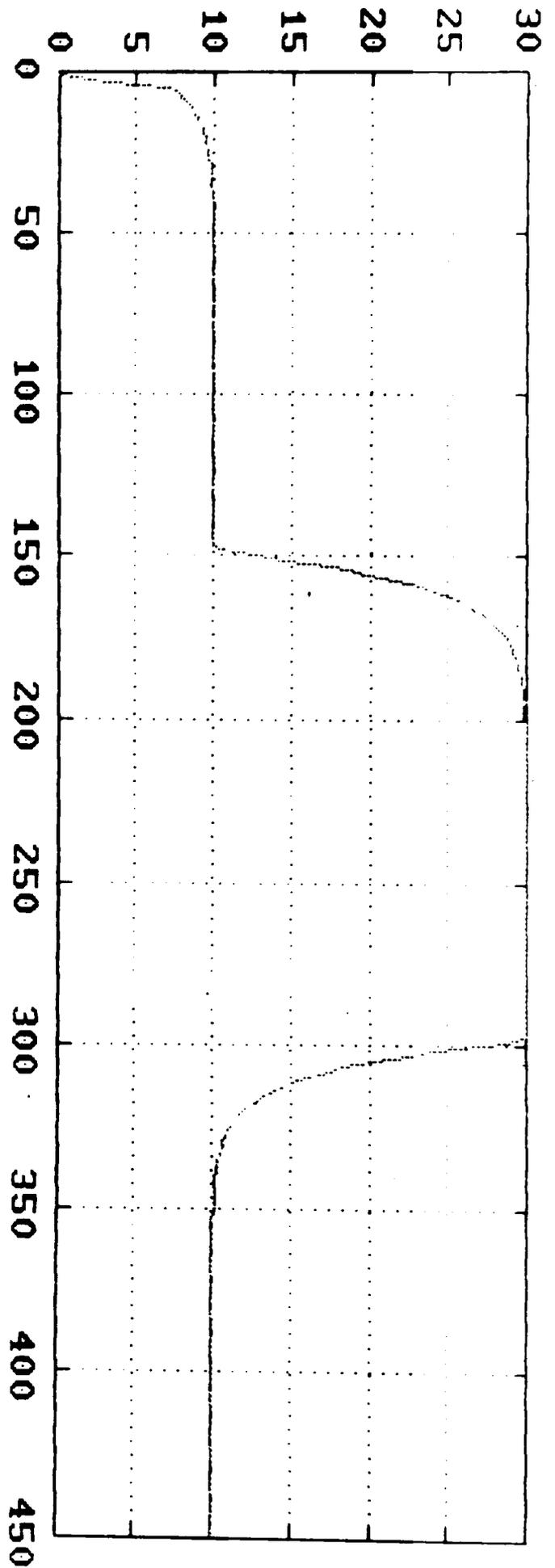


Fig VI-3 - TEST 1 L 99

sortie du système



commande du système

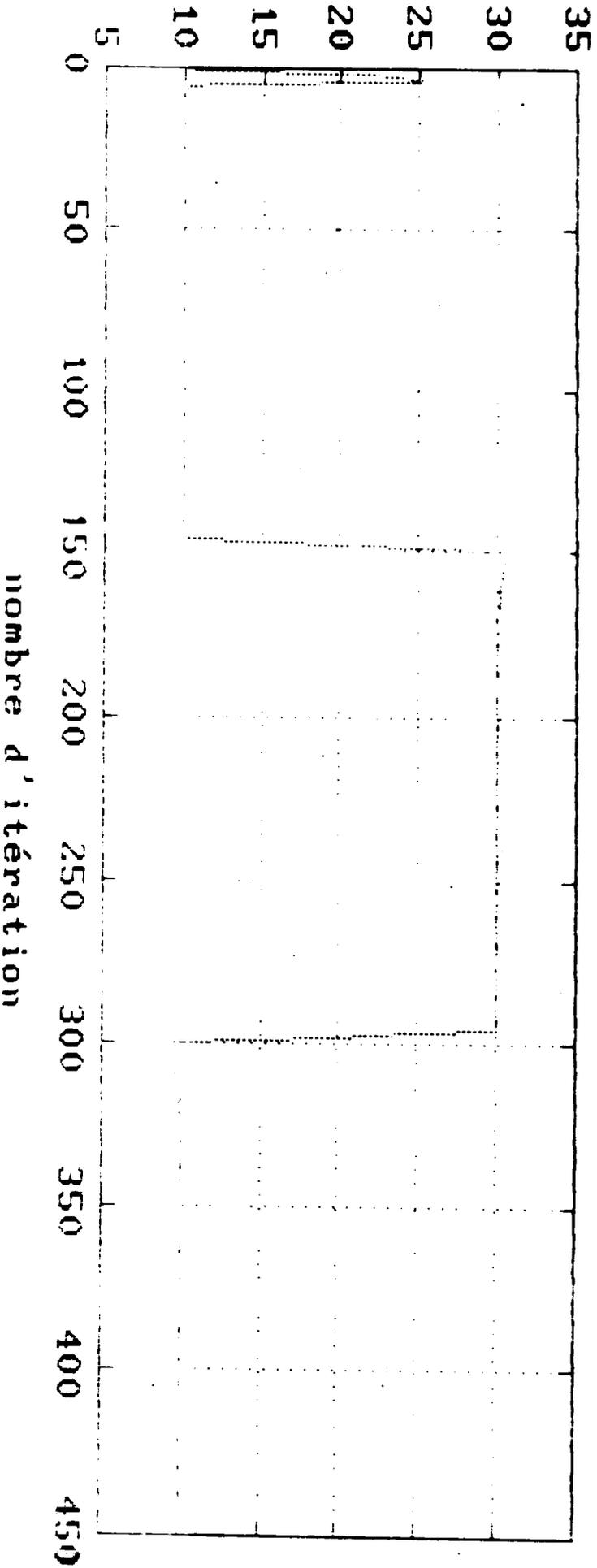


Fig VII-4

TEST 1

GPC

commande du système

sortie du système

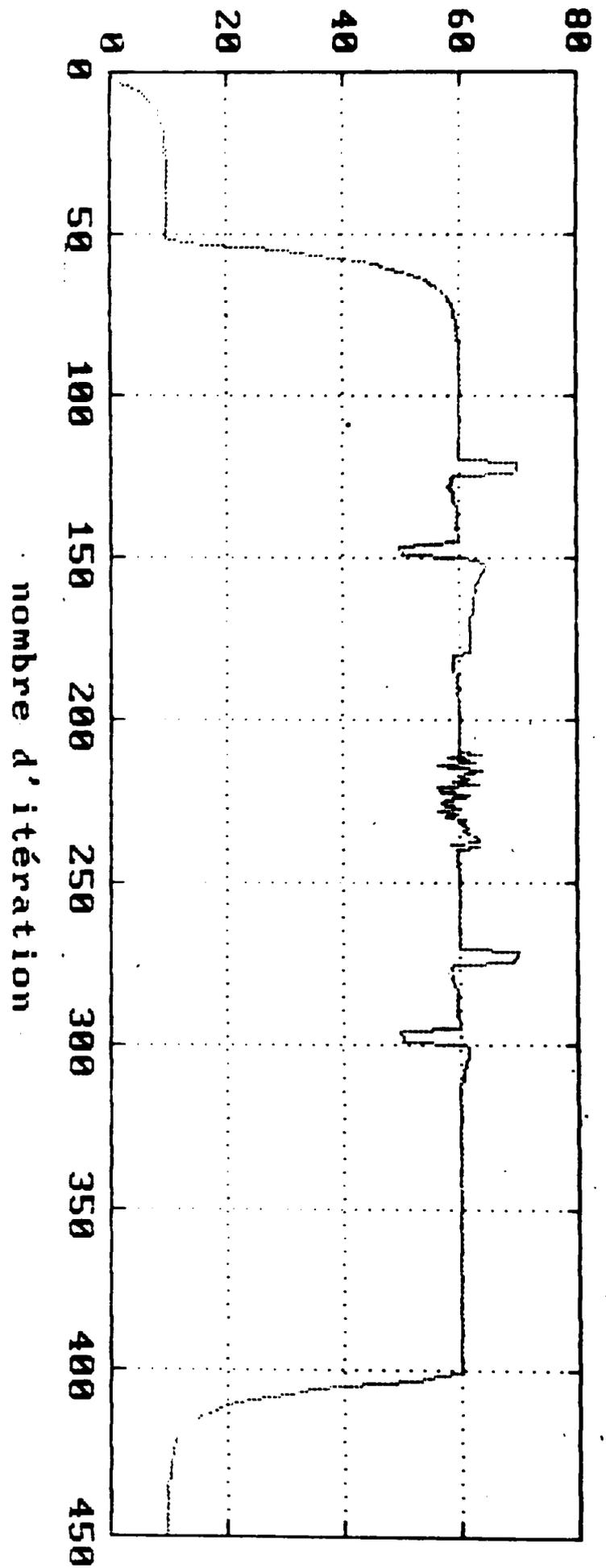
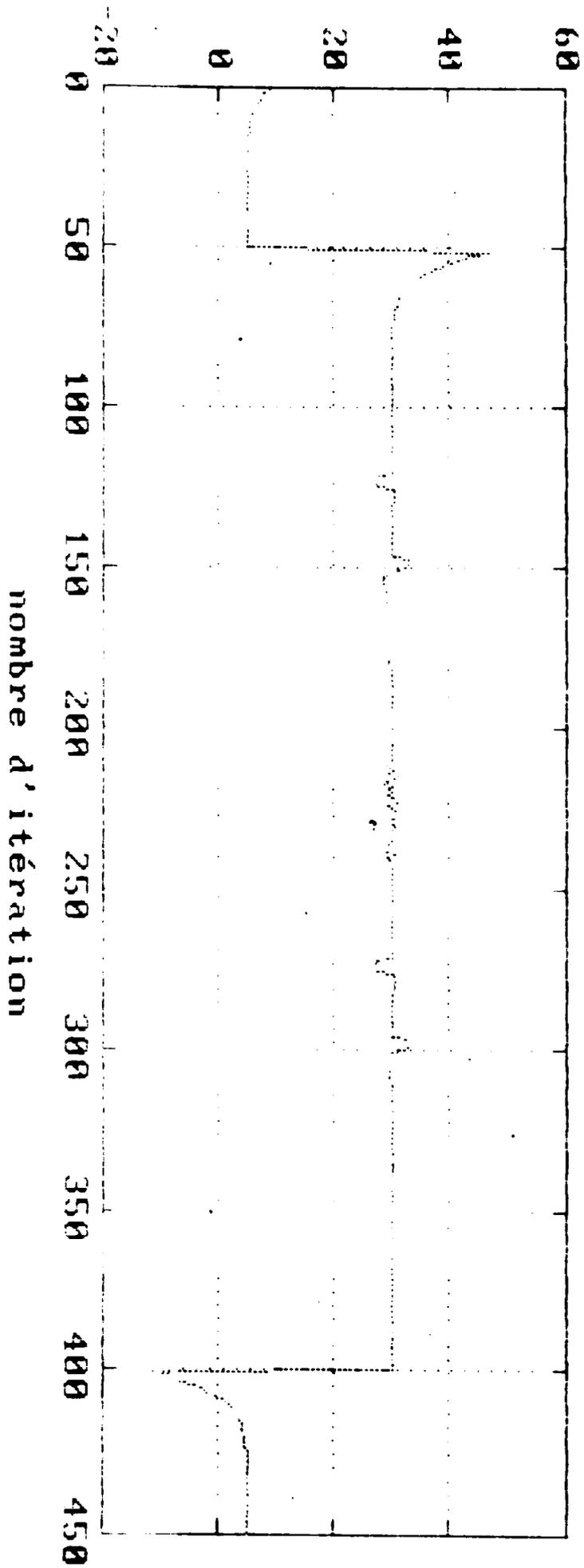


Fig 5.5

TEST 2

GMV

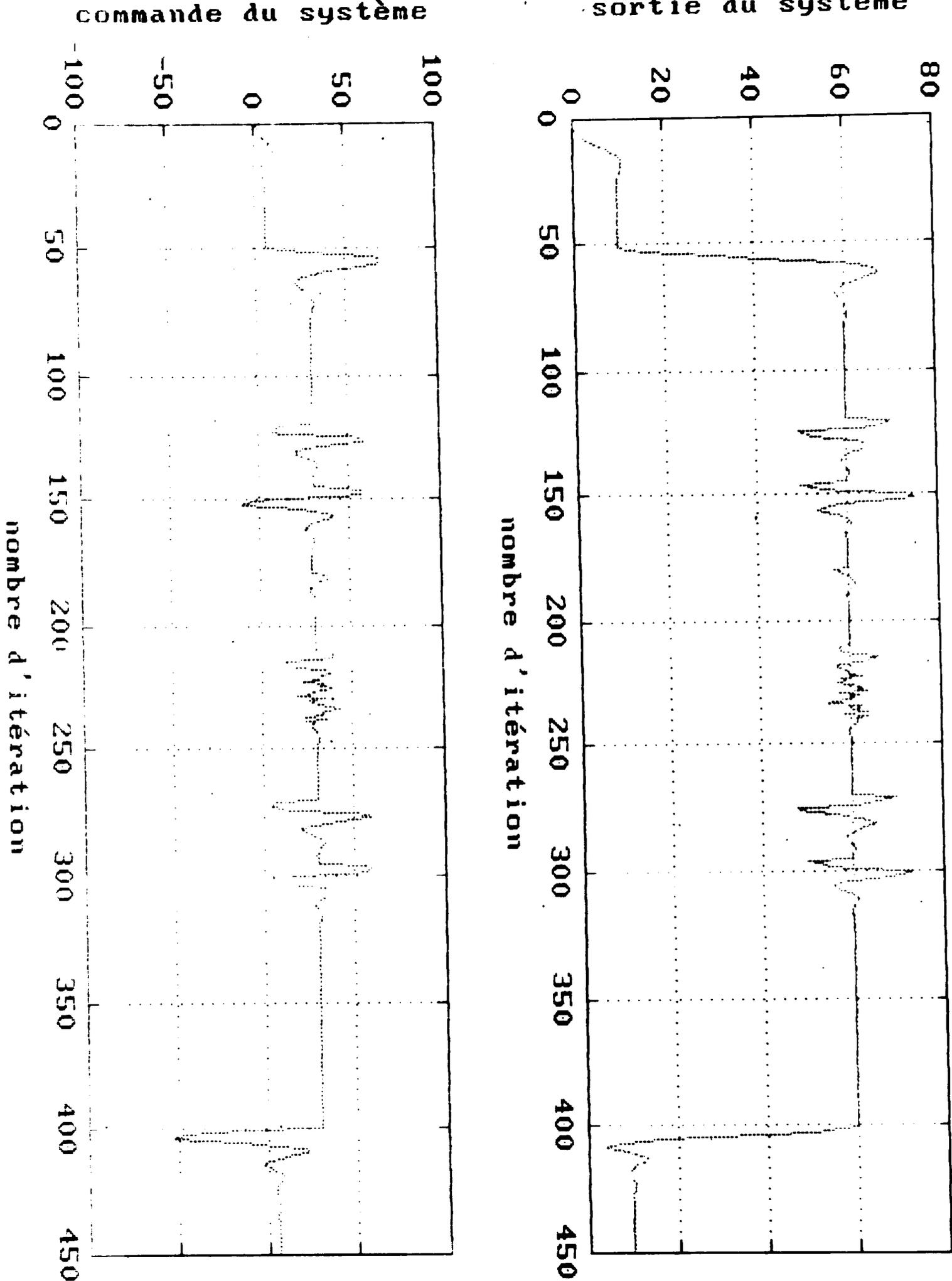
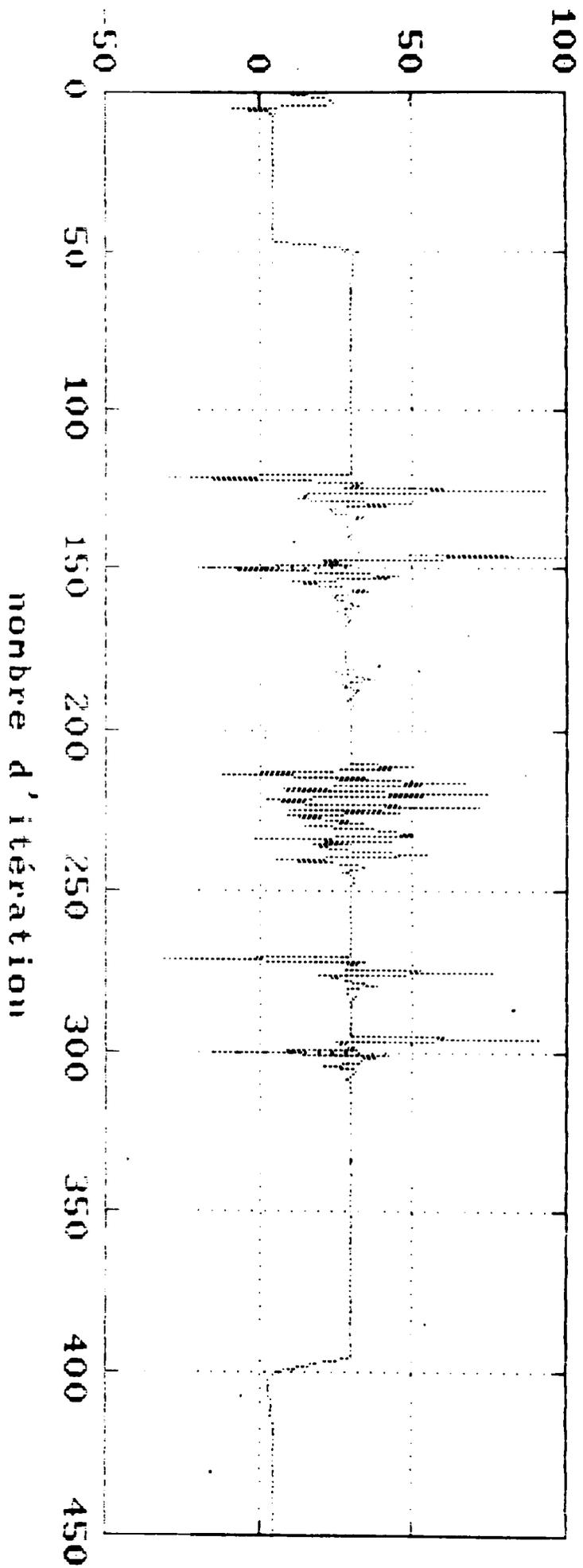


Fig VI.7 TEST2 L96

commande du système



sortie du système

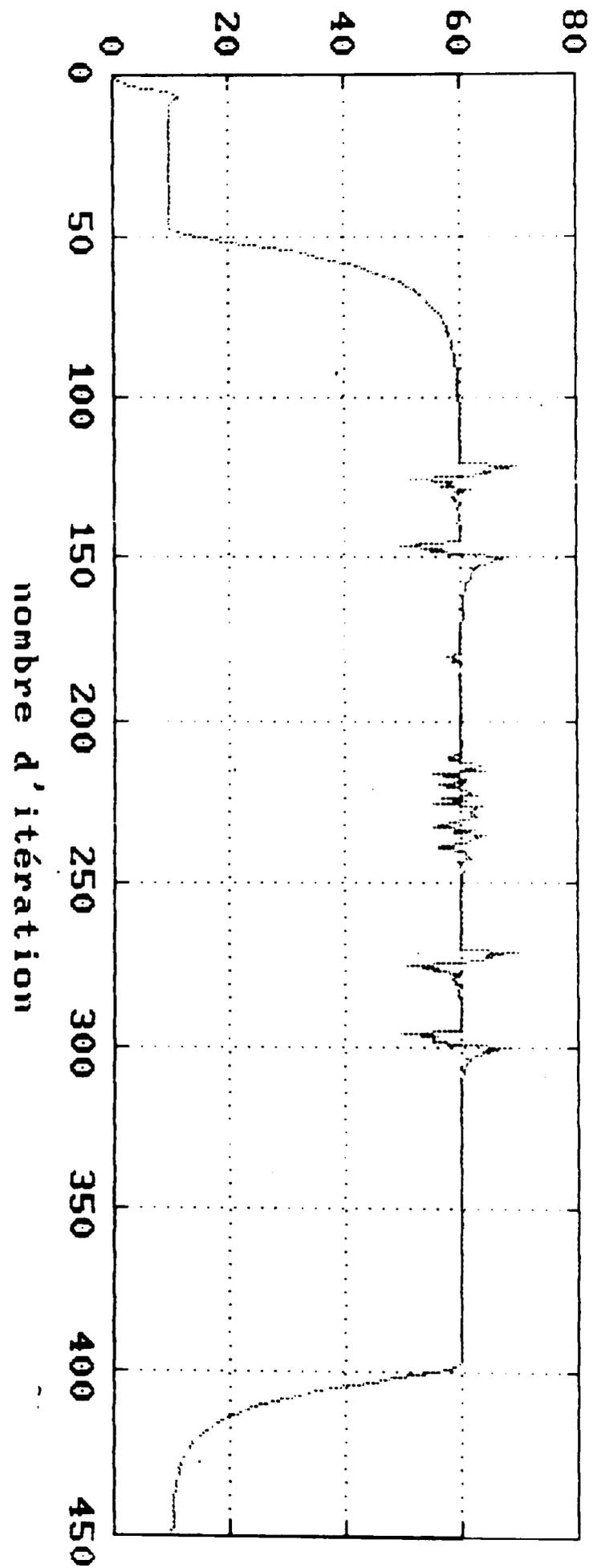


Fig VI-8 TEST 2 GPG

commande du système

sortie du système

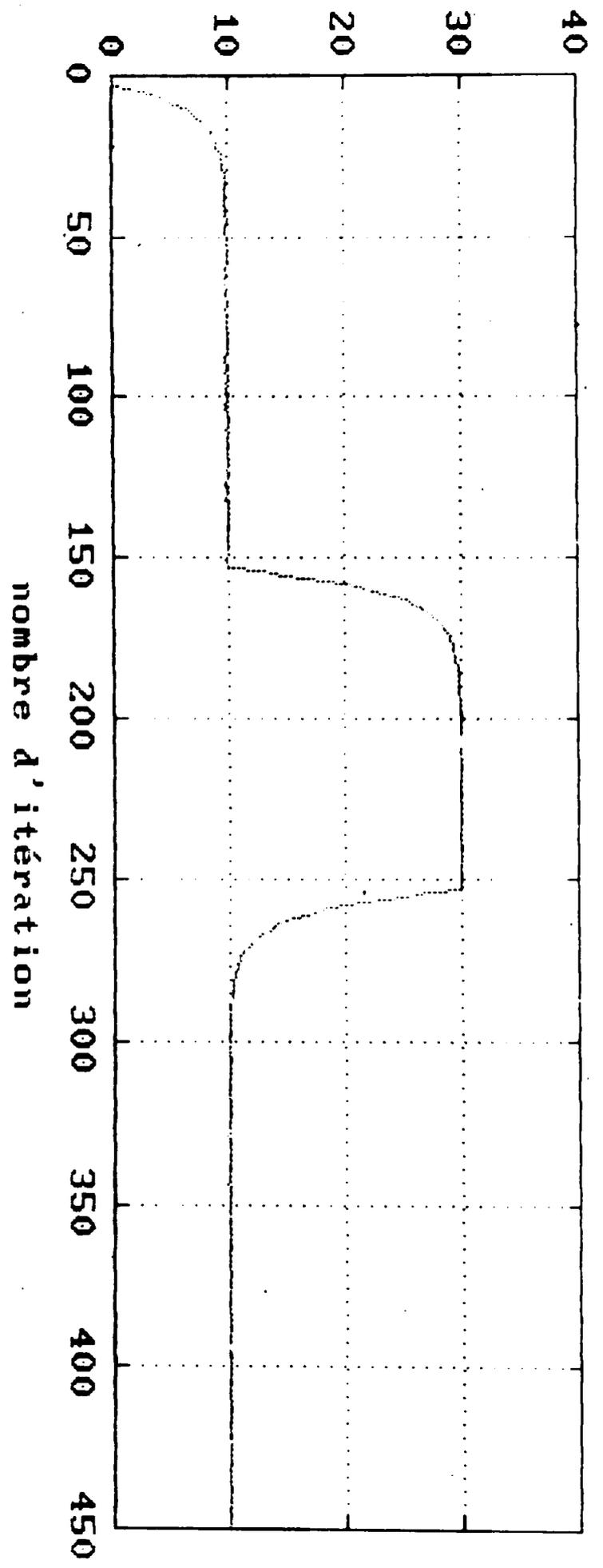
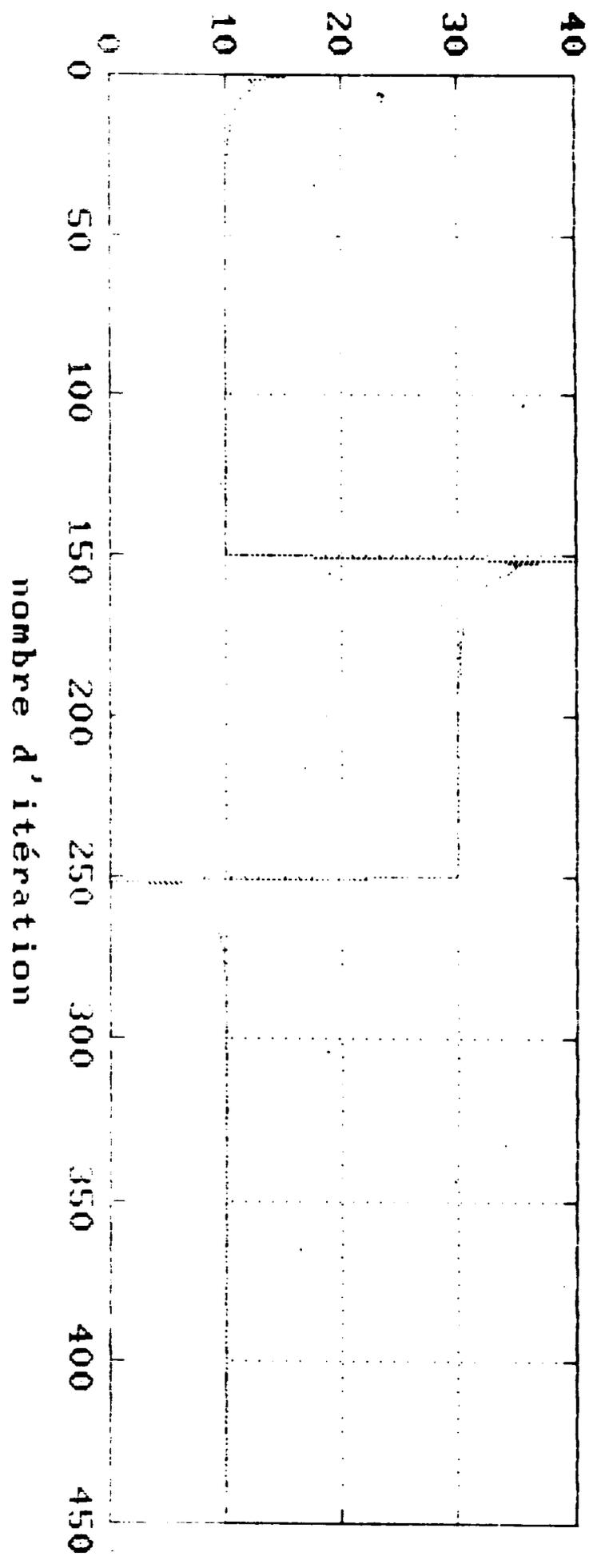


Fig VI - 9 TEST 3 GMV

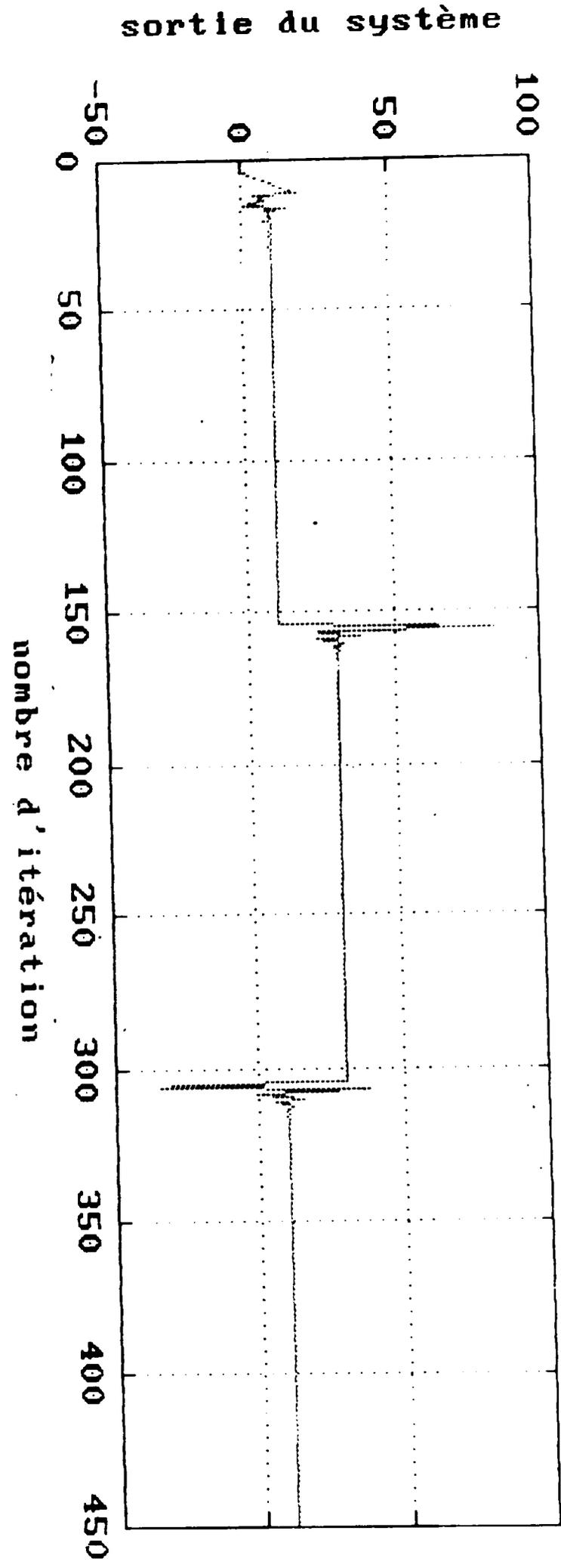
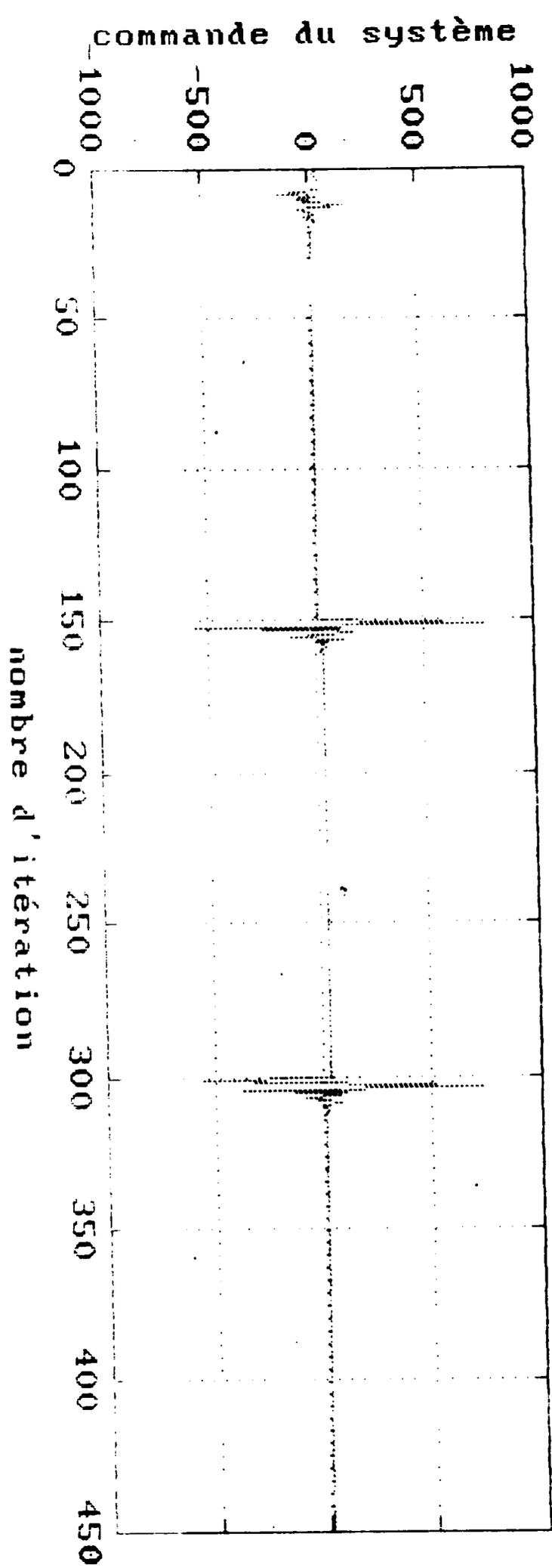


Fig VI-10 TEST 3 Placement de pôles

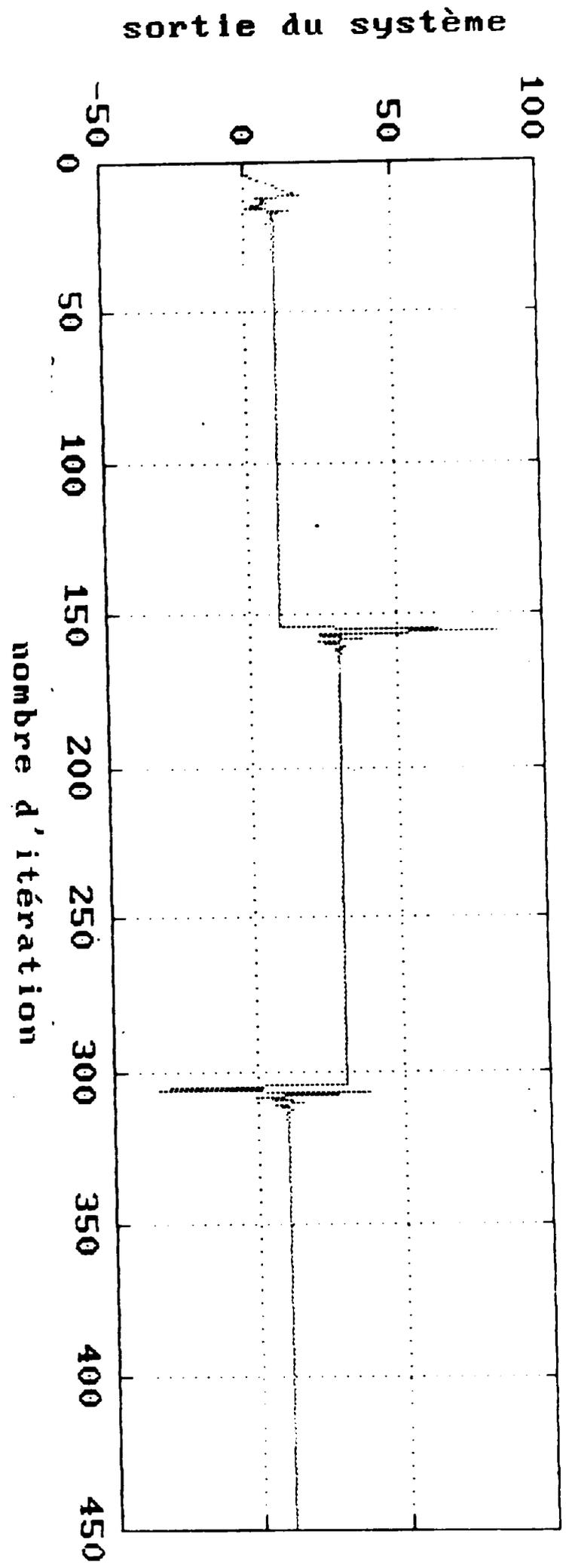
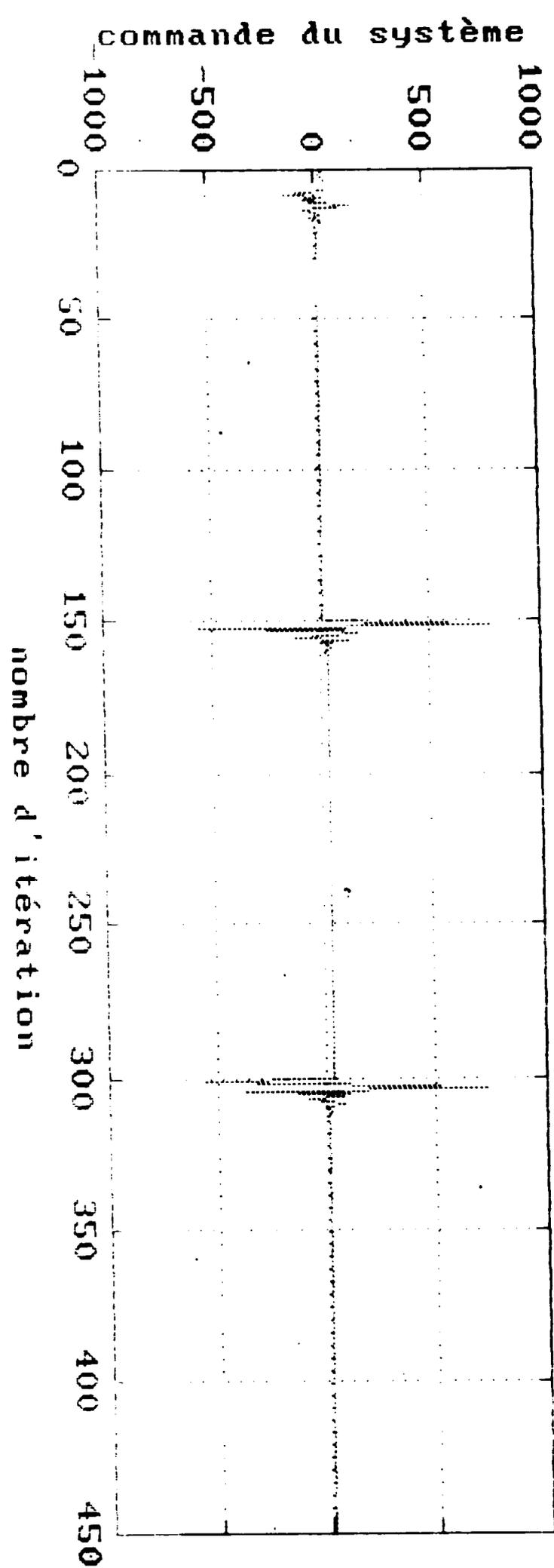
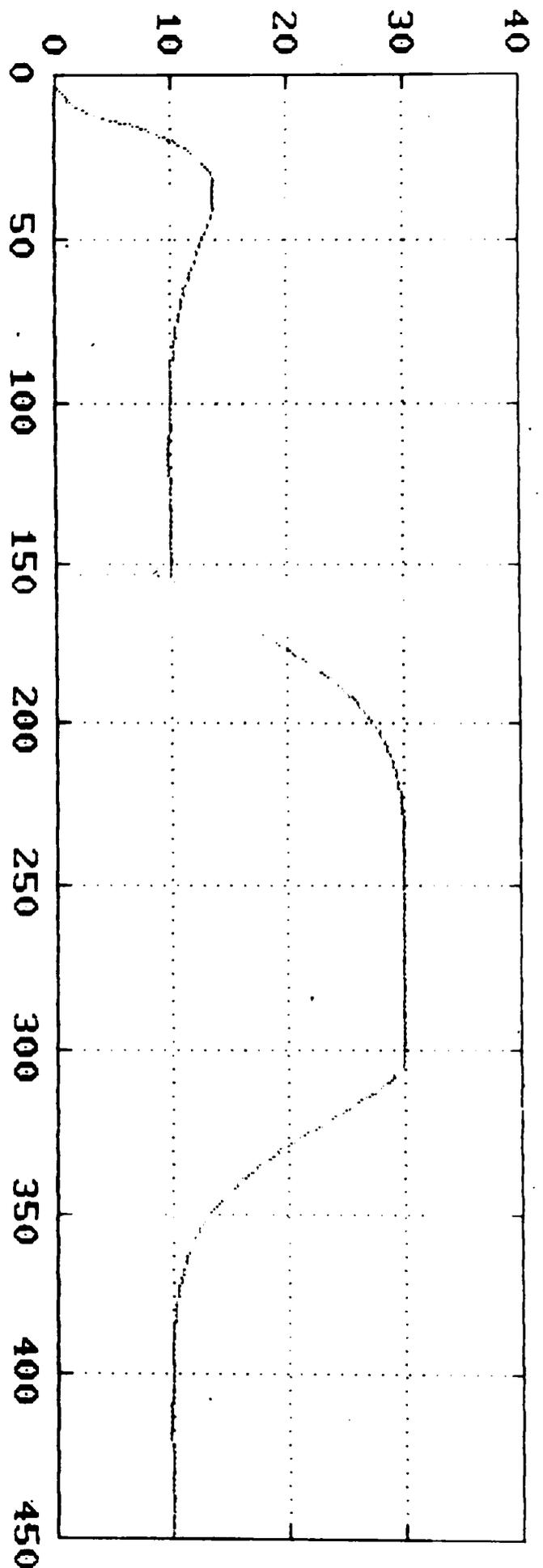


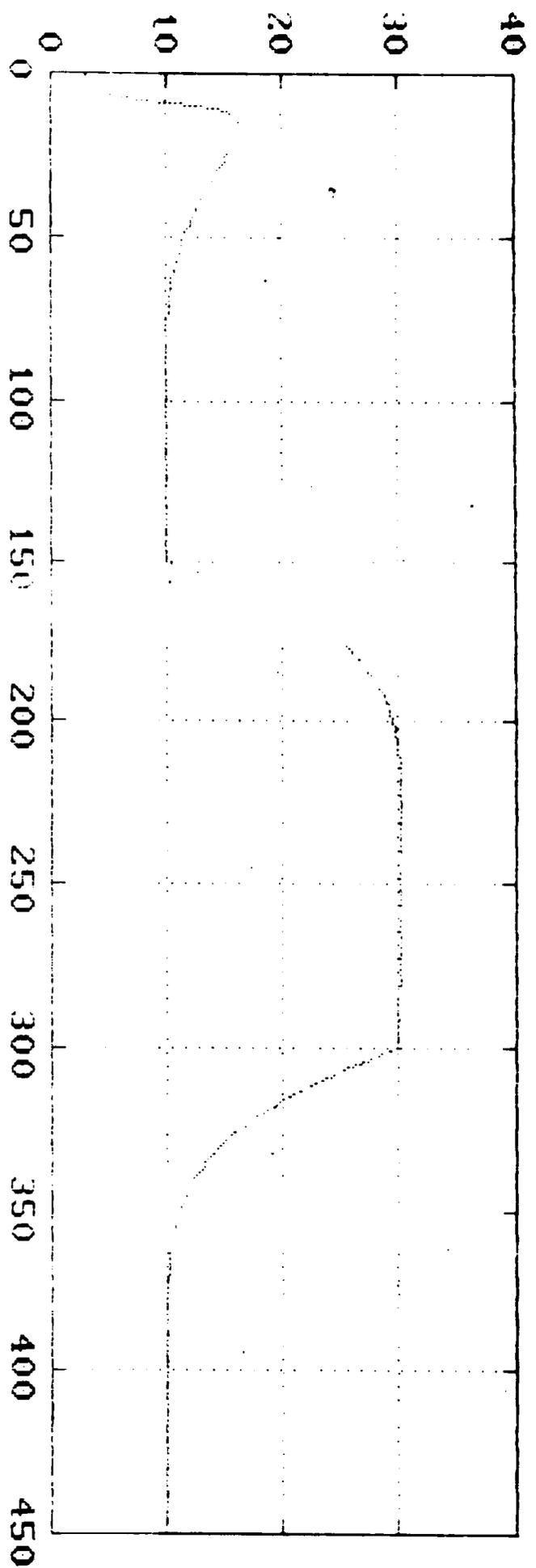
Fig VI-10 TEST 3 Placement de pôles

commande du système

sortie du système



nombre d'itération



nombre d'itération

Fig VI-12 TEST 3 LQG

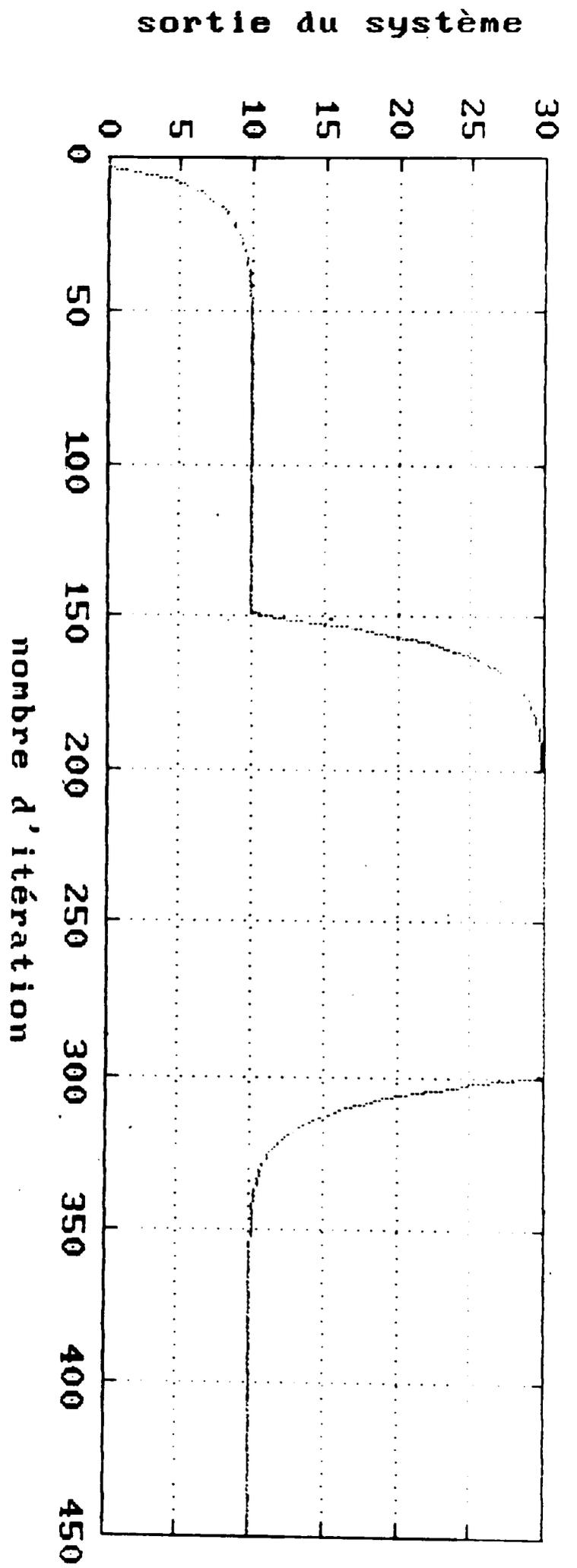
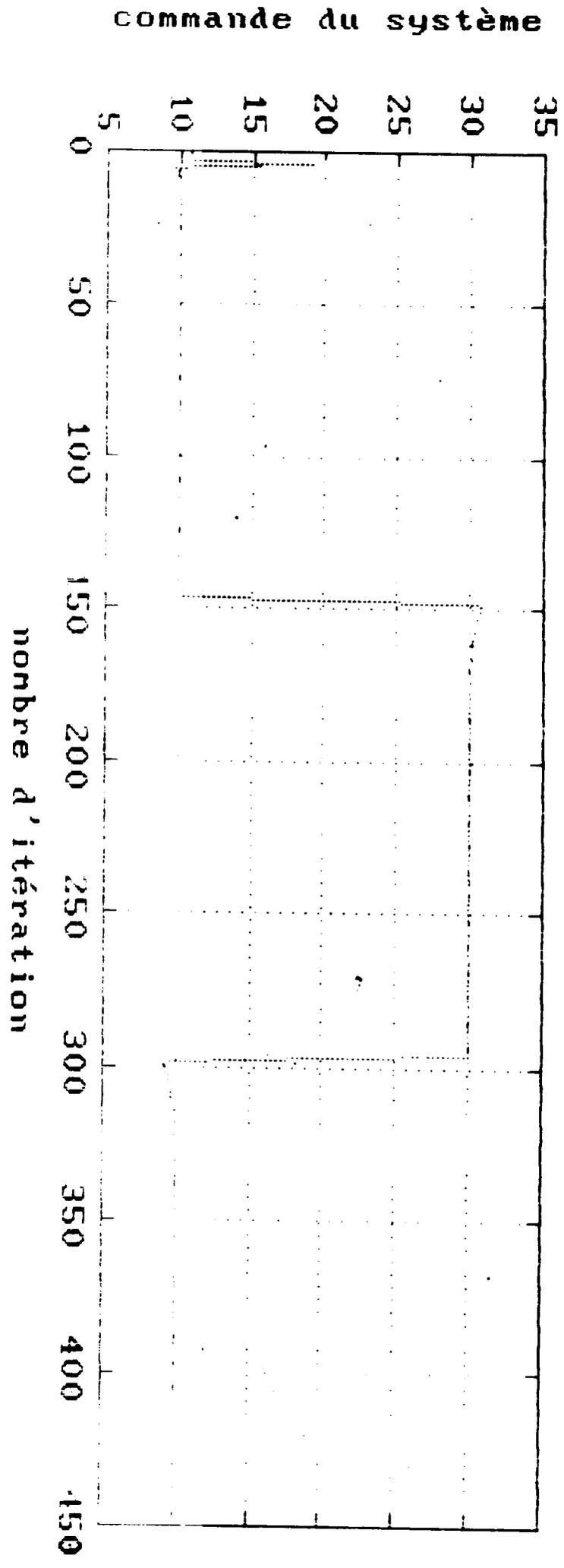


Fig VI-12 TEST 3 GPC

commande du système

sortie du système

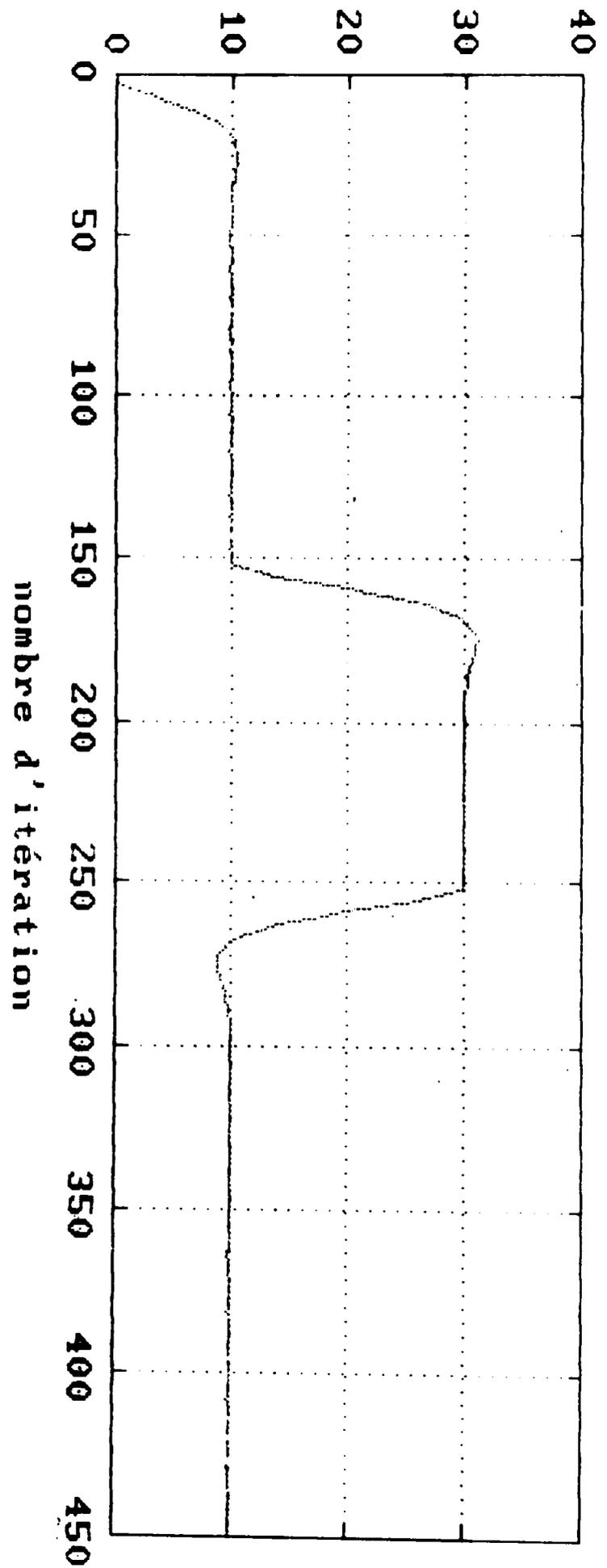
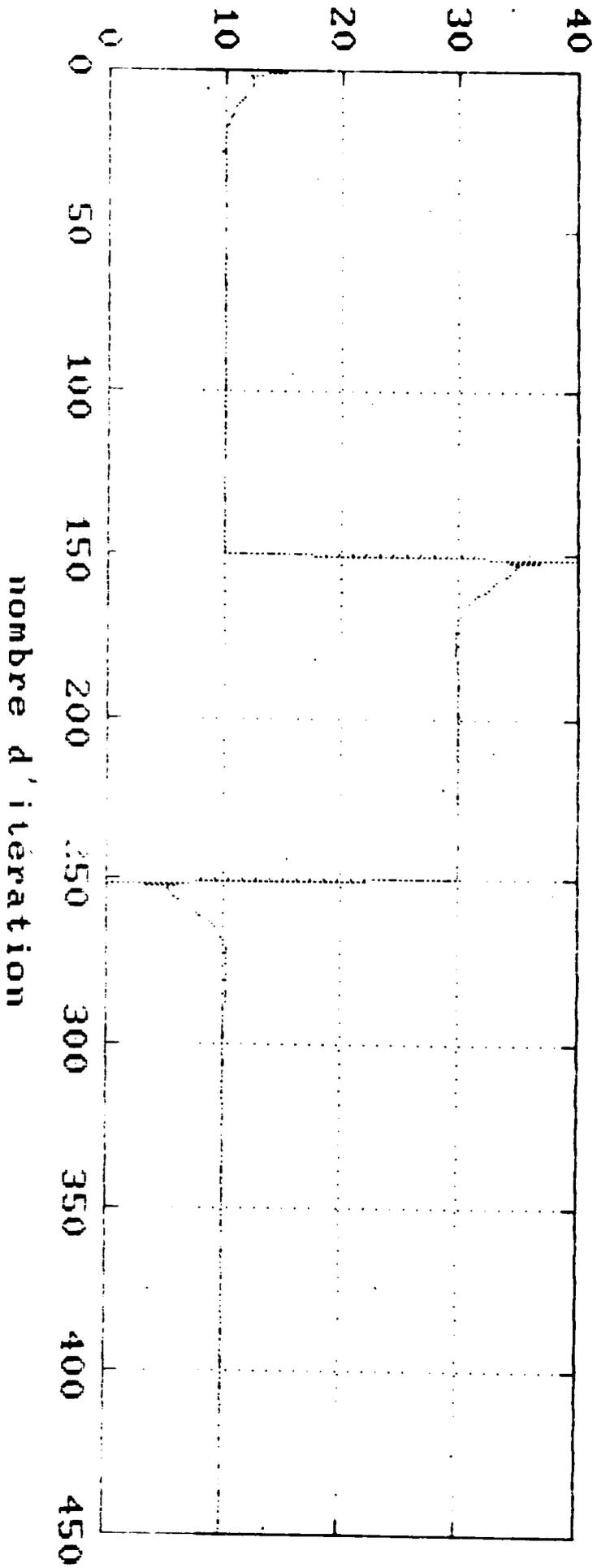


Fig VII-13 TEST 4

GMV

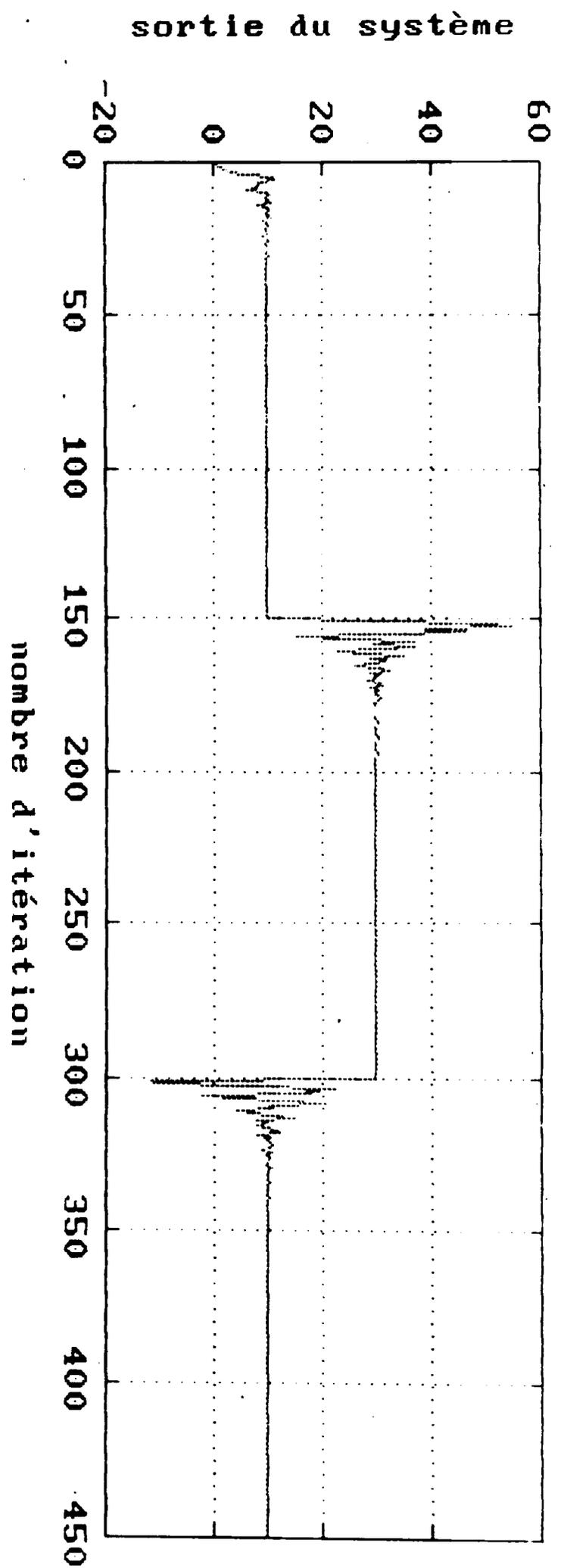
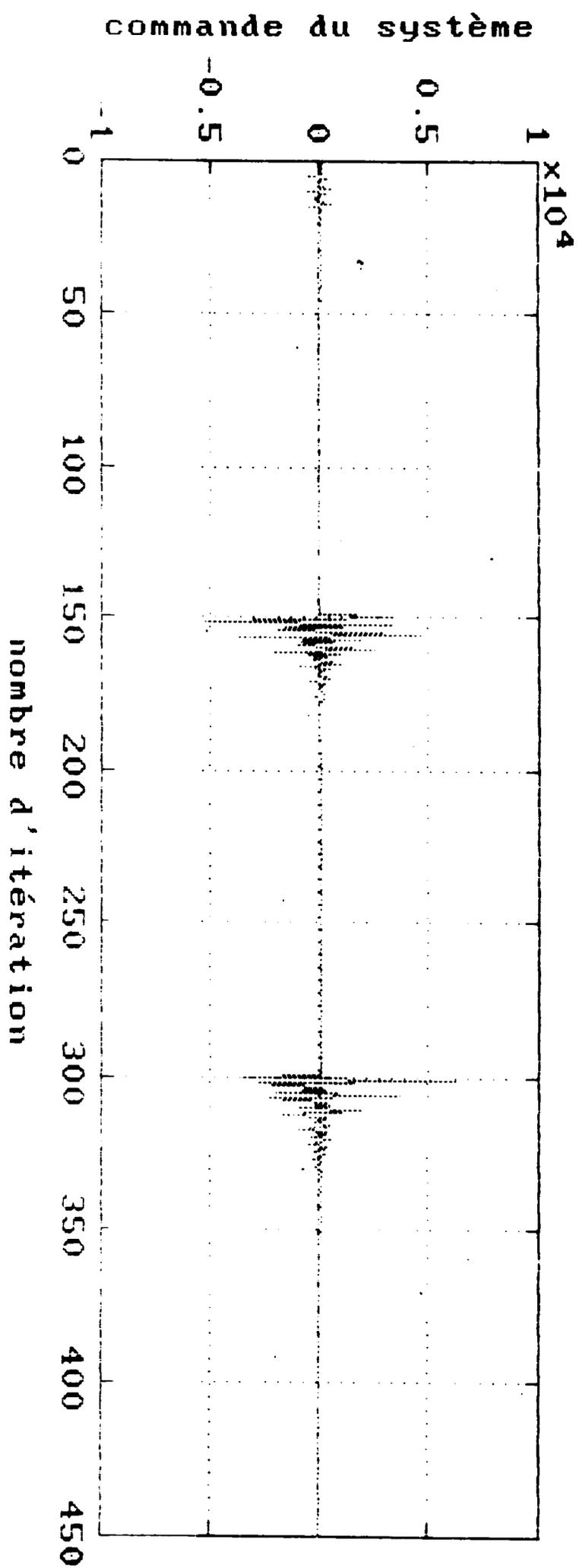


Fig VI-14 TEST4 Placement de pôles

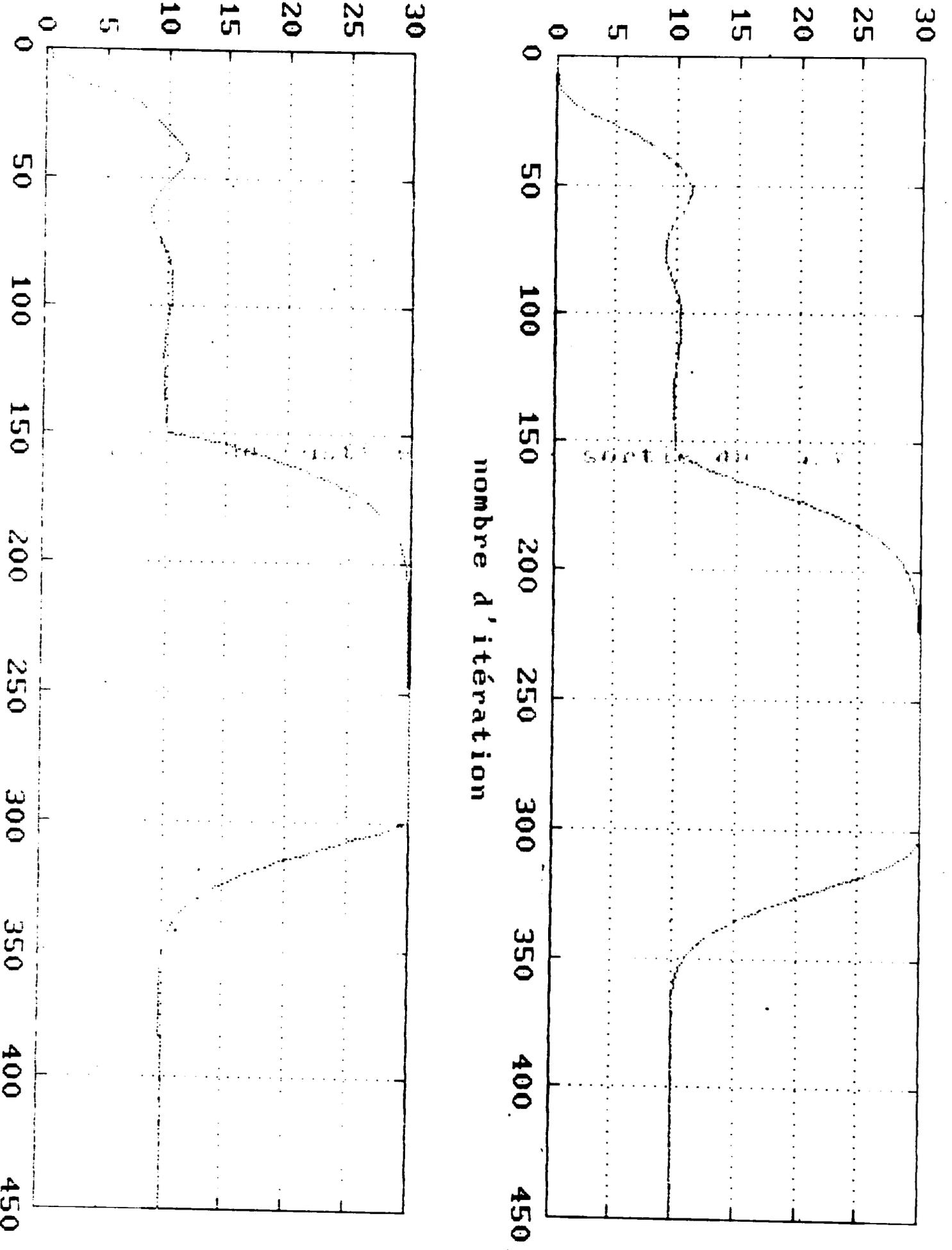


Fig VII-15 TEST 4 LQG

commande du système

sortie du système

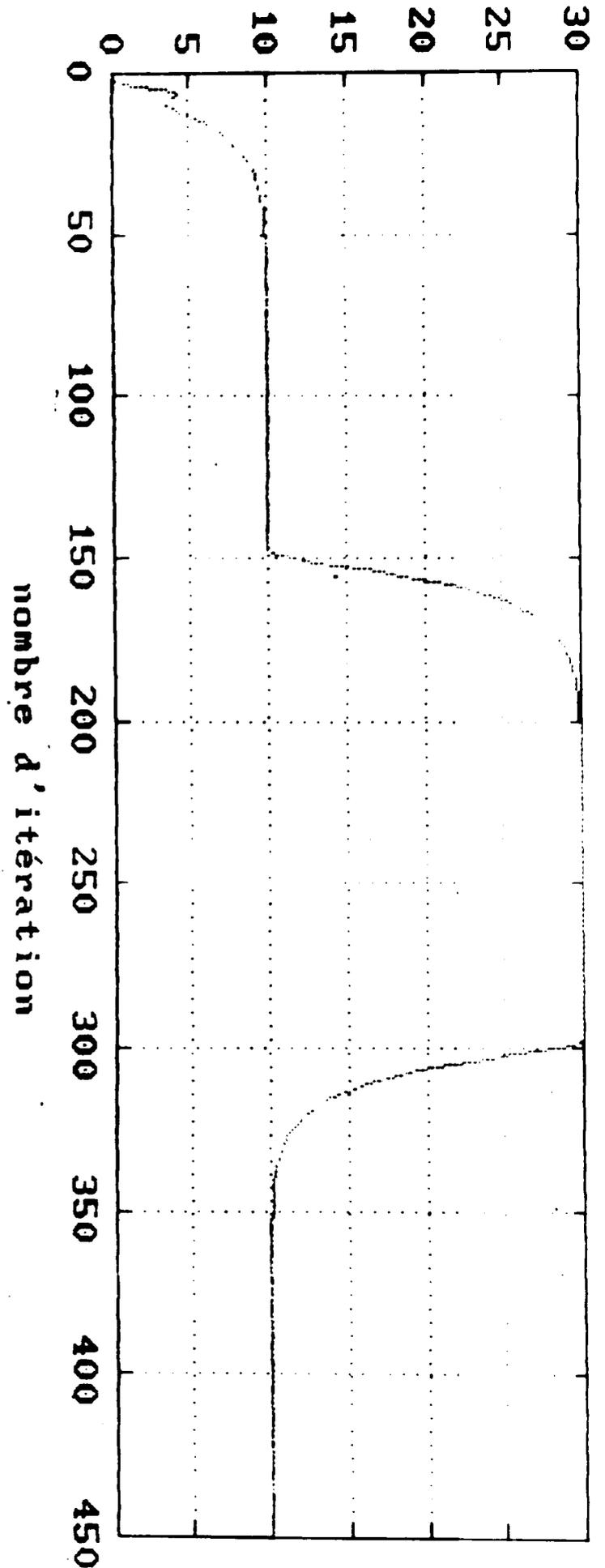
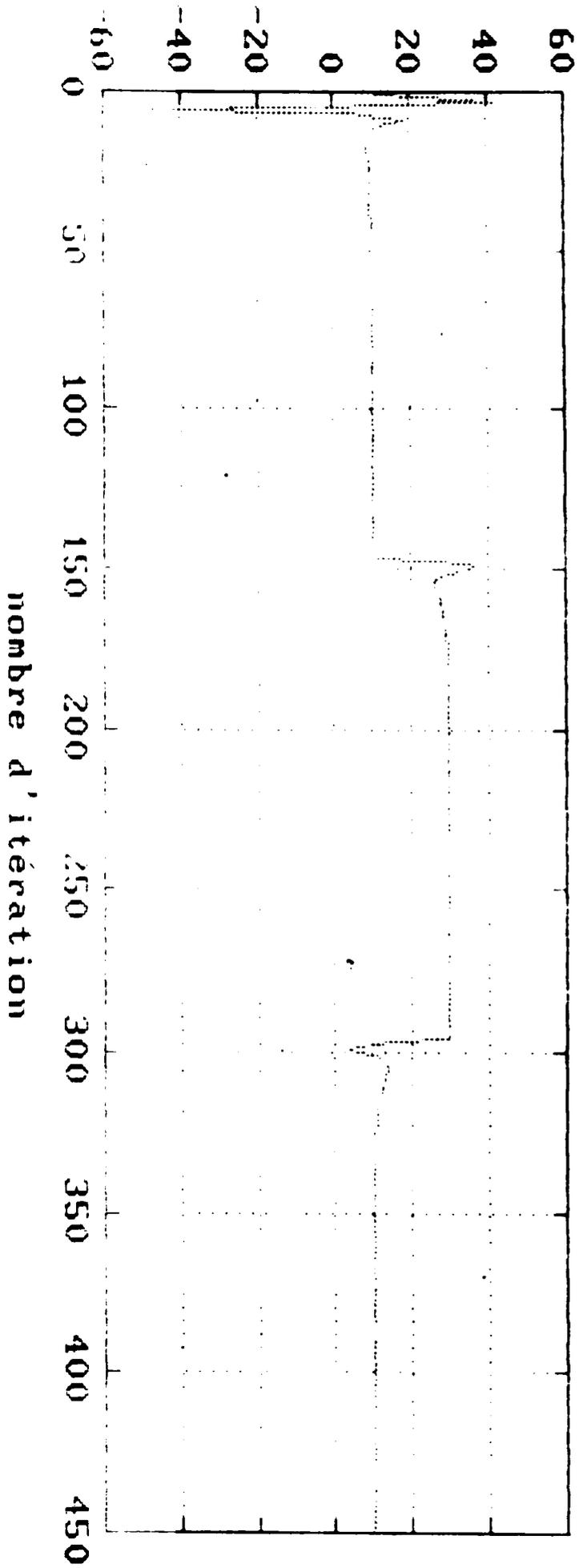


Fig VI -16 TEST 4 GPC

commande du système

sortie du système

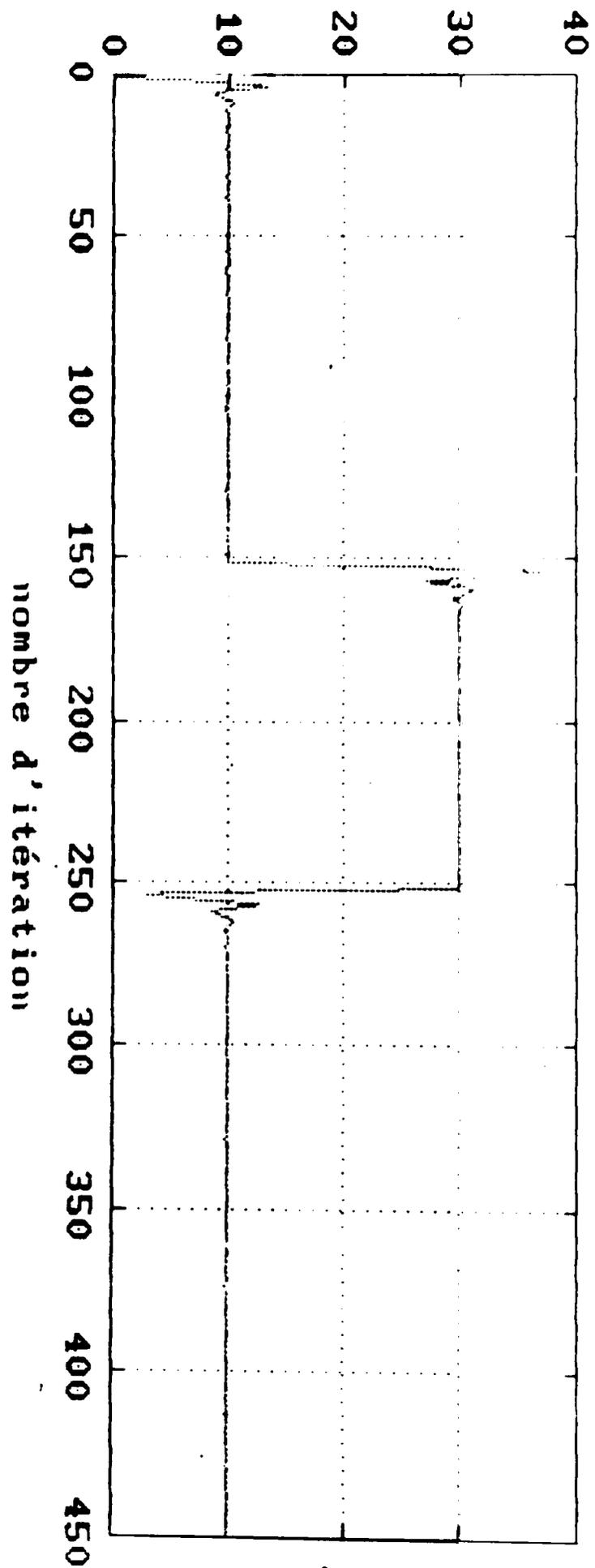
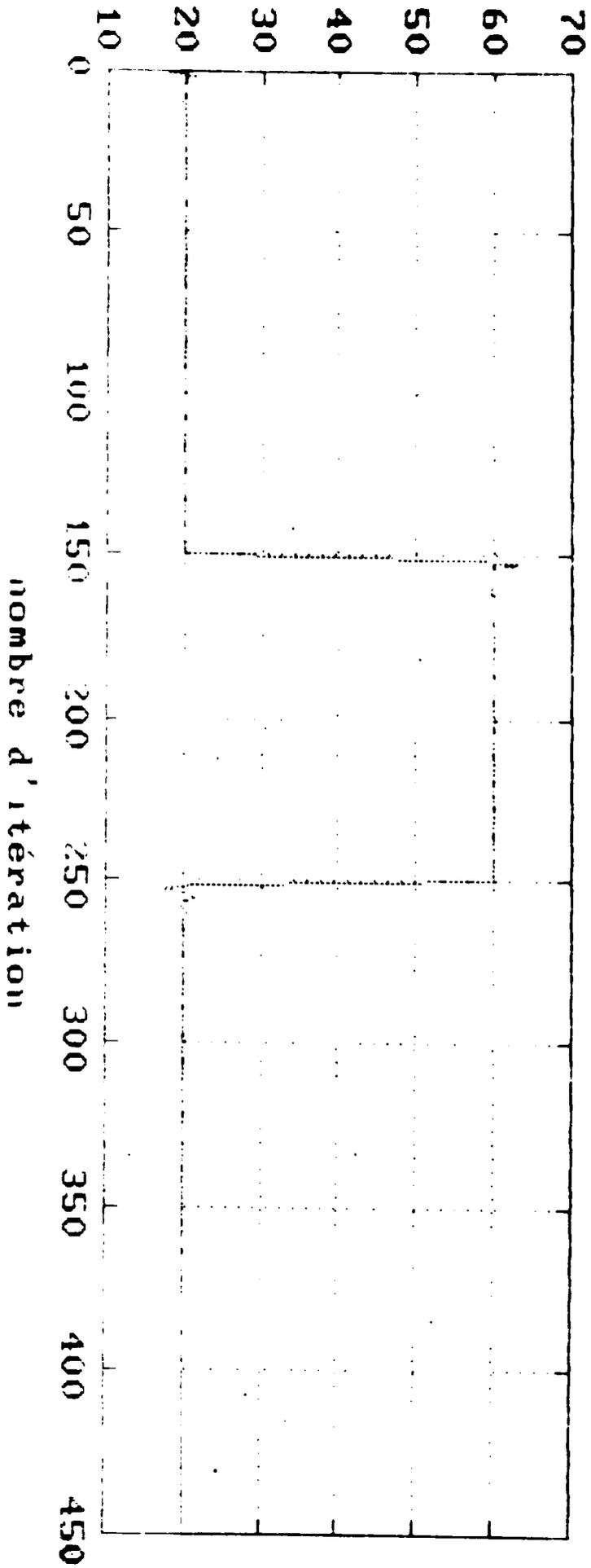


Fig VII - 17 TESTS GMV

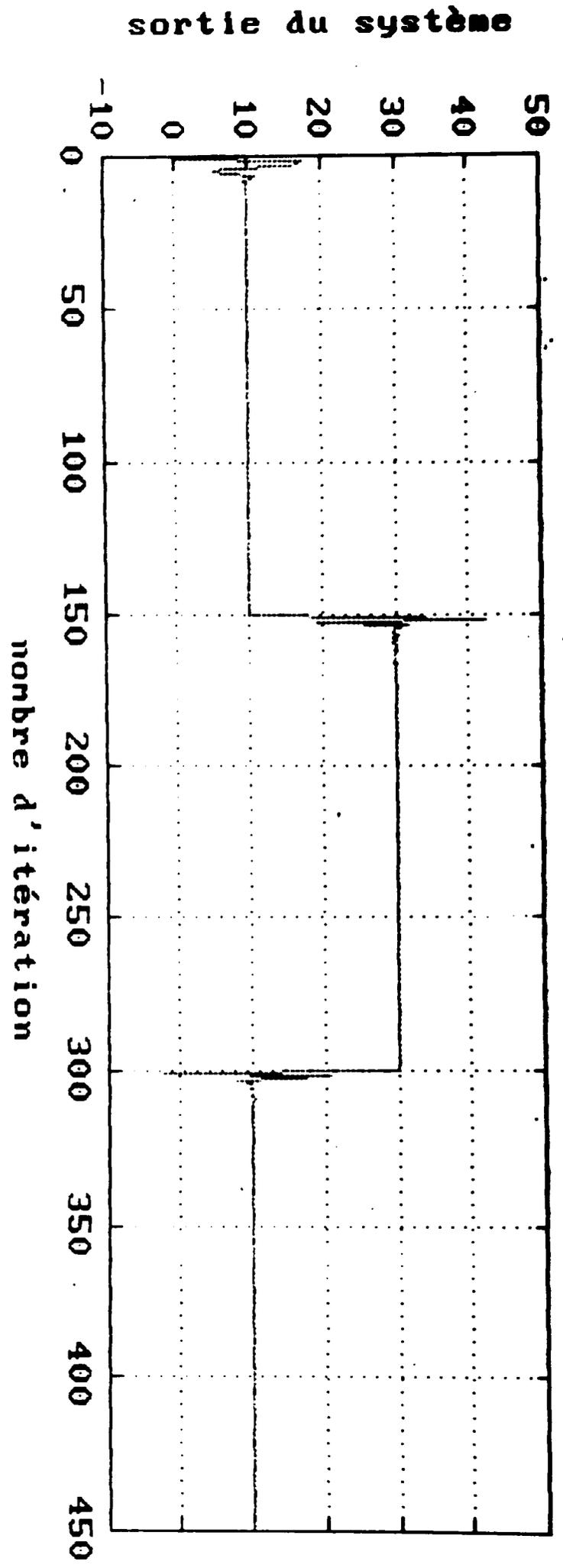
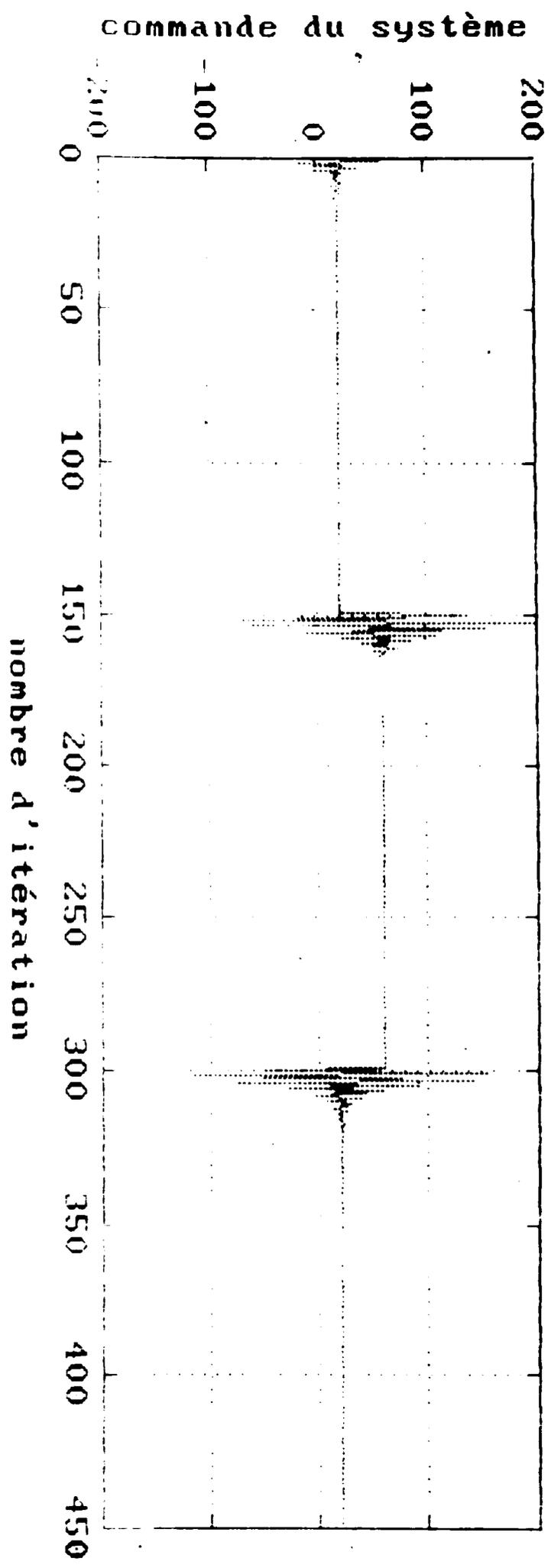


Fig VII-18 TESTS Placement de pôles

commande du système

sortie du système

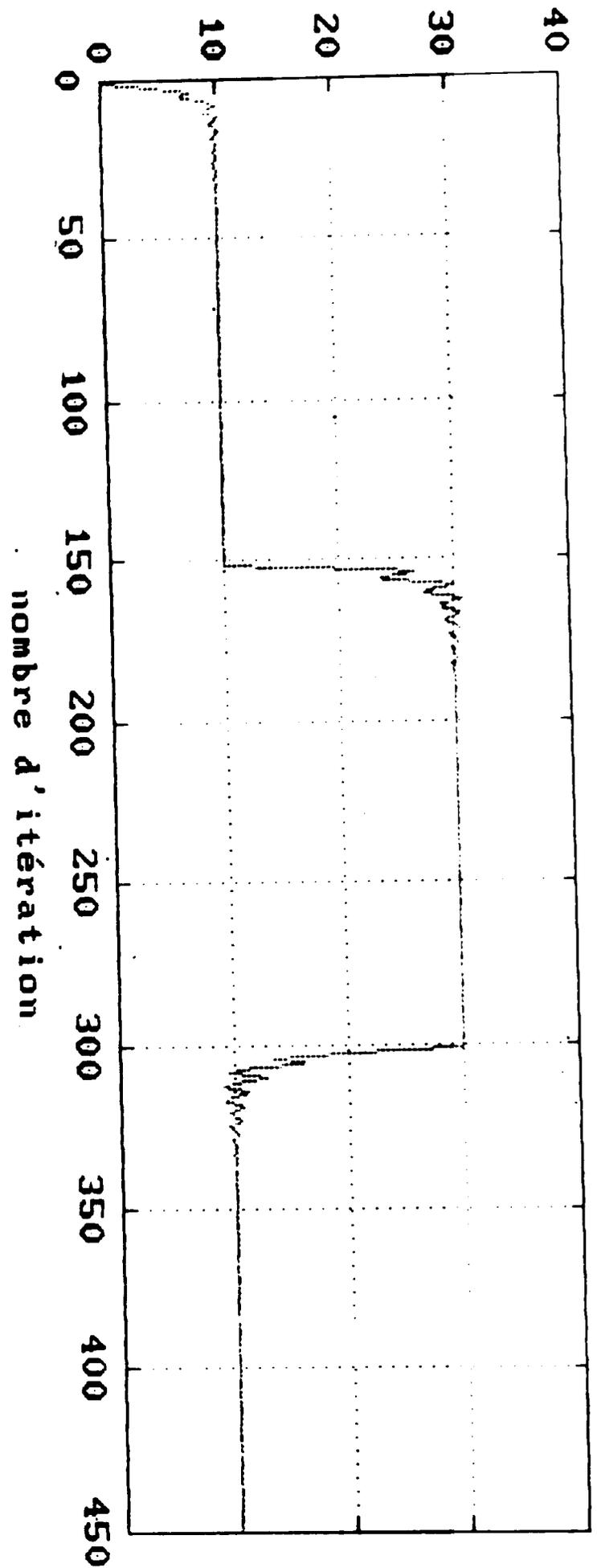
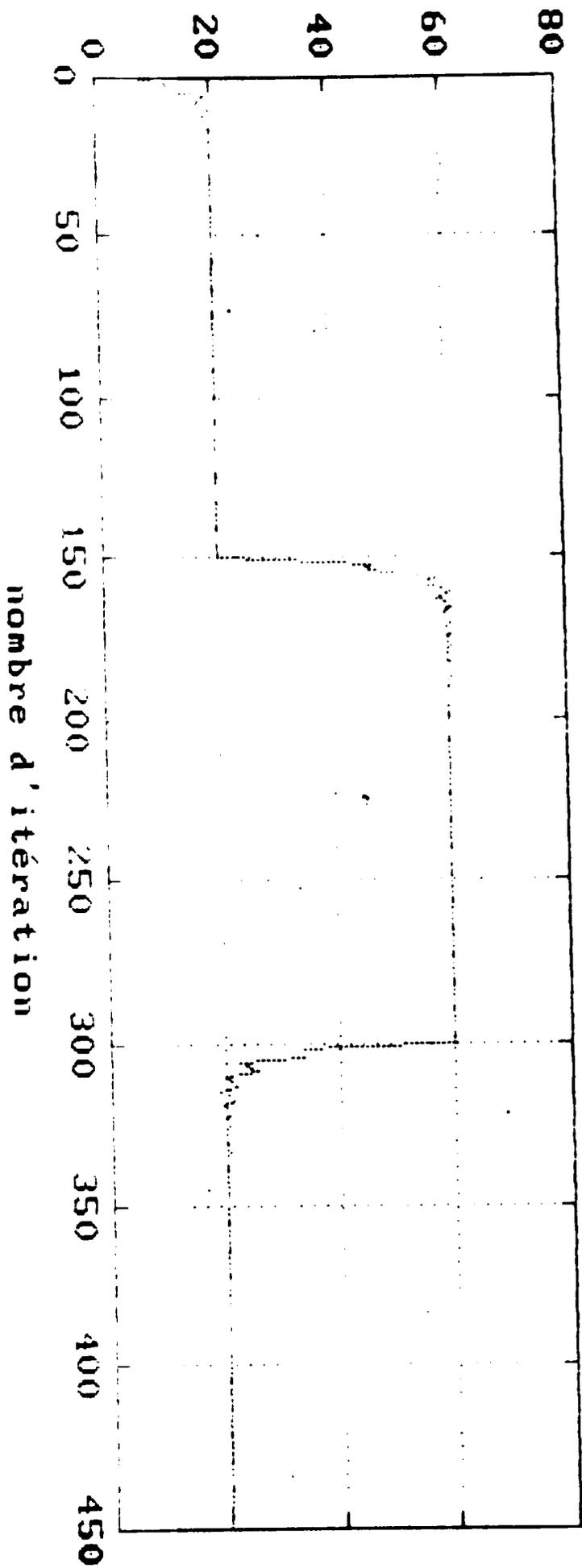
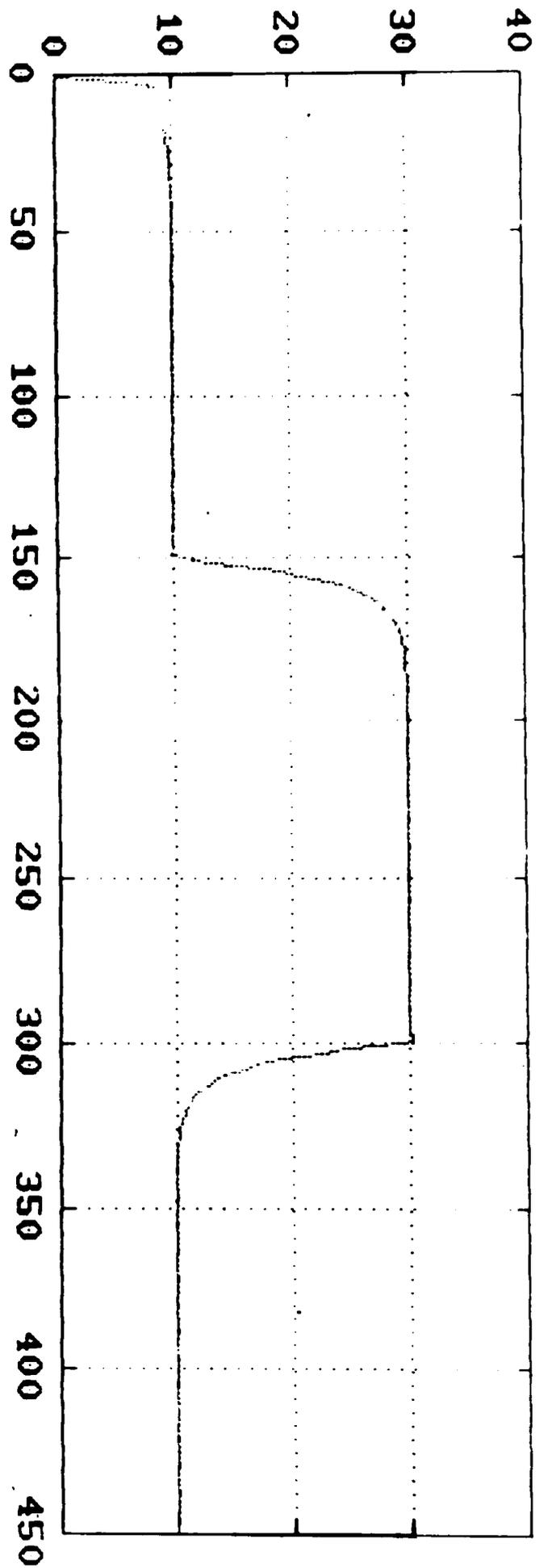


Fig VI - 19

TEST 5

LQG

sortie du système



commande du système

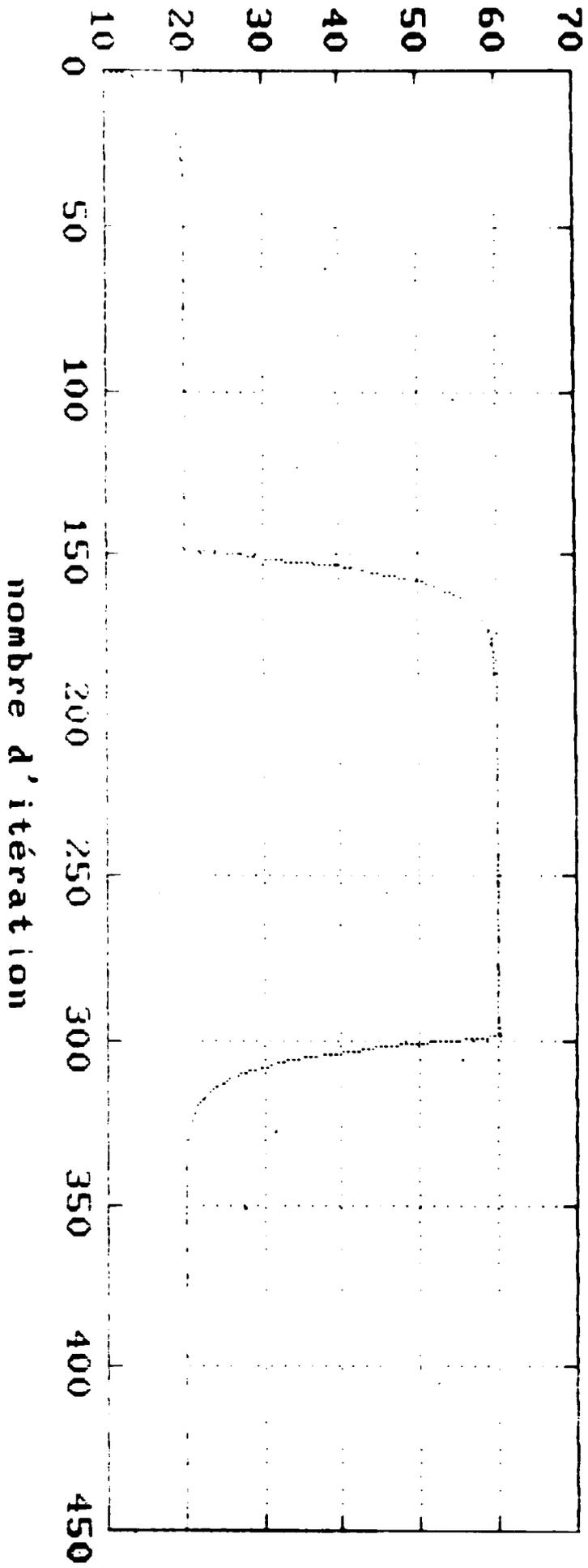


Fig VI-20 TEST 5 GPC

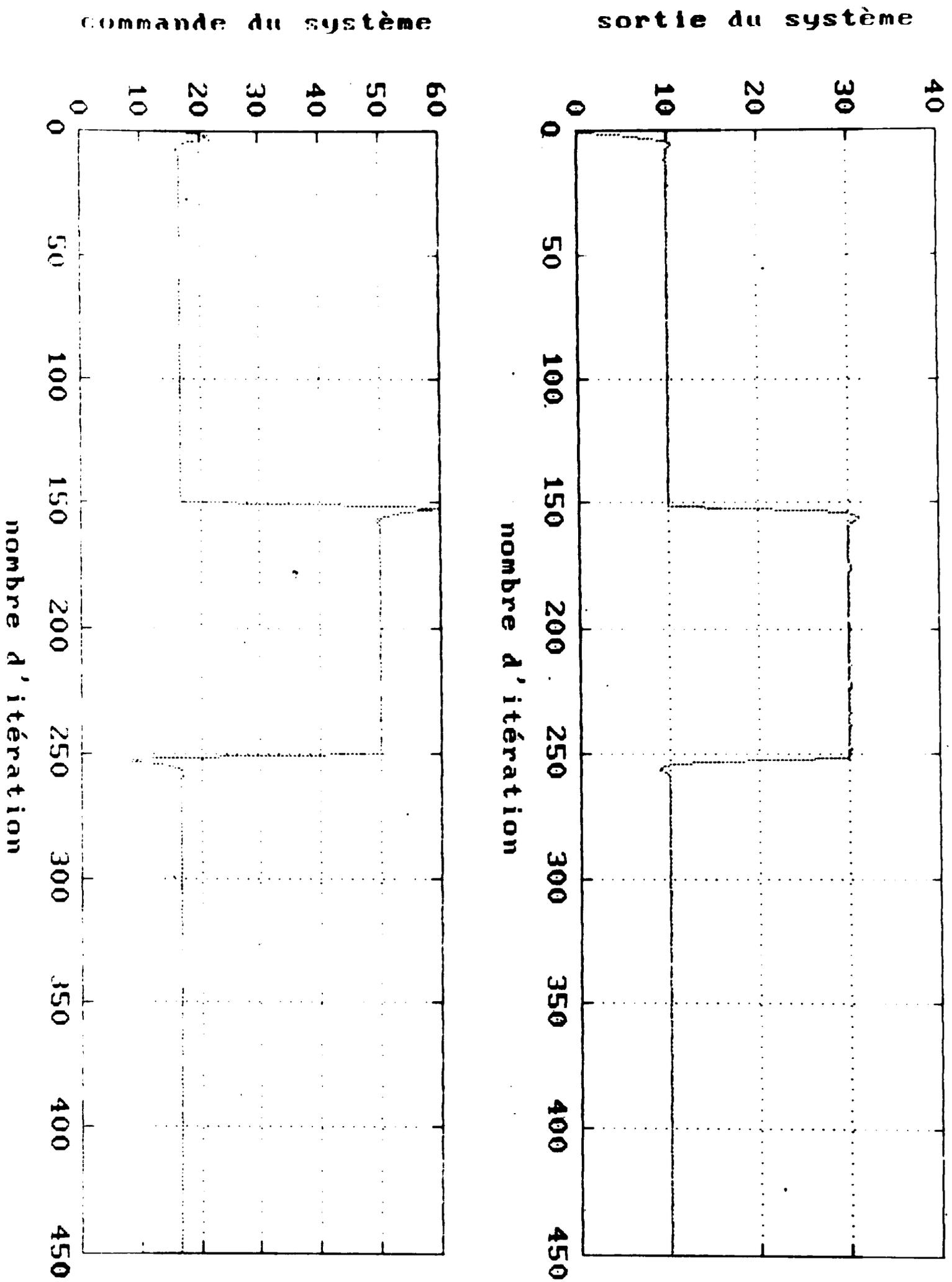


Fig VI-21 TEST6 GMV

commande du système

sortie du système

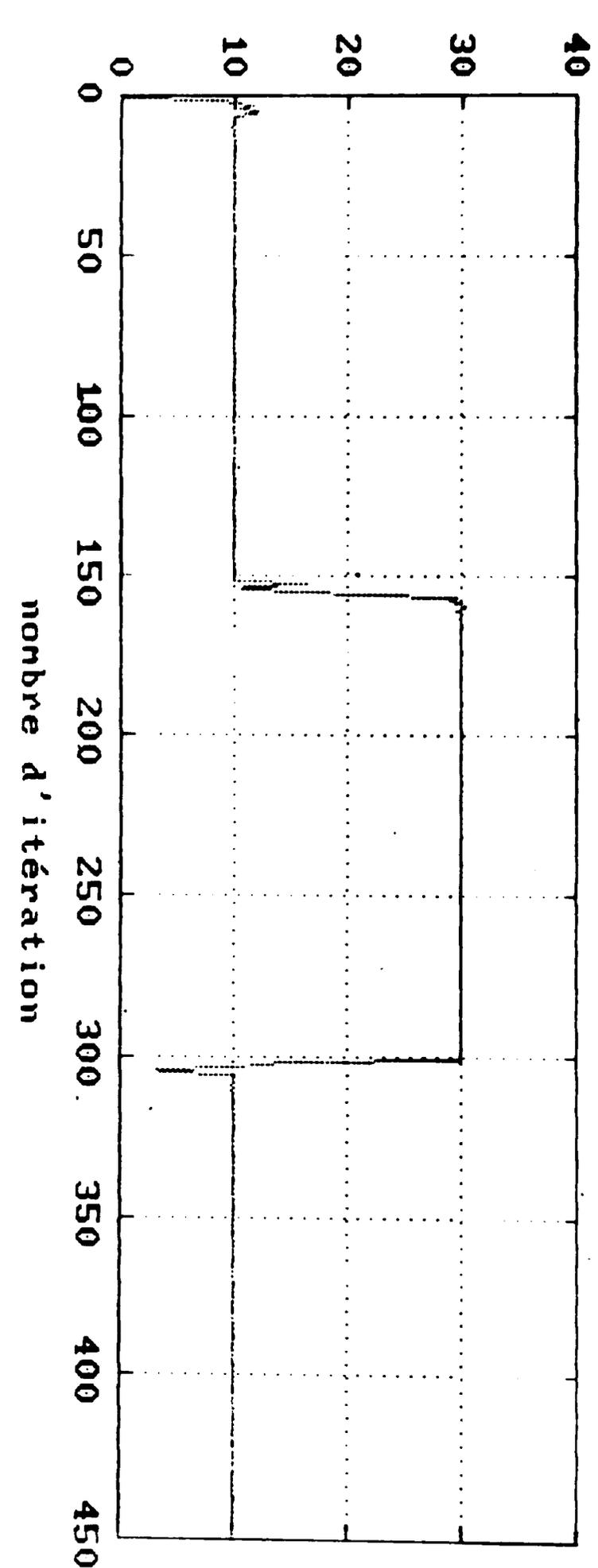
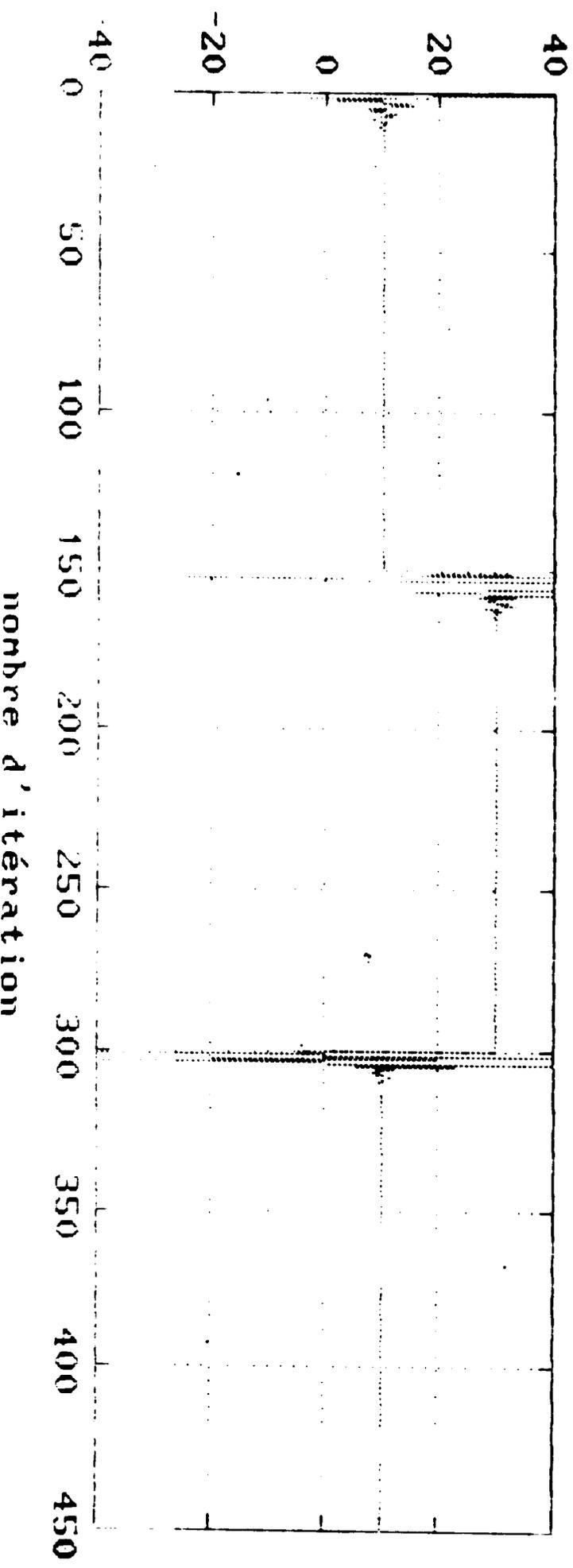


Fig VII-22 TEST6 Placement de pôles

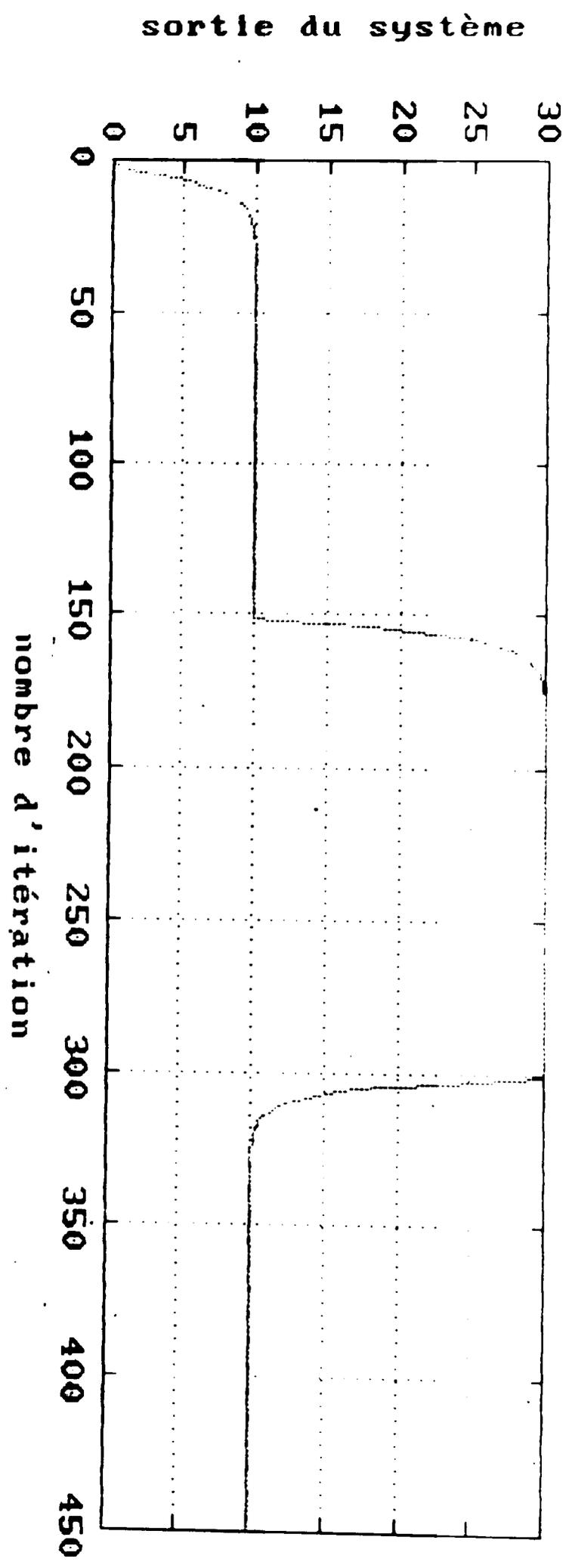
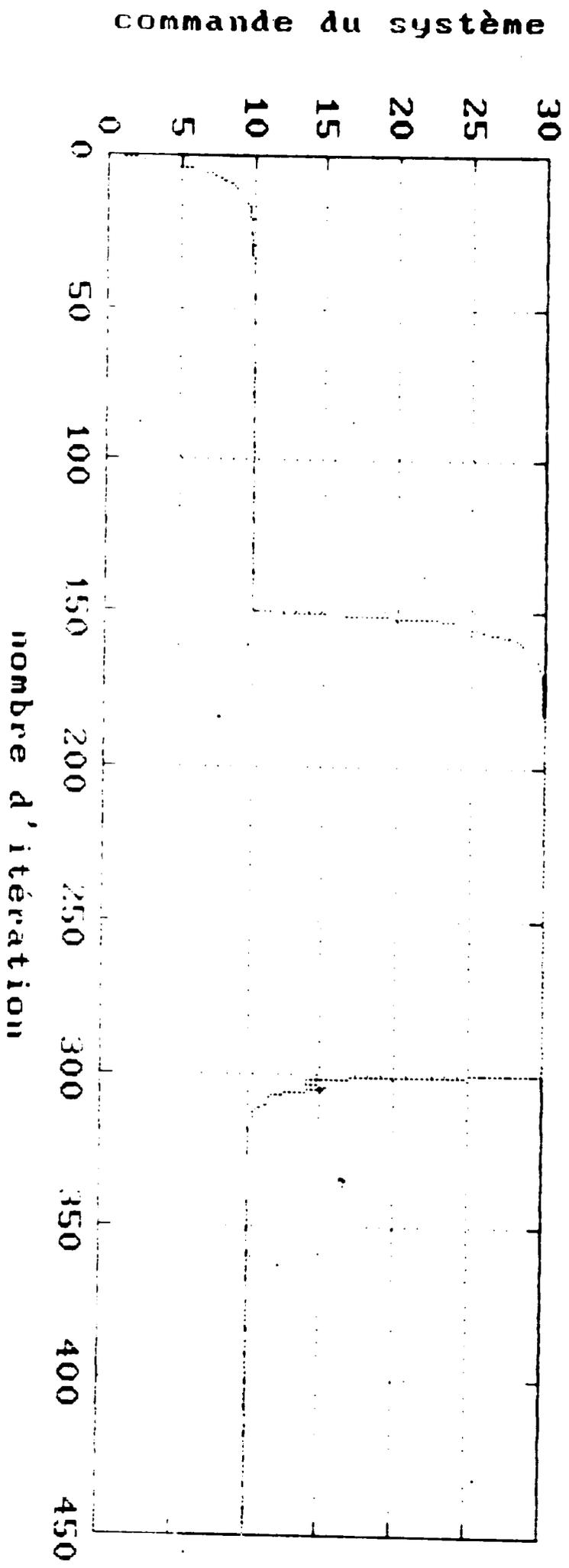
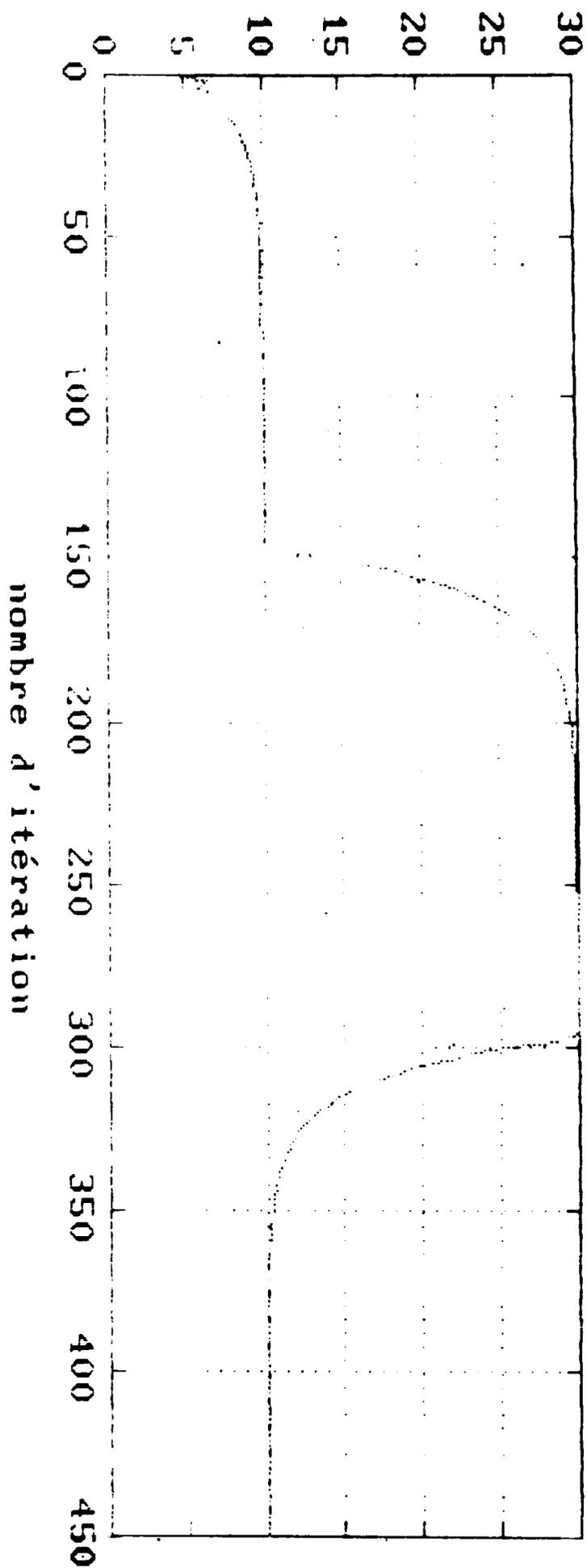


Fig V-23 TEST 6 599

commande du système



sortie du système

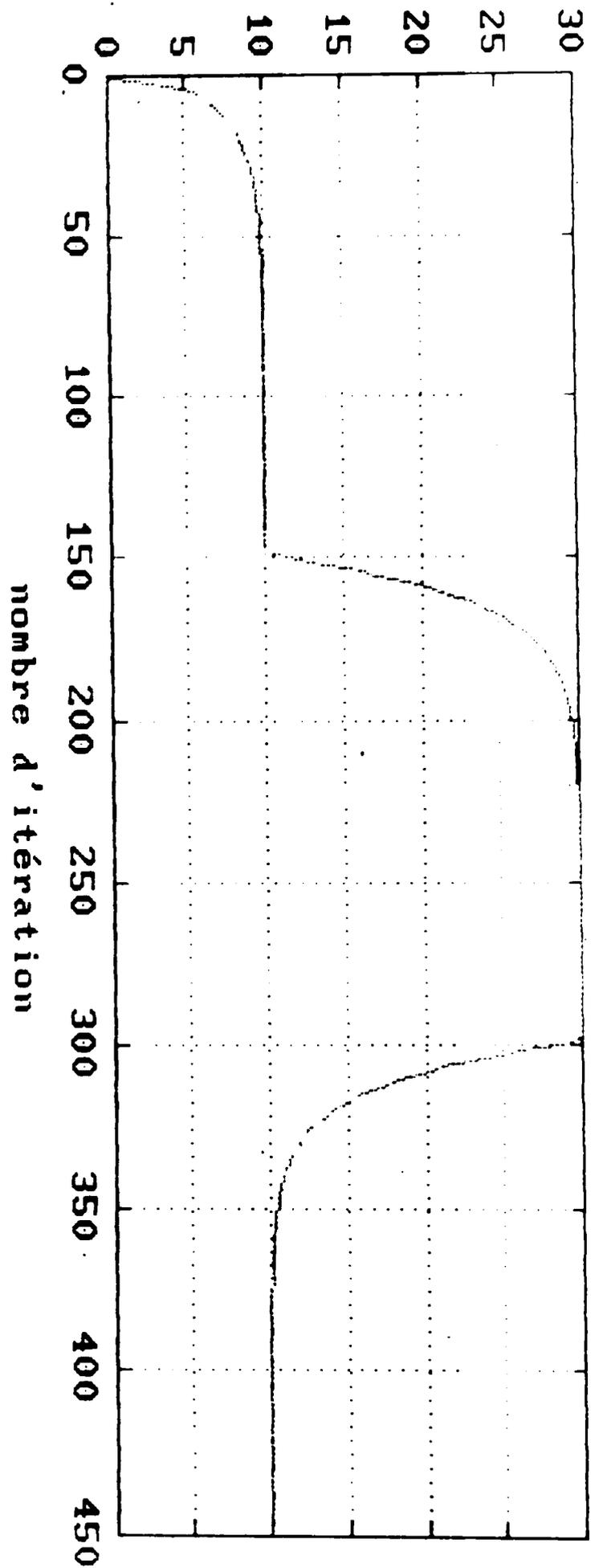
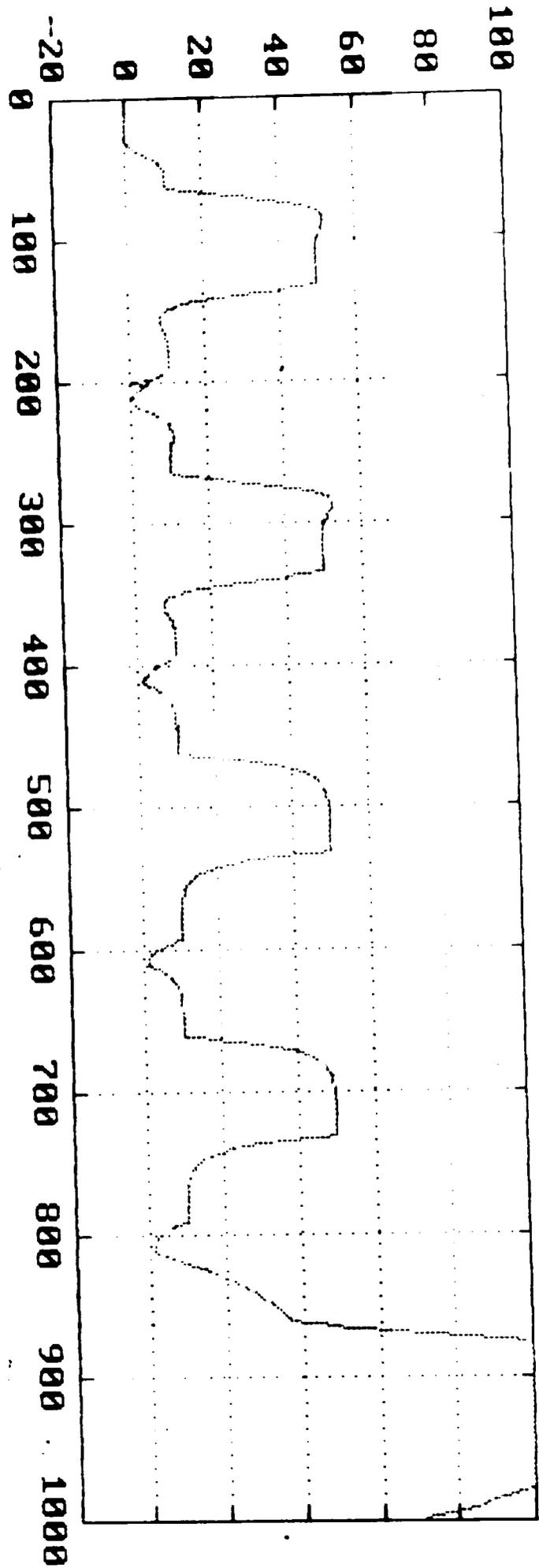


Fig VI-24 TEST6 GPC

sortie du système



commande du système

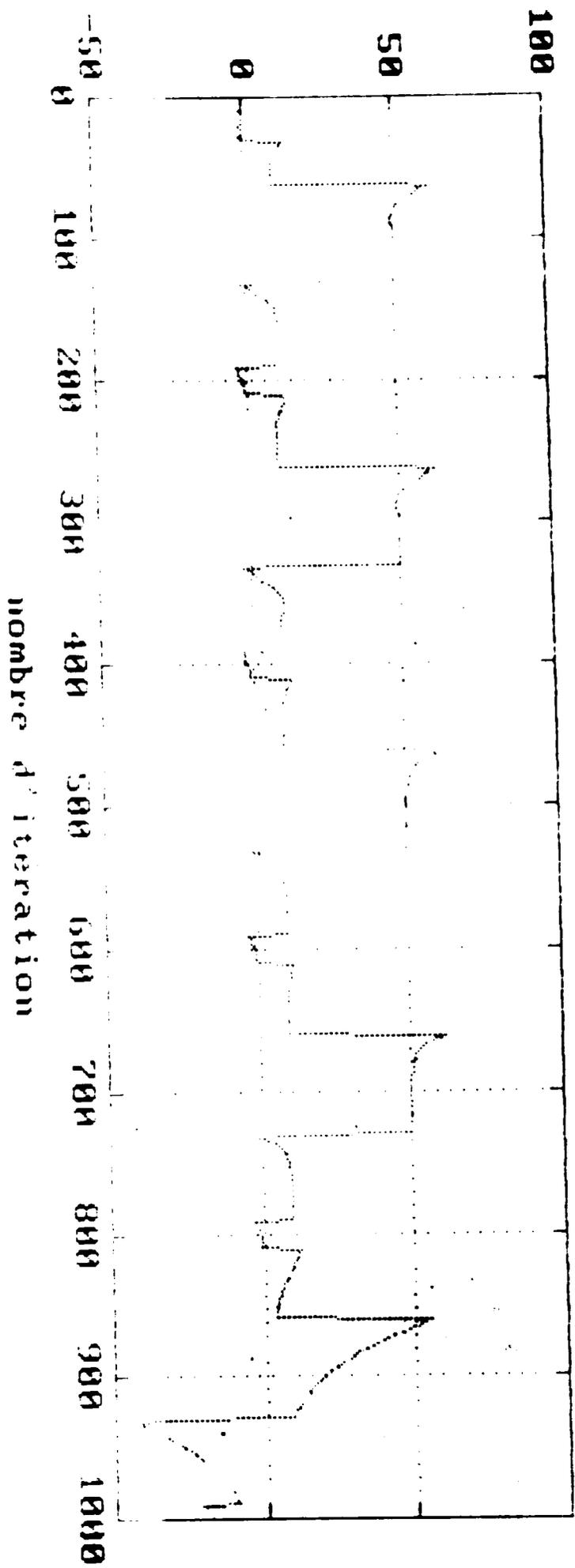


Fig VI-25 TEST7 GMV

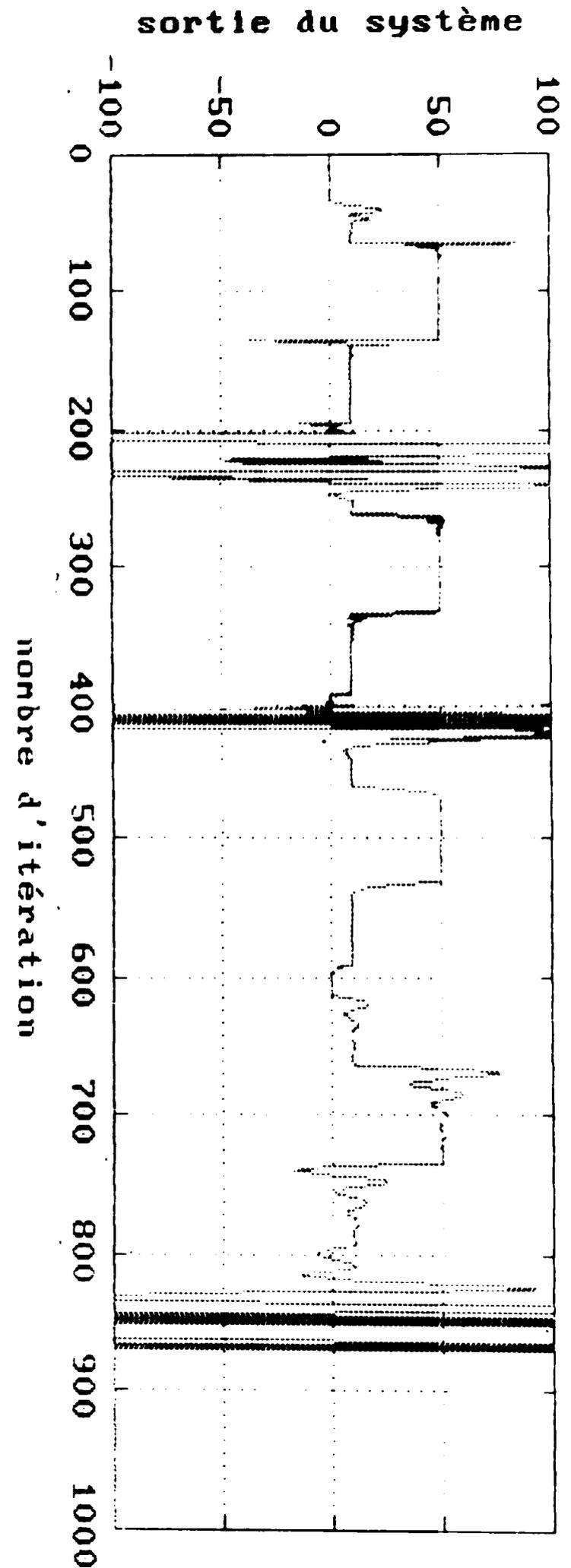
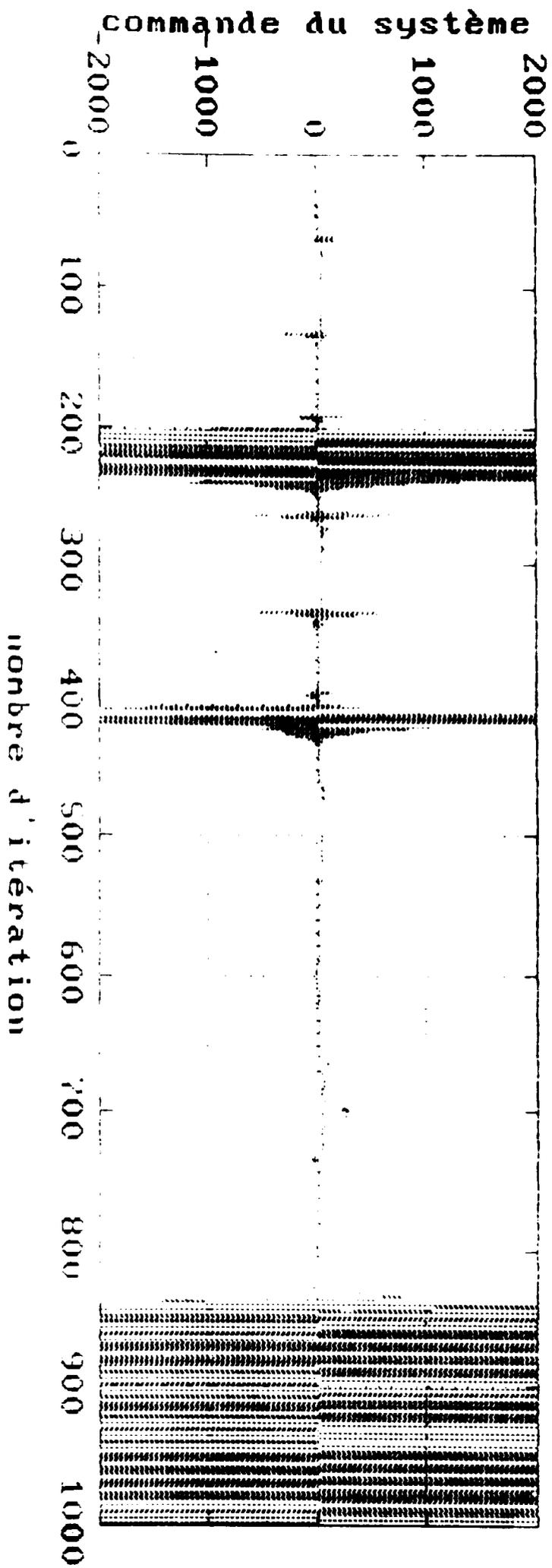


Fig VI-26 TEST 7 Placement de pôles

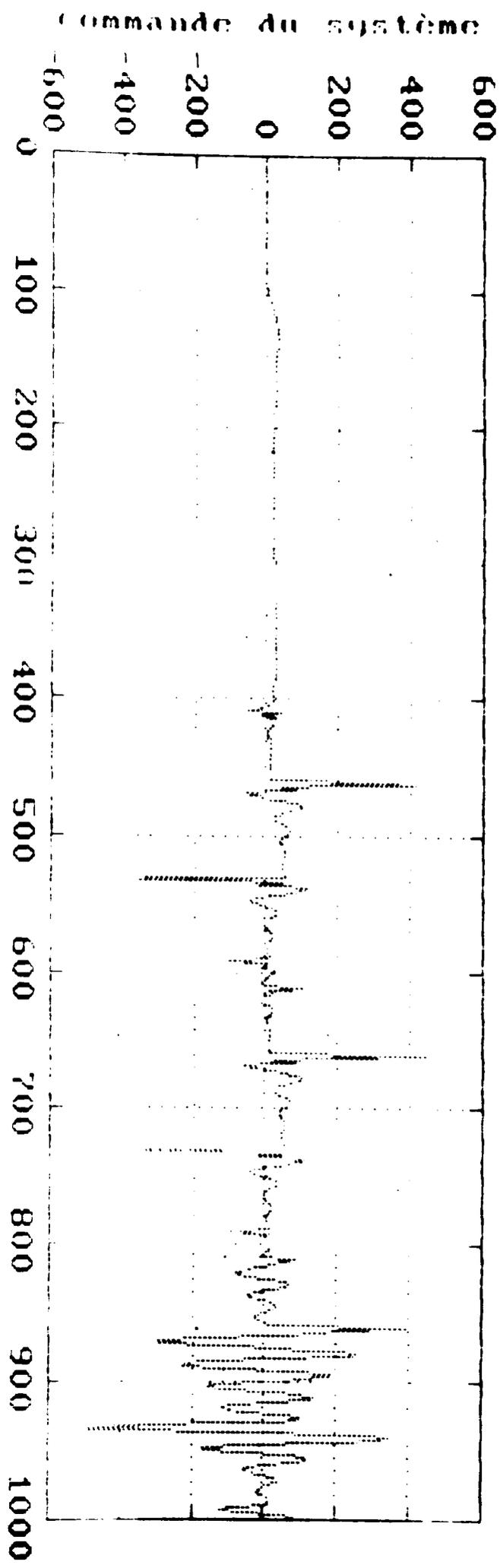
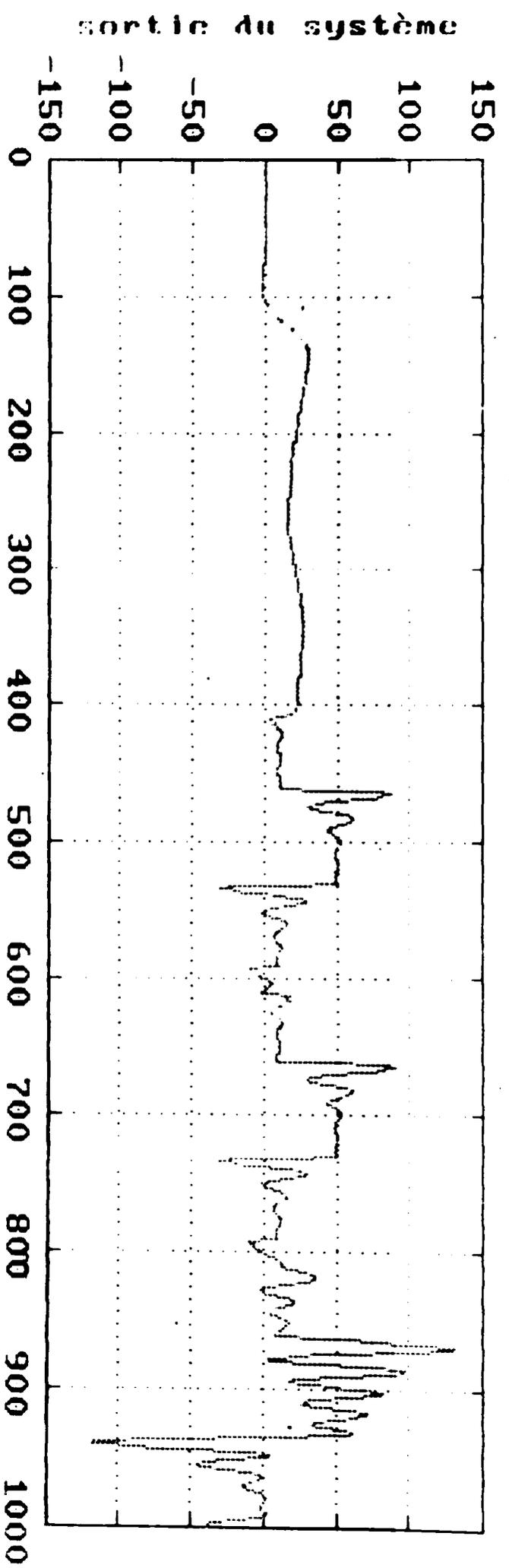
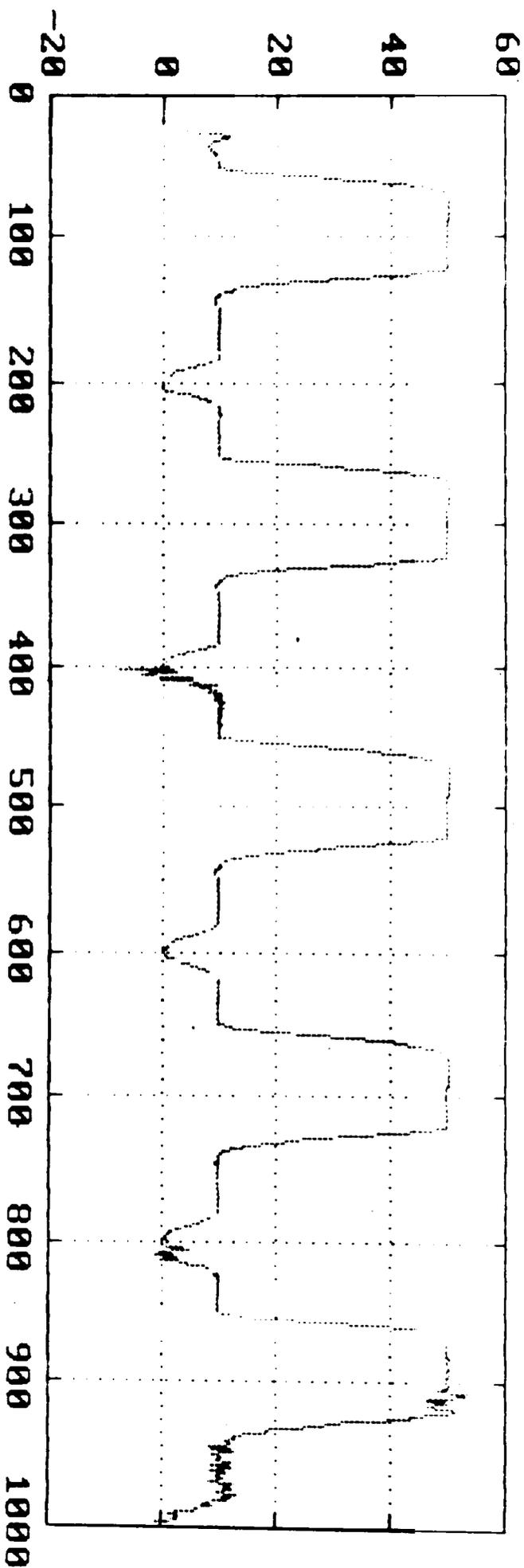


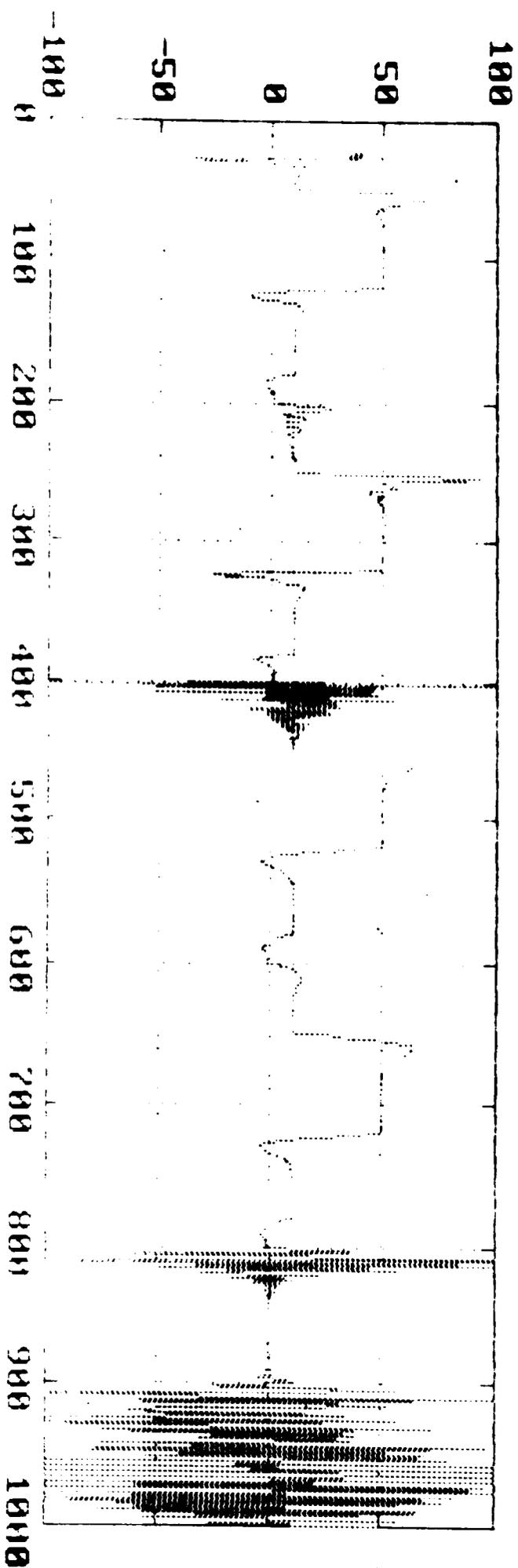
Fig. 27 TEST 7 LQG

sortie du système



nombre d'itération

commande du système



nombre d'itération

Fig V-28 TEST 7 GPC

CONCLUSION

Sans prétendre faire le tour d'horizon de toutes les méthodes de commande adaptative, ce mémoire donne néanmoins une idée sur les concepts de base utilisés par les différentes méthodes de commande self-tuning.

Les tests montrent qu'on peut réaliser des algorithmes self-tuners, capables de résoudre des problèmes combinés de régulation et de poursuite sans trop de connaissance sur le système à commander.

Ainsi il suffit de connaître la sortie du système à chaque instant et de supposer une certaine paramétrisation du modèle pour espérer pouvoir le commander correctement, abstraction faite de certains choix spécifiques du concepteur inhérents à la technique utilisée; à savoir.

-choix du polynôme $T(z^{-1})$ pour le placement de pôles.

-choix des polynômes $p(z^{-1})$, $q(z^{-1})$ et $r(z^{-1})$ pour G-M-V.

-choix du facteur de pondération, de $p(z^{-1})$ et de $q(z^{-1})$ pour LQG.

-choix du facteur de pondération, de N_u et de N_j pour GPC.

Pour les systèmes simples (ordre peu élevé stable ou instable, sans retard ou avec retard connu ou constant, à phase non minimale), toutes les méthodes étudiées donnent des résultats acceptables mis à part le placement de pôles qui présente en sortie des oscillations plus ou moins importantes, dues à l'absence de facteur de pondération dans la synthèse de la loi de commande.

Concernant les systèmes plus complexes tel que le modèle 7 (modèle variable et retard variable), seule la méthode GPC donne un résultat satisfaisant alors que les autres méthodes n'arrivent pas surmonter les handicaps de la surparamétrisation (LQG et placement de pôles) et du retard inconnu ou variable (GMV).

Il ressort de cette étude que la méthode GPC est plus générale dans la mesure où elle a réussi à surmonter les handicaps des autres méthodes, telle que voulue par les auteurs [11].

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - LANDAU, I. D : Identification et Commande des systèmes -1988-éditions hermes
- 2 -KALMAN,R.E : 'Design of self optimising control system ' . Trans.ASME , 1958 ,pp 486-487
- 3 - ASTROM,K.J and WITTENMARK,B : ' On self-tuning regulators ' .Automatica ,1973, 9, pp: 185-199
- 4 -CLARKE, D.W and GAWTHROP, P.J : ' Self-tuning controler ' .PROC.IEE, Vol.122, N°9, 1975, pp 929-934
- 5 -CLARKE, DW and GAWTHROP, P.J : ' Self-tuning control ' .PROC.IEE, Vol.126, N° 6, juin 1979.
- 6 - WELLSTEAD, P. E. EDMUNDS, J. M., PRAGER, D. L., and ZANKER, P.: ' Self-tuning pole-zero assignment regulators', Int. J. Control, 1979. Vol 30, pp: 1-26.
- 7-WELLSTEAD, P. E. and ZANKER, P. ' Servo-self tuners' , Int. J. Control, Vol 30, 1979 pp.27-35.
- 8-CAMERON , F. and SEBORG, D. E. 'A self-tuning controller with a PID structure'. Int. J. Control, 1983, Vol. 38, N°2, pp:401-417.
- 9- CLARKE, D.W; KANJILAL, P.P and MOHTADI, C : 'A generalized LQG approach to self-tuning control ' .Part I. Int. J. Control , 1985,Vol. 41, No 6, pp:1509-1523.
- 10 - CLARKE, D.W ; KANJILAL, P.P and MOHTADI, C : ' A generalized LQG approach to self-tuning control ' . Part II. Int. J.Control ,1985 .Vol 41, N° 6, pp: 1525-1544.
- 11 - CLARKE, D.W; MOHTADLI, C and TUFFS,P.S : 'Generalized predictive control : A new self-tuning algorithm ' . Part I ,Automatica , 1987 ,Vol 2, pp: 137- 148 .