République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université de Constantine

Institut d'électronique

Thèse

en vue de l'obtention du

Diplôme de Magister

en électronique

OPTION : Micro-ondes

Modélisation du spectre des ondes micro-acoustiques. Contribution aux ondes SSBW. Application au $LiNbO_3$ et $LiTaO_3$

Présentée par : **Mr. BELATTAR Mounir**

Soutenance prévue en Mars 1996
devant le jury suivant

MM :	A. BOUKAABACHE	M.C.	U. Constantine	Président
	M. BENSLAMA	M.C.	U. Constantine	Rapporteur
	F. DJAHLI	M.C.	U. Setif	Examinateur
	A. BENGHALIA	M.C.	U. Constantine	Examinateur
	A. CHAABI	C.C.	U. Constantine	Invité

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué à l'Institut d'Electronique de l'Université de Constantine.

A ce titre je remercie vivement Monsieur *Malek Benslama* Maitre de Conférences à l'Institut d'Electronique en me confiant un travail touchant le domaine de l'acoustoélectricité. Je lui suis extrêmement reconnaissant des encouragements et des conseils qu'il m'a sans cesse prodigués. Qu'il trouve l'expression de mon profond respect et ma sincère gratitude.

Je voudrais témoigner ma profonde reconnaissance à Monsieur *Benatia Dj[illegible]* enseignant à l'Université de Batna, pour son aide inappréciable, pour sa participation active tout au long de mes travaux, ainsi que pour les nombreuses discussions, où j'ai puisé tant d'idées. Son amitié a été constante, et m'a beaucoup soutenu; je lui en suis très reconnaissant.

Monsieur *F.Djahli*, Maitre de Conférence à l'Institut d'Electronique de l'Université de Setif, accepta immédiatement de se déplacer pour participer au jury et examiner cette thèse; je le remercie vivement.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Messieurs les Maitres de Conférences *A.Boukabache*, *A.Benghalia* et *A.Chaabi*, qui se sont intéressés à mon étude et qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury.

Qu'il me soit permis d'associer dans une même pensée amicale tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail; qu'ils trouvent tous ici l'expression de ma profonde sympathie.

À mes parents.

À mes frères et sœurs.

À toute ma famille.

À tous mes amis et en particulier D. Talbi, C. [illegible] et

[illegible]. Abdelliche.

SOMMAIRE

Pages

LEGENDE DES FIGURES

INTRODUCTION :

La bande micro-onde du spectre électromagnétique est d'une grande importance à cause de ses propriétes de transmission de l'information .Jadis, les dispositifs de traitement de signal à ces fréquences étaient les guides d'ondes et les cables coaxiaux.Cependant,la conversion d'une information se propageant à la vitesse de la lumière à une vitesse plus faible, nécessite l'utilisation de nouveaux dispositifs de dimensions plus faibles.Si l'information micro-onde se propage sous forme d'ondes acoustiques, l'utilisation de tels dispositifs est indispensable, vu que la vitesse d'une onde acoustique est cinq fois plus faible que celle d'une onde hyperfréquence .

Heureusement, pour faire cette conversion,plusieurs solides cristallins sont piézoélectriques, c'est à dire qu'on appliquant un champ électrique il resulte une contrainte mécanique et vice versa.Par la déposition d'électrodes métalliques sur les surfaces des cristaux, la conversion de l'énergie micro-onde en énergie acoustique et vice versa est devenue possible .

L'utlisation des dipositifs micro-ondes pour le traitement de signal a crée le besoin d'étudier la théorie des ondes acoustiques et les classer pour plusieurs applications.Plusieurs structures d'ondes acoustiques peuvent être utilisées pour la conception de tels dispositifs,citons :lignes à retard, filtres, decodeurs, oscillateurs, etc ...

Les différents types d'ondes acoustiques qui peuvent être utilisées sont, les ondes de volume planes, les ondes acoustiques de surface (SAW), les pseudo ondes acoustiques de surface (PSAW), et les ondes de volume transversales à polarisation horizontale (*surface skimming bulk waves*) SSBW .

Le but de ce travail, est d'étudier ces ondes acoustiques suivant plusieurs orientations cristallographiques de certains matériaux piézoélectriques, tels que le Noibate de Lithium et le Tantalate de Lithium. En particulier, les ondes acoustiques se propageant dans une structure cristalline multicouches, et le spectre d'ondes acoustiques excitées par un transducteur interdigité (IDT) sont étudiés .

Dans le premier chapitre, nous donnons des notions préliminaires sur le piézoélectricité d'un cristal, et l'anisotropie est mise en évidence à l'aide de la surface de lenteur tracée à partir des équations de Christoffel.

Le second chapitre, expose une méthode permettant la recherche des différentes ondes élastiques émises dans un substrat piézoélectrique à l'aide d'un transducteur interdigité, ces ondes sont ,les ondes acoustiques de surface, les pseudo ondes acoustiques de surface, et les ondes de volume. Le principe de la méthode est de varier la vitesse de phase de l'onde et voir son éffet sur les constantes d'atténuation, et suivant les valeurs de ces dernières on décide s'il y a telle ou telle type d'onde. Parmi les ondes de volume pouvant exister, les ondes T.H ou les ondes de volume rampantes à la surface, ces ondes ont la propriété d'être interceptées par un transducteur dépodé sur la surface d'un cristal; ces ondes sont étudiées en detail dans le troisième chapitre. Dans le quatrième chapitre, à l'aide des integrales de Fourier, nous définissons la contribution de chaque type d'onde au potentiel électrique, citons; la contribution électrostatique, la contribution de l'onde de surface, et la contribution de l'onde de volume au potentiel électrique.Les deux premières contributions sont évaluées analytiquement, tandis que la dernière ne peut être évaluée que numériquement, pour cela nous utilisons une interpolation polynomiale basée sur la méthode des moindres carrées, et une integration par la méthode de Gauss pour l'évaluer.

Les méthodes analytiques, et la méthode numérique, ont permis d'évaluer chaque contribution au potentiel électrique, cependant elles ont certaines limitations, ce qui nous a poussés à utiliser une méthode géométrique dans le même but, et qui est plus générale.

A la fin, nous finissons par un bilan des puissances des differentes ondes acoustiques du spectre, nous partons par la formule de la puissance, et en tournant l'axe de propagation Z, du fait de l'anisotropie des materiaux utilisés, les caractéristiques de ces derniers vont changer, ce qui entraine une variation des flux des puissances.Donc, dans le but de mettre en evidence l'anisotropie des materiaux utilisés, les flux des puissances des différentes ondes du spectre sont représentés en fonction de l'angle de coupe, obtenu par une simple rotation de l'axe de propagation Z.

CHAPITRE I

PROPAGATION D'ONDES ELASTIQUES DANS UN CRISTAL : GENERALITES

I 1 INTRODUCTION

Le mouvement des particules d'un corps est composé d'une partie correspondant au corps indéformable (translation et rotation) et d'une partie liée à la déformation de ce corps [1].

Cette deformation fonction de l'éffort qui la produit est connue sous le nom de la théorie de l'élasticité, cette dernière n'est qu'un modèle simplifié établi à partir d'un certain nombre d'hypothèses, telles que :

- Réversibilité et linéarité des déformations afin d'obéir à la loi de *Hooke*.

- Homogénéité des corps étudiés.

Cependant, les matériaux utilisés dans ce domaine présentent souvent d'autres propriétés telles que :

- Piezoélectricité, anisotropie, viscoélasticité.

I-2 DEFINITION DE LA PIEZOELECTRICITE :

La piezoélectricité est la propriété que possède certains corps de ce polariser électriquement sous l'action d'une tension mécanique (effet direct), et de se déformer lorsqu'un champ électrique leur est appliqué (effet inverse) .

La piézoélectricité, interdépendance des propriétés élastiques et électriques existe dans certains matériaux, est intimement liée à l'étude des ondes élastique [1,2,3].

I-3 EQUATIONS DE LA PIEZOELECTRICITE :

Par application d'un champ électrique E de composantes E_k, il apparait des forces intermoléculaires [3], donc des contraintes internes T^E_{ij} exprimées par la relation :

$$T^E_{ij} = e_{kij} E_k \qquad \text{(I-1)}$$

où . e_{kij} tenseur de rang 3x3 des constantes piézoélectriques.
D'aprés la loi de *Hooke*, la somme des contraintes (internes et externes) vaut :

$$T_{ij} + T^E_{ij} = C^E_{ijkl} S_{kl} \qquad \text{(I-2)}$$

où : C^E_{ijkl} sont les composantes du tenseur de rigidité élastique caractéristique des propriétés du milieu .
et : S_{kl} sont les composantes du tenseur de déformation.
En reportant l'expression des contraintes internes dans la relation (I-2), on aboutit à :

$$T_{ij} = C^E_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \qquad \text{(I-3)}$$

Quant à la polarisation électrique, elle est due à la fois à l'effet du champ électrique, et à l'action des déformations mécaniques. L'induction électrique s'écrit alors :

$$D_j = \varepsilon_{jk} E_k + e_{jkl} S_{kl} \qquad (I\text{-}4)$$

avec : ε_{jk} tenseur de rang 3x3 des constantes diélectriques .

E_k composantes du champ électrique appliqué .

Le champ électrique E dérive d'un potentiel ϕ, et a comme composantes :

$$E_k = \frac{-\partial\phi}{\partial X_k} \qquad (I\text{-}5)$$

En employant comme variables indépendantes, le potentiel électrique ϕ et le déplacement mécanique U_l, on peut exprimer les contraintes T_{ij} et les déplacements électriques D_j par :

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_k} \{ C^E_{ijkl} U_l + e_{kij} \phi \} \qquad (I\text{-}6)$$

$$D_j = \frac{\partial}{X_k} \{ e_{ikl} U_l - \varepsilon_{jk} \phi \} \qquad (I\text{-}7)$$

On note que les constantes C^E et ε employées sont exprimées respectivement à champ électrique constant et à déformation constante. Sachant que l'équation du mouvement s'écrit par :

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{X_j} \qquad (I-8)$$

avec : $i,j = 1,2,3$.

et : ρ est la masse volumique du matériau.

L'équation (I-6) introduite dans l'équation du mouvement (I-8) donne :

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = C^E_{ijkl} \frac{\partial^2 U_l}{\partial X_j \partial X_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_j \partial X_k} \qquad (I-9)$$

et :

$$e_{jkl} \frac{\partial U_l^2}{\partial X_j \partial X_k} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial \phi^2}{\partial X_j \partial X_k} = 0 \qquad (I-10)$$

L'équation (I-10) est relative à un matériau isolant, l'élimination du potentiel électrique ϕ entre ces deux équations donne :

$$\rho \frac{\partial U_i^2}{\partial t^2} = C_{IJ} \frac{\partial U_i^2}{\partial X_j \partial X_k} \qquad (I-11)$$

avec : C_{IJ} sont les constantes durcies contractées définies pour les ondes planes par :

$$C_{IJ} = \left| C^{E}_{IJ} + \frac{(e_{Ij}\; n_j)(n_k\; e_{kJ})}{n_j\; \varepsilon_{jk}\; n_k} \right| \qquad \text{(I-12)}$$

avec : I,J =1,2..6

j,k = 1,2,3

où : n_j , n_k sont les cosinus directeurs .

I-4 EQUATIONS DE CHRISTOFFEL ET SURFACE DES LENTEURS

Le déplacement des particules et le potentiel électrique relatifs à une onde plane de pol a risation U^{c}_{i}, se propageant dans une direction déterminée par les cosinus directeurs n , et la vitesse de phase : $V_p = \frac{\omega}{k}$, sont de la forme :

$$U_i = U^{c}_{i} \exp i(\omega t - k\, n_j\, x_j) \qquad \text{(I-13)}$$

$$\varphi = \phi_0 \exp i(\omega t - k\, n_j\, x_j) \qquad \text{(I-14)}$$

k : étant le monbre d'onde. En se rapportant dans le système d'équations (I-9) et (I-10) et en posant :

$$\begin{cases} \Gamma_{il} = C^E_{ijkl}\, n_j\, n_k \\ Y_i = e_{kij}\, n_j\, n_k \\ \varepsilon = \varepsilon_{jk}\, n_j\, n_k \end{cases} \tag{I-15}$$

Ce système devient :

$$\begin{cases} T_{il}\, U^c_l + Y\, \phi_o = \rho\, V_p^2\, U^o_i \\ \\ Y_l\, U^o_l - \varepsilon\, \phi_o = 0 \end{cases} \tag{I-16}$$

L'élimination du potentiel ϕ_o conduit à l'équation tensorielle suivante :

$$\bar{\Gamma}_{il}\, U^c_l = \rho\, V_p^2\, U^c_i \tag{I-17}$$

où $\bar{\Gamma}_{il}$ est la matrice de *Christoffel* définie par :

$$\bar{\Gamma}_{ij} = \Gamma_{il} + \frac{Y_i\, Y_l}{\varepsilon} = C_{ijkl}\, n_j\, n_k \tag{I-18}$$

Cette matrice 3-3 est symétrique. Ses trois valeurs propres χ_i, sont donc réelles et ses trois vecteurs propres sont orthogonaux. Il leurs correspond donc trois ondes planes se propageant dans une même direction. Les vitesses de phase V_p de ces ondes planes se propageant dans un solide piézoélectrique illimité, s'obtiennent par l'intermédiaire des valeurs propres : $\chi_i = \rho\, V_p^2$ en résolvant l'équation suivante:

$$|\bar{\Gamma}_{il} - X_i\, \delta_{il}| = 0 \qquad \text{(I-19)}$$

Si le milieu de propagation est anisotrope, ces trois polarisations définissent les trois ondes planes (Fig I-1):

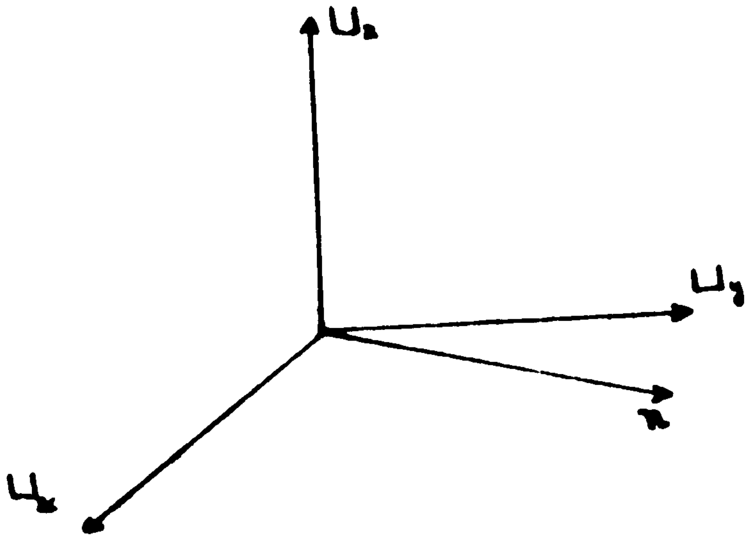


Fig I-1 :Polarisation des trois ondes planes de volume
(propagation suivant la direction n) .

- Onde quasi-longitudinale (sa polarisation U_y est trés voisine de la direction de propagation.

- Onde transversale quasi-verticale de polarisation U_z (onde transversale rapide).

- Onde transversale quasi-horizontale de polarisation U_x (onde transversale lente).

A partir de l'équation séculaire, la relation $\omega = k\, V_p$ conduit à l'équation de dispersion suivante :

$$\Omega\,(\,k_1/\omega, k_2/\omega, k_3/\omega\,) = \left|\frac{k^2}{\omega}\Gamma_{il} - \rho\,\delta_{il}\right| \qquad \text{(I-20)}$$

D'aprés l'équation de la lenteur :

$$k_i/\omega = 1/V_p \qquad \text{(I-21)}$$

l'équation de dispersion, définie pour ω fixe une surface caractéristique dans l'éspace des lenteurs, relatives à chacune des trois ondes planes, (voir Figure I-2), "surface des lenteurs" indique si le milieu est anisotrope ou ne l'est pas, et détermine la variation de la vitesse de phase en fonction de la direction de propagation, et donne aussi la direction du flux d'énergie qui lui est normal en tout point [2], (voir annexe A).

CHAPITRE II
ONDES ELASTIQUES DANS UN SOLIDE CRISTALLIN MULTICOUCHES

II-1 INTRODUCTION :

L'utilisation d'un transducteur interdigité (IDT) déposé sur un substrat piézoélectrique permet de génerer des ondes élastiques n'ébranlant qu'une faible épaisseur du substrat appellées ondes de surface.Cependant, en plus de ces ondes le transducteur excite toujours un spectre d'ondes, considérées bien longtemps comme modes parasites, telles que les pseudo ondes de surface ou ondes de fuite découvertes par Lim et Farnell [4], et des ondes qui pénetrent dans le substrat, appellées ondes de volume. En outre, un des plus importants travaux de Tseng montrait l'éxistance d'ondes laterales dans le solide cristallin anisotrope , s'atténuant en s'éloignant de la source d'une puissance de 3/2 de la distance ($X^{3/2}$) , ces ondes se propageant parallèlement à la surface sont appellées les ondes SSBW (surface skimming bulk waves) c'est à dire ondes de volume rampantes à la surface ou ondes de volume à polarisation transversale [4,5] .

II-2 EXCITATION DES ONDES ACOUSTIQUES PAR UN IDT:

Un IDT est constitué de deux électrodes métalliques en forme de peigne déposées sur un substrat piézoélectrique, fig II-1 .

La tension électrique V appliquée entre ces deux électrodes crée un champ électrique E.En raison de l'effet piézoélectrique, ce champ E provoque un déplacement des particules dans le substrat, donnant naissance à:
- Ondes de surface
- Ondes de volume

II-2-1 PRINCIPE DE L'EXCITATION DES ONDES DE SURFACE:

Ces ondes sont émises pérpendiculairement aux doigts des peignes. Dans le cas où la tension appliquée est sinusoïdale, les vibrations des particules ne s'ajoutent de façon constructive que si la période spatiale $\lambda_0/2$ du transducteur est égale à une demi longeur d'une onde acoustique [2], figII-2 .L'effet cumulatif n'a donc lieu qu'à une seule fréquence f_s appellée fréquence de synchronisation , et donnée par :

$$f_s = \frac{V}{\lambda_0} \qquad \text{(II-1)}$$

En outre, le détection de l'onde de surface peut se faire par un deuxième IDT déposé sur le chemin de propagation .

II-2-2 PRINCIPE DE L'EXCITATION DES ONDES DE VOLUME :

L'étude des ondes de volume éxcitées par un IDT, est due à Lewis, Il a montré que les coupes à simple rotation de quartz, lorsque le IDT est tourné d'un angle de 90° par rapport à l'axe cristallin X seule l'onde SSBW est générée [2,6].Dans un milieu anisotrope, les caractéristiques de propagation dependent de la direction de propagation .De plus, le flux d'énergie ne se propage pas orthogonalement aux front d'onde [6] , FigII-3 .

La condition de l'interference constructive en terme de fréquence, doit faire apparaitre l'interdépendance entre la vitesse de phase et la direction de propagation θ .

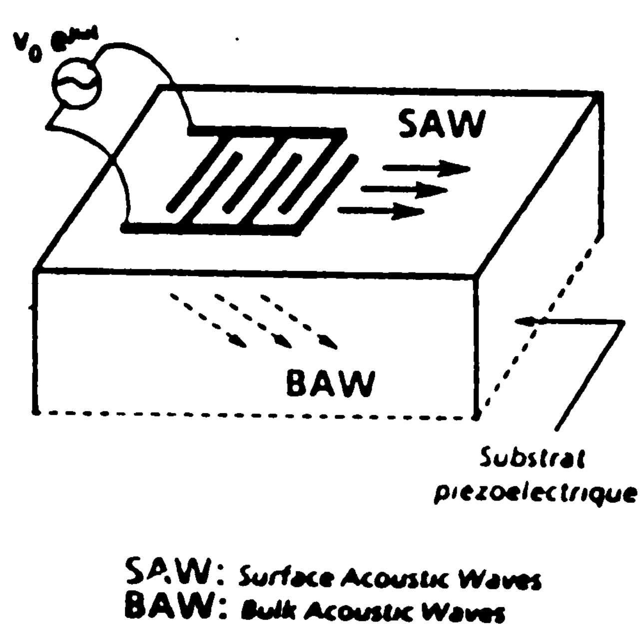


Fig II-1:Génération des différentes ondes élastiques
par un transducteur interdigité

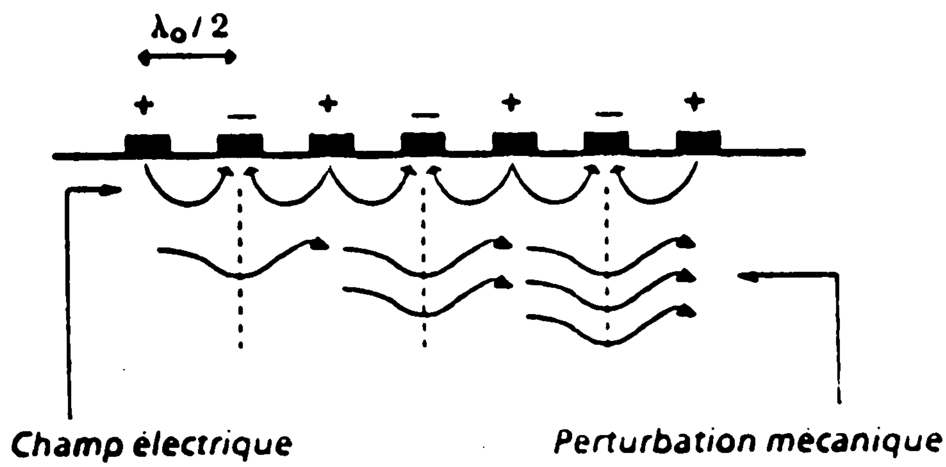


Fig II-2:Interférences constructives
en onde de surface

$$\cos\theta = \frac{V_p(\theta)}{\lambda_o f} \qquad (II-2)$$

La détection par un deuxième IDT, ne peut se faire que si la condition de l'interférence constructive est réalisée. Le IDT de détection, étant deposé sur la surface du milieu semi-infini,

seule l'onde de volume dont le flux d'énergie est parallèle à la surface (onde rampante) peut être détectée [2,6] . Ceci est le cas à la fréquence de coupure f_c donnée par :

$$f_c = \frac{V_p(\theta)}{\lambda_c \cos\theta_{cr}} \qquad (II-3)$$

où : θ_{cr} est l'angle critique pour lequel le flux d'énergie est parallèl à la surface du matériau .Dans le cas d'un milieu fini (plaque), le transducteur de détection peut intercepter en plus de l'onde SSBW l'onde refléchie une ou plusieurs fois sur la surface inférieure [2] .

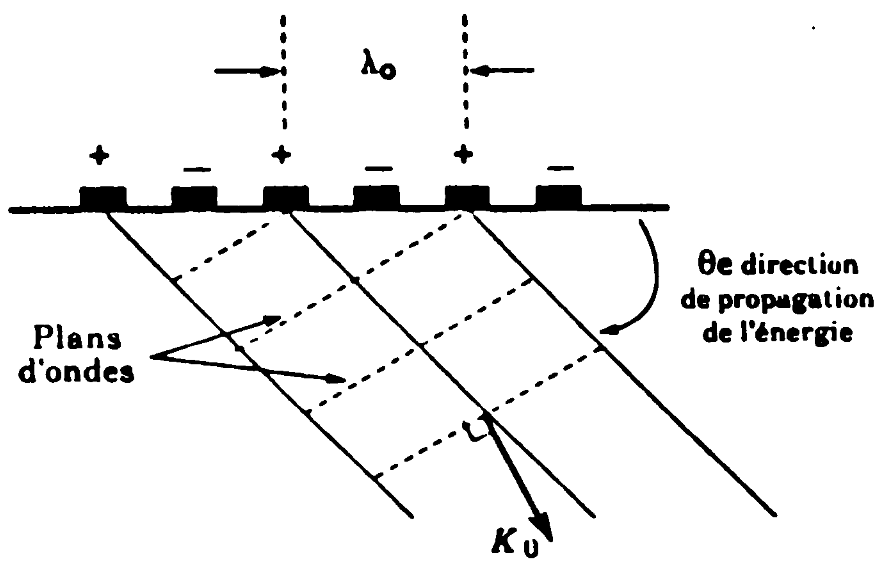


Fig II -3 :Interférences constructives relatives aux ondes de volume

II-3 STRUCTURES MULTICOUCHES:

La géometrie associée à une structure multicouche, consiste en N couches d'un solide cristallin, qui peut ou ne peut être piézoélectrique, limité par l'air ou du vide à la surface supérieure et un substrat semi-infini à la surface inférieure . La direction de propagation est x_1 et x_3, elle est normaleà la surface de la couche. La $p^{ème}$ couche a une épaisseur t_p et s'étend de $x_3 = L_{p-1}$ jusqu'à $x_3 = L_p$, Fig II-4 .

Le substrat qui s'étend de $x_3 = 0$ à x_3 tendant vers l'infini peut être l'air (vide),un solide cristallin piézoélectrique ou non piézoélectrique .Cependant, si $t_N = \infty$ et donc $L_n = \infty$, la région du vide n'existera plus.De plus un mince conducteur de dimensions infinies peut être placé à $x_3 = L_N$ ou à $x_3 = 0$, si le substrat est le vide.Le plan $x_1 - x_3$ ($x_2 = 0$) est défini comme plan sagittal et les couches sont supposées infinies dans le plan $x_1 - x_2$, [4,7] .

II-3-1 EQUATIONS DU MOUVEMENT DES PARTICULES ET DU POTENTIEL DANS LA P EME COUCHE :

Dans la $p^{ème}$ couche , les équations d'ondes acoustiques couplées avec les équations de *Maxwell* dans l'approximation quasistatique sont données [2] par :

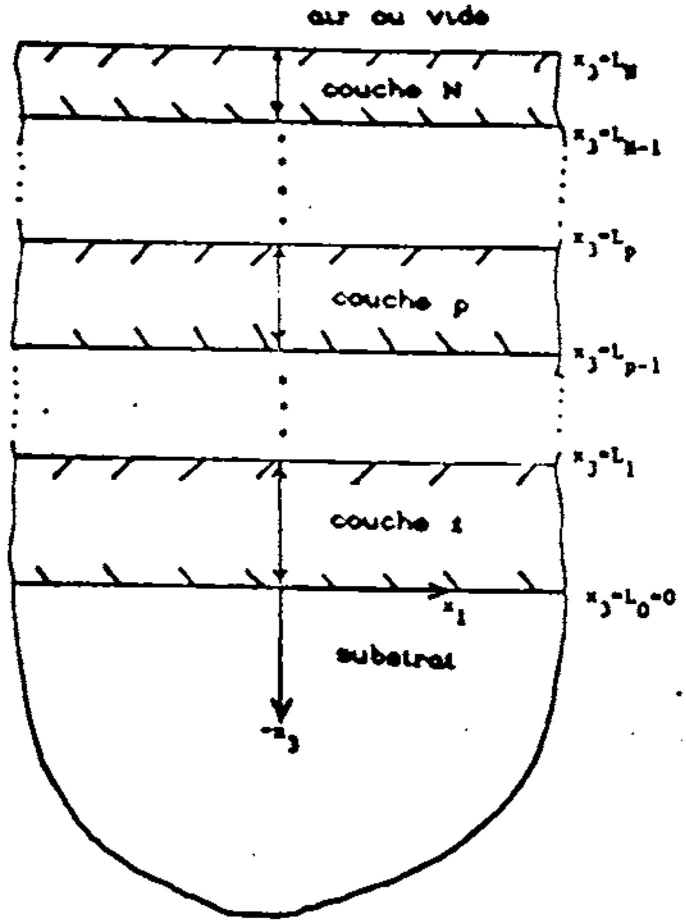


Fig II-4 :Strucrure multicouches

$$\rho\,\ddot{U}_i = T_{ij} \qquad (II-4)$$

et

$$D_{m,m} = 0 \qquad (II-5)$$

ou : ρ :Densité de la $p^{ième}$ couche .

U_i :Le déplacement dans la direction x_i .

T_{ij} :tenseur de contraintes .

et D_m :Déplacement électrique dans la direction x_m .

Le tenseur de contraintes et le déplacement électrique sont définis par les relations (I-3) et (I-4), le tenseur de déformation et le champ électrique sont respectivement liés aux déplacements et au potentiel électrique comme suit :

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left[U_{k,l} + U_{l,k}\right] \qquad (II-6)$$

et

$$E_i = -\,\phi_{,i} \qquad (II-7)$$

En substituant les équations (II-6) et (II-7) dans les équations (I-3) et (I-4), on obtient :

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\,C_{ijkl}\left[U_{k,l} + U_{l,k}\right] + e_{kij}\,\phi_{,k} \qquad (II-8)$$

Et en substituant les équations (II-7) et (II-8), dans les équations (II-4) et (II-5) , on obtient :

$$C_{ijkl}\, U_{k,li} + e_{kij}\, \phi_{,ki} = \rho\, \ddot{U}_j \qquad \text{(II-9)}$$

et :

$$e_{ikl}\, U_{k,li} - \varepsilon_{ik}\, \phi_{,ki} = 0 \qquad \text{(II-10)}$$

Les équations (II-9) et (II-10) constituent les équations différentièlles de base de la propagation de l'onde acoustique dans la $p^{ième}$ couche . Dans le vide ou l'air les déplacements mécaniques sont nuls [7],et le potentiel est obtenu en resolvant l'équation de *Laplace* donnée par :

$$\nabla^2 \phi = 0 \qquad \text{(II-11)}$$

II 3 2 FORMES DE LA SOLUTION DANS LA P ^{EME} COUCHE:

La solution générale pour le déplacement et le potentiel électrique pour la $p^{ème}$ couche est donnée par :

$$U_i = \alpha_i \exp\,(\, ik\,\beta\, x_3 + ik\, x_1\, (1+ i\gamma\,) - ikvt\,)$$

et (II-12)

$$U_4 = \alpha_4 \exp\,(\, ik\,\beta\, x_3 + ik\, x_1\, (1 + i\gamma) - ikvt\,)$$

où :

k :Vecteur d'onde dans la direction x_1.

v :Vitesse de propagation de l'onde dans la direction x_1 .

β :Atténuation (croissance) exponentielle dans la direction x_3

γ :Atténuation (croissance) exponentielle dans la direction x_1

Pour simplifier l'analyse mathématique , on définit :

$$
\begin{aligned}
M_{ijkl} &= C_{ijkl} \\
M_{ij4l} &= e_{lij} \\
M_{i4jl} &= e_{ijl} \\
M_{i44l} &= -\varepsilon_{il}
\end{aligned}
\qquad \text{(II-13)}
$$

De plus, les notations pour les constantes élastiques C_{ijkl}, piézoélectriques e_{ijk} et le tenseur M_{ijlk}, peuvent être simplifiées en utilisant les indices de *Voigt* [7]. La méthode de *Voigt* consiste à simplifier les constantes élastiques C_{ijkl}, piézoélectriques e_{ijk} . et le tenseur M_{ijkl} à des constantes normales à deux indices.Ces nouvelles constantes sont : C_{mn} , e_{in} et M_{mn} respectivement , où m et n sont définis en fonction de i, j, k et l comme suit :

$$
m = \begin{cases}
i & \text{si} \quad i = j \neq 4 \\
9 - i - j & \text{si} \quad 4 \neq i \neq j \neq 4 \\
2 + i + j & \text{si} \quad i \text{ ou } j = 4 \quad \text{et } i \neq j
\end{cases}
$$

et :

$$n = \begin{cases} k & \text{si} \quad k = l \neq 4 \\ 9 - k - l & \text{si} \quad 4 \neq k \neq l \neq 4 \\ 2 + k + l & \text{si} \quad k \text{ ou } l = 4 \text{ et } k \neq l \end{cases}$$

on aura **donc** :

$$M = \begin{bmatrix} C & e^T \\ e & \varepsilon \end{bmatrix} \qquad \text{(II-14)}$$

où : C est une matrice (6 × 6) , e (3 × 6) et ε (3 × 1) .

Le potentiel ψ est désigné par U_4 ,et le déplacement électrique D_i est désigné par T_{i4} pour : i = 1,4 .

En utilisant les nouveaux termes , les équations (II-9) et (II-10) seront exprimées en une seule équation comme suit :

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{3} M_{ijkl} \; U_{k,l} \qquad \text{(II-15)}$$

avec : i = 1,2,3,4 et j = 1,2,3.

En substituant l'équation (II-12) dans les équations (II-9) et (II-10) et en utilisant les nouveaux termes,on obtient quatre équations en α_i où : i = 1,4 , qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\left[A \right] \left[\alpha \right] = 0 \qquad (II-16)$$

$$\text{où : } \left[\alpha \right] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \qquad (II-17)$$

où : $\left[A \right]$ est une matrice (4 x 4) symétrique dont les élements sont définis dans l'annexe C et donnés par :

$$A_{ij} = M_{3ij3}\beta^2 + (M_{1ij3} + M_{3ij1}) (1 + i \gamma)\beta$$

$$+ M_{1ij3}(1+i\gamma)^2 - \rho \, V^2 \delta_{ij4} \qquad (II-18)$$

$$\text{où : } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \neq 4 \\ 1 & \text{si } i = j = 4 \,. \end{cases}$$

pour les α_i,le déterminant de A doit être nul .

$$DET\left[A \right] = 0 \qquad (II-19)$$

Le développement du déterminant donne en général un polynôme du $8^{ème}$ degré en β donné comme suit :

$$\sum_{i=0}^{8} B_i \beta^i = 0 \qquad \text{(II-20)}$$

où : les coéfficients sont complexes et fonctions de V et γ .

La solution donc de l'équation (II-20) donne 8 racines β, fonctions de V et γ.Une solution générale est une combinaison de ces 8 ondes partièlles,[7].Cependant,à cause de la symetrie ou à des considérations physiques, une ou plusieurs racines β vont être négligées, par conséquent,la solution générale du mouvement des particules et du potentiel électrique de la $p^{ème}$ couche peut être écrite sous la forme suivante :

$$U_i = \sum C_n \alpha_i^{(n)} \exp(ik\beta^{(n)} x_3 + ikx_1(1+i\gamma) - ikVt) \qquad \text{(II-21)}$$

avec : i = 1,2,3,4.

où :les α_i sont les vecteurs propres de l'équation (II-21) correspondant aux $\beta^{(n)}$ appropriées .Pour le vide ou l'air la solution précedente de l'équation du potentiel devient :

$$U_4 = \phi = \phi_0 \exp((ikx_1 - k \left| x_3 - x_3^0 \right| (1+i\gamma) - ikVt) \qquad \text{(II-22)}$$

où : x_3^0 est un point limite du vide et ϕ_0 est le potentiel à x_3^0.

II-3-3 COMPORTEMENT DES RACINES :

Les B_i du polynôme de l'équation (II-20) sont fonctions de la vitesse V et du facteur d'atténuation γ .On sait que V est lié au vecteur de propagation par la formule :

$$V = \frac{\omega}{k} \qquad \text{(II-23)}$$

où ω est la fréquence angulaire .

On va étudier le comportement des racines en fonction des valeurs décroissantes de k. La solution de l'équation (II-21) sera éxaminée au début pour γ = 0 puis, γ sera légèrement varié pour voir son effet sur les valeurs β.Pour γ = 0, les coefficients B_i du polynôme seront réels , donc les racines seront des paires complexes conjuguées ou bien réelles .Pour une vitesse plus faible que la plus faible vitesse d'onde de volume à polarisation transversale V_s toutes les racines seront des paires complexes conjuguées. Une paire complexe conjuguée peut être écrite comme suit :

$$\beta^{(1)} = \beta_{re} + i\,\beta_{im}$$
$$\beta^{(2)} = \beta_{re} - i\,\beta_{im} \qquad \text{(II-24)}$$

avec : $\beta_{im} > 0$

En substituant $\beta^{(1)}$et $\beta^{(2)}$dans l'équation (II-12) on obtient les expressions des déplacements U_i et du potentiel U_4 données par :

$$U_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)} \exp(i\ k\ \beta_{re} X_3 - k\ \beta_{im}\ x_3) \qquad \text{(II-25)}$$

$$U_i^{(2)} = \alpha_i^{(2)} \exp(i\ k\ \beta_{re} X_3 + k\ \beta_{im}\ x_3) \qquad \text{(II-26)}$$

Si le milieu s'étend à $x_3 = \infty$, $U_i^{(1)}(x_3 = \infty)$ tend vers l'infini, ce qui physiquement est inacceptable. Dans ce cas seul $U^{(2)}$ est acceptable, donc seules les racines à partie imaginaire négative sont retenues [5] .

Lorsqu'on augmente la vitesse, les racines tendent à se déplacer sur l'axe réel. Pour une vitesse égale à V_1, deux racines complexes conjuguées sont réelles et s'écrivent comme suit :

$$\beta^{(3)} = \beta_{re} \qquad \text{(II-27)}$$

En substituant (II-27) dans (II-12) , on obtient la forme suivante :

$$U_i^{(3)} = \alpha_i^{(3)} \exp(i\ k\ \beta_{re}\ x_3 + i\ k\ x_1\ ) \qquad \text{(II-28)}$$

L'équation (II-26) donne la forme d'une onde de volume se propageant dans le plan $x_1 - x_3$ en faisant un angle θ avec l'axe x_1, où :

$$\theta = \mathrm{arctg}(-\ \beta_{re}) \qquad \text{(II-29)}$$

A une certaince vitesse V_2, plus grande que V_1, une seconde paire de racines réelles apparait et conduit à une seconde paire d'onde de volume .Si on augmente de nouveau la vitesse on obtient pour certains cas une vitesse V_3; une troisième paire de racines réelles , donc une troisième paire d'ondes de volume [7], (voir Fig II-5) .

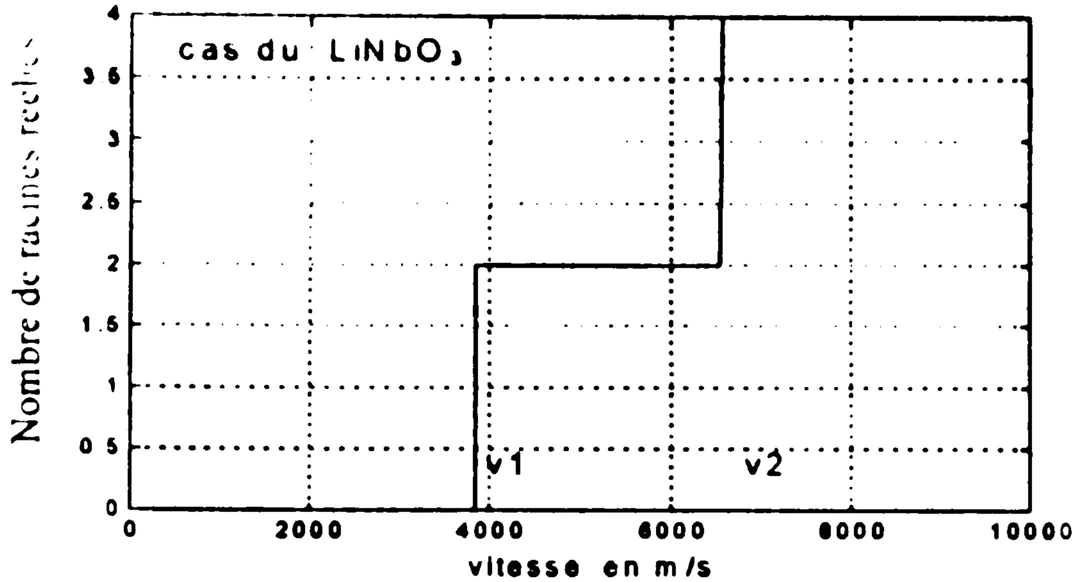
Dans le cas du $LiNbO_3$, on trouve $V_1 = 3846.8$ m/s obtenue pour $\beta = \mp 2.795$ e-2 , donnant ainsi une onde de volume ayant un vecteur de propagation faisant un angle $\theta_1 = 1.60°$ avec l'axe x_1. et $V_2 = 6572.6$ m/s obtenue pour $\beta_1 = \mp 1.35$ et $\beta_2 = \mp 1.066$ e-2 donnant ainsi deux ondes de volume qui se propagent en faisant des angles $\theta'_1 = 53.56°$ et $\theta'_2 = 0.61°$ avec axe x_1,et dans le cas du $LiTaO_3$, on trouve $V_1 = 3740.60$ m/s obtenue pour $\beta = \mp 2.526$ e-1 donnant ainsi une onde de volume ayant un vecteur de propagation faisant un angle $\theta_1 = 14.38°$

avec l'axe x_1,et $V_2 = 5557.8$ m/s obtenue pour $\beta_1 = \mp 1.291$ et $\beta_2 = \mp 3.298$ e-2 , donnant ainsi deux ondes de volume qui se propagent en faisant des angles $\theta'_1 = 52.23°$ et $\theta'_2 = 1.89°$ avec l'axe x_1.

II-3-4 CONDITIONS AUX LIMITES :

Les solutions d'ondes acoustiques à l'interface p et p + 1 doivent satisfaire les conditions aux limites à cette interface, et qui sont [1,7,8,9] :

(i) Les deplacements des particules et le potentiel électrique doivent être continus :



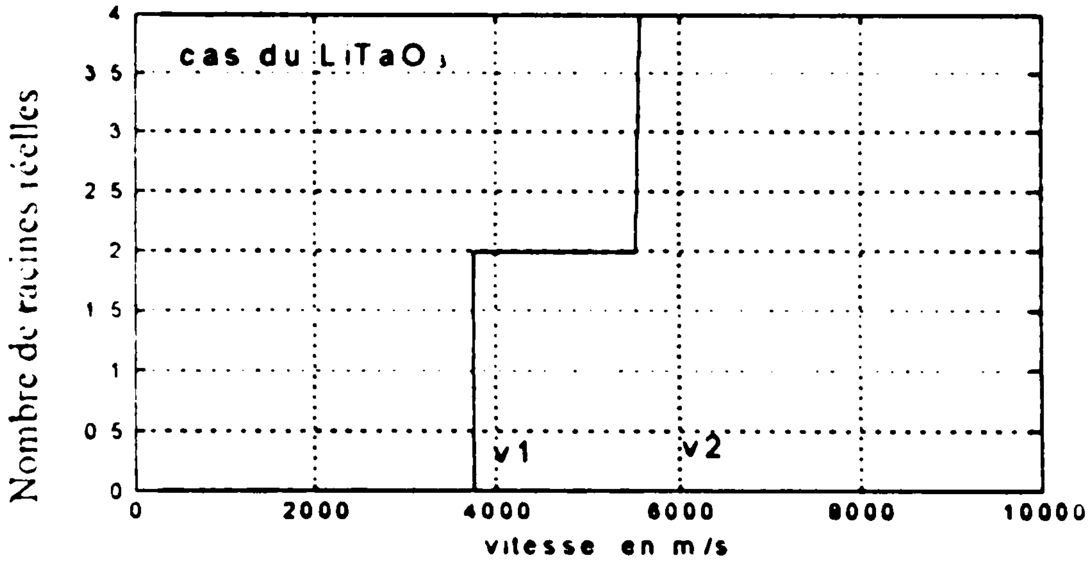


Fig. II-5 **Variations du nombre de racines réelles en fonction de la vitesse**

$$U_i(x_3=L_p)\Big|_{\text{couche } p} = U_i(x_3=L_p)\Big|_{\text{couche } p+1} \qquad \text{(II-30)}$$

(ii) Continuité des composantes des contraintes normales et des déplacements électriques :

$$T_{3k}(x_3=L_p)\Big|_{\text{couche } p} = T_{3k}(x_3=L_p)\Big|_{\text{couche } p+1} \qquad \text{(II-31)}$$

Pour une surface libre,ou une surface séparant un milieu cristallin et l'air à $x_3 = L_N$,on a les conditions suivantes :

(i) Continuité du potentiel électrique et des déplacements électriques :

$$U_4(\text{cristal-interface}) = U_4(\text{air-interface}) \qquad \text{(II-32)}$$

$$T_{34}(\text{ cristal-interface }) = T_{34}(\text{ air-interface }) \qquad \text{(II-33)}$$

(ii) Les composantes normales des contraintes sur la surface libre sont nullles :

$$T_{3k}(\text{ cristal-interface }) = 0 \qquad \text{(II-34)}$$

avec : k=1,2,3.

II-3-5 CAS SPECIAUX.

Pour certaines orientations de la couche, les composantes du déplacement des particules, U_1, U_2, U_3 et le potentiel électrique U_4 peut être découplés .Ce découplage a lieu lorsque le déterminant de la matrice A peut s'écrire sous forme de produit de deux ou plusieurs déterminants selon l'orientation choisie, et donnant ainsi cinq cas possibles donnés comme suit :

(i) Cas 1- Le cas piézoélectrique le plus général où il n'y a aucun découplage.

(ii) Cas 2- Le non piézoélectrique le plus général où U_1, U_2 et U_3 sont découplés de U_4 ,dans ce cas la matrice A s'écrit sous la forme suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-35)}$$

Donc le déterminant de A peut s'écrire sous forme de produit de $\det[A_1]$ et A_{44} où :

$$[A_1] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-36)}$$

Les ondes acoustiques nécessitent que le déterminant de A_1 soit nul,et sont associées à un potentiel nul.Le développement de ce déterminant donne un polynôme du sixième degré en β, et donne donc six racines β.Le terme A_{44} est une quantité électrique indépendante de la vitesse,et son annulation donne deux racines β, qui correspondent à une solution d'un potentiel élecrtique sans propagation de particules .

(iii) Cas-3 :Le cas piézoélectrique spécial où la matrice A est donnée sous la forme suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-37)}$$

Dans ce cas le déterminant de A s'écrit sous forme de produit de $\det[A_2]$ et A_{22} où A_2 est donnée par :

$$[A_2] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-38)}$$

Dans ce cas U_2 est découplé de U_1,U_3 et U_4, si le déterminant de A_2 est nul, on obtient six racines β, et U_2 dans ce cas est nul et le déplacement est confiné au plan sagittal. En outre si A_{22} est nul les déplacements U_1, U_3 et le potentiel électrique U_4 sont nuls simultanément. Le déplacement est perpendiculaire au plan sagittal est n'est associé à aucun potentiel élécrtique. Une onde appartenant à ce cas est dite onde de Rayleigh [1,4,8] .

(iv) Cas-4 Le cas piézoélectrique spécial où la matrice A est donnée comme suit :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-39)}$$

Dans ce cas le déterminant de A s'écrit sous forme de produit de $\det[A_3]$ et $\det[A_4]$ où A_3 et A_4 sont donnés par :

$$[A_3] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-40)}$$

et

$$[A_4] = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ A_{42} & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-41)}$$

Les déplacements U_1 et U_3 sont découplés de U_2 et U_4 . Si le déterminant de A_3 s'annule,on aura quatre racines β et U_2 et U_4 sont nul et le déplacement sera confiné au plan sagittal.Et si le déterminant de A_4 s'annule, U_1 et U_3 seront nuls et le déplacement sera perpendiculaire au plan sagittal associé à un potentiel éléctrique. Une onde de surface appartenant a ce cas est dite onde de *Bleustein Gulyaev* [1,4,8] .

(v) Cas-5 :Le cas non piézoélectrique, où U_2 est découplé de U_1 et U_3 ,et la matrice A est donnée par :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-39)}$$

Dans ce cas le déterminant de A s'écrit sous forme de produit de det$[A_3]$,A_{22} et A_{44} où det$[A_3]$ est donne par (II-40). Les solutions d'ondes acoustiques vont avoir $U_4 = 0$, et le deplacement U2 sera découplé de celui du plan sagittal (U_1,U_3).

Si le déterminant de A_3 est nul, on aura un polynôme d'ordre quatre et donnant ainsi quatre racines β qui contribuent seulement à U_1 et U_3.Et si A_{22} est nul ,on aura un polynôme d'ordre deux et donnant ainsi deux racines β contribuant à U_2.

II-4 CAS D'UNE SEULE COUCHE INFINIE-ONDES DE VOLUME:

Les équations régissant la propagation de l'onde de volume dans un cristal infini sont les équations (II-27) et (II-28). La seule condition qui doit être satisfaite est que, les U_i doivent être finis lorsque x_3 tend vers l'inifini.Pour que la solution soit de la forme de l'équation (II-12) avec γ nul, les racines β doivent satisfaire l'équation (II-20) Pour n'importe quelle vitesse,les racines β apparaissent en paires deracines complexes conjuguées ou en racines réelles .

Les racines β complexes qui correspondent à une solution croissante exponentiellement,sont physiquement indésirables dans un milieu infini; par conséquent seules les racines réelles conrtibuent à la solution [7].Pour une vitesse inferieure à V_1, toutes les huit racines sont complexes, donc pas d'ondes de volume dans cette région .

Pour les vitesses égales ou supérieures à V_1, deux ou plus de deux racines sont réelles , chacune correspond à une onde plane de volume se propageant à un angle θ avec l'axe x_1. Pour une onde de volume se propageant dans la direction x_1, β doit être nul.La solution U_i sera donnée par :

$$U_i = \alpha_i \exp(i k x_1 - ikVt) \qquad \text{(II-41)}$$

avec $i=1,2,3,4$.

Cela apparait pour les vitesses particulières V_0 avec B_0 dans l'équation (II-20) est égal à zero. Ces vitesses sont calculées en mettant β et γ de l'équation (II-19) égaux à zero. L'équation (II-18) devient :

$$\mathrm{DET}\left[M_{ijkl} - \rho V^2 \delta_{ij} \right] = 0 \qquad \text{(II-42)}$$

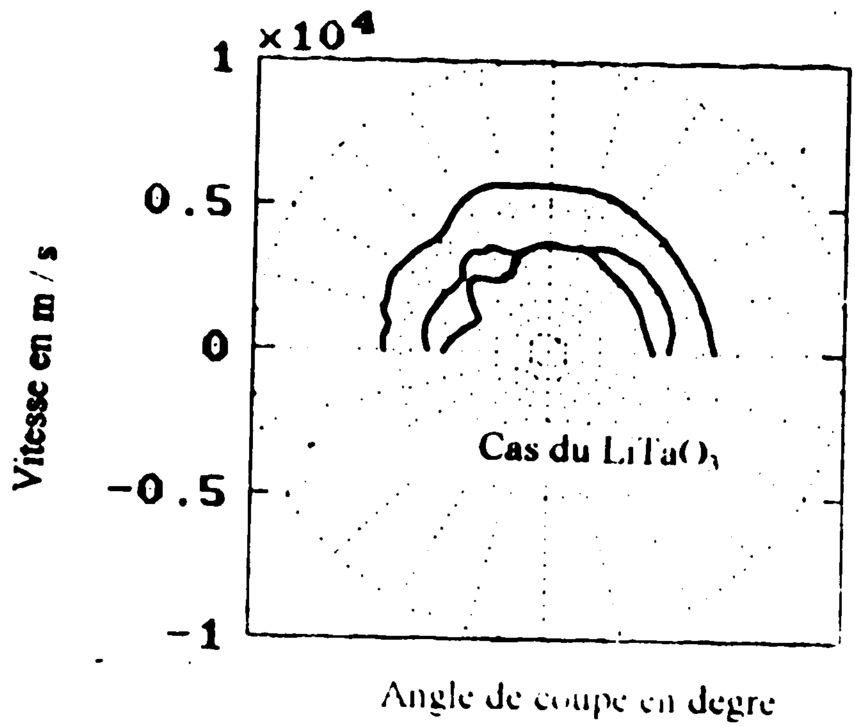
En développant cette équation, on trouve un polynôme du troisième degrés en ρV^2, la solution donc donne trois vitesses, donc trois ondes de volume se propageant suivant l'axe x_1, qui sont :

onde transversale, onde longitudinale et onde quasi-transversale dont les vitesses varient en fonction des lenteurs (inverses des vitesses) comme le montre la Fig II-6 .

Les ondes transversales obtenue sont dites ondes de volume transversales à polarisation horizontales, ou ondes de volume rampantes à la surface, et seront étudiées en détail au chapitre III .

II-5 CAS D'UNE COUCHE SEMI-INFINIE-ONDES ACOUSTIQUES DE SURFACE ET PSEUDO ONDES ACOUSTIQUES DE SURFACE

La structure de ce cas est montrée par la figure II-7, c'est un cas spécial de la structure analysée dans le paragraphe II-3 avec N =0, et un cristal comme substrat. La solution générale pour le substrat ($x_3 \leq 0$) est donnée par l'équation (II-21), et pour l'air ($x_3 \geq 0$) est donnée par l'équation (II-22). Les mouvements des particules U_i, i= 1,2,3 sont nuls pour $x_3 < 0$. Les conditions aux limites à la surface libre sont données par les équations (II-31), (II-32), et (II-33). En substituant les équations (II-21) et (II-22) dans l'équation (II-32), on obtient :



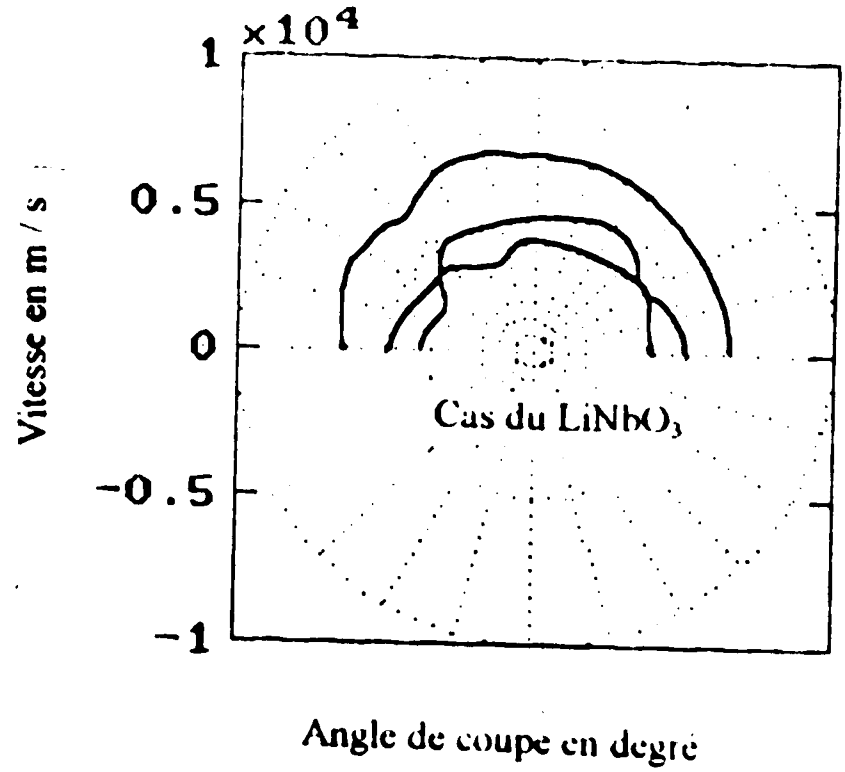


Fig. II-6 **Variations des vitesses des ondes de volume longitudinales, transversales et quasi-transversales en fonction de l'angle de coupe.**

$$ik\sum\left[C_n \sum a_k^{(n)}\left(M_{3ik1}(1+i\gamma)+M_{3ik3}\beta_n\right)+i\varepsilon_0 C_n a_4^{(n)}\delta_{i4}\right]=0$$

$$\text{où: } \delta_{i4}=\begin{cases}1 & \text{si } i=4\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \qquad \text{(II-47)}$$

L'expression (II-47) est à huit inconnues C_n , n=1..8 et quatre équations , mais seulement c'est quatres racines : qui contribuent à la solution de l'onde acoustique de surface et la pseudo onde acoustique de surface [7]. Donc les C_n qui ne contribuent pas à la solution sont nulles.donc si $\beta^{(n)}$ sont les racines retenues, l'équation (II-47) peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$[L][C]=0 \qquad \text{(II-48)}$$

Pour le cas d'une coupe Y-Z, le déplacement U_2 est découplé de U_1 U_3 et U_4 , ce qui correspond au troisième cas, donc on s'attend à une onde de *Rayleigh* comme onde de surface et à une pseudo onde de *Rayleigh* comme pseudo onde de surface.

II-5-1 ONDES ACOUSTIQUES DE SURFACE (SAW) :

L'onde acoustique de surface se propage dans la direction x_1 dont la structure est montrée par la figure II-7 , sans aucune atténuation (γ = 0),et elle est confinée à la surface .Donc les racines β qui contribuent à la solution doivent donner onde

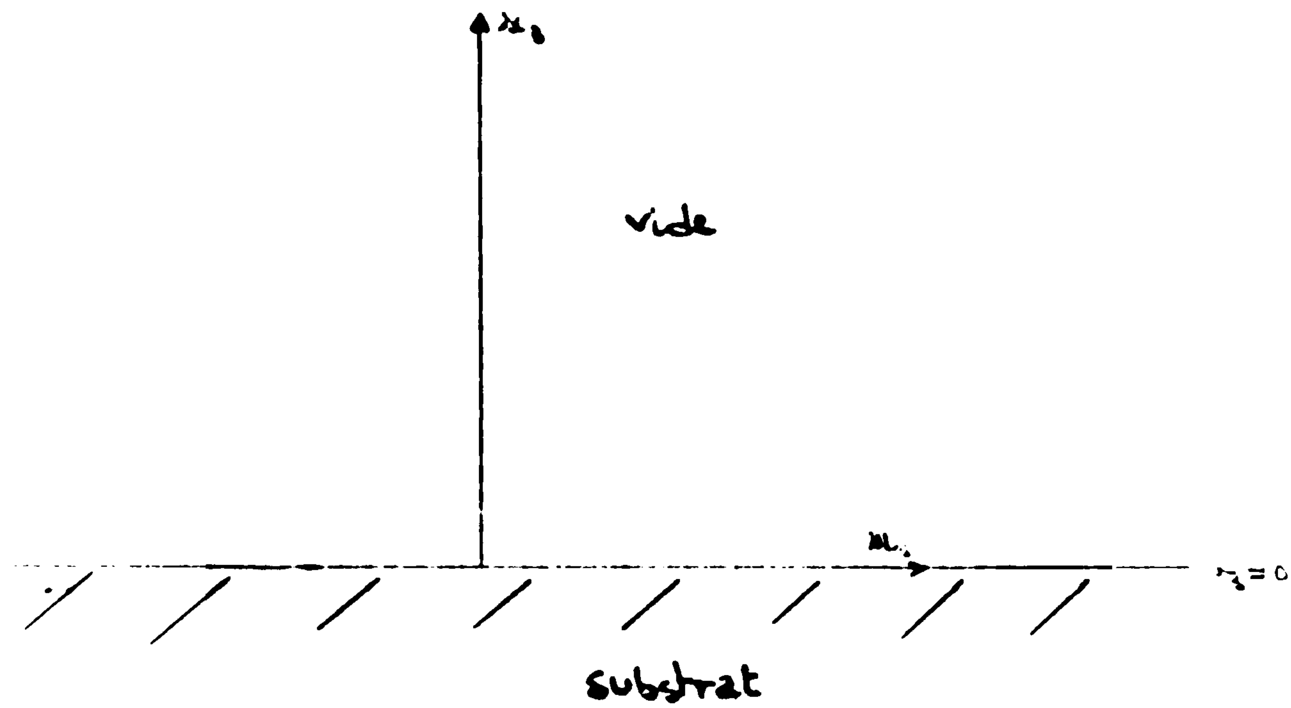


Fig II-7 Strucrure semi-infinie

s'atténuant exponentiellement avec l'augmentation de la profondeur dans le substrat ($-x_3$).Cela implique que seules les racines à partie imaginaire négative contribuent à la solution,on aura donc quatre racines β pour satisfaire les quatre conditions aux limites [7,8],donc la solution générale est donc de la forme :

$$U_i = \sum C_n \alpha_i^{(n)} \exp\{ ik \beta^{(n)} x_3 + ik\, x_1 - i\, kVt\} \qquad (II-49)$$

avec $i = 1..4$,pour $x_3 \leq 0$.

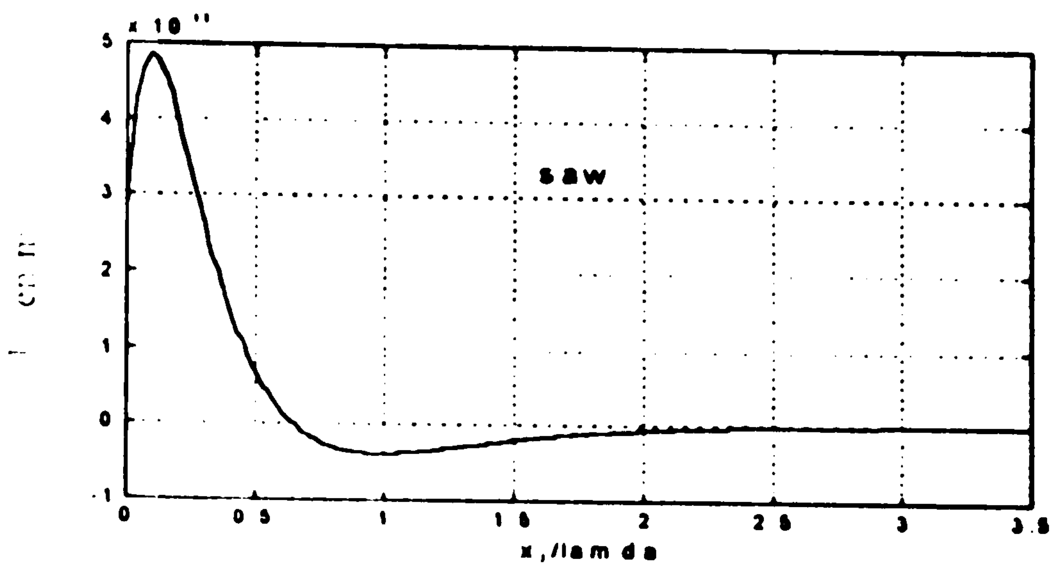
et

$$U_4 = \sum C_n \alpha_i^{(n)} \exp\{ -k\, x_3 + i\, k\, x_1 - i\, kVt\} \qquad (II-50)$$

pour $x_3 \geq 0$.

Pour calculer la vitesse de l'onde acoustique de surface, une vitesse arbitraire plus faible que V_1 est choisie. Avec $\varphi = 0$, huit racines β sont évaluées en resolvant l'équation (II-21), les quatre racines à partie imaginaire négative sont retenues et les α appropriées sont évaluées pour chaque valeur de β, en resolvant l'équation (II-16) avec $\alpha_4^{(n)}$ égaux à un. Ces quantités sont par la suite substituées dans l'expression de la matrice L et le déterminant de L est calculé.Le déteminant de L doit être nul pour que les conditions aux limites soient satisfaites, pour sela on varie la vitesse jusqu'à l'obtention d'une valeur minimale pour le déterminant [4,7,9] .

Dans le cas du $LiNbO_3$ on obtient, une onde de surface de Rayleigh pour une vitesse v_s = 3489.76 m/s , et pour une vitesse de 3019.5 m/s dans le cas du $LiTaO_3$.



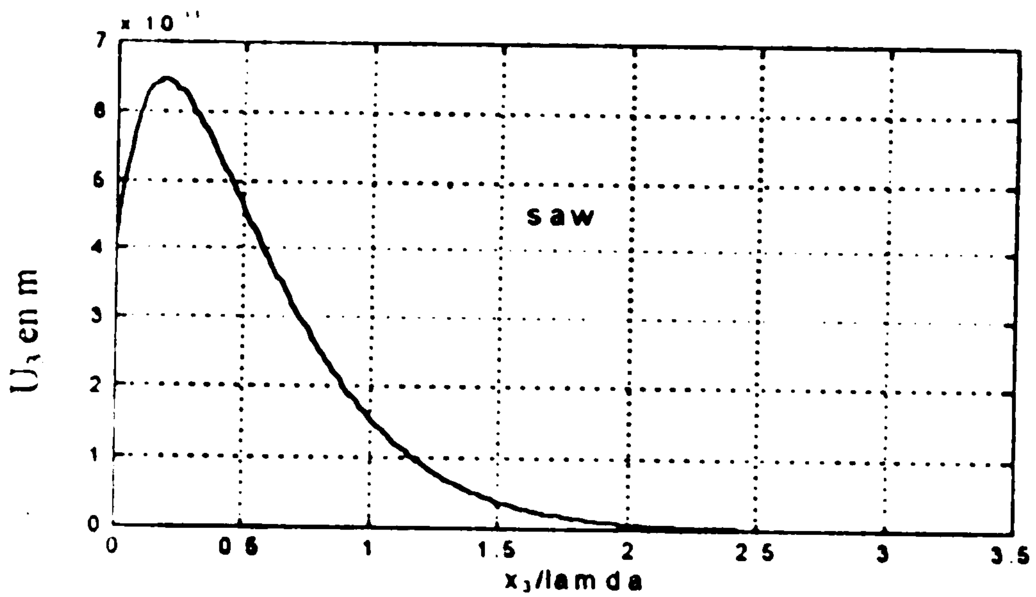
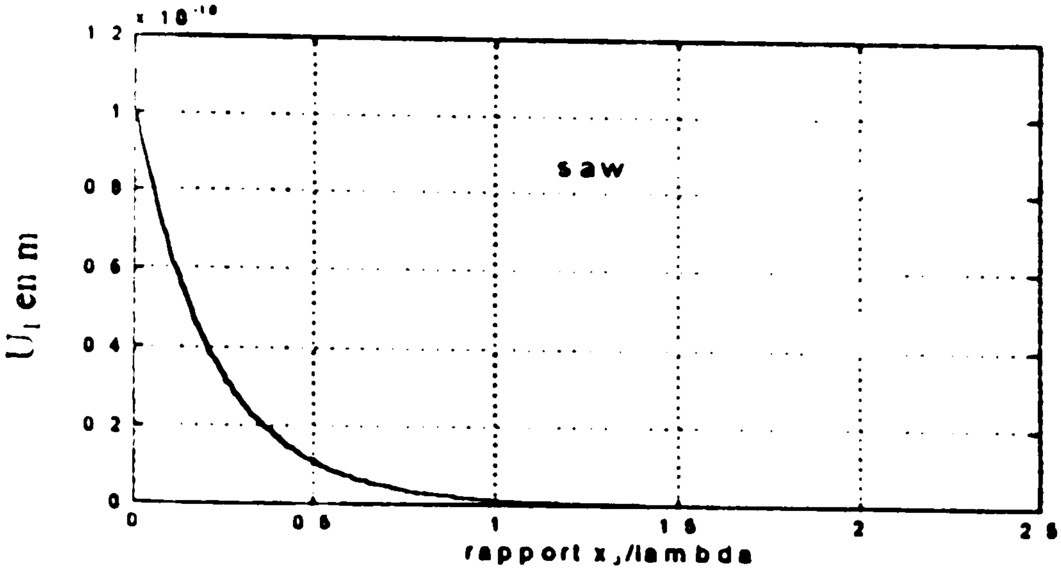


Fig. II-8 **Déplacements acoustiques de l'onde SAW.**

Cas du $LiNbO_3$



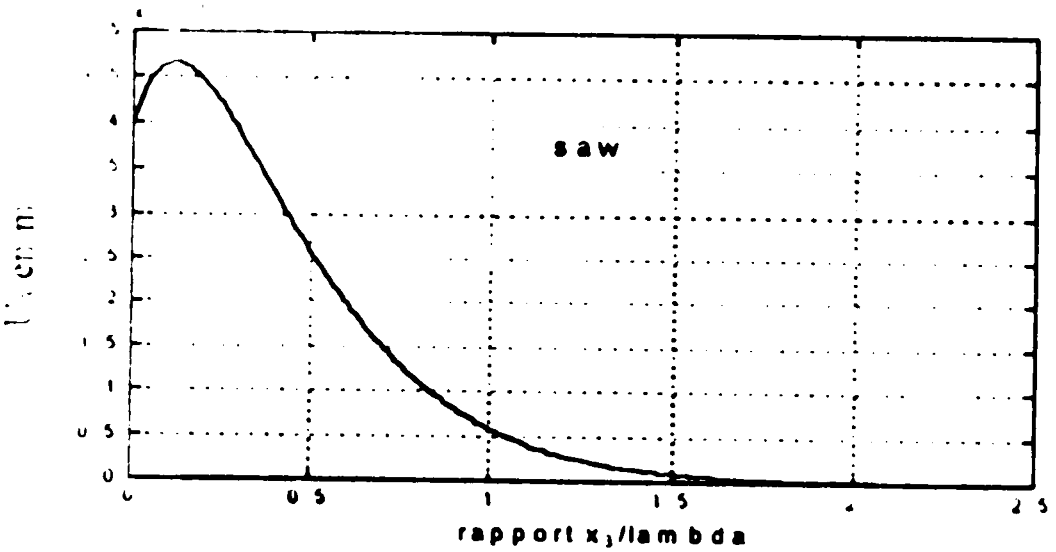


Fig. II-10 **Déplacements acoustiques de l'onde SAW.**

Cas du $LiTaO_3$

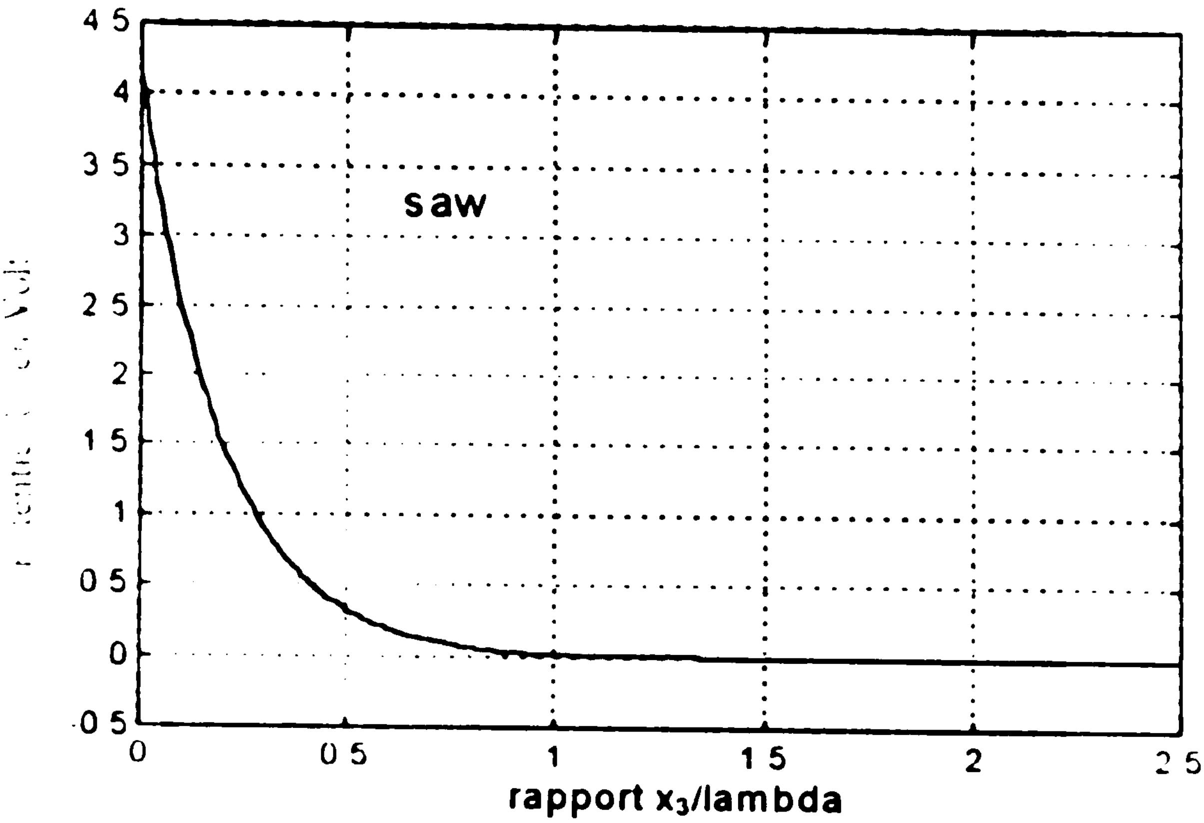


Fig. II-11 Potentiel électrique de l'onde acoustique de surface.
Cas de $LiTaO_3$

Les figures II-8, II-9, II-10 et II-11, représentent les variations des déplacements acoustiques U_1 et U_3, et le potentiel électrique U_4 en fonction du rapport x_3/λ pour $x_1=0$, nous voyons qu'un potentiel de l'ordre de quelques Volts génère des déplacements acoustiques de l'ordre de 10^{-10}m, et les déplacements et le potentiel vont s'atténuer dans une faible profondeur inférieure à 2.5 λ.

II-5-2 PSEUDO ONDES ACOUSTIQUES DE SURFACE (PSAW)

A une vitesse plus grande que V_1 avec $\gamma = 0$, la solution de l'équation (II-20), donne au moins deux racines réelles, et au plus trois racines à partie imaginaire négative. Du moment qu'il faut au moins quatre racines pour satisfaire les conditions aux limites, une racine à partie imaginaire positive doit contribuer à la solution, la contribution de cette racine ne presente aucune atténuation dans le substrat. Dans le domaine de vitesse compris entre V_1 et V_2, trois racine à partie imaginaire négative et une parmi les deux racines réelles sont choisies. En prenant γ nul on aura pas un minimum pour le déterminant , donc les conditions aux limites ne seront pas satisfaites, cepandant en variant γ de zero jusqu'à une valeur arbitraire , et en variant la vitesse, il est possible d'obtenir un minimum pour le déterminant pour une certaine vitesse. Les trois racines à partie imaginaire négative ne sont pas affectées par la variation de la valeur de γ, cependant les racines réelles changent, et deviennent complexes [7]. Pour des considerations physiques ,comme s'est déjà dit, la racine réelle qui devient complexe a parite imaginaire positive est retenue, et la solution satisfaisant les conditions aux limites sera de la forme suivante :

$$U_i = \sum C_n \alpha_i^{(n)} \exp\{ik\, \beta^{(n)} x_3 + ikx_1(1+i\gamma) - ikVt\} \qquad \text{(II-51)}$$

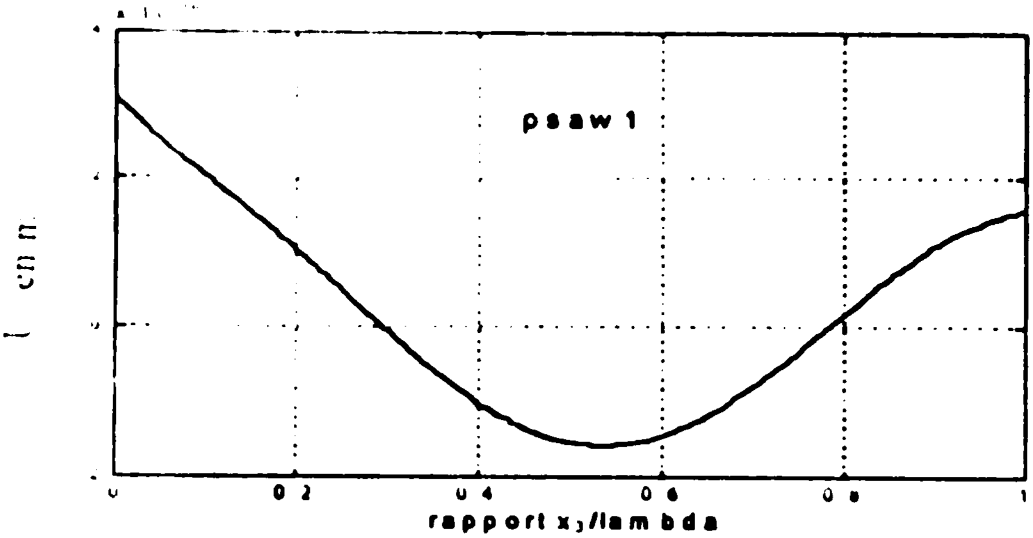
où i=1..4

Trois racines β sont localisées dans le demi-plan complexe inférieur, et représentent des contributions qui s'atténuent en profondeur. Cependant, la quatrième racine possède une petite partie imaginaire positive, donc elle represente une amplification en profondeur. Si γ et la partie partie imaginaire positive de β sont tres faibles, l'onde est appellée une pseudo onde acoustique du premier ordre. Cette onde représente une

légère atténuation lors de la propagation et une faible amplification dans le matériau. Dans le domaine des vitesses supérieurs à V_2 seulement deux racines sont à partie imaginaire négative et quatre racines réelles sont obtenues.

L'introduction d'une valeur non nulle de γ, permet à deux racines réelles de devenir complexes à partie imaginaire positive , et avec un choix judicieux de γ et V un minimum pour le determinant de L et obtenue ,et l'onde obtenue dans ce cas est dite pseudo onde acoustique du second ordre.

Dans le cas du $LiNbO_3$ une pseudo onde de *Rayleigh* du premier ordre est obtenue pour une vitesse v = 5509 m/s et γ de l'ordre de 1e-4, et une pseudo onde du second ordre pour une vitesse v = 6860 m/s et γ = 1e-4, et dans le cas du $LiTaO_3$ une pseudo onde de *Rayleigh* du premier ordre est obtenue pour une vitesse v = 5387.10 m/s et γ de l'ordre de 1e-5, et une pseudo onde du second ordre pour une vitesse v = 5834.8 m/s et γ = 1e-5 .



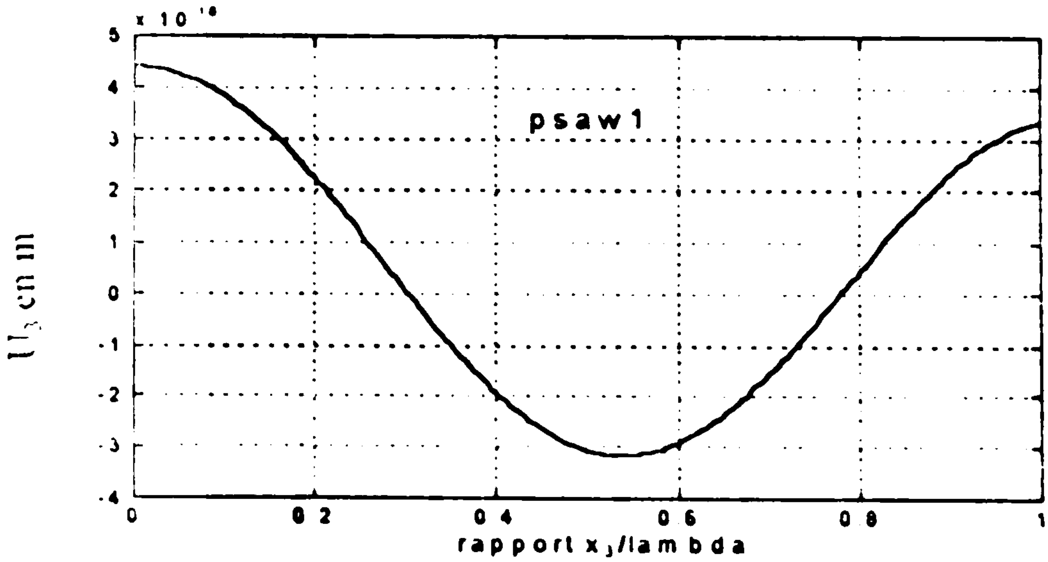


Fig. II-12 **Déplacements acoustiques de la pseudo SAW du premier ordre.**

Cas du $LiNbO_3$

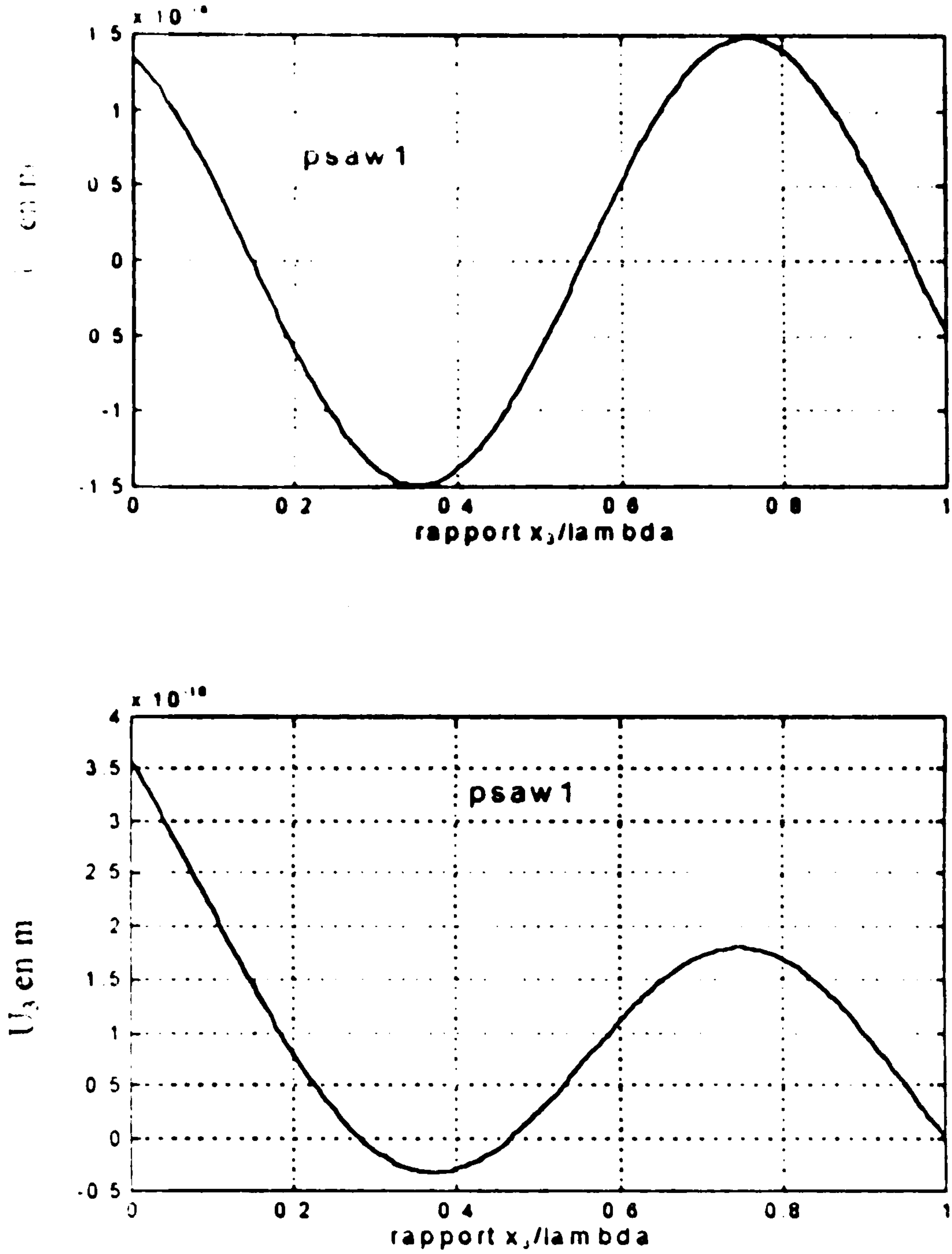


Fig. II-14 **Déplacements acoustiques de la pseudo SAW du premier ordre. Cas du $LiTaO_3$.**

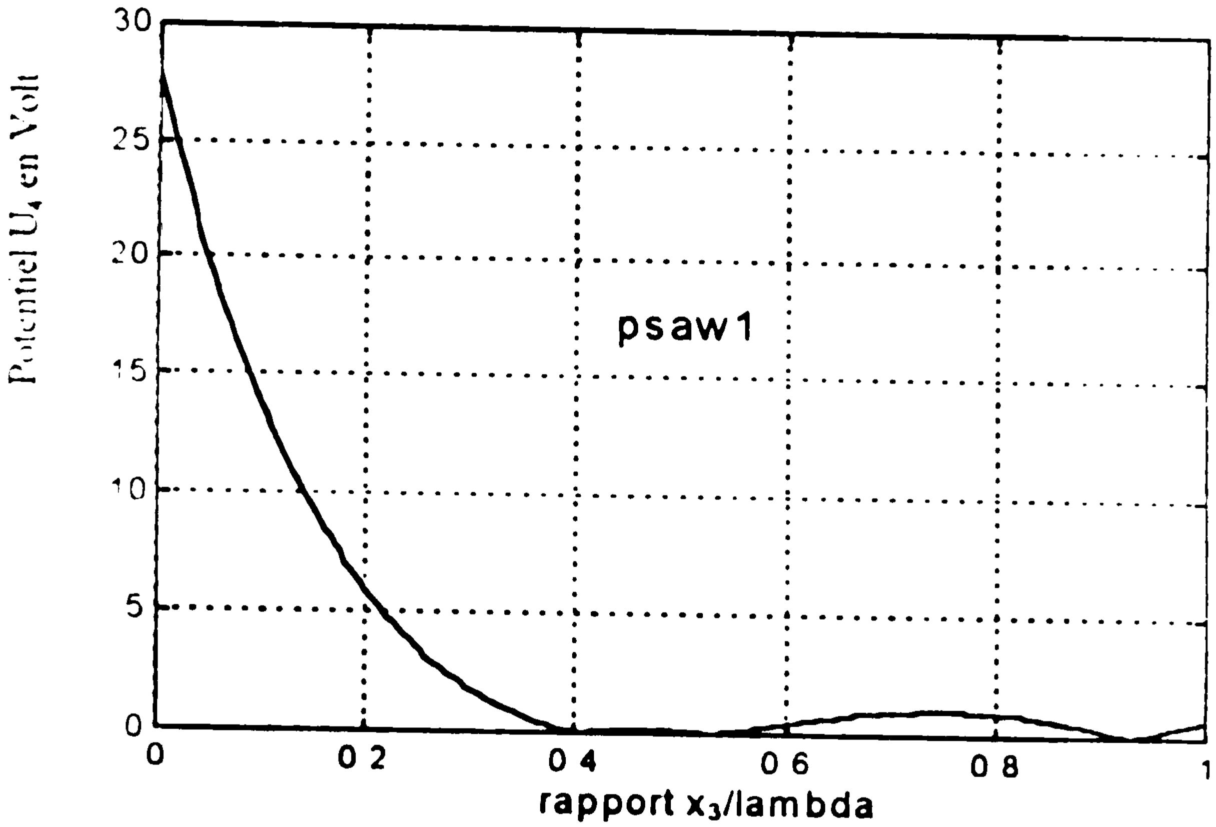


Fig. II-15 Le potentiel électrique de la pseudo SAW du premier ordre. Cas du $LiTaO_3$

Les figures II-12, II-13, II-14 et II-15, representent les variations des déplacements acoustiques et le potentiel électrique des pseudo ondes acoustiques de surface du premier ordre, en fonction de x_3/λ pour $x_1=0$, chacune de ces ondes possede une onde partièlle qui a une constante d'atténution ayant une trés faible partie imaginaire, donc une amplification en profondeur, ce qui rend l'atténuation moins rapide, donc,pour ces ondes on remarque un affaiblissement puis une augmentation avant d'être attenuées définitivement.Nous avons representé le mode propagatif de l'onde dans une épaisseur de 1λ , cependant l'attenuation de l'onde n'est atteinte que dans une épaisseur de l'ordre de 4λ.

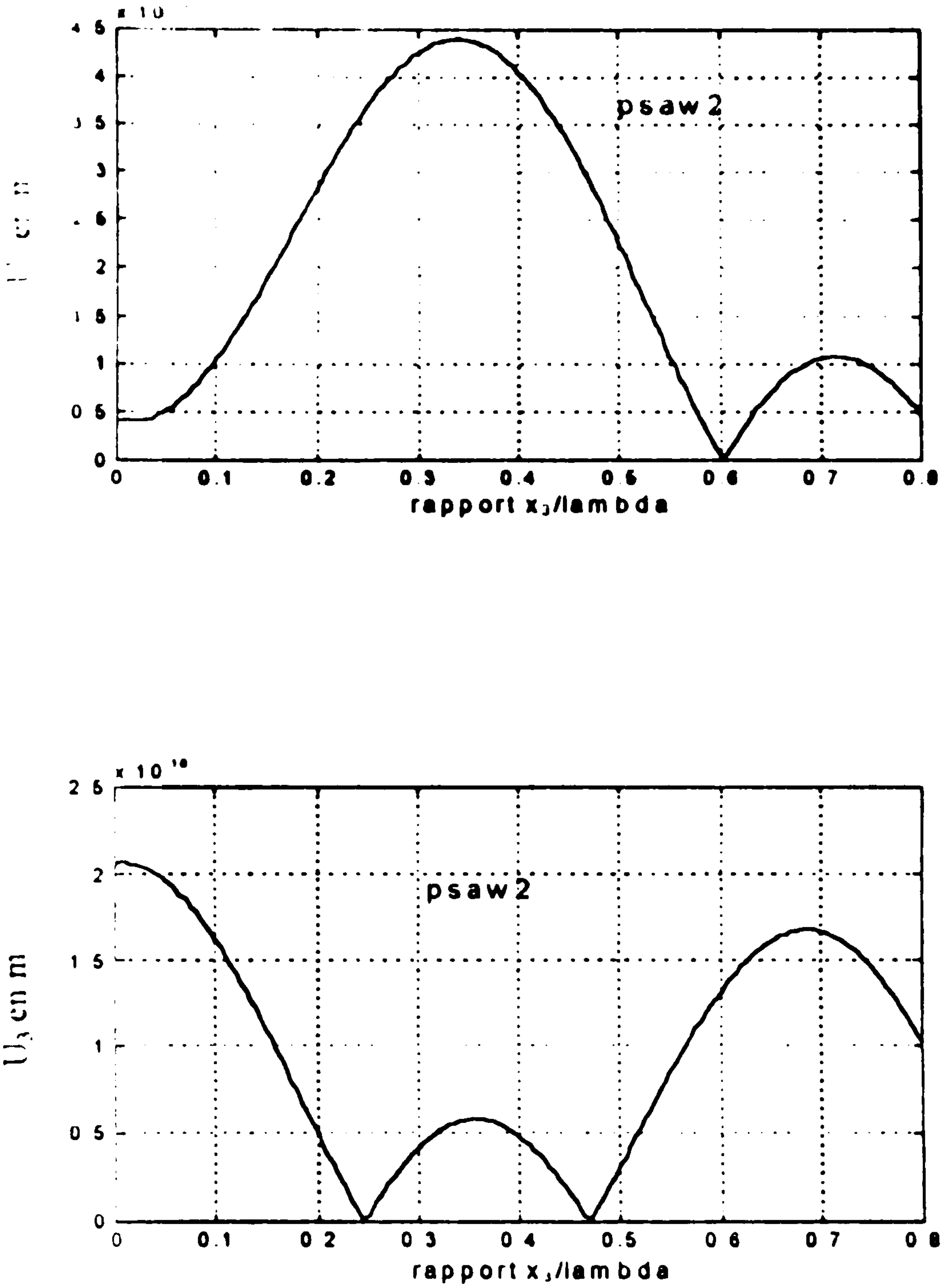


Fig. II-16 **Déplacements acoustiques de la pseudo onde du second ordre. Cas du $LiNbO_3$**

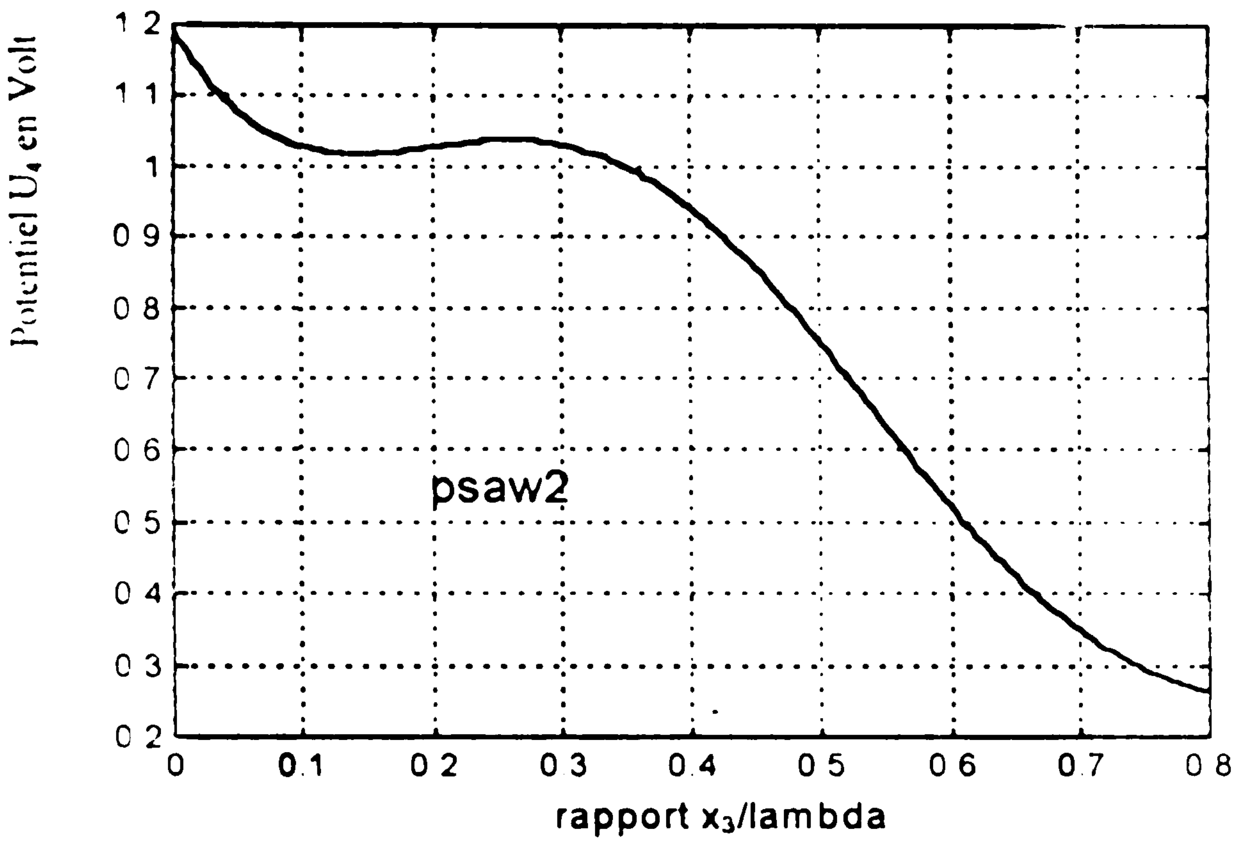
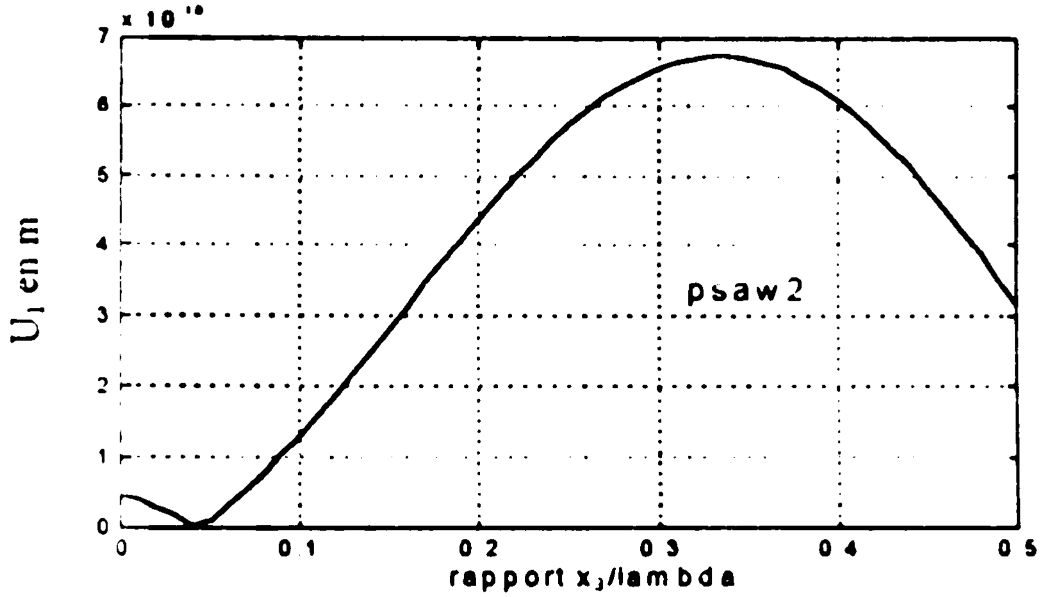


Fig. II-1 7 Le potentiel électrique de la pseudo SAW du **second** ordre. Cas du $LiNbO_3$



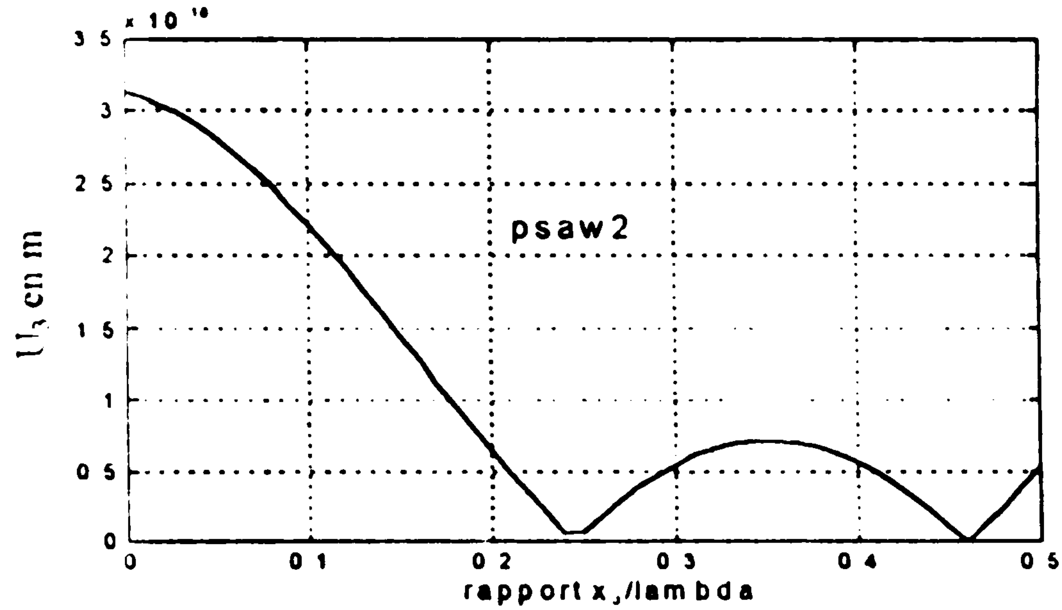


Fig. II-18 Deplacements acoustiques de la pseudo SAW du second ordre. Cas du $LiTaO_3$

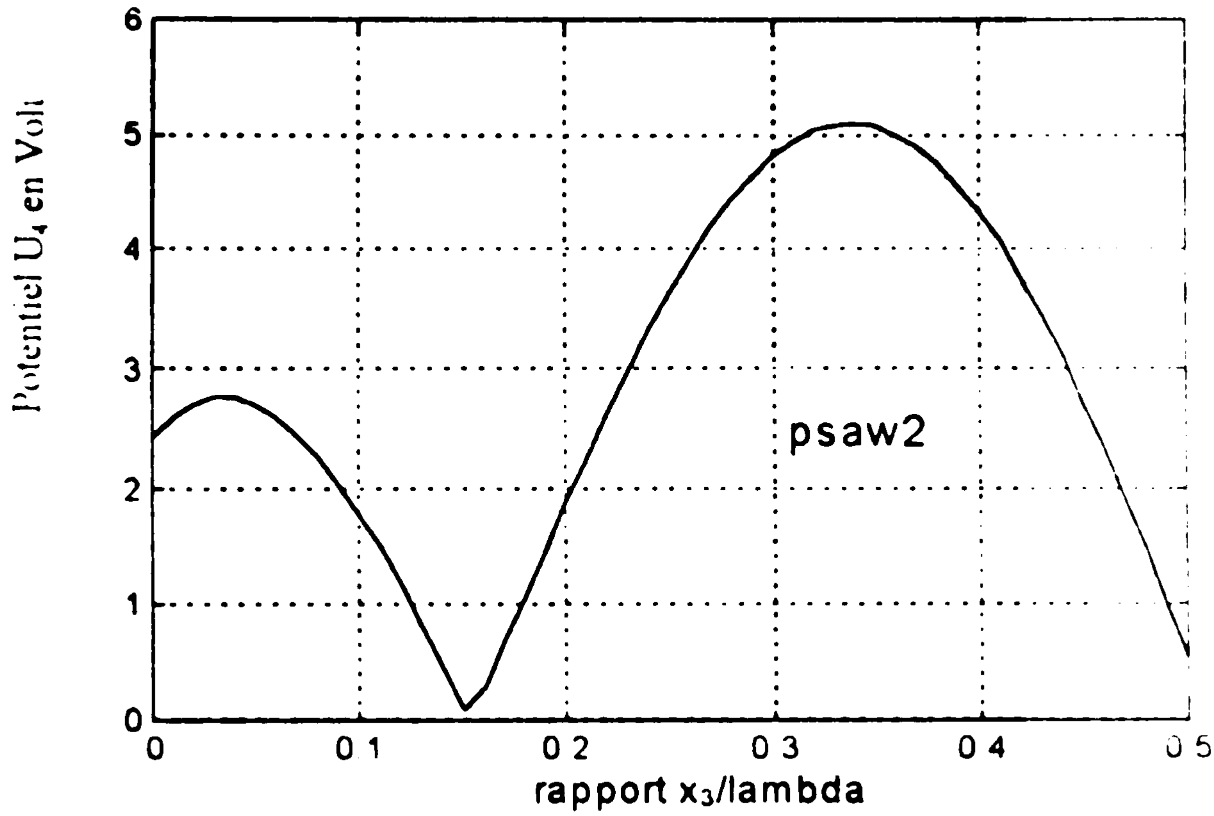


Fig. II-19 Le potentiel électrique de la pseudo SAW du second ordre. Cas du $LiTaO_3$

Les figures II-16, II-17, II-18 et II-19, representent les variations des déplacements acoustiques et le potentiel électrique des pseudo ondes acoustiques de surface du second ordre, en fonction de x_3/λ pour $x_1=0$, chacune de ces ondes possede deux ondes partièlles qui ont des constantes d'atténution ayant de trés faibles parties imaginaires, donc comme dans le cas des pseudo ondes du premier ordre, l'atténuation est moins rapide, donc, pour ces ondes on remarque un affaiblissement puis une augmentation avant d'être attenuées définitivement. Nous avons representé le mode propagatif de l'onde dans une faible épaisseur, cependant l'atténuation de l'onde n'est atteinte que dans une épaisseur de l'ordre de 5λ.

CHAPITRE III

ETUDE DES ONDES TRANSVERSALES A POLARISATION HORIZONTALE (ONDES T.H)

III 1 INTRODUCTION

Dans les dispositifs à ondes élastiques, en particulier les dispositifs à large bande, l'excitation simultannée de plusieurs ondes (ondes de surface, ondes de volume) peut être gênante.dans le but d'engendrer dans un milieu un type donné d'ondes,il est indispensable de choisir au préalable le matériau et la direction de propagation de l'onde considérée.

Historiquement, l'onde T.H a pu être excitée dans un cristal de quartz, par un IDT déposé sur la surface de celui-ci [2,6,10]

Cette onde (surface skimming bulk wave) a été étudiée seulement au voisinage de la fréquence de coupure, fréquence a laquelle le flux d'énergie est parallèle à la surface.Il a été montré que son utilisation dansles dispositifs à ondes élastiques présente de nouveaux avantages par rapport à l'utilisation de l'onde de surface.

-La fréquence de fonctionnement des dispositifs à ondes SSBW est supérieure, car la vitesse de propagation de celle-ciest plus grande que celle de l'onde de surface.

-L'onde SSBW est moins sensible que l'onde de surface aux dégradations de la surface de propagation.

-L'onde SSBW peut être piégée par une surface corruguée et donner ainsi naissance à l'onde STW (surface transverse wave) [11,12,13] .

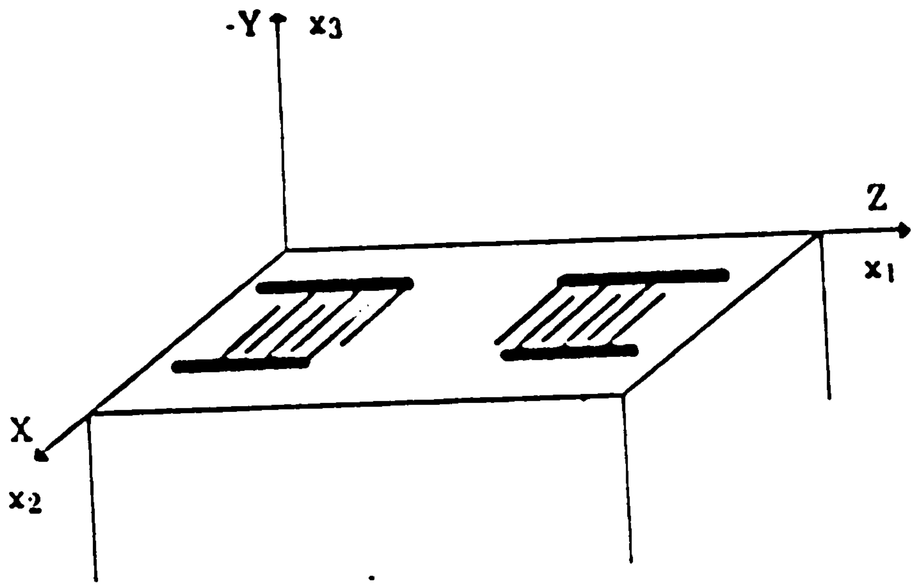


Fig III-1 : La configuration choisie .

$$k^2(\rho V_p^2) = k^2 (C_{66} \sin^2\theta + C_{55} \cos^2\theta$$

$$+ 2 C_{56} \sin\theta \cos\theta) \qquad (III-7)$$

L'élimination de k^2 de part et d'autre de l'égalité conduit à l'expression de la vitesse de phase V_p :

$$\rho V_p^2 = C_{66} \sin^2\theta + C_{55} \cos^2\theta$$

$$+ 2 C_{56} \sin\theta \cos\theta \qquad (III-8)$$

Cette relation met en évidence la propriété d'anisotropie du matériau [2,3] .

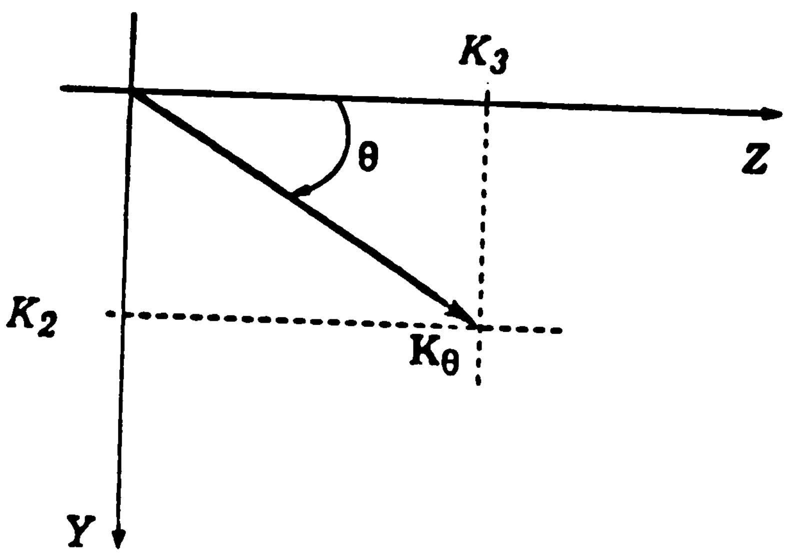


Fig III-2 :Projection de k sur la surface et sur
la normale à cette surface .

III 2 2-2 FREQUENCE DE COUPURE :

La composante k_3 du nombre d'onde est fixée par la périodicité du transducteur à la valeur :

$$k_3 = 2\pi / \lambda_0 \qquad (III-9)$$

On cherche à déterminer la composante k_2, solution de la relation de dispersion (III-5), dont le discriminant Δ' est :

$$\Delta' = (C_{56} K_3)^2 - (C_{55} K_3^2 - \rho\omega^2) C_{66} \qquad (III-10)$$

D'aprés l'expression (III-3) du déplacement U_1, la composante k_2 doit être réelle afin qu'il ait propagation et non pas atténuation de l'onde TH, au sein du demi-espace du substrat, pour cela, Δ' doit être positif ou nul [2], soit :

$$\omega \geq \omega_c = k_3 \sqrt{C_{66} / \rho}\; C_a \qquad (III-11)$$

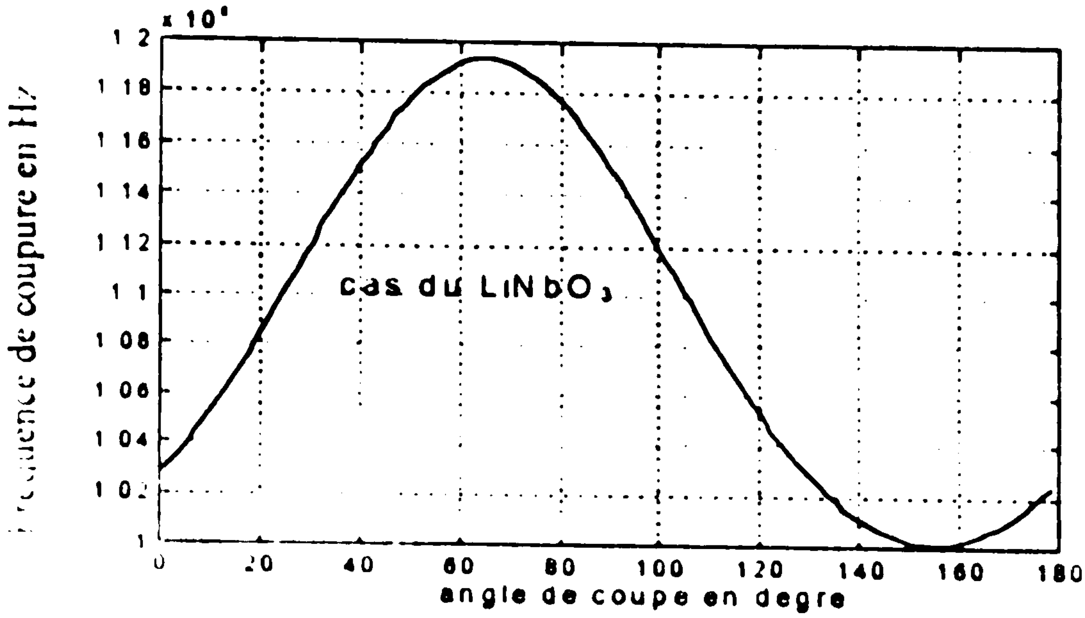
où : C_a est le facteur d'aisotropie [2], défini par :

$$C_a^2 = \frac{C_{55}}{C_{66}} \left(\frac{C_{56}}{C_{66}}\right)^2 \qquad (III-12)$$

Les ondes TH sont excitées par un IDT de périodicité λ_0, à partir de la fréquence de coupure f_c donnée par :

$$f_c = C_a / \lambda_0 \sqrt{C_{66} / \rho} \qquad (III-13)$$

Pour λ_0 donné, on represente sur La figure (III-3)



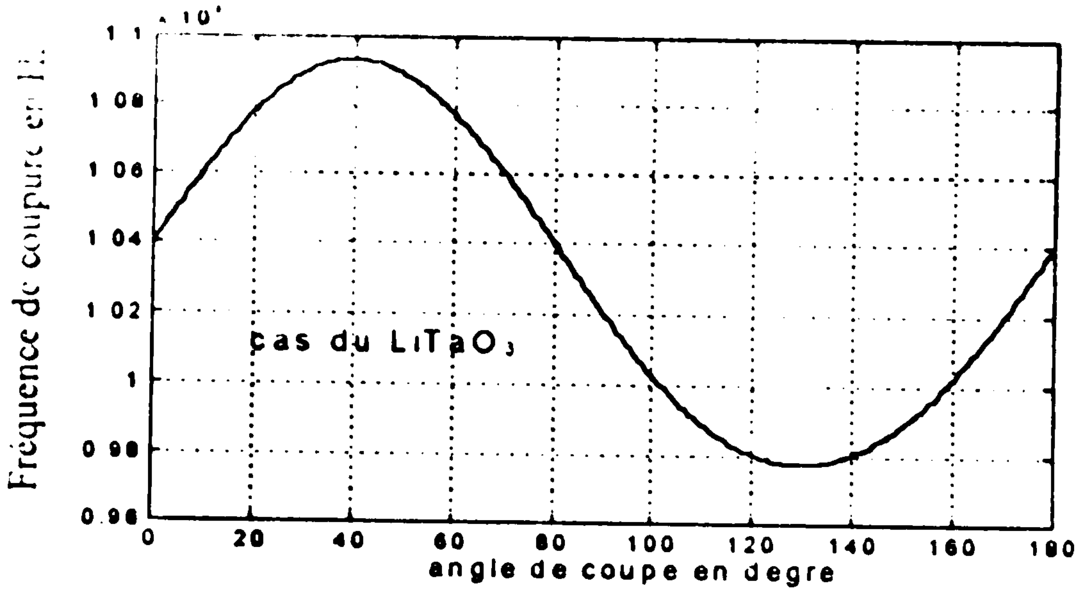


Fig. III-3 Variations de la fréquence de coupure en fonction de l'angle de coupe.

Variations de f_c en fonction de l'angle de coupe θ_c, pour le $LiNbO_3$ et du $LiTaO_3$

III-2-2-3 DIRECTION DU VECTEUR D'ONDE :

La direction du vecteur d'onde peut être déterminée par ses composantes. Pour des fréquences d'excitation supérieures à la fréquence de coupure, la composante k_2 a deux valeurs réelles possibles notées k_{2l} et k_{2r} [2] :

$$k_{2l} = -k_3\, C_{56}/C_{66} - k_3 C_a \left[(f/f_c)^2 - 1 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-14)}$$

$$k_{2r} = -k_3\, C_{56}/C_{66} - k_3 C_a \left[(f/f_c)^2 - 1 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-15)}$$

A ces deux solutions, correspondent deux vecteurs d'ondes de directions données par :

$$tg\theta_l = -C_{56}/C_{66} + C_a \left[(f/f_c)^2 - 1 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-16)}$$

$$tg\theta_r = -C_{56}/C_{66} - C_a \left[(f/f_c)^2 - 1 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-17)}$$

On représente sur la figure (III-4) les variations des angles θ_l et θ_r en fonction de f pour une coupe Y, toujours dans les cas du $LiNbO_3$ et du $LiTaO_3$.

III-2-2-4 DIRECTION DU FLUX D'ENERGIE :

La direction de propagation θ_e du flux d'énergie est orthogonale à la courbe de lenteur caractérisant l'onde T.H. II

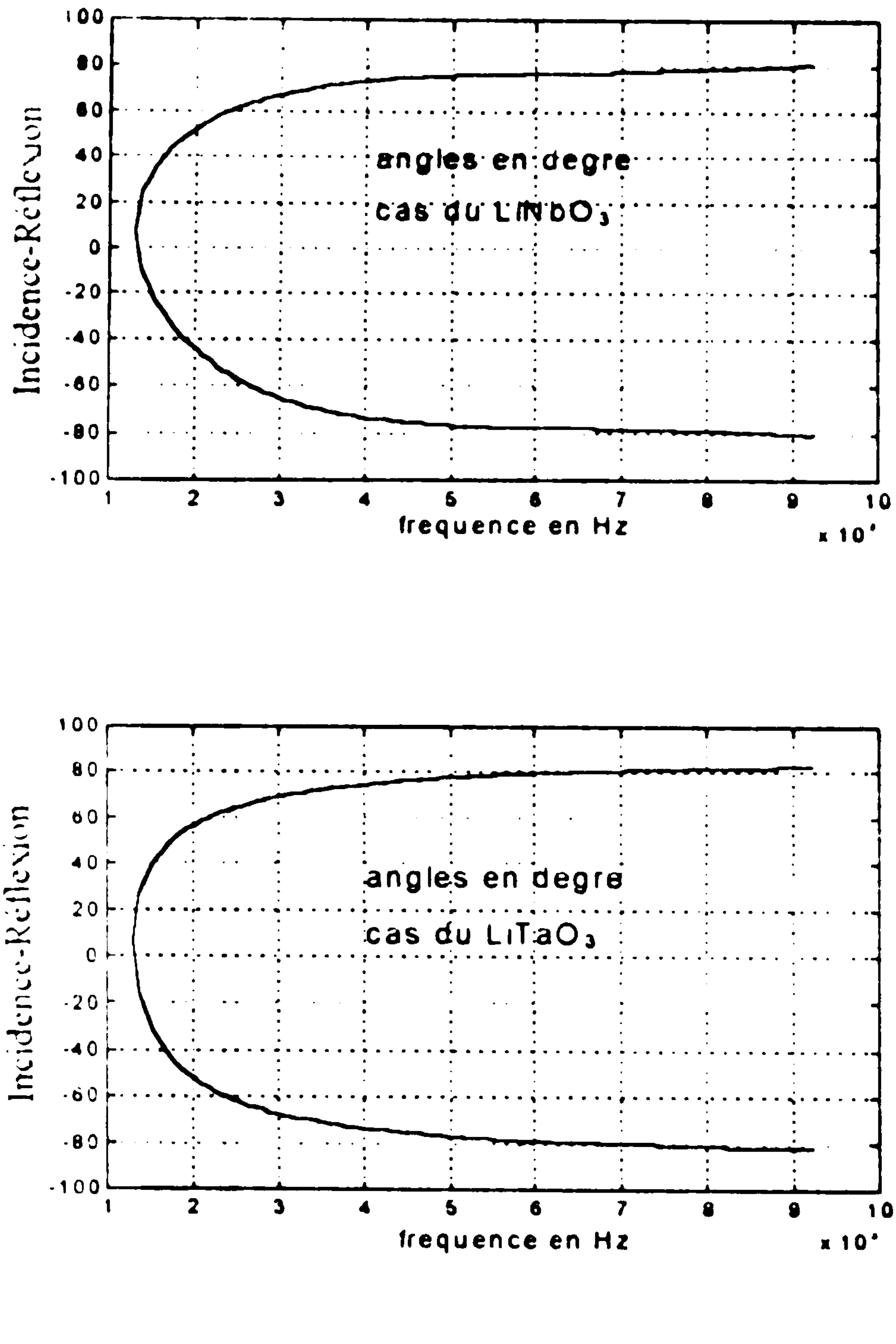


Fig. III-4 Variations des directions des vecteurs d'ondes en fonction de l'angle de coupe.

a été montré que cette direction peut être définie à partir de la relation de dispersion (III-1), selon :

$$tg\theta_e = \frac{dk_3}{dk_2} = - \frac{\partial\,\Omega/\partial k_2}{\partial\,\Omega/\partial k_3} \qquad \text{(III-18)}$$

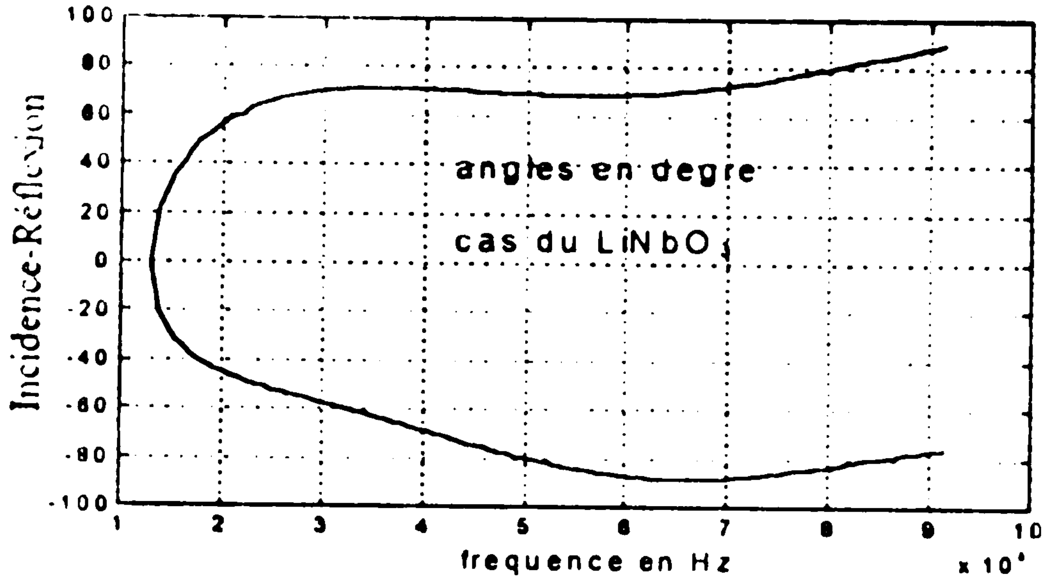
Ainsi, à chaque solution k_{2i} , k_{2r} correspond respectivement une direction θ_{ei} , θ_{er} du flux d'énergie telle que :

$$tg\theta_{ei} = \frac{C_{66}\,K_{2i} + C_{56}\,k_3}{C_{55}\,k_3 + C_{56}\,k_{2i}} = \frac{C_{66}\,tg\theta_i + C_{56}}{C_{55} + C_{56}\,tg\theta_i} \qquad \text{(III-19)}$$

$$tg\theta_{er} = \frac{C_{66}\,K_{2r} + C_{56}\,k_3}{C_{55}\,k_3 + C_{56}\,k_{2r}} = \frac{C_{66}\,tg\theta_r + C_{56}}{C_{55} + C_{56}\,tg\theta_r} \qquad \text{(III-20)}$$

En remplaçant k_{2i} et k_{2r} par leurs expressions (III-14) et (III-15), les relations précédentes deviennent :

$$tg\theta_{ei} = \frac{\left[(f/f_c)^2-1\right]^{1/2}}{C_a + C_{56}/C_{66}\left[(f/f_c)^2-1\right]^{1/2}} \qquad \text{(III-21)}$$



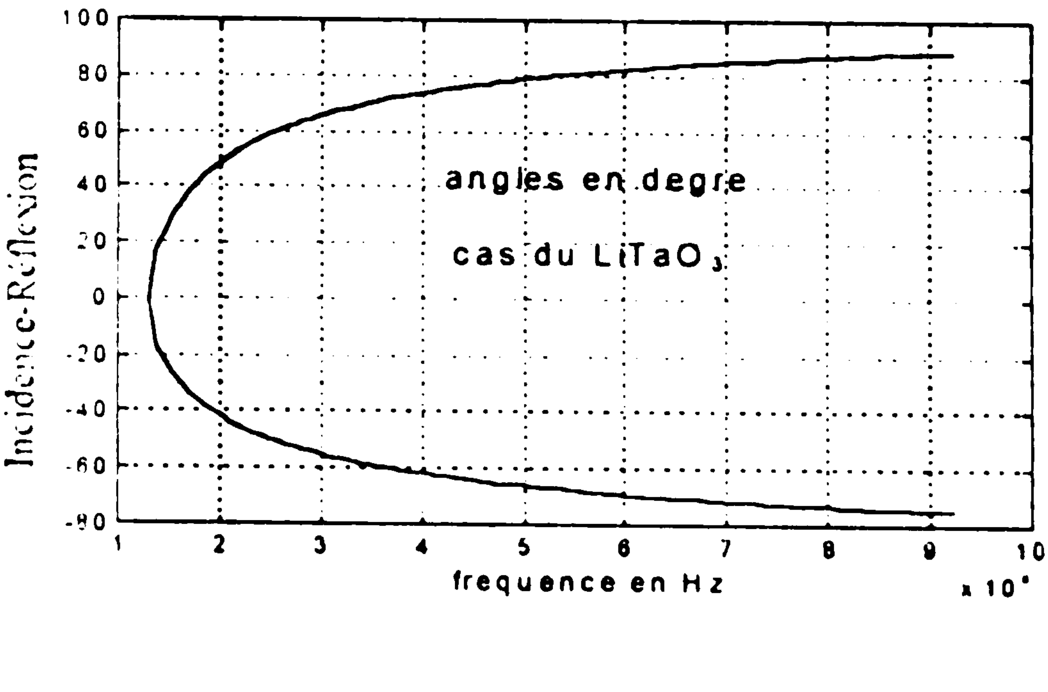


Fig. III-5 **Angles de propagation du flux d'énergie en fonction de la fréquence .**

$$tg\theta_{w1} = \frac{\left[(f/f_c)^2-1\right]^{1/2}}{-C_a + C_{56}/C_{66}\left[(f/f_c)^2-1\right]^{1/2}} \qquad \text{(III-22)}$$

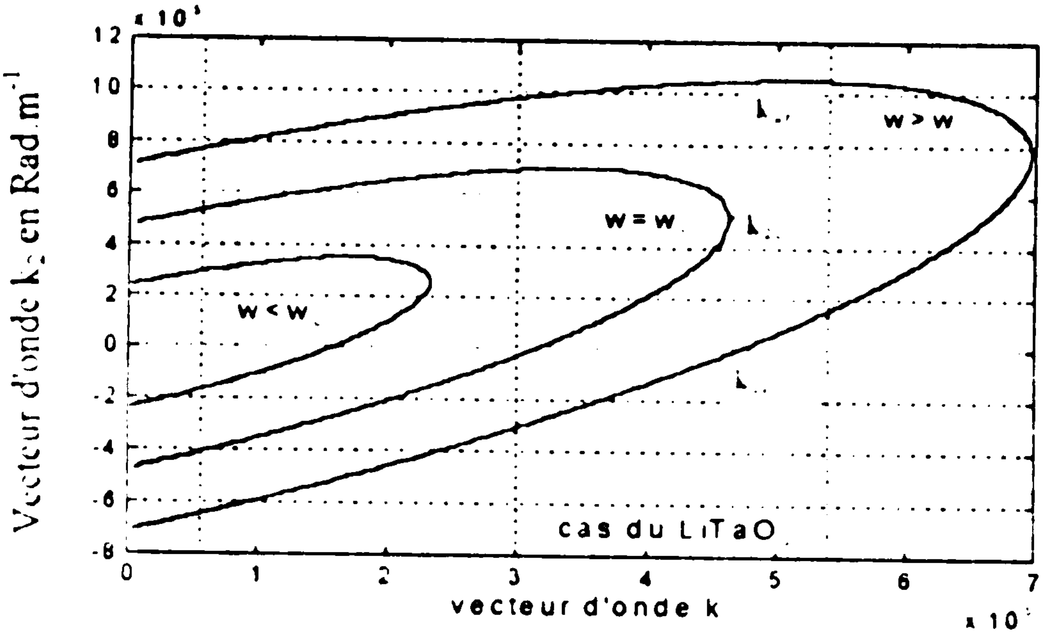
Les directions du flux d'énergie sont représentées sur la figure III-5 .On remarque qu'à la fréquence de coupure f_c, $\theta_{w1} = \theta_{er} = 0$, le flux d'énergie est alors parallèle à la surface, ce qui corréspond à une onde SSBW [2] .

III-2-2-5 UTILISATION DE LA REPRESENTATION GRAPHIQUE

Les composantes k_2 et k_3 , étant proportionnelles aux lenteurs $1/V_{p2}$ et $1/V_{p3}$, on trace la courbe de lenteur pour chacune des trois pulsations, ω_1, ω_2 et ω_3 avec $\omega_1 < \omega_c$, $\omega_2 = \omega_c$ et $\omega_3 > \omega_c$. Les points d'intersection entre la courbe de lenteur caractéristique de l'onde TH et la droite : $k_3 = 2\pi/\lambda_0$ imposée par le transducteur, determine les solutions k_2 possibles

A la pulsation ω_1 : pas de solution k_2 réelle, une telle fréquence ne permet pas de générer des ondes SSBW .

- A la pulsation ω_2 : une seule solution k_2 réelle notée k_c le flux d'énergie de l'onde T.H. excitée par l'IDT est parallèle à la surface.De plus il existe un angle critique entre le vecteur d'onde et la surface .



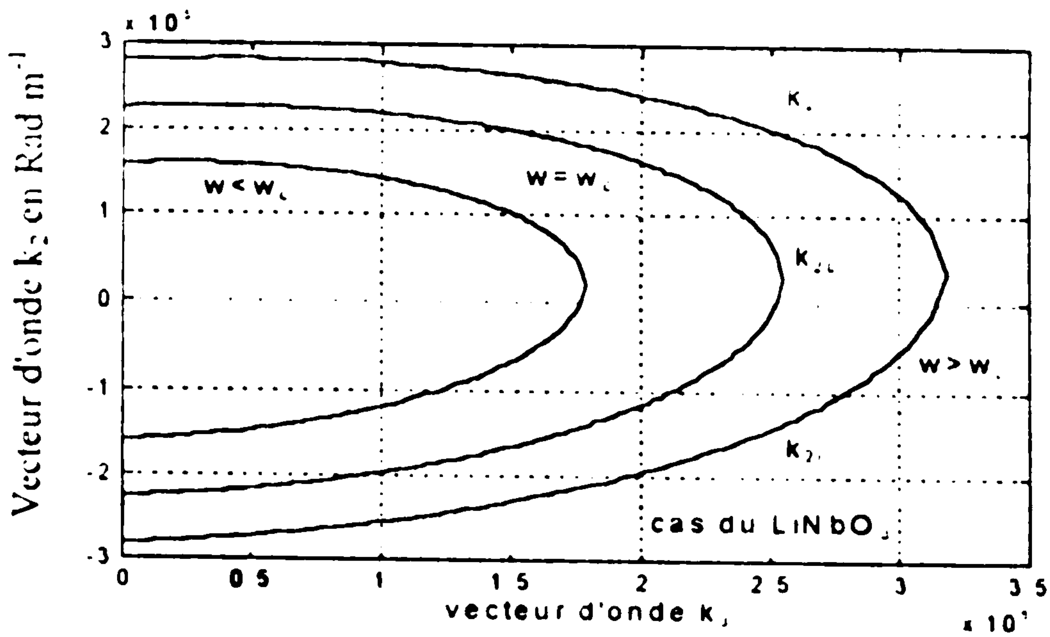


Fig III-6 Evolution de la courbe de lenteur de l'onde T.H pour trois pulsations.

- A la pulsation ω_3 : deux solutions k_z réelles possibles notées k_{zi} et k_{zr} .Les caractéristiques des deux ondes de volume T.H. possibles , se déduisent comme précédemment à l'aide de la figure III-6 , [2] .

III-3 ETUDE DES ONDES TH DANS UNE PLAQUE:

III-3-1 DESCRIPTION

Le dispositif est constitué d'une plaque sur laquelle sont déposés deux transducteurs interdigités (IDT) . Ces deux transducteurs sont utilisés pour l'excitation et la détection des ondes de polarisation transversale horizontale (T.H).Les différents paramètres géométriques concernant ce dispositif sont : X ,Y, Z :axes cristallins

x,y,z :repère de la plaque

θ_c :angle de la coupe

H :épaisseur de la plaque

L_{cc} :distance entre les centres des deux transducteurs d'excitation E et de detection D, Fig III-7 .

Les deux IDT,E et D sont constitués respectivement de N_E et N_D paires d'électrodes métalliques,uniformément éspacés de $\lambda_0/2$.

Dans ces conditions leurs longueurs L_E et L_D s'éxpriment en fonction de λ_0 selon :

$$
\begin{aligned}
L_E &= N_E \lambda_0 \\
L_D &= N_D \lambda_0
\end{aligned}
\qquad \text{(III-23)}
$$

Les absorbants acoustiques placés sur les faces laterales ont pour fonction d'éliminer tout phénomène de réflexion sur ces mêmes faces .

L'étude mathématique peut ainsi être conduite dans l'approximation d'une plaque de longueur infinie [2] .

III-3-2 PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT:

L'effet de la diffraction étant négligé, le faisceau d'ondes T.H, émis par l'IDT d'excitation conserve au cours de sa propagation les mêmes dimensions que celui-ci,la figure (III-8) illustre le principe de fonctinnement .

A la frequence de coupure, le faisceau d'ondes T.H. émis est parallèle à la surface pour des fréquences d'excitation supérieures à la fréquence de coupure, il se propage dans la direction θ_{ei} du flux d'energie. Arrivé sur la surface inférieure de la plaque, il se reflechit alors d'un angle θ et se dirige en suite vers la surface superieure.Ce phénomène de réflexion sur les surfaces parallèles peut se produire plusieurs fois avant que le signal transporté par le faisceau ne soit intercepté par l'IDT de détection .

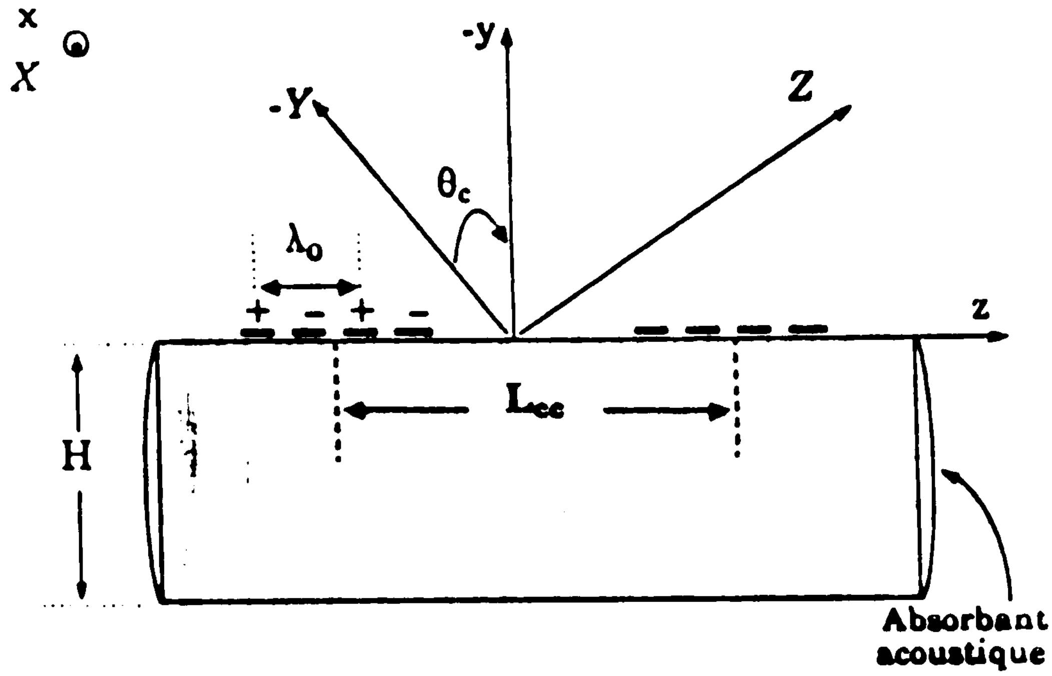


Fig III- 7 Dispositif à ondes TH dans une plaque

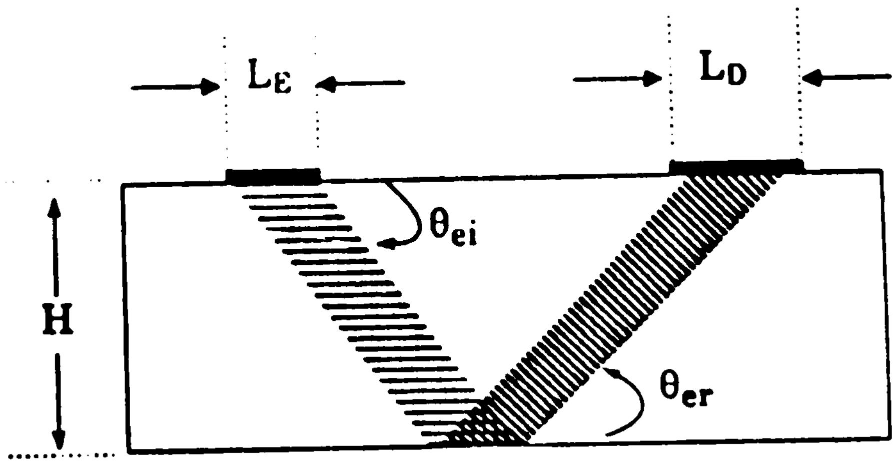


Fig III- 8 Principe de fonctionnement .

III-3-3 APPROXIMATION DES MODES DE PLAQUES:

Le fonctionnement du dispositif selon cette approximation est mis en évidence quand l'épaisseur H de la plaque est trés inférieure à la largeur L_E du faisceau émis.Dans ce cas, le recouvrement spatial entre les faisceaux incidents et réflechis occupe toute l'épaisseur de la plaque.L'interférence entre ces faisceaux donne naissance à des modes de plaque transverses horizontaux stationnaires entre les deux surfaces. Ces modes se propagent à des fréquences discrètes. Le dispositif est appelé ici dispositif à mode de plaque [2].

III-3-4 APPROXIMATION DES FAISCEAUX GUIDES :

Le fonctionnement du dispositif selon cette approximation est mis en évidence quand l'épaisseur H de la plaque est trés grande devant la largeur L_E du faisceau émis. Dans ces conditions, le recouvrement spatial entre le faisceau incident et réflechi occupe une épaisseur trés faible devant celle de la plaque.Ainsi, les ondes T.H sont ici des ondes progressives, guidées par réflexion succéssives sur les faces parallèles [2].

III-3-5 BANDE PASSANTE:

Cette étude concerne le dispositif à faisceaux guidés, en effet, un balayage de fréquences d'excitation entraine une succession de balayages de l'IDT de détection par les faisceaux réflechis sur la surface inférieure de la plaque. Le signal véhiculé par un faisceau réflechi n'est détecté que lorsque celui-ci recouvre partièllement l'IDT de détection. Ce recouvrement n'a lieu que pour certaines directions de propagation, donc pour certaines fréquences d'excitation. L'IDT d'excitation étant positionné sur la surface supérieure de la plaque, la distance L_{ed} le séparant de celui de la détection détermine la fréquence centrale de la bande passante [2].

Pour choisir cette fréquence, on cacule d'abord la distance séparant le point central de l'IDT d'excitation et le point central du faisceau réflechi, arrivant à la surface supérieure après une réflexion sur la surface inférieure. Cette distance représente la projection sur une des surfaces réflechissantes, des trajets incidents et réflechis (voir Fig III-9) .

Cette distance est exprimée par :

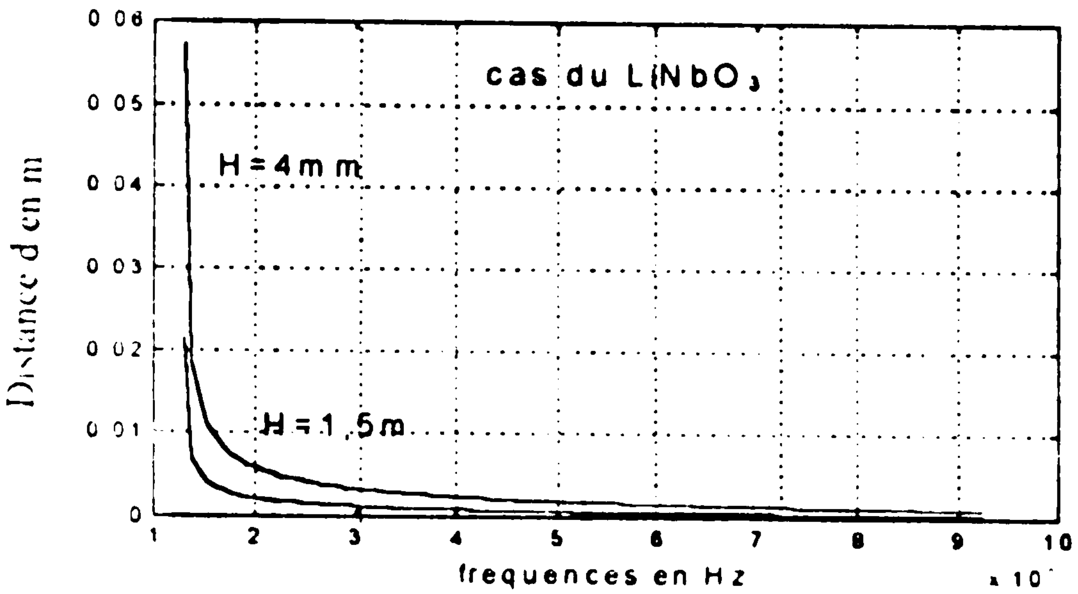
$$d = d_i + d_r$$

$$= H \left[\frac{1}{|tg\theta_{ei}|} + \frac{1}{|tg\theta_{er}|} \right] \qquad \text{(III-24)}$$

Les directions θ_{ei} et θ_{er} dépendent de la fréquence du signal d'excitation, en reportant les expressions (III-21) et (III-22) dans cette relation, on obtient :

$$d = \frac{2 H C_o}{W} \quad \text{où} \quad W = \sqrt{(\beta/k)^2 - 1} \qquad \text{(III-25)}$$

La figure III-10 représente les variations de d en fonction de la fréquence, pour une plaque de coupe Y et une periodicité du transducteur telle que $\lambda_o = 34.4\ \mu m$.



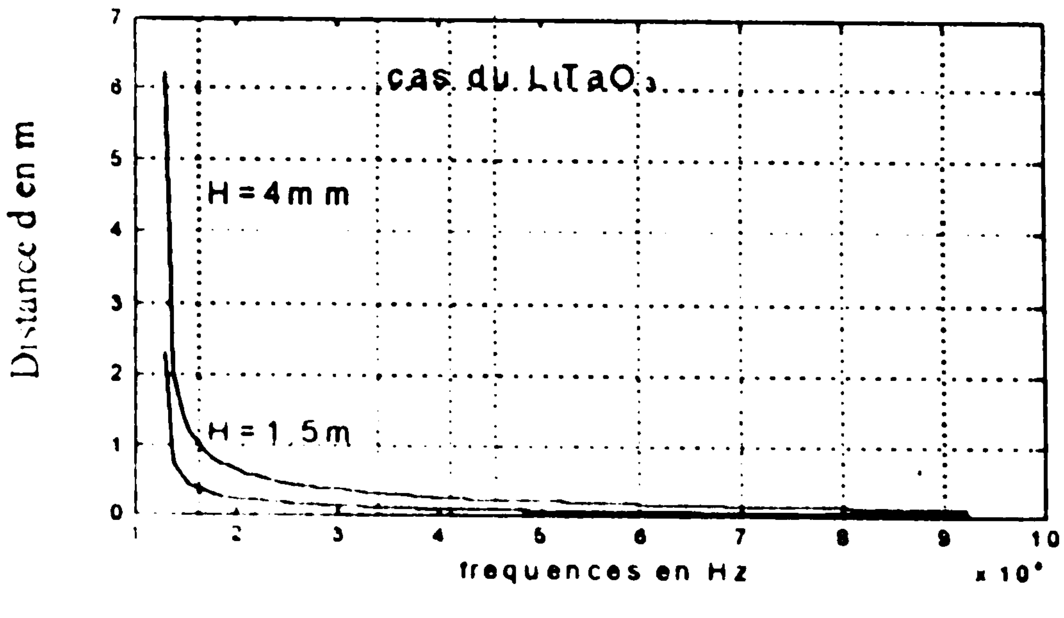


Fig III-10 Variations de la distance d en fonction de la fréquence pour deux valeurs de H, coupe Y.

Si le faisceau subit n réflexions sur la surface inférieure de la plaque, la distance totale d_T ,projection de n trajets incidents et de n trajets réflechis est alors :

$$d_T = n\, d$$

$$= \frac{2\, n\, H\, C_a}{W} \qquad \text{(III-26)}$$

Les relations (III-25) et (III-26) ne sont valables que dans le cas ou il y a réflexion sur la surface inférieure, pour cela la fréquence d'excitation doit être superieure à f_- , quant à la bande passante , elle peut être obtenue à partir du calcul de la surface de recouvrement (voir figure III-11) .

On se propose d'abord de déterminer les fréquences f_n pour lesquelles le faisceau réflechi soit centré sur l'IDT de détection (cas ou ΔZ est maximale), figure (III-12) .

Dans ce cas : $d_T = L_{cc}$, en remplaçant d_T dans la relation (III-26) , les fréquences f_n sont exprimées par :

$$f_n = f_c \left[1 + \left(2\, n\, H\, C_a / L_{cc} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-27)}$$

Les fréquences minimales f_n(min) pour lesquelles la détection n'est pas possible (cas où ΔZ = 0 de la figure III-13) sont obtenues pour :

$$d_T = L_{cc} + (L_E + L_D)/ 2 \qquad \text{(III-28)}$$

En reportant cette expression dans (III-36) ,on obtient:

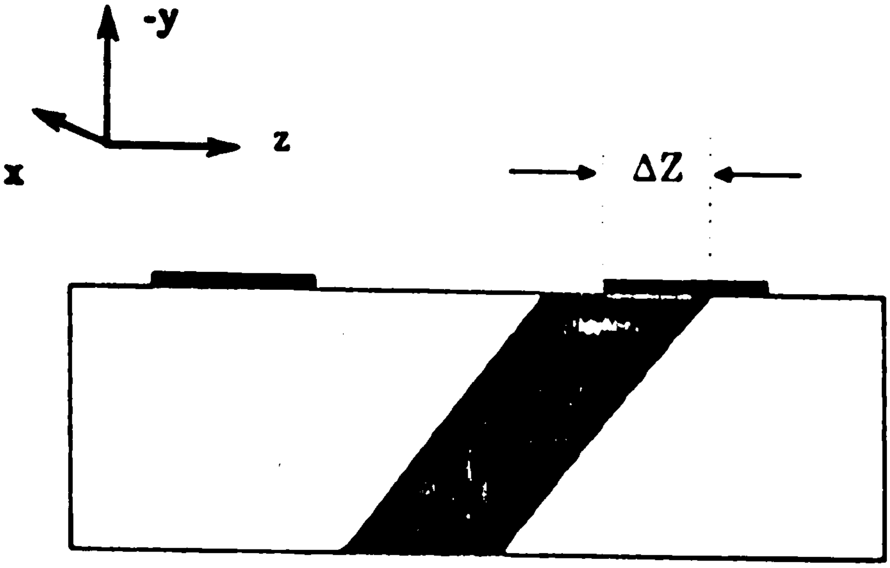
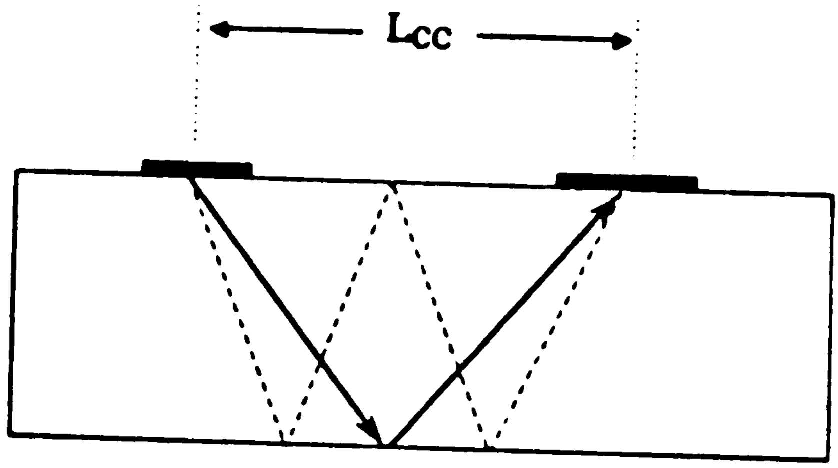


Fig III 11 . Recouvrement ΔZ de l'IDT de detection par un faisceau réflechi .



—— Une réflexion sur la surface inférieure $n=1$

---- Deux réflexions sur la surface inférieure $n=2$

Fig III-12 : Faisceau réflechi centré sur l'IDT de détection .

$$f_r(\min) = f_r \left[1 + \left(\frac{2\, n\, H\, C_a}{L_{cc} + (L_E + L_D)/2} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-29)}$$

Les fréquences maximales $f_r(\max)$ au delà des quelles la détection n'est plus possible (cas où $\Delta Z = 0$ de la figure III-14 sont obtenues pour :

$$d_T = L_{cc} - (L_E + L_D) / 2 \qquad \text{(III-30)}$$

Dans ce cas de figure $f_r(\max)$ est donnée par :

$$f_r(\max) = f_c \left[1 + \left(\frac{2\, n\, H\, C_a}{L_{cc} - (L_E + L_D)/2} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-31)}$$

La bande passante est limitée par $f_r(\min)$ et $f_r(\max)$. Cette conclusion permet d'envisager une utilisation de dispositif en tant que filtre passe-bande; les caractéristiques d'un tel filtre sera la fréquence centrale f_r définie par (III-27) et sa bande passante relative :

$$\Delta f = \frac{- f_r(\min) + f_r(\max)}{f_r} \qquad \text{(III-32)}$$

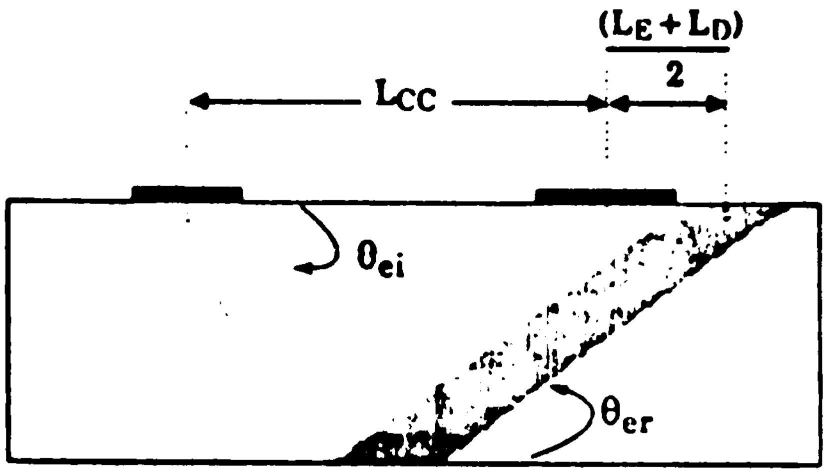


Fig III-13 :Direction de propagation (limite minimale) à partir de laquelle le faisceau réflechi est détecté.

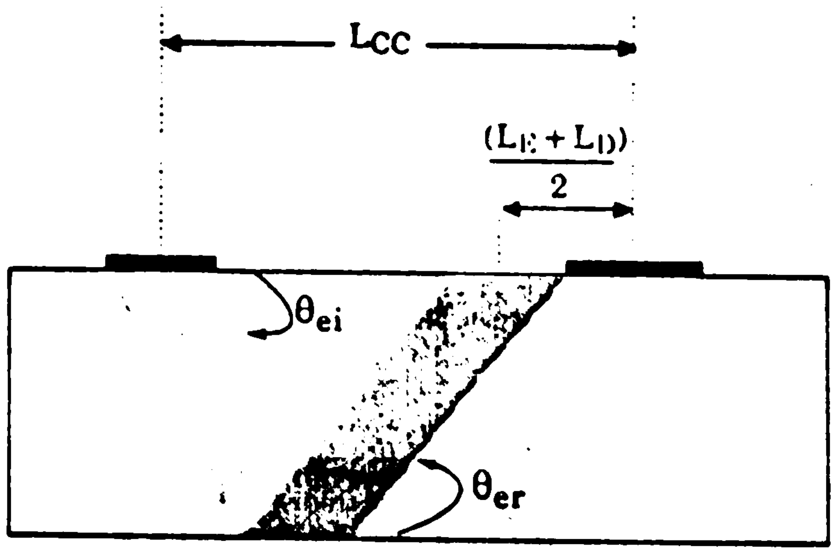


Fig III-14 : Direction de propagation (limite maximale) au delà de laquelle le faisceau n'est plus détecté .

III 3-6 FREQUENCES DES MODES DE PLAQUE :

En raison de la stationnarité entre les deux surfaces réfléchissantes, les fréquences de propagation des modes de plaque sont discrètes, et doivent être calculées en tenant compte des conditions aux limites, ce calcul est fait dans le cas d'une plaque de longueur supposée infinie et de surface libre des contraintes mécaniques [2,14]. (voir figure III-15).

Le déplacement des particules correspondant à une onde T.H guidée par réflexions succéssives sur les deux surfaces parallèles (y = - H /2 ,y = + H/2), s'écrit par :

$$U_x = U_{xi} + U_{xr} \qquad \text{(III-33)}$$

U_{xi} :déplacement correspondant à l'onde incidente se propageant vers les y positifs .

U_{xr} :déplacement correspondant à une onde se propageant vers les y négatifs.

et sont définis par :

$$U_{xi} = A \exp [j (\omega t - k_3 z - k_{2i} y)] \qquad \text{(III-34)}$$

$$U_{xr} = B \exp [j (\omega t - k_3 z - k_{2r} y)] \qquad \text{(III-35)}$$

où : k_{2i} et k_3 sont les composantes du vecteur d'onde réflechi .

k_{2r} et k_3 sont les composantes du vecteur d'onde incident

Les conditions aux limites sur les surfaces :y = ± H/2 se traduisent par l'annulation des contraintes exercées sur celles celles-ci, et sont définies par :

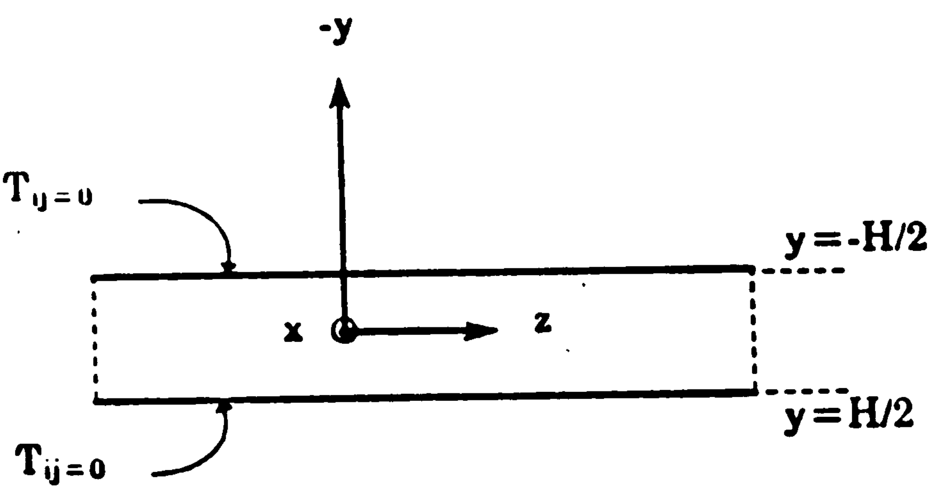


Fig III-15 : Conditions aux limites .

$$T_{21} = C_{16} \frac{\partial U_x}{\partial x} + C_{00} \frac{\partial U_x}{\partial y} + C_{50} \frac{\partial U_x}{\partial z} \qquad \text{(III-36)}$$

$$T_{22} = C_{12} \frac{\partial U_x}{\partial x} + C_{20} \frac{\partial U_x}{\partial y} + C_{25} \frac{\partial U_x}{\partial z} \qquad \text{(III-37)}$$

$$T_{23} = C_{15} \frac{\partial U_x}{\partial x} + C_{40} \frac{\partial U_x}{\partial y} + C_{45} \frac{\partial U_x}{\partial z} \qquad \text{(III-38)}$$

Dans le cas d'un cristal de système cristallographique trigonal et classe 3m la seule composante non nulle est T_{21} est donnée par :

$$T_{21} = C_{66} \frac{\partial U_x}{\partial y} + C_{56} \frac{\partial U_x}{\partial z} \qquad \text{(III-39)}$$

Le calcul des dérivées partièlles à partir des relations (III-35) et (III-36) conduit à:

$$T_{21} = j\,[\,-\,A(C_{00}\,k_2\,C_{50}\,k_3)\,\exp(-\,j\,k_{2i}\,y)\,+$$

$$B\,(C_{00}\,k_{2i}\,+\,C_{50}\,k_3)\,\exp(j\,k_{2r}\,y)]\,\exp(\omega\,t\,-\,k_3 z) \qquad \text{(III-40)}$$

L'annulation de T_{21} en $y = \pm H/2$ conduit à :

$$-\,A\,(C_{00}\,k_{2i}\,+\,C_{50}\,k_3)\,\exp(-\,j\,k_{2i}\,H/2)\,+$$

$$B\,(C_{00}\,k_{2i}\,+\,C_{50}\,k_3)\,\exp(j\,k_{2r}\,H/2)\,=\,0 \qquad \text{(III-41)}$$

et :

$$A\,(C_{00}\,k_{2l} + C_{50}\,k_{3})\exp(j\,k_{2l}\,H/2) +$$

$$B\,(C_{00}\,k_{2l} + C_{50}\,k_{3})\exp(-\,j\,k_{2r}\,H/2) = 0 \qquad \text{(III-42)}$$

Ce système d'equations s'exprime sous forme matricielle comme suit :

$$[S]\,[U] = 0 \qquad \text{(III-43)}$$

où

$$[S] = \begin{vmatrix} A\,(C_{00}\,K_{2l} + C_{50}\,k_{3}) \\ B\,(C_{00}\,K_{2r} + C_{50}\,k_{3}) \end{vmatrix} \qquad \text{(III-44)}$$

et :

$$[U] = \begin{vmatrix} -\exp(-\,j\,k_{2l}\,H/2) & \exp(j\,k_{2r}\,H/2) \\ -\exp(-\,j\,k_{2l}\,H/2) & \exp(\,jk_{2r}\,H/2) \end{vmatrix} \qquad \text{(III-45)}$$

La solution non triviale de ce système est obtenue par l'annulation du determinant de la matrice de la condition aux limites, soit :

$$-\exp[-\,j\,(k_{2l} + k_{2r})\,H/2] + \exp j\,(k_{2l} + k_{2r})\,H/2 = 0 \qquad \text{(III-46)}$$

Cette égalité n'est possible que si :

$$k_{2l} + k_{2r} = 2\,m\,\pi\,/\,H \qquad \text{(III-47)}$$

où : m est un entier.

Les expressions de k'_{2l} et k_{2r} calculées à partir de la relation de dispersion donnent :

$$k_{2l} = - k_3 \frac{C_{50}}{C_{\infty}} + k_3 C_a \left[(f / f_c)^2 - 1 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-48)}$$

$$k_{2r} = - k_3 \frac{C_{50}}{C_{\infty}} - k_3 C_a \left[(f / f_c)^2 - 1 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-49)}$$

Le signe positif de k_{2r} étant imposé par l'expression (III-35) du déplacement, on en tient compte en multipliant l'expression k_{2r} par (-1), d'où :

$$k_{2l} = k_{2l} \qquad \text{(III-50)}$$

$$k_{2r} = -k_{2r} \qquad \text{(III-51)}$$

$$k_{2l} + k_{2r} = k_{2l} - k_{2r} \qquad \text{(III-52)}$$

En reprotant (III-48), (III-49) et (III-50) dans (III-47) on obtient :

$$2 k_3 C_a \left[(f / f_c)^2 - 1 \right]^{1/2} = 2 m \pi / H \qquad \text{(III-53)}$$

La fréquence du mode transversal horizontal m, notée f_m est alors :

$$f_m = f_c \left[(m \pi / (k_3 H C_a))^2 + 1 \right]^{1/2} \qquad \text{(III-54)}$$

En remplaçant f_c par son expression (III-13), on obtient

$$f_m = 1/2H\left[C_{66}\,((k_3\,C_a\,H/\pi)^2 + m^2)/\rho\right]^{1/2} \qquad \text{(III-55)}$$

D'aprés la relation (III-54) on remarque que le mode $m = 0$ se propage à la fréquence $f_0 = f_c$; cette fréquence est celle de l'onde T.H. se propageant paralèlement à la surface d'un demi espace, c'est à dire une onde SSBW [2].

La présence de l'IDT de longueur infinie, fixe en effet la valeur de k_3 à $k_0 = 2\pi/\lambda$, dans ce cas, les fréquences des modes de plaque T.H sont :

$$f_m = 1/2H\left[C_{66}\,((2\,C_a\,H/\lambda_0)^2 + m^2)/\rho\right]^{1/2} \qquad \text{(III-56)}$$

Ces valeurs de fréquences correspondent aux points d'intersection entre les courbes de dispersion modale et la courbe $k_3 = k_0$, elles peuvent donc être determinées graphiquement . La figure III-16 représente les variations de f_m en fonction de k_3/k_0 pour une coupe Y ± 0°, avec H = 0.1mm et λ_0 = 34.4 µm. Quant aux vitesses de propagation des modes, elles sont exprimées par :

$$V_m = C_a\left[C_{66}/\rho\,(m\pi/(k_3\,H\,C_a))^2 + 1\right]^{1/2} \qquad \text{(III-57)}$$

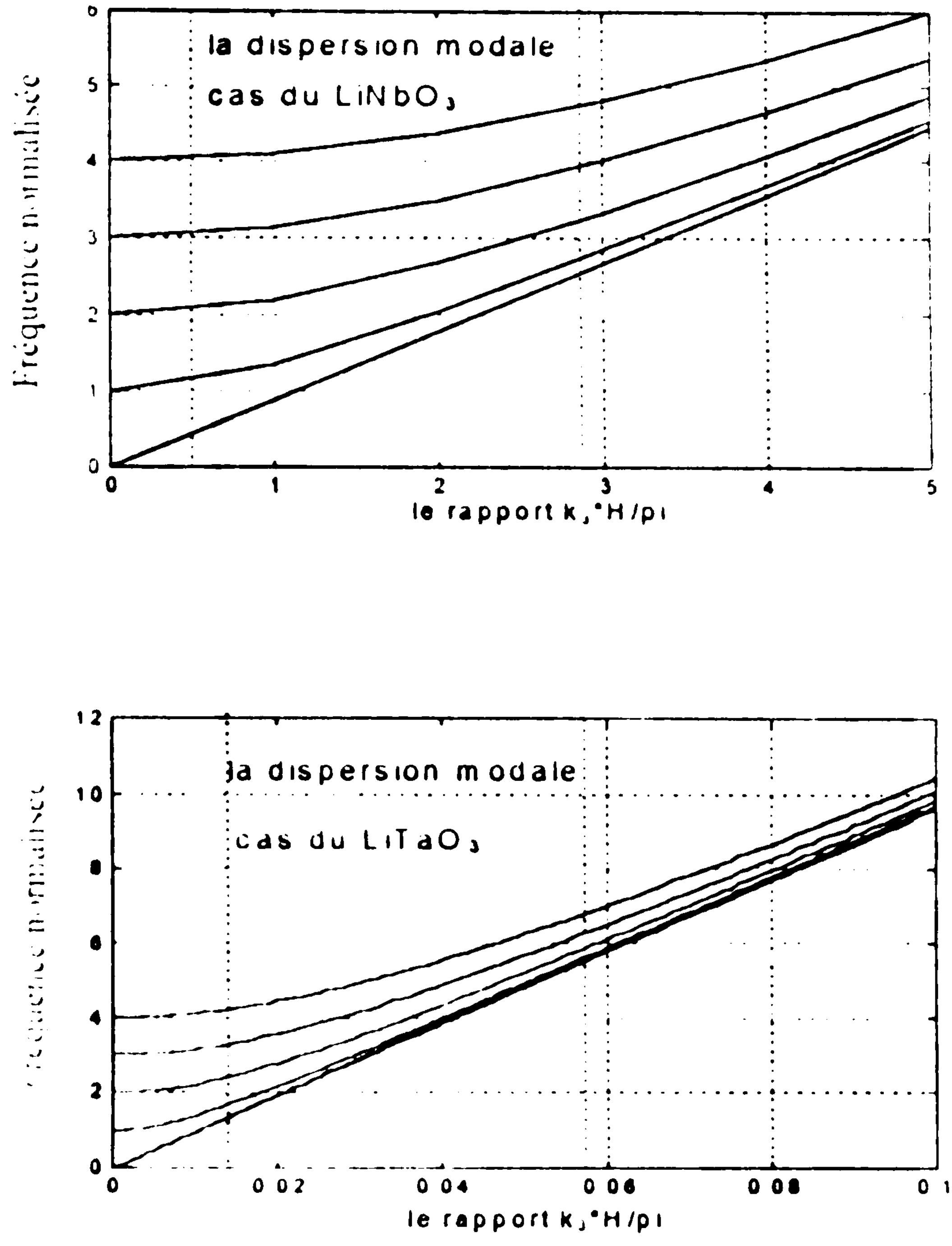


Fig. III-16 **Variations de la fréquence normalisée en fonction de K_3 / K_0 pour $H / \lambda_0 = 2.9$. Coupe Y**

Le mode d'ordre zero se propage à la fréquence de coupure f donc à la vitesse :

$$V_c = C_0 \, (C_{66} / \rho)^{1/2} \qquad \text{(III-58)}$$

La figure III-17 représente les variations des vitesses de propagation V_m en fonction de k_3/k_0 pour $H/\lambda_0 = 1$.

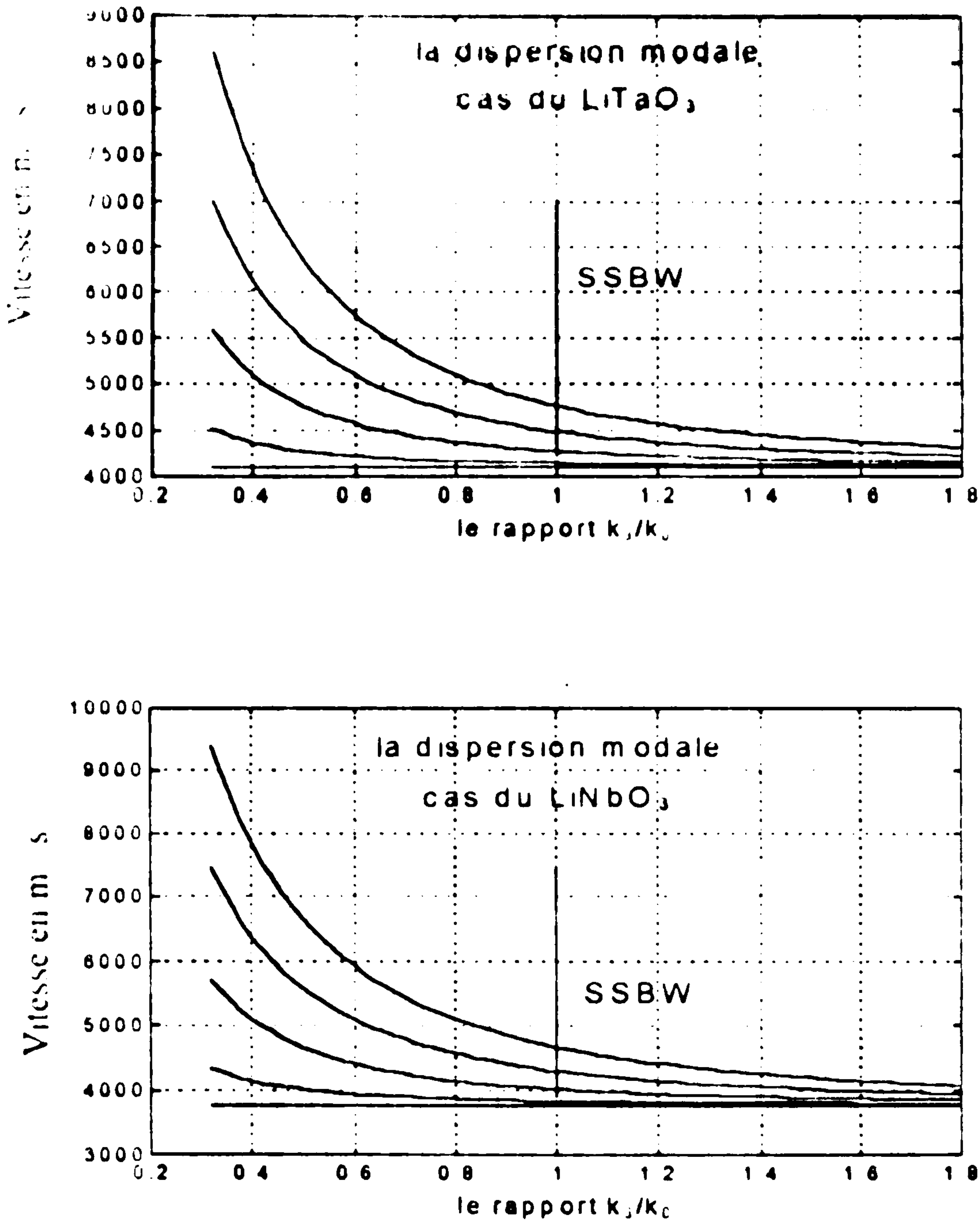


Fig. III-17 Variations de la vitesse normalisée en fonction de

K_3 / K_0 pour $H / \lambda_0 = 1$, coupe Y.

CHAPITRE IV

SPECTRE D'ONDES ACOUSTIQUES EXCITEES PAR UNE SOURCE

IV-1 INTRODUCTION

Une onde acoustique de surface générée sur un demi-espace piézoélectrique par un IDT, est accompagnée par plusieurs ondes acoustiques se propageant avec des vitesses et directions de propagations différentes de celles de l'onde SAW . Des fois, le coefficient de couplage de ces ondes est plus faible que celui de l'onde acoustique de surface,ces ondes alors sont considérées comme modes parasites dans les dispositifs à ondes de surface , et des fois le coéfficient de couplage de ces ondes et plus important que celui des ondes de surface,danscecas ces ondes sont alors utilisables dans diverses applications .

IV-2 FORMULATION DU PROBLEME :

La figure IV-1 illustre une source infinie suivant la la direction x_2 , placée sur une surface d'un milieu piézoélectrique , le substrat piézoélectrique s'étend à $-\infty$ suivant la direction x_3, et x_1 est la direction de propagation .

les équations qui donnent le déplacement et le potentiel électrique pour une onde acoustique dans le substrat sont (II-9) et (II-10). Le déplacement électrique est nul dans le vide et le potentiel électrique satisfait (II-11). Dans le vide les équations (II-31) et (II-33) sont satisfaites et l'équation des conditions aux limites du déplacement électrique donnée par

(II-32) **à cause de la densité de charge surfacique** $q(x_1)$ qui **est** introduit**e par les électrodes, ce** qui **donne [4,5] :**

$$T_{34}\ (x_3 = 0^+) - T_{34}\ (x_3 = 0^-) = q(x_1) \qquad \text{(IV-1)}$$

où : T_{34} est l**e** déplacement électrique D_3.

Une solution donnant le spectre des ondes excitées par la source, consiste en une sommation des ondes se propageant avec de différents vecteurs d'ondes ou différentes vitesses. Pour obtenir une solution complète, les quantités des champs sont obtenues en fonction de k ou de la vitesse. La solution en fonction des coordonnées de l'espace peut être obtenue en utilisant les relations de Fourier suivantes [4,5]:

$$A(x_1,x_3) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dk\ \bar{A}(k,x_3)\ \exp\ (i\ kx_1)$$

$$A(x_1,x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\ A(x_1,x_3)\ \exp(-ikx_1) \qquad \text{(IV-2)}$$

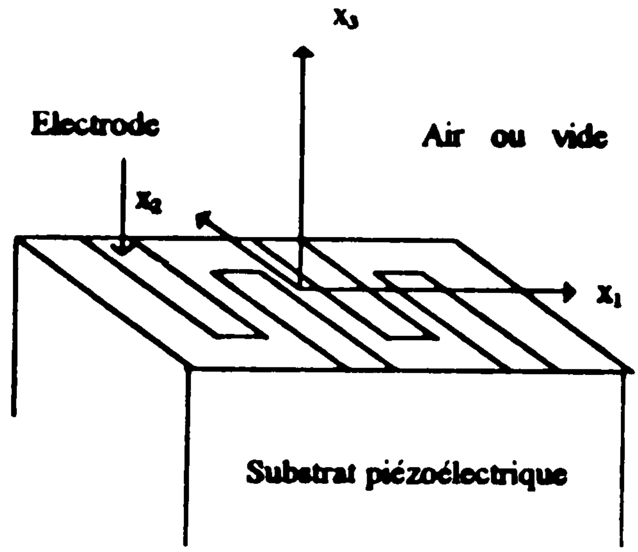


Fig IV-1 Cristal semi-infini avec une source infinie suivant x_2

où : A et $\bar{A}$ représentent les déplacements ou le potentiel électriques. La solution d'onde $\bar{U}_i$ avec : i=1..4 peut être exprimée comme dans l'équation (II-21) avec γ = 0 , donc :

$$\bar{U}_i (k,x_3) = \sum_{r} C_r \alpha_i^{(r)} \exp (ik \beta^{(r)} x_3 - i\omega t) \qquad \text{(IV-3)}$$

Les racines $\beta^{(r)}$ obtenues à partir de l'équation (II-20) sont en fonction de v ou de k. Les racines réelles représentent les ondes de volume. Seule la moitié des racines est retenue ; celles qui décroissent pour des valeurs décroissantes de k. Donc , quatre racines $\beta^{(r)}$ contribuent à la solution. Dans le vide , le potentiel électrique satisfait l'équation (II-11), et en tenant en compte l'équation des conditions aux limites (II-32) et la solution donnée par (IV-3) le potentiel peut être exprimé comme suit :

$$U (k,x_3)|_{x_3 \leq 0} = \sum_{r=1}^{4} \alpha_4^{(r)} \exp (-kx_3 - i\omega t) \qquad \text{(IV-4)}$$

En remplaçant la solution donnée par les équations (IV-3) et (IV-4) dans l'équation (IV-2) , l'équation des conditions aux limites mécaniques donnée par (II-34) , peut être écrite comme suit :

$$T_{3j}(x_3 = 0) = ik \sum_{n=1}^{4} C_n \, \bar{T}_{3j}(n) = 0 \qquad \text{(IV-5)}$$

avec : j=1,2,3.

où

$$\bar{T}_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{4} (M_{ijk1} + M_{ijk3}\, \beta^{(n)})\, \alpha_k^{(n)} \qquad \text{(IV-6)}$$

En substituant les équations (II-15), (IV-3) et (IV-4) dans l'équation (IV-1) on obtient :

$$\sum_{n=1}^{4} (\bar{T}_{34}(n) + j\varepsilon_0\, \alpha_4^{(n)}) = \frac{i}{k}\, \bar{q}(k) \qquad \text{(IV-7)}$$

où :

$$\bar{q}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \; q(x_1) \; \exp(-ikx_1) \qquad \text{(IV-8)}$$

Les conditions aux limites données par les équations (IV-5) et (IV-7) peuvent être exprimées sous forme matricielle comme suit :

$$[L]\,[C] = \frac{i}{k}\, \bar{q}\, (C_0) \qquad \text{(IV-9)}$$

où :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C^2 \\ C^3 \\ C_4 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad [C_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et : [L] est une matrice 4×4 dont les élements sont :

$$L_{jn} = \bar{T}_{3j}(n) + j\varepsilon_0 \alpha_4^{(n)} \delta_{j4} \qquad \text{(IV-10)}$$

où:

$$\delta_{jn} = \begin{cases} 1 \text{ pour } j = 4 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En resolvant (IV-9),on obtient :

$$C_n = \frac{i\,\bar{q}(k)}{k} \, \frac{N_n}{D_0} \qquad \text{(IV-11)}$$

où : D_0 = det [L] et N_n = det [L_n]

et : L_n est la matrice L avec la $n^{ème}$ colonne remplacée par [C_0]. Donc, en substituant (IV-11) dans (IV-3) et en utilisant (IV-2), on obtient l'équation suivante :

$$\bar{U}(k,x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; \frac{i\bar{q}}{k} \sum_n \frac{N_n}{D_0} \alpha_i^{(n)} \exp\left(ik\beta_3^{(n)} x - ikvt\right) \qquad \text{(IV-12)}$$

Pour résoudre cette intégrale, on procède par deux méthodes, la première consiste en une intégration numérique, tandis que la seconde est une approche géométrique [4,5] .

IV-3 SOLUTION PAR INTEGRATION NUMERIQUE :

Une procédure developpée par Milsom pour calculer le potentiel de surface pour plusieurs matériaux. Dans le but de voir l'intégrale de l'équation (IV-12) traitée par Milsom, il est necéssaire de présenter d'abord sa théorie.

Milsom a défini la permittivité éffective , ϵ_e en fonction de k comme suit :

$$\epsilon_e(k) = \frac{\bar{q}(k)}{|k|\ \bar{U}_4\ (x_3=0)} \qquad \text{(IV-13)}$$

En utilisant les équations (IV-3) et (IV-11) on aura :

$$\epsilon_e(k) = \frac{D_0\ k}{j\ |k| \sum N_n\ \alpha_4^{(n)}} \qquad \text{(IV-14)}$$

La permittivité éffective donne toutes les informations utiles sur les diferentes quantités électriques en fonction de k ou de s, ou s est la lenteur (inverse de la vitesse). As = ±s_0 correspondant a la lenteur de l'onde acoustique de surface, le determinant D_0 est nul, ce qui correspond aussi à une valeur nulle de la permittivité éffective .Pour s =±s_s, lenteur correspondant a une surface métallisée, et qui correspond à une valeur nulle du denominateur, donnant ainsi un pôle pour la permittivité éffective.De plus ils existent des discontinuités dans la permittivité éffective pour des lenteurs s_n, lorsqu'une des racines $\beta^{(n)}$ varie d'une valeur complexe à une valeur réelle,

... lenteurs sont dites lenteurs de coupures, pour une lenteur plus grande que s_1, la pérmittivité éffective est purement réelle et devient complexe pour $s = s_1$. Ces lenteurs de coupures à des lenteurs des ondes de volume [4,5]. En résolvant l'équation (IV-13) pour $\bar{U}$ ($x_3 = 0$), et en développant la transformée de Fourier de $\bar{U}(x_3 = 0)$, et en substituant dans l'équation (IV-14), le potentiel de surface à une distance x_1 de la source peut être donné par :

$$\bar{U}_4(x_1,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1' \; G(x_1 - x_1') \; q(x') \qquad \text{(IV-15)}$$

où :

$$G(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \frac{\exp(-ikx\ )}{|\ k\ |\ \varepsilon_s(k)} \qquad \text{(IV-16)}$$

En remplaçant l'équation (IV-14) dans (IV-16), la fonction de Green $G(x_1)$ peut être écrite comme suit :

$$G(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; \frac{i}{k\, D_0} \sum_n N_n \, \alpha_4^{(n)} \exp\ (ikx_1) \qquad \text{(IV-17)}$$

En remplaçant l'expression de la fonction de Green dans (IV 15), on obtient une expression du potentiel similaire à l'équation (IV-12) avec : $i = 4$ et $x_y = 0$.

Pour évaluer l'intégrale de l'équation (IV-17), Nilson reécrit l'équation (IV-17) comme suit :

$$G(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \Gamma(s) \exp(isX) \qquad \text{(IV-18)}$$

où : $s = 1/v$

et : $X = \omega x_1$

$$\Gamma(s) = \frac{1}{|s|\,\varepsilon_s(s)} = j\,\frac{\sum N_n\, a_4^{(n)}}{s\, D_0} \qquad \text{(IV-19)}$$

Le potentiel de surface peut être calculé numériquement, et la fonction $\Gamma(s)$ a des singularités à la lenteur de l'onde de surface $\pm s_0$ et $s = 0$. Ces singularités doivent être exclues et traitées analytiquement avant que l'intégrale numérique soit faite. L'équation (IV-19) peut être développée comme suit :

$$\Gamma(s) = \Gamma_0(s) + \Gamma_s(s) + \Gamma_t(s) \qquad \text{(IV-20)}$$

où :

$$\Gamma_0(s) = \frac{1}{|s|\,\varepsilon_s(0)} \qquad \text{(IV-21)}$$

$$\Gamma_s(s) = 2\, s_0\, G_s/(s^2 - s_0^2) \qquad \text{(IV-22)}$$

$$\Gamma_b(s) = \frac{1}{s\,\varepsilon_s(s)} - \Gamma_o(s) - \Gamma_s(s) \tag{IV-23}$$

$$G_s = \frac{1}{s\, d\varepsilon_s(s)/ds\big|_{s=s_o}} \tag{IV-24}$$

L'équation (IV-18) peut être exprimée comme une somme de trois fonctions de Green définies comme suit [4,5,7] :

$$G(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \Gamma_o(s)\, \exp(isX) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \Gamma_s(s)\, \exp(isX)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \Gamma_s(s)\, \exp(isX) \tag{IV-25}$$

les trois termes à droite de l'équation (IV-25) sont repectivement les contributions électrostatique, de l'onde de surface et de l'onde de volume au potentiel électrique .

La contribution électrostatique au potentiel électrique peut être évaluée analytiquement, ainsi que la contribution de l'onde de surface, tandis que celle de l'onde de volume, on utilise une approche d'intégration numérique pour l'évaluer [4,5,7].

On considère au début, la fonction de *Green* électrostatique :

$$G_0(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0 \exp(+isX)\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(+isX)}{|s|}\, ds \qquad \text{(IV-26)}$$

Cette intégrale est infinie quelque soit la valeur de X, cette solution n'est pas intéressante, car une source linéique de charges isolées ne peut pas exister dans un champ électrique [5].Il est donc nécessaire initialement de considérer le potentiel dû à des sources linéiques égales et opposées à $\pm X_0$, cela est donné par :

$$G(X-X_0)- G(X+X_0) = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_s(0)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|s|}\exp(+isX)\; x$$

$$[\exp(-isX_0)- \exp(+isX_0)]\; ds$$

$$= \frac{2}{\pi\varepsilon_s(0)}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(sX)\,\sin(sX_0)}{s}\, ds \qquad \text{(IV-27)}$$

Lorsque seule la partie paire contribue à l'intégrale, précedente est une intégrale standard, donc on obtient :

$$G_0(X-X_0)- G_0(X+X_0)= \frac{-1}{\pi\varepsilon_s(0)}[\, \mathrm{Ln}|X-X_0|-|X+X_0|] \qquad \text{(IV-28)}$$

Sachant que $X = \omega x_1$ la dépendance en fréquence dans la relation (IV-28) disparait [5], et on aura :

$$G_o(X-X_o) - G_o(X+X_o) = \frac{-1}{\pi\varepsilon_s(0)} [\,Ln|x_1-x_o| - |x_1+x_o|\,] \qquad \text{(IV-29)}$$

où les sources sont à $x = \pm\, x_o$.

Sachant que pour chaque source linéique de charges, il existe une source linéique de charges correspondantes égales et parallèlès opposées à un certain autre point sur la surface, ce qui donne :

$$G_o(X) = \frac{-1}{\pi\ \varepsilon_s(0)}\ Ln|x_1| \qquad \text{(IV-30)}$$

Cependant, l'équation obtenue ne donne pas une solution complète pour le champ électrostatique,et cela peut être vu pour $\omega = 0$. Le potentiel dû à une source linéique à une fréquence nulle $G_{oo}(X)$ est obtenu à partir de la permittivité éffective à l'infini et à une lenteur nulle . Cela est une conséquence de s infinie à $\omega = 0$ pour toutes les valeurs du nombre d'onde k,donc:

$$G_{oo}(x_3) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_s(\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\ k\ |} \exp(+ikx_4)\ dk$$

$$= \frac{-\ 1}{\pi\ \varepsilon_s(\infty)}\ Ln|x_1| \qquad \text{(IV-31)}$$

achant que la limite de G(X) lorsque ω tend vers zero doit être égale à $G_{oo}(x_3)$ (plus une constante), une fonction logarithmique additionnelle doit être envisagée [4,5] .

Avant de passer à la contribution de l'onde de volume, on détermine d'abord la contribution de l'onde de surface au potentiel électrique.

on a :
$$G_T(X) = G_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2 - s_o^2} \exp(+isX)\, ds$$
$$= G_s \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{s - s_o} - \frac{1}{s + s_o} \right) \exp(+isX)\, ds \qquad \text{(IV-32)}$$

Pour évaluer cette intégrale, on introduit une dissipation infinitésimale dans le matériau, qui a pour effet de déplacer le premier pôle à s_o (ondes de surface à propagation positive) dans le demi éspace négatif du diagramme et le second pôle à $-s_o$ (ondes de surface à propagation négative) dans le demi plan positif, en tenant seulement compte au debut le contour d'intégration du demi plan inférieur pour $X \geq 0$, et puis le demi plan supérieur pour $X \leq 0$, le théorème des residus donne :

$$G_T(X) = -i\, G_s \exp(+isX) \qquad \text{(IV-33)}$$

Finalement, le troisième terme de l'équation est une intégrale numérique qui, en tenant compte de la symétrie de $\Gamma_b(s)$, on donnera :

$$G_b(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_b(s) \cos(sX)\, ds \qquad \text{(IV-34)}$$

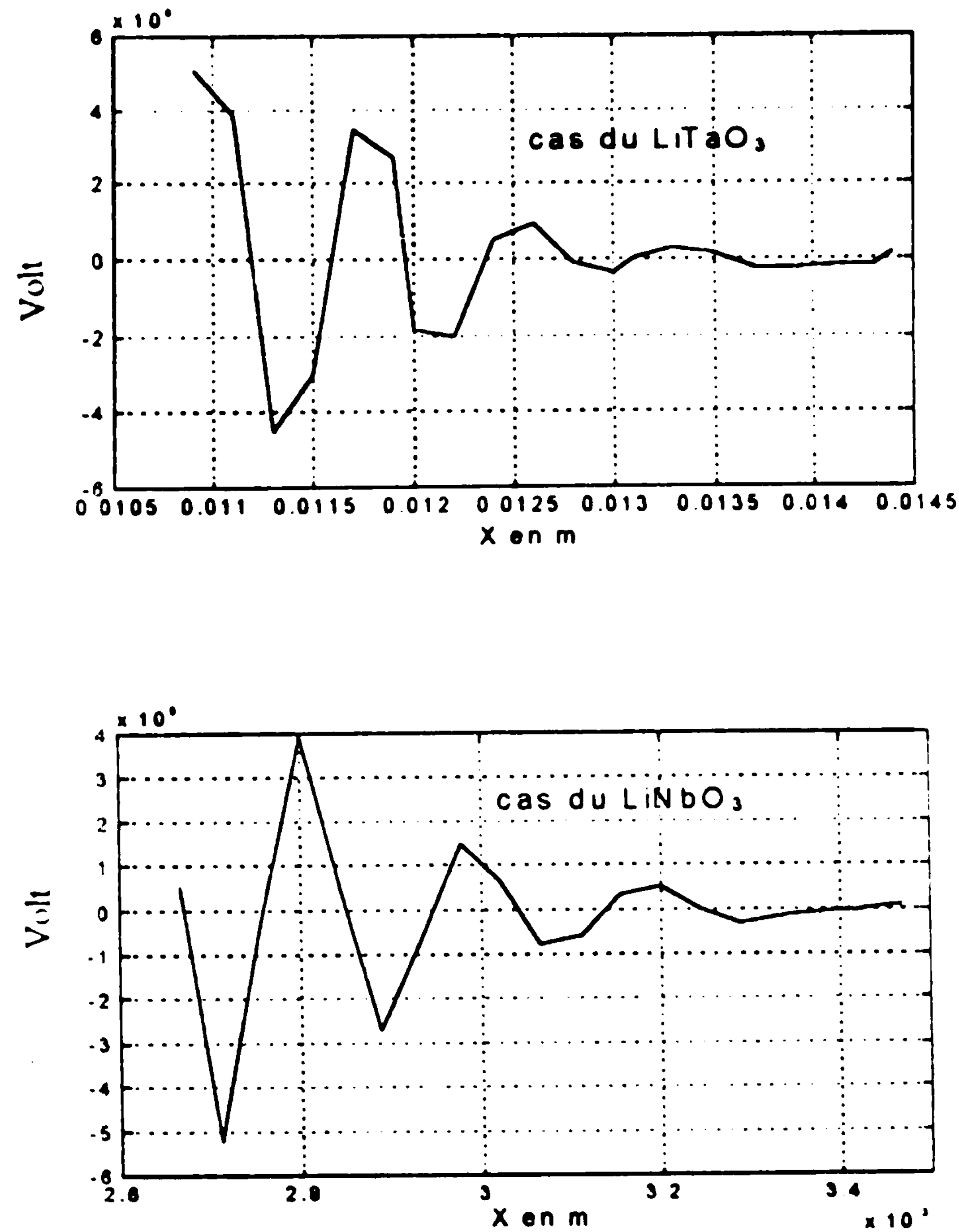


Fig. IV-2 Contribution de l'onde de volume au potentiel électrique séparer sa contribution de celles des ondes de volume. Dans le but d'identifier chaque contribution séparément, une approche consistant en une combinaison d'une technique numérique avec une technique analytique developpée par *Yashiro* est utilisée .

Le potentiel électrique et le déplacement des particules à (x_1,x_3) peut être obtenue en évaluant l'intégrale de l'équation (IV-12) [4,5] .Comme c'est déjà dit, pour chaque valeur de k on a huit racines β complexes, dont on choisit ceux ayant une partie imaginaire négative, et les racines β qui décroissent pour des valeurs décroissantes de k, c'est à dire que les ondes partièlles s'atténuent dans le substrat ou se propagent à l'intérieur du milieu. A $k = k_n$ correspondant à $V = V_n$, deux parmi les huit racines β coincident sur l'axe réel, ce qui correspond à une singularité où à un point debranchement.

On peut générallement avoir trois points de branchements à $V=V_n$ .En plus,au pôle $k=k_s$, un autre pôle peut apparaitre dans le plan complexe de k [4,5] .A chacun de ces pôles le déterminant des conditions aux limites , D_0 est nul, c'est à dire qu'il correspond à une solution d'onde de surface libre .

Un pôle sur l'axe réel de k implique une propagation sans atténuation suivant x_1.Si le pôle apparait à une vitesse plus faible que V_1,c'est à dire $V =V_s$,les racines β contributives sont à partie imaginaire négative et l'énergie est confinée à la surface ce qui correspond à une SAW.En outre, si le pôle sur l'axe réel apparait pour une vitesse plus grande que V_1, au moins une racine réelle contribue à la solution.L'onde partièlle correspondante est une onde de volume.Si le pôle apparait loin de l'axe réel, il correspond à une onde qui croît où s'atténue suivant x_1. Le premier cas a lieu dans le second et le quatrième quadrant du plan complexe de k , et correspond à un cas inaccéptable physiquement. Le second cas correspond à un pôle situé dans le premier et le troisième quadrants,donc l'onde s'atténue suivant la direction x_1 , et une partie de l'énergie est perdue en volume (suivant x_3), cette onde est connue sous le nom de pseudo onde de surface, ou onde de fuite .

Au moins une des quatre racines possède une faible partie imaginaire positive, qui donne apparition à une contribution d'une onde partièlle permettant un transfert d'énergie de la surface au volume. Cependant ,si cette partie imaginaire est grande, cela implique une rapide croissance suivant la direction $-x_3$, ce qui correspond de nouveau à un cas qui n'est pas physique.Donc pour que les pôles du premier et du troisième quadrant contribuent à la propagation de l'onde , ils doivent donner une faible atténuation suivant x_1 et une trés faible croissance suivant x_3, ce qui implique qu'ils doivent être proches de l'axe réel de k [4,5] .

IV-4-1 DEFORMATION DU CHEMIN D'INTEGRATION :

Avant d'évaluer l'intégrale de l'équation (IV-1?), les pôles et les points de branchements dans le plan complexe k,doivent être localisés en examinant le comportement des racines β en fonction de la variation de V ou de k.Le point auquel une paire de racines complexes conjuguées coicident sur l'axe réel, et un point de branchement. Les pôles sur l'axe réel sont évalués en examinant le déterminant $D_0(k)$ lorsque k varie sur l'axe réel, c'est à dire pour une valeur donnant une valeur minimale du déterminant.Il est trés difficile de localiser tous les pôles loin de l'axe réel [4,5], cependant les pôles qui apparaissent pour une pseudo SAW sont proches de l'axe réel. Dans le but d'identifier ces pôles,on note que $D_0(k)$ possède un minimum pour une certaine valeur de k,au voisinage de cette valeur de k, on fait varier k dans le plan complexe jusqu'à l'obtention d'un minimum, ce pôle correspond à une pseudo SAW .

En intégrant l'équation (IV-12), le long de l'axe réel , des discontinuités apparaissent aux points de branchements et aux pôles, et doivent être supprimées et évaluées analytiquement .

Le chemin d'intégration depend de x_3 ,pour lequel U_i ,i=1..4 doivent être calculés. Pour $x_3 = 0$, l'expression du déplacement des particules et du potentiel de surface à une distance x_1 de la source s'écrit :

$$U_i(x_1,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{i\bar{q}(k)}{k} \sum_n \frac{N_n\, \alpha_i^{(n)}}{D_0} \exp\,(ikx_1) \qquad \text{(IV-36)}$$

Le contour d'intégration associé à cette équation est montré par la figure IV-3 .

En appliquant le lemme de *Jordan*, l'équation (IV-36) peut être exprimée en termes de plusieurs contributions comme suit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk.. = \int_{IA} dk.. + \sum_{\substack{\text{tous les points}\\ \text{de branchements}}} \int_{BC_n} dk.. + \sum_{\text{tous les pôles}} \int_{P} dk.. \qquad \text{(IV-37)}$$

où ; IA est l'arc infini,BC_n est la boucle de la coupe du branchement associée à l'$n^{ème}$ point de branchement et P_n est la boucle autour du $n^{ème}$ pôle , Fig IV-3 .L'intégrale suivant l'arc infini IA est nulle, tandis que l'intégration suivant la boucle P_n donne une valeur égale au résidu du $n^{ème}$ pôle .Pour les points de branchements, la technique du chemin à plus grande pente "steepest descent path" est utilisée pour choisir les coupes de branchements appropriées [4].

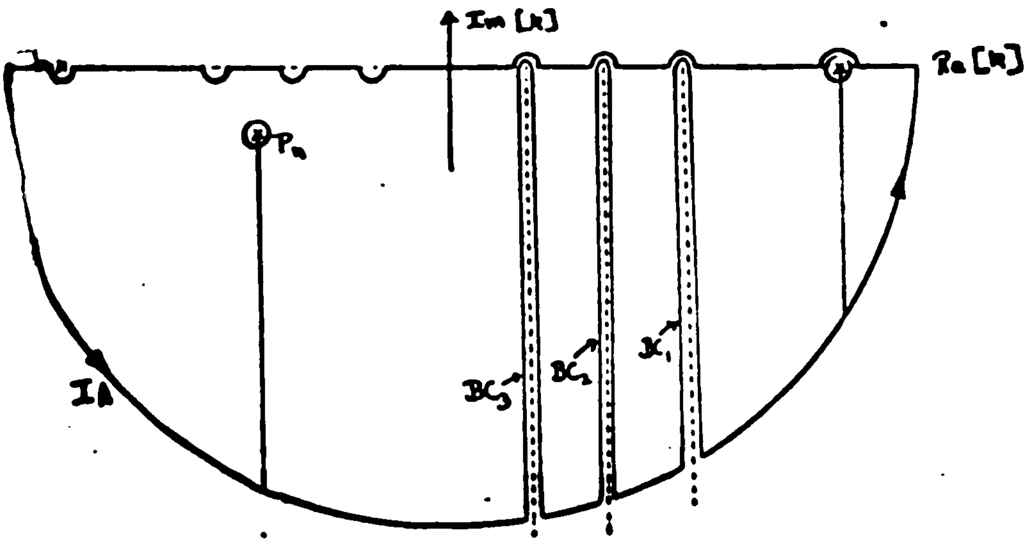


Fig IV-3 : pôle ,point de branchement
et coupe de branchement .

IV-4-2 CONTRIBUTION DUE AUX POLES :

La contribution due à un pôle est obtenue par le théorème des residus. L'intégrale le long d'un petit cercle autour du pôle est égale à $-2\pi i$ multiplié par le résidu de l'intégrale. Donc on obtient :

$$\bar{U}_i^{saw} = \frac{\bar{q}(k)}{D_o'(k_s)} \sum_n N_n \alpha_i^{(n)} \exp\,(ik_s\ x_1) \qquad \text{(IV-38)}$$

où : $D_o'(k_s)$ est la dérivée de $D_o(k)$ par rapport à k au point $k = k_s$, en outre, la contribution du pôle de la pseudo saw est donnée par :

$$\bar{U}_i^{psaw} = \frac{\bar{q}(k)}{D_o'(k_s)} \sum_n N_n \dot{\alpha}_i^{(n)} \exp\,(ik_{ps}\ x_1) \qquad \text{(IV-39)}$$

IV-4-3 CONTRIBUTION DUE AUX POINTS DE BRANCHEMENTS:

La contribution due aux points de branchements où la contribution des ondes de volume à la surface est obtenue en évaluant l'intégrale le long du chemin BC_n. Dés que le chemin est à trés profonde pente (*steepest descent path*), on doit considérer seulement la contribution à proximité du point de branchement [4,7] .

La procédure utilisée, consiste à incrémenter la vitesse d'une faible quantité, comme suit :

$$V_{r_1} = V_n(1+\eta) \qquad \text{(IV-40)}$$

où η est faible et arbitraire. Sachant que $k=\omega/V$ on peut avoir:

$$k_{r_1} = k_{r_1}(1+\eta) \qquad \text{(IV-41)}$$

Les racines obtenues à partir de l'équation (II-20) sont en fonction de K ou de V. Donc, les quatre racines contribuantes au voisinage des points de branchements peuvent être exprimées comme suit :

$$\beta^{(m)}(k)=\beta_0^{(m)} + \Delta\beta_{n}^{(m)}(k,\eta) \qquad \text{(IV-42)}$$

avec :m=1..4

et : $\beta_0^{(m)}$ est la $m^{\text{ème}}$ racine contributive à $k=k_n$. Comme s'est discuté dans l'annexe C, en négligeant les termes $\eta^{3/2}$ et d'ordres superieures, $\Delta\beta^{(m)}(k)$ et les $\alpha_i^{(m)}(k)$ correspondants sont exprimés comme suit :

$$\Delta\beta^{(m)}(k_n,\eta) = p_3^{(m)} + p_2^{(m)}\,\eta^{1/2} + p_1^{(m)}\eta \qquad \text{(IV-43)}$$

$$\alpha_i^{(m)} = \alpha_{i3}^{(m)} + \alpha_{i2}^{(m)}\eta^{1/2} + \alpha_{i1}^{(m)}\eta \qquad \text{(IV-44)}$$

En substituant $\beta^{(m)}$ et $\alpha_i^{(m)}$ données par les équations (IV-43) et (IV-44) dans la matrice des conditions aux limites [L] définie par l'équation (IV-10), et en utilisant l'équation (IV-6) et en négligeant les termes d'ordres supérieures, on obtient :

$$D_o = d + e\,\eta^{1/2} + f\eta$$

et (IV-45)

$$\sum_n N_n\, \alpha_i^{(n)} = a_i + b_i\,\eta^{1/2} + c_i\,\eta$$

où : a_i, b_i, c_i pour i=1..4, d,e et f sont des constantes évaluées à $k = k_n$. En utilisant les équations (IV-39) et (IV-45) et notant que $\bar{q}(k)$ ne change pas beaucoup au voisinage de $k=k_n$, l'intégrale autour de chaque boucle de coupe de branchement BC_n, pour le champ lointain, peut s'exprimer comme suit :

$$U_i^{(n)} \cong - \frac{i\,\bar{q}(k_n)}{2\pi} \exp(ik_n x_1)$$

$$\int_{\substack{BC_n \\ \text{près du point} \\ \text{de branchement}}} d\eta\, \frac{a_i + b_i\,\eta^{1/2} + c_i}{d + e\,\eta^{1/2} + f\,\eta} \exp(-ik_n x_1 \eta) \qquad \text{(IV-46)}$$

Pour pour satisfaire la technique du chemin à plus grande pente (the steepest decsent path) [4,5] .

$$\eta = -it \qquad \text{(IV-47)}$$

où : t est un réel positif. Le chemin d'intégration le long de la boucle autour du point de branchement est montré par la figure IV-4 .Pour le champ lointain, seule la portion ABCD qui contribue à la solution. En outre, le chemin est trés proche de la coupe de branchement, de telle sorte que, les points A,D et

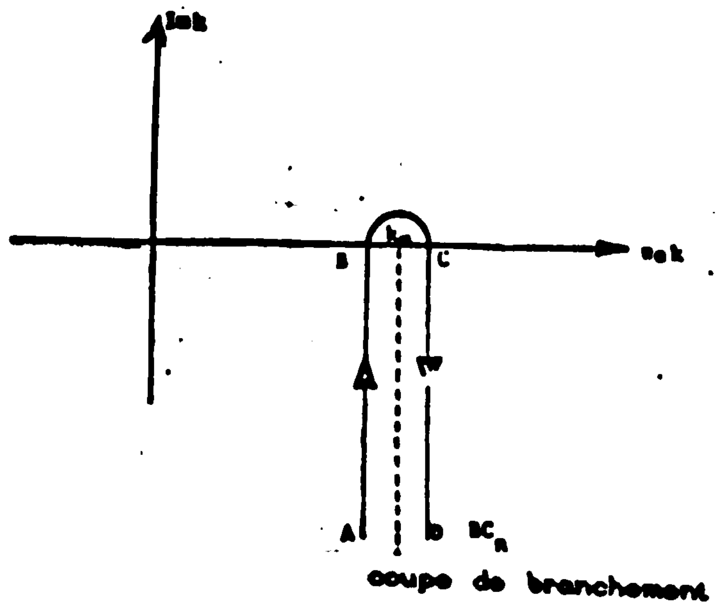


Fig IV-4 :Chemin d'intégration BC_n prés du point de branchement

B,C coincident, seulement ils sont localisés sur des côtés opposés de la coupe de branchement. L'intégrale le long du chemin BC est donc nulle, et l'integrale le long de la boucle BC_{η}, peut s'écrire sous la forme suivante [4,7] :

$$\int_{BC_\eta} d\eta.. = \int_A^B d\eta .. + \int_C^D d\eta..$$

$$= \int_C^D d\eta.. - \int_B^A d\eta.. \qquad \text{(IV-48)}$$

Le long du chemin BA, $\eta^{1/2}$ est supposé égal à $(-it)^{1/2}$. Donc le long du chemin CD, $\eta^{1/2}$ sera $-(-it)^{1/2}$, car les deux chemins sont suivant deux côtés opposés de la coupe de branchement.

L'équation (IV-46) devient :

$$U_i^{(\eta)}(x_1,0) \simeq -\frac{q^-(k_n)}{2\pi} \exp(ik_n x_1) \int_0^{\delta} dt \exp(-tX)$$

$$\left[\frac{a_i + b_i(-it)^{1/2} + c_i(-it)}{d + e(-it)^{1/2} + f(-it)} - \frac{a_i - b_i(-it)^{1/2} + c_i(-it)}{d - e(-it)^{1/2} + f(-it)} \right] \qquad \text{(IV-49)}$$

où : $X = k_n t$, et δ un réel trés petit de telle sorte que les développements de l'équation (IV-45) soient valides, et suffisamment grand de façon que les contributions du champ lointain soient suffisamment représentées par les équations ci-dessus [4,5] .

En mettant $\tau = tx$,on obtient :

$$U_i^{(n)}(x_1,0) \cong -\frac{\bar{q}(k_n)}{2\pi} \exp(ik_n x_1)$$

$$\int_0^{X} \frac{d\tau}{X} e^{-\tau} \left[\frac{2(\tau/X)^{1/2}(b'_i d - a_i e') + 2(\tau/X)^{3/2}(b'_i f' - c'_i e')}{d^2 + (2df' - e'^2)(\tau/X) + f'^2 (\tau/X)^2} \right]$$

(IV-50)

où: $b'_i = (-it)^{1/2} b_i$,

$c'_i = -ic_i$,

$e' = (-it)^{1/2} e$,

et : $f' = -if$.

Les termes du dénominateur de l'intégrale en τ^2 seront négligés si :

$$\frac{f'^2}{2df' - e'^2} < \frac{X}{\tau}\Big|_{min} = 1/\delta \qquad \text{(IV-51)}$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, cela indique que les series du dénominateur vont diverger,dans ce cas, même en négligeant les termes en $\eta^{3/2}$ dans les équations (IV-45) cette analyse ne sera pas valable [4,7].

En supposant que la condition (IV-51) est satisfaite, l'équation (IV-50) , sera comme suit :

$$U_i^{(n)}(x_1,0) \cong \frac{\bar{q}(k_n)}{\pi X} \exp(ik_n x_1)$$

$$\int_0^{\delta X} d\tau \quad e^{-\tau}\left[\frac{k_{0i}(\tau/X)^{1/2} + k_{1i}(\tau/X)^{3/2}}{1+\tau/W} \right] \qquad \text{(IV-52)}$$

$$W = X/g$$

où : $k_{0i} = \dfrac{b_i' d - a\, e_i'}{d^2}$

$$k_{1i} = \frac{b_i' f - c_i e'}{d^2}$$

et : $g = \dfrac{2\, d_i - f\, e'^2}{d^2}$

L'intégrale de l'équation (IV-52) est évaluée dans l'annexe D. et la solution $U_i^{(n)}$ peut être écrite comme suit :

$$U_i^{(n)} \cong \bar{q}(k_n)\, U_{i0} \exp(iX + i\phi_0)/X^p +$$

$$\bar{q}(k_n)\, U_{i1} \exp(i X + i\phi_1)/X^{p+1} \qquad \text{(IV-53)}$$

où :

$$\left.\begin{array}{lll} U_{i0}\ \exp(i\phi_0) & = & -k_{0i}/2\pi \\ U_{i1}\ \exp(i\phi_1) & = & -3k_{1i}/4\pi \\ p & = & 3/2 \end{array}\right] \quad \text{pour } X > 10g \qquad \text{(IV-54)}$$

et :

$$\left.\begin{array}{lll} U_{i0}\ \exp(i\phi_0) & = & -k_{0i}/g\pi \\ U_{i1}\ \exp(i\phi_1) & = & -\ k_{1i}/2g\pi \\ p & = & 1/2 \end{array}\right] \quad \text{pour } X < 0.01g \qquad \text{(IV-55)}$$

Donc , la solution totale pour les déplacements et le potentiel élctriques est la somme des différentes contributions donnée par l'équation (IV-37) [4,7].

IV-5 REPARTITION DE LA PUISSANCE :

La densité de puissance à un point (x_1,x_3) dans un milieu piézoélectrique sans pertes est donnée selon [3] par :

$$P_j(x_1,x_3) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\left[\, i\omega \sum_{i=1}^{4} T_{ij} U_i^* \right] \qquad \text{(IV-56)}$$

Pour calculer la puissance associée aux ondes de volume , la puissance circulant dans en dehors du demi espace sera évaluée . La puisance circule à l'ntérieur à la surface $x_3=0$, et doit être égale à la puissance circulant à l'extérieur aux surfaces $x_1=\pm\infty$ et $x_3=-\infty$ .On suppose que toute la puissance de l'onde de volume atteingne la surface $x_3=-\infty$,et pas de puissance d'onde de volume qui atteignant la surface $x_1=\pm\infty$.A la surface $x_3=-\infty$,l'onde SAW ne contribue pas.Le déplacement des particules ainsi que le potentiel des pseudo ondes de surface tendent vers l'infini à $x_3=-\infty$,ce qui implique que cette onde ne peut pas exister dans une structure infinie.Donc à la surface $x_3=-\infty$, la puissance est due seulement àl'ondede volume.En outre , n'importe quelle onde de volume se propageant à un angle différent de zero,dans un milieu non dissipatif,doit transférer toute son énergie à la surface $x_3=-\infty$ .Par conséquent, la circulation de la puissance en dehors de la surface $x_3 = -\infty$ d'une épaisseur W suivant la direction x_3 est donnée par [3,4] :

$$P_{volume} = W \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \; P_3 \; (x_1,x_3)\Big|_{x_3=-\infty} \qquad \text{(IV-57)}$$

En substituant l'équation (IV-56) dans l'équation (IV-57) et en utilisant la relation (IV-2), on obtient :

$$P_{volume} = \frac{W}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; \mathrm{Re} \left[j\omega \sum_{i=1}^{4} \bar{T}_{i3}(k,x_3) U_i^* \right] \Big|_{x_3=-\infty} \qquad \text{(IV-58)}$$

où : $\bar{T}_{ij}(k,x_3) = -ik \sum_{n=1}^{4} C_n \, \bar{T}_{ij}(n) \exp(\, ik\beta^{(n)} x_3)$ (IV-59)

et : $\bar{T}_{ij}(n)$ sont définis par la relation (IV-6).
En substituant l'équation (IV-3) ,dans (IV-58) et utilisant la relation : $s=k/\omega$,la puissance de l'onde de volume peut être exprimée par :

$$P_{volume} = \frac{-W}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk$$

$$[\, \omega^2 s \sum C_n \, C_m^* \, \bar{T}_{3j}(n) \alpha_i^{(m)*} \exp ik(\beta^{(n)} - \beta^{(m)*}) x_3] \Big|_{x_3 = -\infty} \quad \text{(IV-60)}$$

A $x_3 = \pm\infty$, dans l'intégrale ci-dessus plusieurs termes vont disparaitre, sachant que les racines β physiquement acceptables sont à parties imaginaires négatives, pour $n \neq m$ le terme : $ik(\beta^{(n)} - \beta^{(m)*})$ est soit à partie réelle positive ou nul, dans le premier cas ,l'intégrale s'annule à $x_3 = -\infty$, et dans le second cas l'intégrale s'annule à cause des oscillations infinément rapides à $x_3 = -\infty$ [4].Pour n= m,les termes ne contribuent que lorsque $\beta^{(n)}$ est réel. Donc, la $n^{ème}$ onde de volume contribue à la solution dans l'intervalle: $-W s_n < k < W s_n$,et toutes les autres contributions seront nulles.Donc l'équation (IV-60) conduit à :

$$P_{volume} = \sum_{n=1}^{3} P_{n\,volume}$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \frac{W}{4\pi} \int_{-s_n}^{s_n} ds \ \mathrm{Re}\ [\omega^2 s |C_n|^2 \sum_{l=1}^{4} \bar{T}_{3l}(n)\ \alpha_l^{(n)*}]$$

(IV-61)

En utilisant les équations (IV-1) et (IV-7), on aura :

$$P_{n\,volume} = \omega\ W \int_{-s_n}^{s_n} ds\ R_n(s)\ \bar{q}(s)\ \bar{q}(s)^* \qquad \text{(IV-62)}$$

où $R_n(s)$ est la densité de résistance définie par :

$$R_n(s) = \frac{1}{4\pi s} \frac{L}{M} \qquad \text{(IV-63)}$$

où : $L = \mathrm{Re}[\ |C_n|^2 \ \sum \bar{T}_{3l}(n)\alpha_l^{(n)*}]$

et : $M = |\sum_l C_n\ (\ \bar{T}_{34}(n) + i\varepsilon_0 \alpha_4^{(n)}|^2$ (IV-64)

La densité de résistance $R_n(s)$ est indépendante de la densité de charge et du transducteur , elle dépend seulement de l'orientation cristallographique du matériau. En se referrant à l'équation (II-29), la lenteur s, pour la $n^{ème}$ onde de volume est associée à un angle de propagation $\theta_n(s)$ défini par :

$$\theta_n(s) = \text{arctang}\,(\beta^{(n)}(s)) \qquad \text{(IV-65)}$$

La puissance associée à cette onde de volume, ne circule pas nécéssairement dans la diréction de propagation. Pour calculer l'angle du flux de puissance, les relations des transformées de *Fourier* suivantes sont utilisées:

$$\bar{A}(k_1,x_3) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\; A(x_1,x_3)\,\exp(-ik_1x_1)$$

$$\bar{\bar{A}}(k_1,k_3) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_3\; \bar{A}(k_1,x_3)\,\exp(-ik_3x_3)$$

$$A(x_1,x_3)B(x_1,x_3) = \frac{1}{2\pi}\bar{A}(k_1,x_3) \times \bar{B}(k_1,x_3)$$

$$= \bar{\bar{A}}(k_1,k_3)\;\bar{\bar{B}}(k_1,k_3) \qquad \text{(IV-66)}$$

où: A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{\bar{A}}$ et $\bar{\bar{B}}$ sont des quantités de champs et leurs transformées et x représente l'opérateur du produit de convolution. En utilisant les équations (IV-56) et (IV-66) et notant que le vecteur d'onde (k_1,k_3) est égal à $(k, k\beta^{(n)})$ pour n =1,2,3, la densité de puissance associée à la lenteur s est :

$$\bar{\bar{P}}_1(s/\omega, s\beta^{(n)}/\omega) = \omega^2 s/2 \; Re[\,|C_n|^2 \sum \bar{T}_{ij}(n)\alpha_i^{(n)*}] \qquad \text{(IV-67)}$$

Pour calculer la puissance de l'onde acoustique de surface et la pseudo onde acoustique de surface, la puissance à la surface est donnée par [4] :

$$P = \frac{W}{2} Re \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{i}{k D_0} \sum_n N_n \alpha_4^{(n)} \bar{q}(k) \, \bar{q}(k)^* \right] \qquad \text{(IV-68)}$$

En séparant les contributions dues aux pôles, les puissances de la SAW et la pseudo SAW sont données par :

$$P_{saw} = \frac{-\omega W}{2} \; \frac{i}{D_0'(k_s)} \sum_n N_n \alpha_4^{(n)} \bar{q}(k_s) \; \bar{q}(k_s)^* \qquad \text{(IV-69)}$$

et:

$$P_{psaw} = \frac{-\omega W}{2} \; \frac{i}{D_0'(k_s)} \sum_n N_n \alpha_4^{(n)} \bar{q}(k_{ps}) . \bar{q}(k_{ps})^* \qquad \text{(IV-70)}$$

IV-6 FLUX DE PUISSANCE ET ANGLE DU FLUX DE PUISSANCE :

La densité de puissance moyenne de l'onde acoustique à un point donné dans un milieu piézoélectrique est donnée par [3] :

$$P_i = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[\sum_{j=1}^{4} T_{ij} U_j^* \right] \qquad \text{(IV-71)}$$

où : T_{ij} sont définis par l'équation (II-15) .

Pour la plupart des orientations, le vecteur du flux de puissance n'est dans la même direction que le vecteur de propagation de l'onde acoustique ,cela est dû à l'anisotropie du matériau.L'angle entre ces deux vecteurs est appelé l'angle du flux de puissance.Deux angles , d'inclinaison et d'azimut sont définis pour exprimer le flux de puissance pour une onde acoustique. Un angle azimutal θ_A et un angle d'inclinaison θ_D . définis comme suit [4] :

$$\theta_A = \mathrm{arctg}(P_1/P_2) \qquad \text{(IV-72)}$$

et: $$\theta_D = \mathrm{arctg}[P_3/(P_1^2 + P_2^2)^{1/2}] \qquad \text{(IV-73)}$$

où : θ_A, θ_D sont fonctions de x_3 et P_i,i=1,2,3 et le flux de puissance suivant la direction x_i.Lorsque l'énergie est confinée à la surface,ou dans un mince ruban perpendiculaire à x_3 , l'angle du flux de puissance est défini par [4] :

$$\theta_{PF} = \operatorname{arctg}\,(P'_2 / P'_1) \qquad \text{(IV-74)}$$

ou: $$P'_i = \int_{ruban} dx_3\, P_i \qquad \text{(IV-75)}$$

avec : $i=1,2$

IV-6-1 MILIEU INFINI - ONDE DE VOLUME:

Les composantes du déplacement des particules et du champ électriques pour les ondes de volume, sont données par l'équation (II-44).En substituant cette équation dans l'équation (IV-74), on obtient l'expression du vecteur du flux de puissance donnée comme :

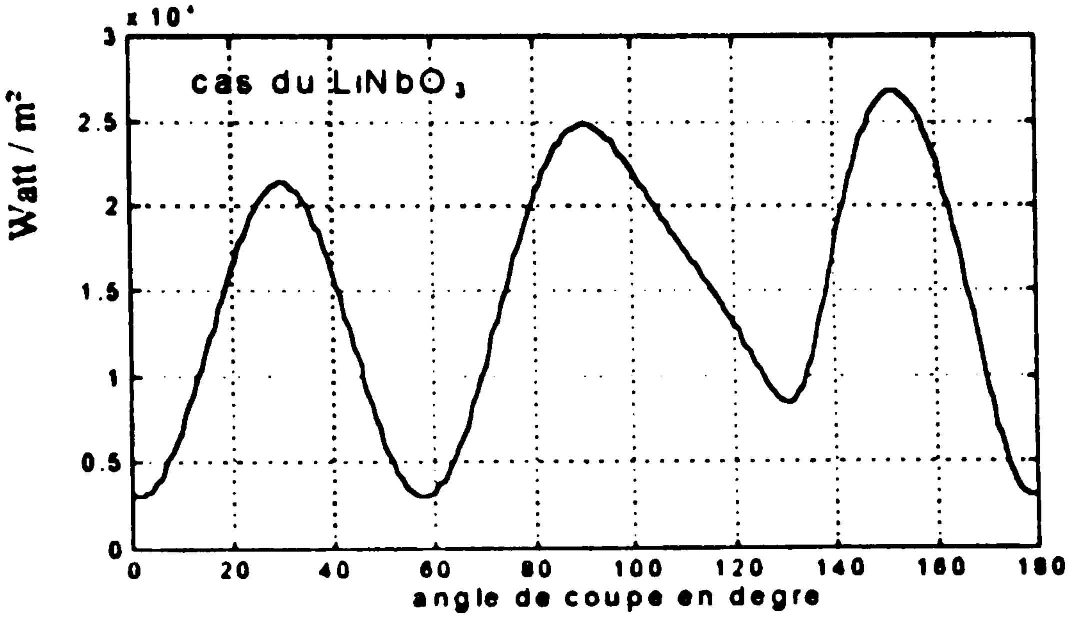
$$P_i = \frac{k^2 V}{2} \operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} \alpha_j^{*}\, \alpha_k\, M_{ijk1} \right] \qquad \text{(IV-76)}$$

Cette **équation** permet de donner les deux angles d'inclinaison et d'azimut sont dans ce cas indépendants de x_3.

Les figures IV-5,IV-6 et IV-7, représentent les variations des flux **des** puissances **des** ondes de volume suivant x_1,x_2 et x_3 respectivement en fonction de l'angle de coupe ϕ ,obtenu **par une** rotation de l'axe de propagation Z .

IV-6- MILIEU SEMI-INFINI-SAW ET PSEUDO SAW:

L'angle de flux de puissance, θ_{PF} défini par l'équation (IV-74) pour **la SAW**, et θ_A et θ_D définis par les équations (IV-72) et (IV-73) pour la pseudo SAW, peuvent être calculés en utilisant U_i, i=1,2,3,4 ,définis par les équations (II-43) et (II-45) respectivement.En substituant (II-55) dans l'équation (IV-74) on obtient l'expression suivante donnant les composantes



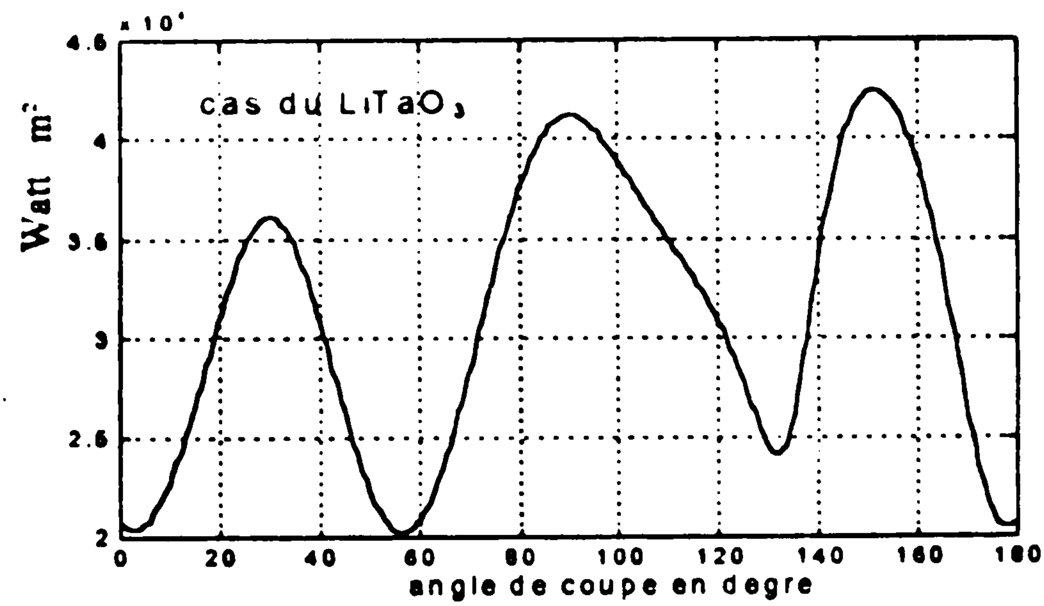
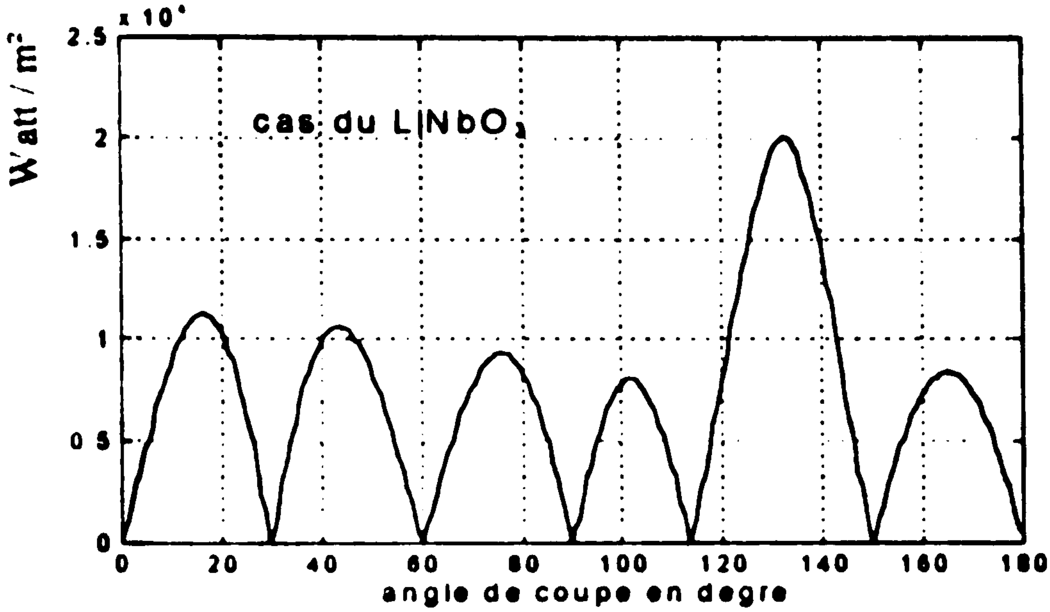


Fig. IV-5 Variations du flux de la puissance des ondes de volume suivant x_1 en fonction de l'angle de coupe.



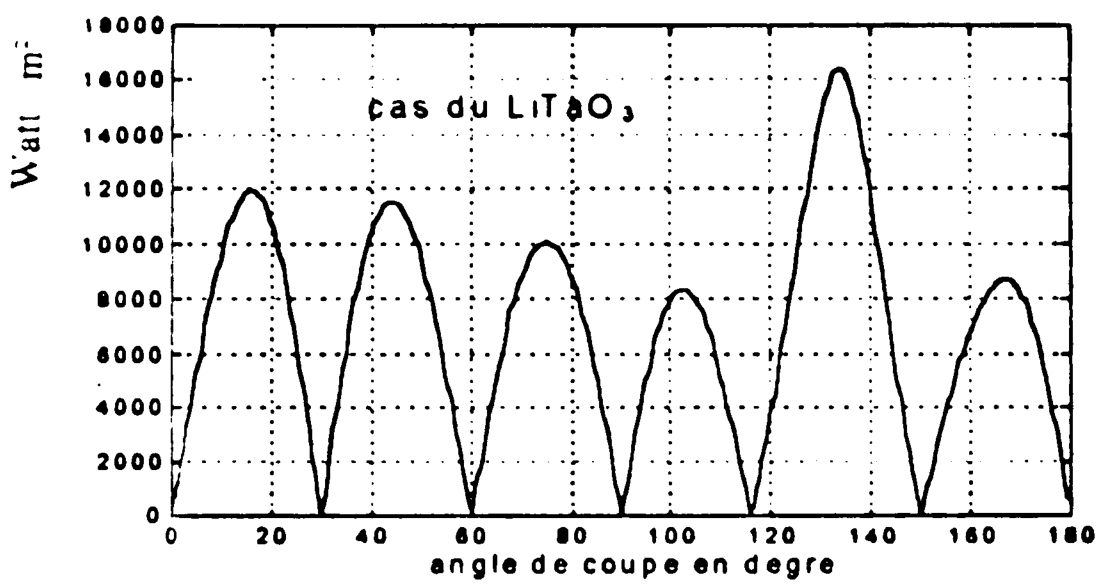
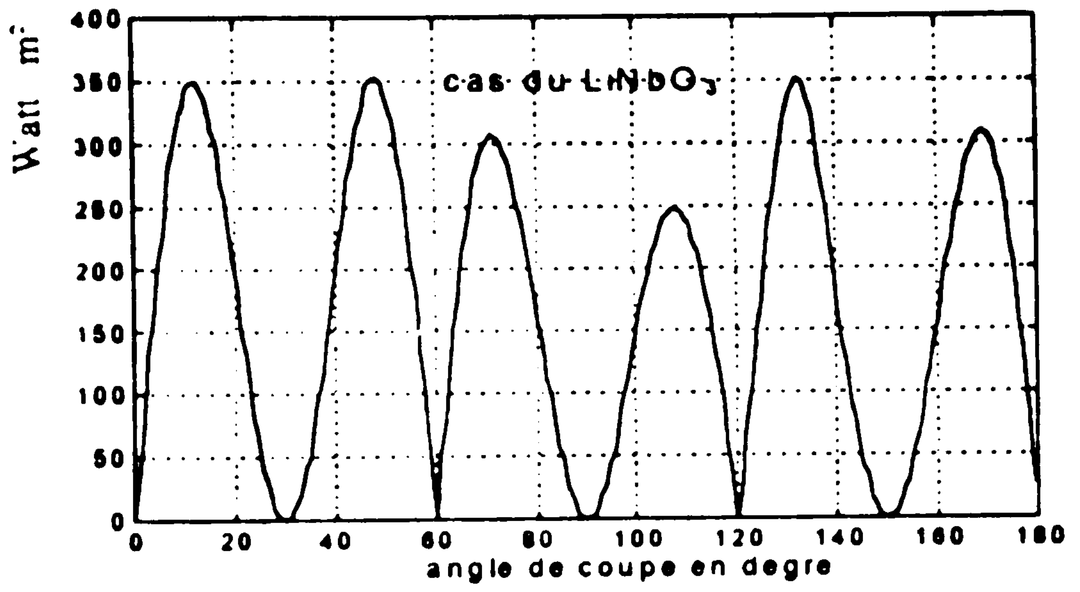


Fig. IV-6 Variations du flux de la puissance des ondes de volume suivant x_2 en fonction de l'angle de coupe.



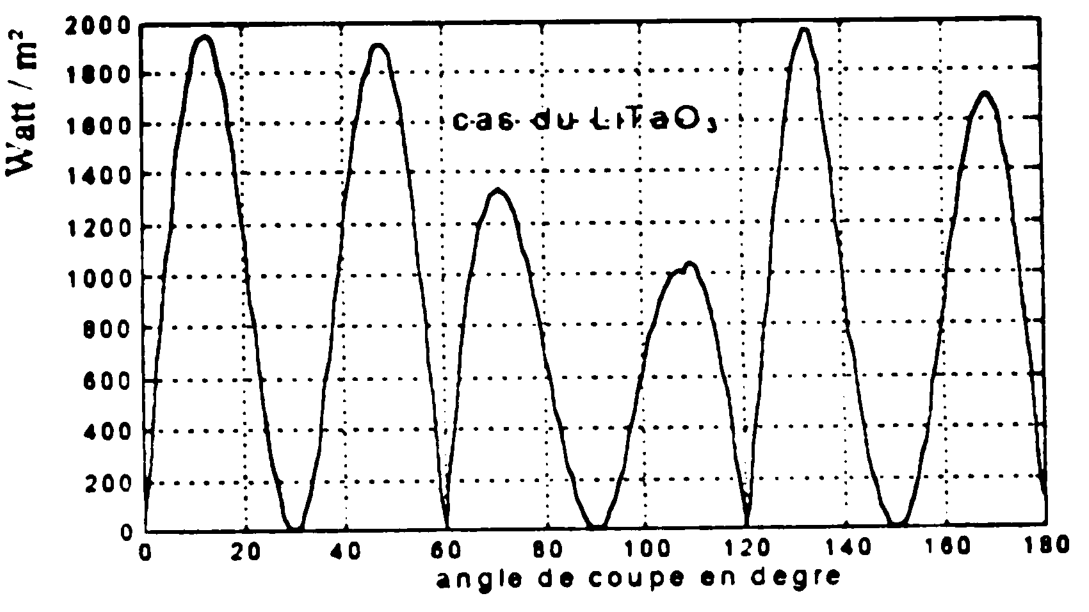


Fig. IV-7 Variations du flux de la puissance des ondes de volume suivant x_3 en fonction de l'angle de coupe.

du flux de puissance pour la pseudo SAW.

$$P_i = \frac{-k^2V}{2} \operatorname{Re}\left[\sum_{n,m,j,k} C_n C_m^* \alpha_j^{(m)*} \alpha_k^{(n)} (M_{ijk1} + M_{ijk3})\, \beta^{(n)} \right.$$

$$\left. \exp\left[-2k\gamma x_1 + ikx_3 \left(\beta^{(n)} - \beta^{(m)*}\right)\right] \right] \qquad \text{(IV-77)}$$

avec : i=1,2,3.

La même expression est valable pour le flux de puissance de la SAW avec : $\gamma = 0$. L'intégration suivant x_3 donne P'_i et P_3 et on obtient :

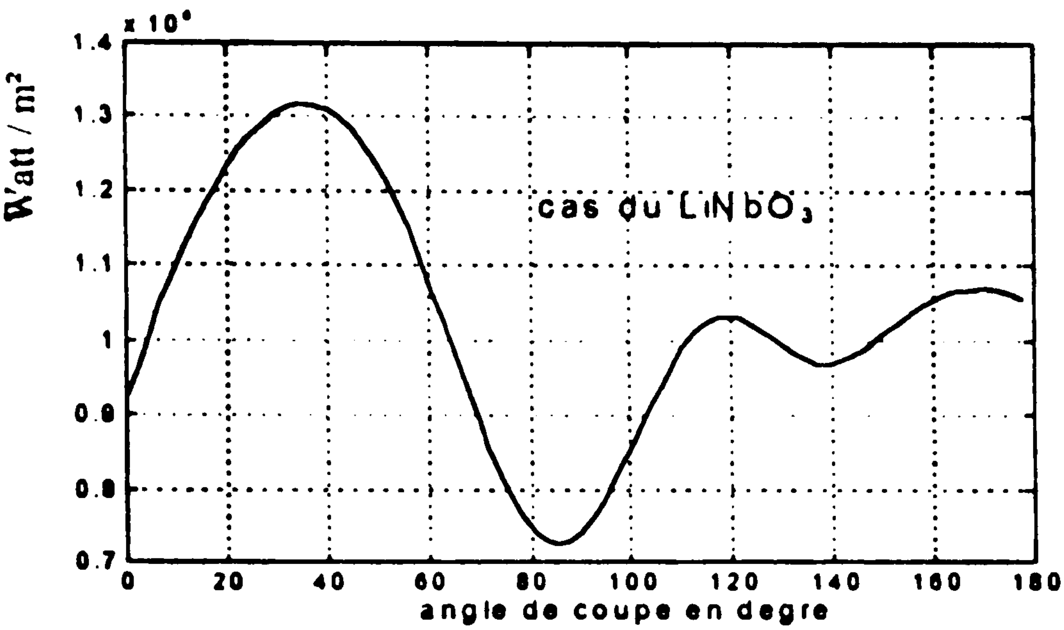
$$P'_i = \frac{-k^2V}{2} \operatorname{Re}\left[\sum_{n,m,j,k} C_n C_m^* \alpha_j^{(m)*} \alpha_k^{(n)} (M_{ijk1} + M_{ijk3}\, \beta^{(n)}) \right.$$

$$\left. / \left(\beta^{(n)} - \beta^{(m)*}\right)\right] \qquad \text{(IV-78)}$$

avec : i=1,2.

En utilisant (IV-77) et (IV-78), θ_{PF} pour la SAW et θ_A et θ_D pour la pseudo SAW, peuvent être calculés en fonction de x_3 à partir des équations (IV-72), (IV-73) et (IV-74).

Les figures IV-8 et IV-9, représentent les variations des flux des puissances des ondes de surface suivant x_1 et x_2 respectivement, tandis que les figures IV-10, IV-11 et IV-12 représentent les variations des flux des puissances suivant x_1, x_2 et x_3 respectivement, dans une plaque d'épaisseur $t = 10^{-4}$ m en fonction de l'angle ϕ, obtenu par rotation de l'angle de propagation Z.



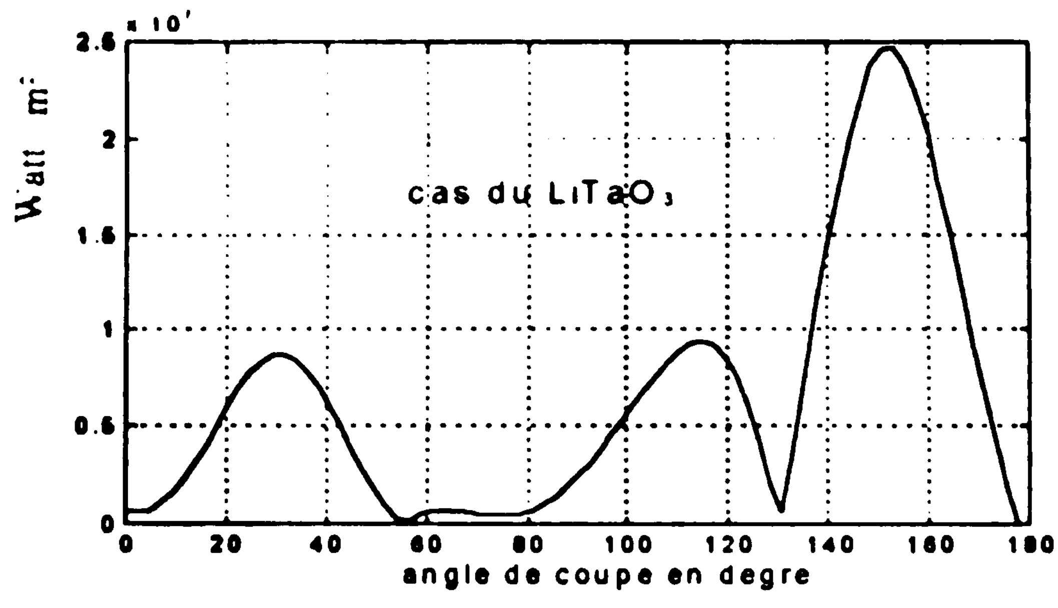


Fig. IV-9 Variations du flux de la puissance de l'onde SAW suivant x_2 en fonction de l'angle de coupe.

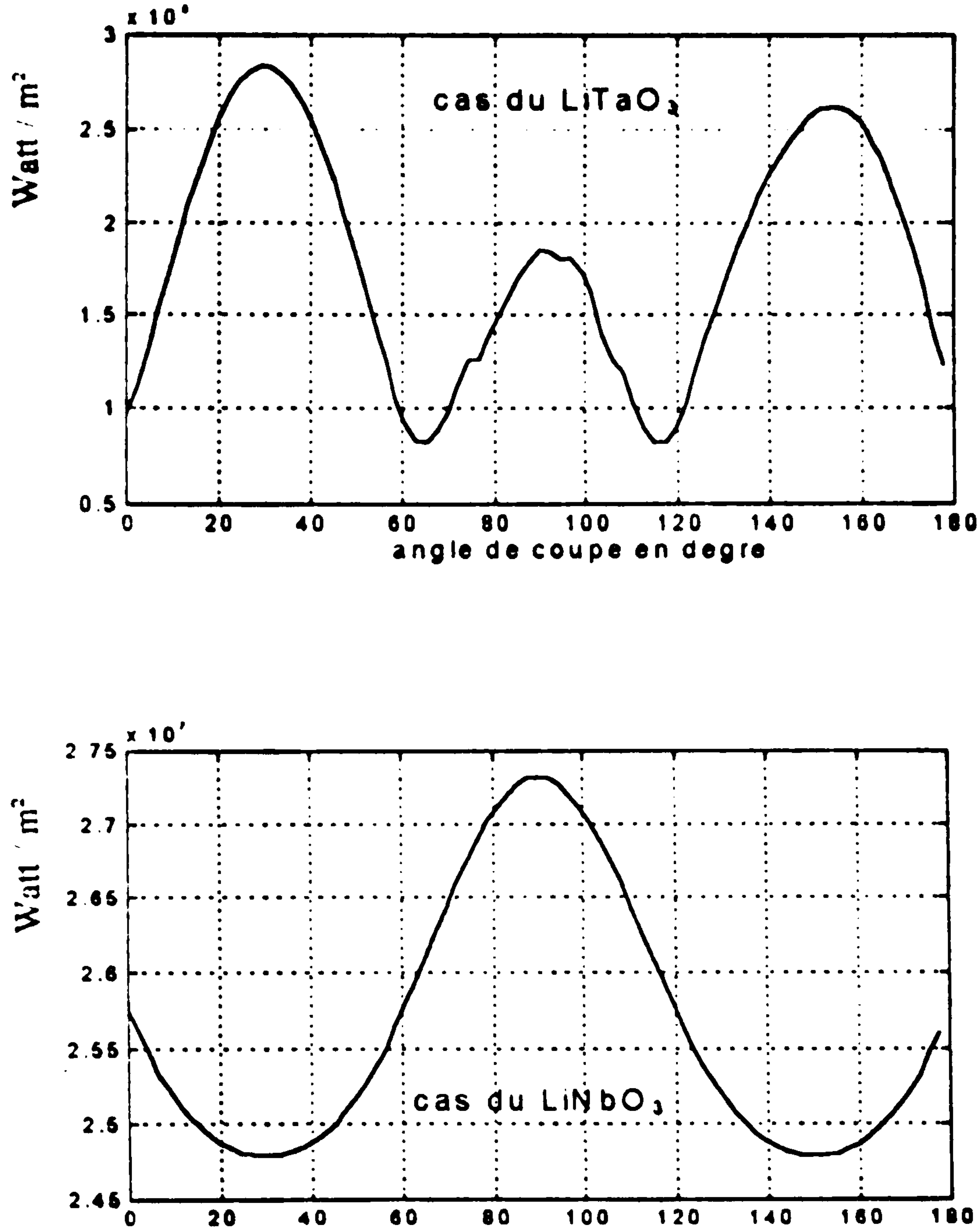
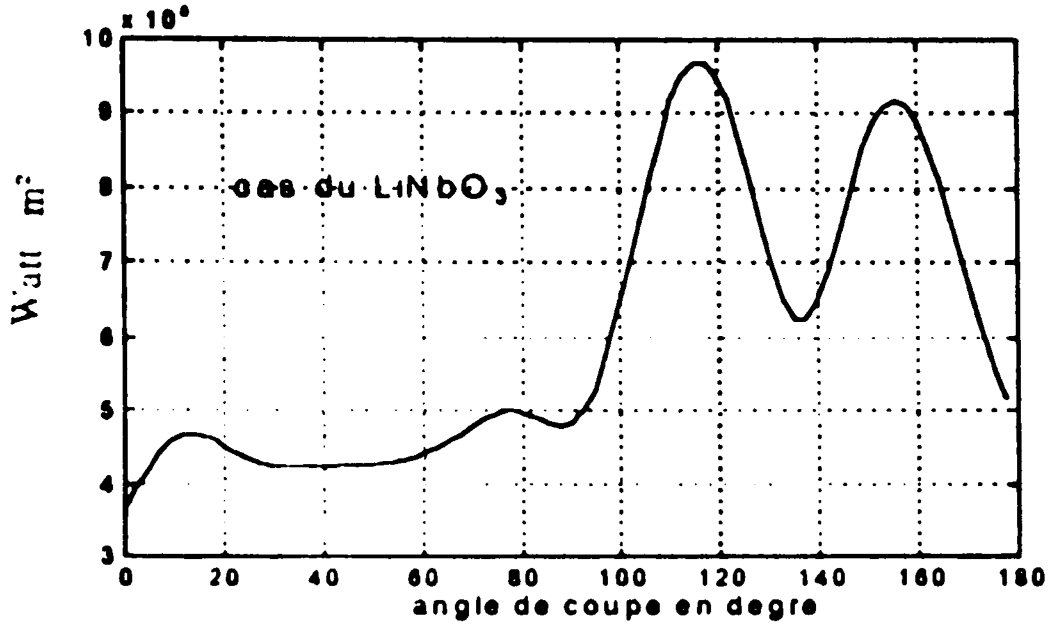


Fig. IV-10 Variations du flux de la puissance des pseudo SAW suivant x_1 en fonction de l'angle de coupe pour $t = 10^{-4}$ m.



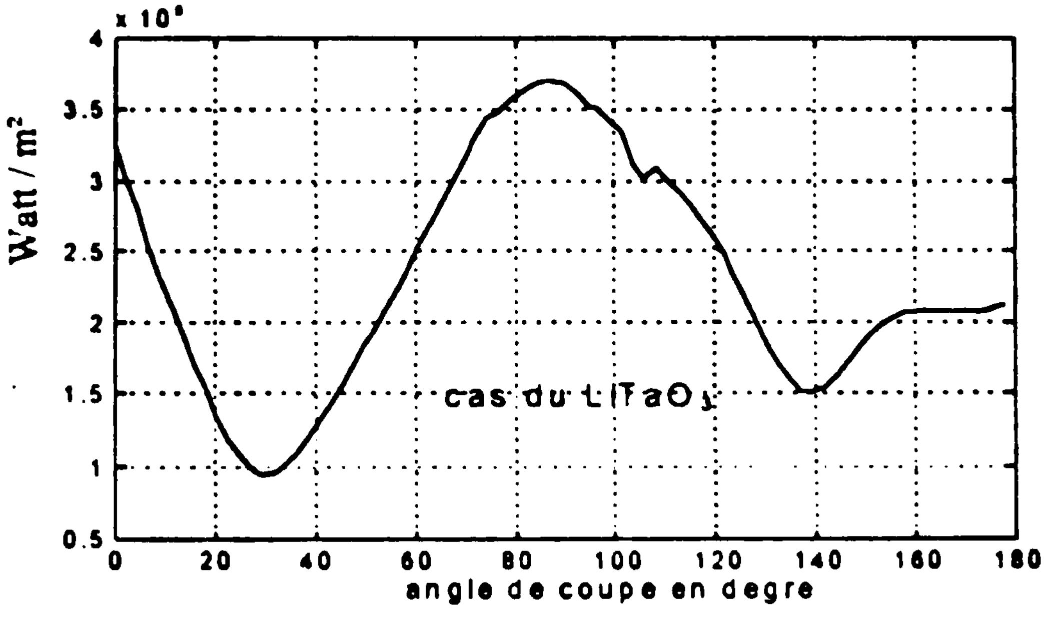


Fig. IV-11 Variations du flux de la puissance des pseudo SAW suivant x_2 en fonction de l'angle de coupe pour $t = 10^{-4}$ m.

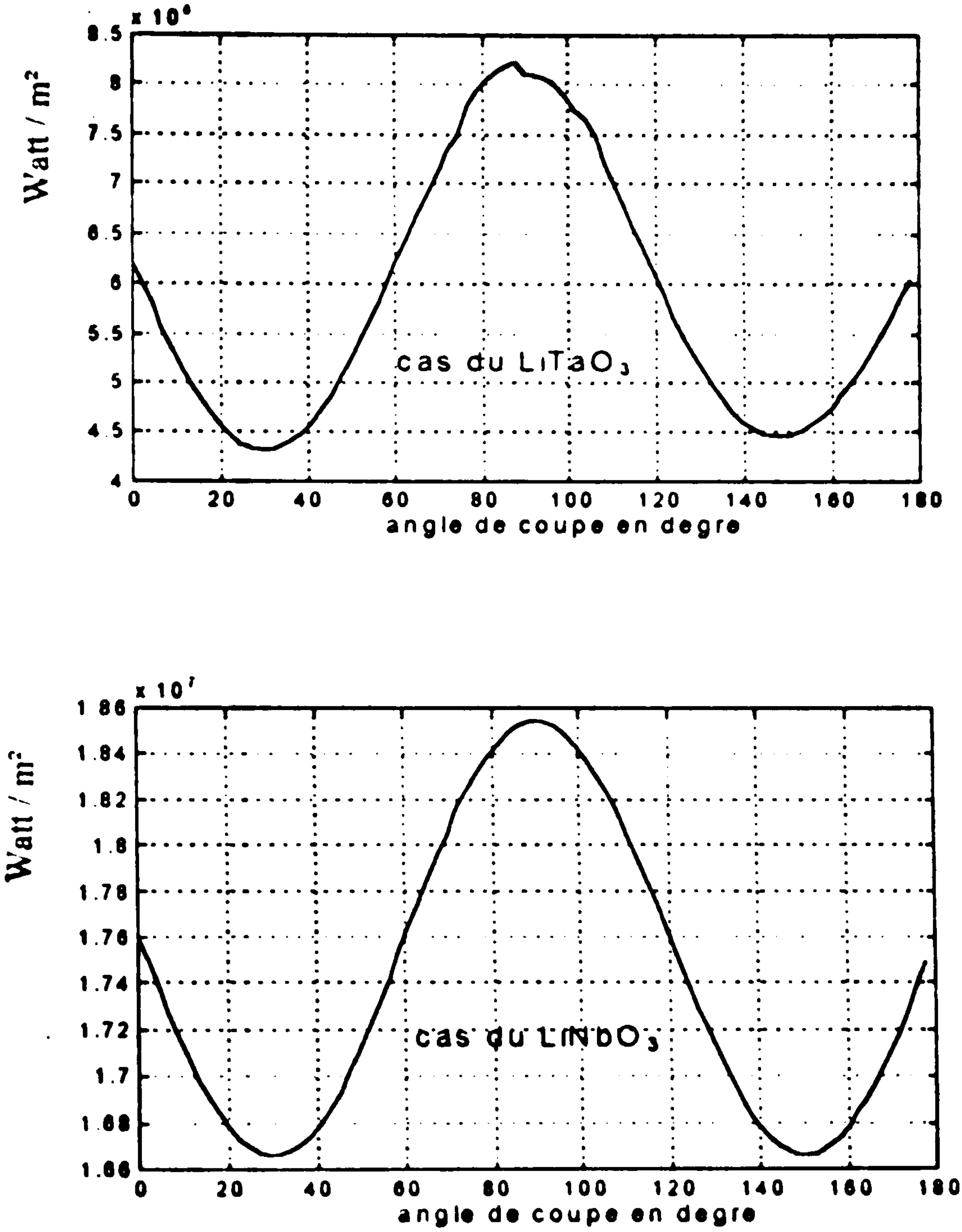


Fig. IV-12 Variations du flux de la puissance des pseudo SAW suivant x_3 en fonction de l'angle de coupe pour $t = 10^{-4}$ m.

CONCLUSION

Ce travail est consacré à l'étude du spectre d'ondes acoustiques excitées par une source dans un solide piézoélectrique, et d'identifier les conditions d'excitation de chaque type d'onde, en se basant sur les lois de la piézoélectricité couplées avec les équations de *Maxwell* .

L'étude s'est accentuée sur deux matériaux qui sont le Niobate de Lithium et le Tantalate de Lithium, en choisissant la coupe Y et l'axe Z comme axe de propagation, les ondes contribuant à un spectre d'ondes acoustique sont les ondes de surface, les pseudo ondes de surface et les ondes de volume dont on distingue les ondes particulières nommées les ondes SSBW (ondes de volume rampantes à la surface) ou ondes transversales à polarisation horizontale, dont le vecteur et le vecteur du flux de puissance sont parallèles à la surface du substrat.

Ce travail a permis aussi de donner le flux de puissance des différents types d'ondes suivant les axes de coordonnées et suivant les différentes coupes Y tournées .

Un travail futur sera basé sur l'étude d'autres matériaux piézoélectriques de classes et de systèmes cristallographiques différents de ceux du Niobate de Lithium, et pour d'autres coupes cristallographiques, afin de définir les meilleurs matériaux ayant des coupes optimales du point de vue du couplage, pertes d'insertion, stabilité en température et flux d'énergie, ce qui va certainement offrir plus d'informations sur les caractéristiques des fameuses ondes SSBW, et leur donner un modèle mathématique plus détaillé et leur envisager quelques applications pratiques .

ANNEXE A:

COUPES D'UN CRISTAL ET DIRECTIONS DE PROPAGATION POUR L'EXCITATION DES ONDES ACOUSTIQUES CAS DU NIOBATE DE LITHIUM

I-ORIENTATION DU CRISTAL :

L'orientation d'un cristal peut etre représentée par les angles de rotation Ψ ,θ et Φ ,des les axes X , Y et Z respectivement du cristal comme le montre la Fig A-1, dans laquelle l'angle correspondant à une rotation dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre est considéré positif [3] .

Par exemple, la fig A-2, montre un cristal coupe X , à onde acoustique de surface de vecteur de propagation faisant un angle θ avec l'axe Y,ou θ est l'angle de rotation compté à partir de la direction de propagation jusqu'à l'axe du cristal , l'axe Y avec un axe de rotation ,l'axe X,perpendiculaire à la surface du substrat.Pour de différentes coupes d'un cristal,les éxpressions de l'orientation du cristal ainsi que la direction de propagation de l'onde seront aussi différentes .Géneralement, l'axe de rotation du cristal est lui même l'axe de propagation .

II-EVALUATION DES TENSEURS DE CONSTANTES D'UN MATERIAU DANS UN SYSTEME DE COORDONNEES TOURNE :

Dans un système de coordonnées tournées ,les tenseurs C,e,et ε seront notés C',e',et ε' respectivement et donnés par les équations suivantes [3] :

$$[\, C' \,] = [\, M \,]\,[\, C \,]\,[\, \tilde{M} \,] \qquad \text{(A-1)}$$

$$[\, e' \,] = [\, a \,]\,[\, e \,]\,[\, \tilde{M} \,] \qquad \text{(A-2)}$$

$$[\, \varepsilon' \,] = [\, a \,]\,[\, \varepsilon \,]\,[\, \tilde{a} \,] \qquad \text{(A-3)}$$

où : C , e ,et ε sont les tenseurs des constantes rigidité de piézoélectriques et diélectriques respectivement dans le système non tourné .

où: a est la matrice de rotation et M est la matrice de transformation de *Fond* ,avec $\tilde{a}$ et $\tilde{M}$ les transposées de a et M respectivement [1] .

En faisant une rotation d'un angle ϕ autour de l'axe Z, on obtient la matrice de rotation a , la matrice de transformation M, ainsi que les constantes du materiauC',e',et ε' commme suit :

la matrice de déplacement :

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

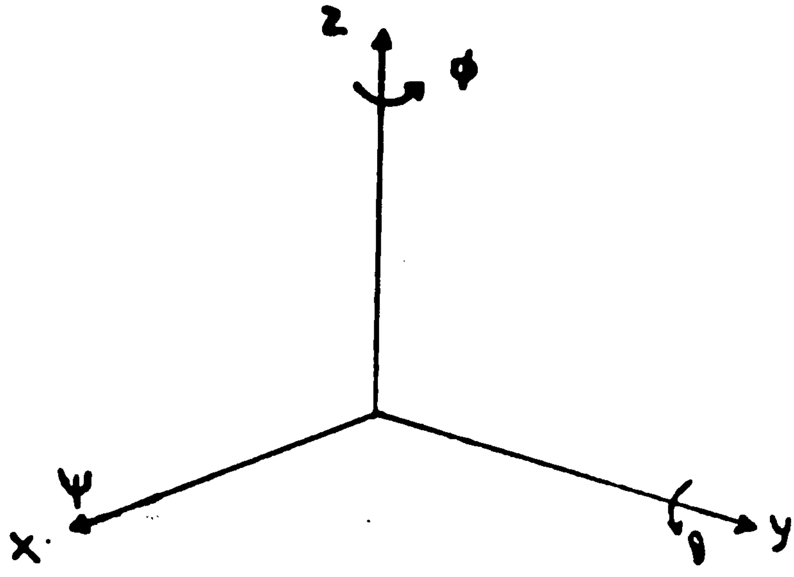


Fig A-1 : Les angles de rotations des axes d'un cristal .

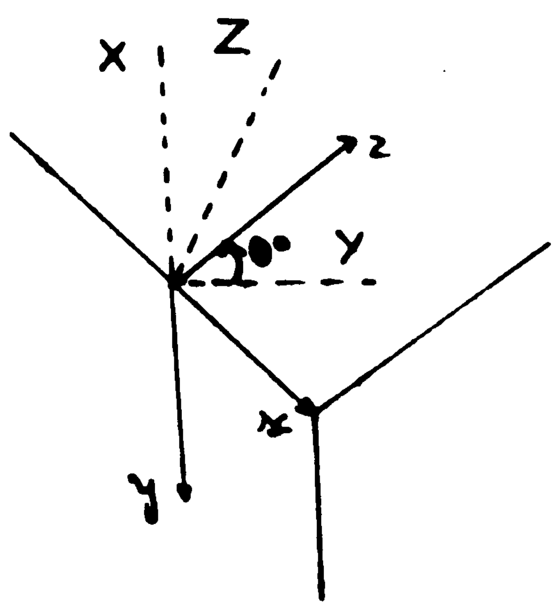


Fig A-2 : onde acoustique de coupe X, se propage en faisant un angle θ ° avexc l'axe Y .

la matrice de transformation :

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & 0 & 0 & 0 & \sin 2\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \frac{\sin 2\phi}{2} & -\frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 & \cos 2\phi \end{bmatrix}$$

En substituant dans la relation (A-2), le tenseur des constantes piézoélectriques dans le système tourné dans le cas du niobate de lithium est donné par :

$$[\, e' \,] = \begin{bmatrix} e'_{x1} & e'_{x2} & 0 & 0 & e'_{x5} & e'_{x} \\ e'_{y1} & e'_{y2} & 0 & e'_{y4} & 0 & e'_{y} \\ e'_{z1} & e'_{z2} & e'_{z3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où :

$$e'_{x1} = e_{y2} \sin\phi \cos^2\phi - e_{y2} \sin^3\phi + e_{y2} \cos\phi \sin 2\phi \,,$$

$$e'_{x2} = e_{y2} \sin^3\phi - e_{y2} \sin\phi \cos^2\phi - e_{y2} \cos\phi \sin 2\phi \,,$$

$$e'_{x5} = e_{x5} ,$$

$$e'_{x6} = e_{y2} \sin\phi \sin 2\phi - e_{y2} \cos\phi \cos 2\phi ,$$

$$e'_{y1} = - e_{y2} \cos^3\phi + e_{y2} \cos\phi \sin^2\phi + e_{y2} \sin\phi \sin 2\phi ,$$

$$e'_{y2} = - e_{y2} \cos\phi \sin^2\phi + e_{y2} \cos^3\phi - e_{y2} \sin\phi \sin 2\phi ,$$

$$e_{y4} = e_{x5} ,$$

$$e'_{y6} = -e_{y2} \cos\phi \sin 2\phi - e_{y2} \sin\phi \cos 2\phi ,$$

$$e'_{z1} = e_{z1} ,$$

$$e'_{z2} = e_{z1} ,$$

$$e'_{z3} = e_{z3} ,$$

Et en substituant dans la relation (A-1), on obtient le tenseur de rigidité dans le système tourné défini comme suit :

$$
C' = \begin{bmatrix}
C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{14} & C'_{15} & C'_{16} \\
C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & C'_{24} & C'_{25} & C'_{26} \\
C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\
C'_{41} & C'_{42} & 0 & C'_{44} & 0 & C'_{46} \\
C'_{51} & C'_{52} & 0 & 0 & C'_{55} & C'_{56} \\
C'_{61} & C'_{62} & 0 & C'_{64} & C'_{65} & C'_{66}
\end{bmatrix}
$$

où :

$$C'_{11} = C_{11} + 2\, C_{12} \sin^2\phi \cos^2\phi + C_{66} \sin^2 2\phi$$

$$C'_{12} = C'_{21} = 2\, C_{11} \cos^2\phi \sin^2\phi + C_{12} - C_{66} \sin^2 2\phi$$

$$C'_{13} = C'_{31} = C_{13}$$

$$C'_{14} = C'_{41} = C_{14} \cos^3\phi - C_{14} \sin^2\phi \cos\phi - C_{14} \sin 2\phi \sin\phi$$

$$C'_{15} = C'_{51} = - C_{14}$$

$$C'_{16} = C'_{61} = C_{11}/2 \cos^2\phi \sin 2\phi + C_{12}/2 \sin^2\phi \sin 2\phi -$$

$$C_{12}/2 \cos^2\phi \sin 2\phi - C_{11}/2 \sin^2\phi \sin 2\phi - C_{66} \sin^2 2\phi \cos 2\phi$$

$$C'_{22} = C_{11} + 2\,C_{12}\cos^2\phi\,\sin^2\phi + C_{66}\sin^2 2\phi$$

$$C'_{23} = C'_{32} = C_{13}$$

$$C'_{24} = C'_{42} = C_{14}\sin^2\phi\,\cos\phi - C_{14}\cos^3\phi + C_{14}\sin 2\phi\,\cos\phi$$

$$C'_{25} = C'_{52} = -\,C_{14}\sin^3\phi + C_{14}\cos^2\phi\,\sin\phi + C_{14}\sin 2\phi\,\cos\phi$$

$$C'_{26} = C'_{62} = C_{11}/2\,\sin^2\phi\,\sin 2\phi + C_{12}/2\,\cos^2\phi\,\sin 2\phi$$

$$-\,C_{12}/2\,\sin^2\phi\,\sin 2\phi - C_{11}/2\,\cos^2\phi\,\sin^2\phi + C_{66}\sin 2\phi\,\cos 2\phi$$

$$C'_{33} = C_{33}$$

$$C'_{46} = C'_{64} = C_{14}\cos\phi\,\sin 2\phi + C_{14}\sin\phi\,\cos 2\phi$$

$$C'_{44} = C_{44}$$

$$C'_{55} = C_{44}$$

$$C'_{56} = C'_{65} = -\,C_{14}\sin\phi\,\sin 2\phi + C_{14}\cos\phi\,\cos 2\phi$$

$$C'_{66} = C_{12}/2\,\sin^2 2\phi - C_{12}/2 + C_{66}\cos^2\phi$$

En substituant dans la relation (A-3), on obtient le tenseur des constantes diélectriques dans le système tourné défini comme suit :

$$\left[\, \varepsilon' \,\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{zz} \end{bmatrix}$$

où : $\varepsilon'_{xx} = \varepsilon_{xx}$ et $\varepsilon'_{zz} = \varepsilon_{zz}$

Dans un cristal anisotrope tel que le niobate de lithium,les vitesses acoustiques varient avec leurs directions de propagation. Pour une onde sepropageant suivant l'axe Z, dans le Niobate de Lithium ,coupe Y, et axe Z tourné d'un angle $\phi°$,voir Fig I-1 .Les vitesses acoustiques dans les différentes directions dans le plan Y' Z' ,peuvent etre calculés à partir des équations de *Christoffel* suivantes [2,3] :

$$k^2 \left(\Gamma'_{ij} - \rho\, \omega^2\, \delta_{ij} \right) V_{ij} = 0 \qquad \text{(A-4)}$$

où :

$$\Gamma'_{ij} = l_{ik} \left[C'_{kl} + \frac{(e'_{kj}\, l_j)(l_i\, e'_{il})}{l_i\, \varepsilon_{ij}\, l_j} \right] l_{li}$$

(A-5)

où ,les tenseur dont les élements sont les l_{ik} est défini par l'équation suivante:

$$l_{ik} = \begin{bmatrix} l_x & 0 & 0 & 0 & l_z & l_y \\ 0 & l_y & 0 & l_z & 0 & l_x \\ 0 & 0 & l_z & l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(A-6)}$$

et le tenseur l_{il} est le transposé de l_{ik}, défini par la relation suivante :

$$l_{il} = \begin{bmatrix} l_x & 0 & 0 \\ 0 & l_y & 0 \\ 0 & 0 & l_z \\ 0 & l_z & l_y \\ l_z & 0 & l_x \\ l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(A-7)}$$

Pour une onde longitudinale se propageant dans le plan $Y'Z$, le vecteur unité de propagation de l'onde est donné par :

$$\hat{l} = j\, l_y + k\, l_z \qquad \text{(A-8)}$$

En developpant le calcul tensoriel de l'équation (A-5), l'équation de *Christoffel* peut etre écrite comme suit :

$$k^2\, \Gamma'_{ij}\, V_j = \rho\, \omega^2\, V_j \qquad \text{(A-9)}$$

où :

$$\Gamma'_{ij} = \begin{bmatrix} M_1 & M_4 & M_5 \\ M_4 & M_2 & M_6 \\ M_5 & M_6 & M_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(A-10)}$$

où :

$$M_1 = k_5 \sin^2\theta + L_5 \cos\theta \sin\theta + k_6 \sin\theta \cos\theta + L_6 \cos^2\theta$$

$$M_2 = G_2 \cos^2\theta + J_2 \sin\theta \cos\theta + J_4 \sin^2\theta$$

$$M_3 = H_3 \sin^2\theta + J_3 \cos\theta \sin\theta + H_4 \sin\theta \cos\theta + J_4 \cos^2\theta$$

$$M_4 = k_2 \sin\theta \cos\theta + L_2 \cos^2\theta + L_4 \cos\theta \sin\theta$$

$$M_5 = L_3 \sin\theta \cos\theta + L_4 \cos^2\theta$$

$$M_6 = G_3 \cos\theta \sin\theta + J_3 \sin^2\theta + G_4 \cos^2\theta + J_4 \sin\theta \cos\theta$$

avec :

$K_2 = C'_{25}$,

$k_5 = C'_{55}$,

$$K_6 = L_5 = C'_{66},$$

$$L_2 = C'_{26} + D_2\, D_6 / E,$$

$$L_3 = D_3\, D_6 / E,$$

$$L_4 = C'_{44} + D_4\, D_6 / E,$$

$$L_6 = C'_{66} + D_6^2 / E,$$

$$G_2 = C'_{22} + D_2^2 / E,$$

$$G_3 = C'_{23} + D_2\, D_3 / E,$$

$$G_4 = J_2 = C'_{24} + D_2\, D_4 / E,$$

$$J_3 = H_4 = D_2\, D_4 / E,$$

$$J_4 = C'_{44} + D_4^2 / E,$$

$$H_3 = C'_{33} + D_3^2 / E,$$

et:

$$D_2 = e'_{y2} \cos\theta + e'_{z2} \sin\theta ,$$

$$D_3 = e'_{z3} \sin\theta ,$$

$$D_4 = e'_{y4} \cos\theta ,$$

$$D_6 = e'_{y6} \cos\theta \, ,$$

$$E = \varepsilon'_{xx} \quad .$$

En utilisant les deux équations (A-9) et (A-10), on aura :

$$\begin{bmatrix} X\,M_1 - \rho & X\,M_4 & X\,M_5 \\ X\,M_4 & X\,M_2 - \rho & X\,M_2 \\ X\,M_5 & X\,M_6 & X\,M_3 - \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \\ Vz \end{bmatrix} \qquad \text{(A-11)}$$

avec : $X = \left(\dfrac{k}{\omega} \right)^2$

En évaluant le determinant de l'équation (A-11), on obtient les valeurs propres de l'équation (A-9),qui determinent les courbes des lenteurs des ondes transversales, quasi-transversale

et quasi-longitudinale, se propageant dans le plan $Y'Z'$,suivant la coupe Y,avec axe Z axe tourné d'un angle $\phi°$;comme le montre la figures Fig I-1 .

ANNEXE B :

CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE A

Les équations de *Maxwell* , des ondes acoustiques couplées dans la $p^{ème}$ couche sont données [2,3] par les équations :

$$\Gamma_{ij,j} = \rho \, \ddot{U}_i \qquad \text{(B-1)}$$

où : i= 1,2,3.

et

$$D_{m,m} = 0 \qquad \text{(B-2)}$$

où : m = 1,2,3.

Et sachant que le déplacement élastique D_i est désigné par T_{ij} pour i= 1,2,3, et le tenseur T_{ij} est donné par :

$$T_{ij} = M_{ijkl} \, U_{k,l} \qquad \text{(B-3)}$$

où: i= 1,2,3,4.

et j= 1,2,3.

on obtient les relations suivantes :

$$M_{ijkl}\, U_{k,li} = \rho\, U_j \qquad \text{(B-4)}$$

pour $j = 1,2,3$.

$$M_{i4kl}\, U_{k,li} = 0 \qquad \text{(B-5)}$$

pour $j = 4$.

En développant l'équation (B-4), on obtient :

$$M_{1jk1} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_1^2} + M_{1jk3} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_1\, \partial x_3} + M_{3jk1} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_1\, \partial x_3} +$$

$$M_{3jk3} \frac{\partial U_k}{\partial x_3^2} = -\rho\, V_j^2 \qquad \text{(B-6)}$$

Et sachant que l'équation de l'onde s'écrit sous la forme suivante :

$$U_k = \alpha_k \exp(ik\,\beta\, x_3 + ik(1+i\gamma) - ik\, Vt\,) \qquad \text{(B-7)}$$

On aura finalement :

$$M_{3jk3}\,\beta^2 + (M_{1jk3} + M_{3jk1})\,(1+i\gamma)\,\beta + M_{1jk1}\,(1+i\gamma)^2 = \rho\, V_j^2$$

(B-8)

Ce qui permet de donner :

$$A_{kj} = M_{3jk3}\,\beta^2 + (M_{1jk3} + M_{3jk1})\;(1+i\gamma)\beta + M_{1jk1}(1+i\gamma)^2 - \rho\, V_j^2\, \delta_{ij4} \qquad \text{(B-9)}$$

où : $\delta_{ij4} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j \neq 4 \\ 0 & \text{si} \quad i=j = 4 \end{cases}$

ANNEXE C:

EVALUATION DES RACINES ET DES VECTEURS PROPRES POUR UNE VITESSE COMPLEXE PRES D'UN POINT DE BRANCHEMENT

Les racines $\beta^{(n)}(V)$ sont évaluées à partir du polynôme de l'équation (II-20) qui peut être exprimé [4,5] comme suit :

$$P(V,\beta) = 0 \qquad \text{(C-1)}$$

Au point de branchement ,la vitesse V et les racines $\beta^{(n)}$ correspondantes sont données par V_n et $\beta_c^{(m)}$,m =1..4,donc à partir de (C-1) , on obtient :

$$P(V_n,\beta_c^{(n)}) = 0 \qquad \text{(C-2)}$$

aussi à $V = V_n$,l'équation (C-1) possède une racine double β_o. Une de ces deux racines (notée comme racine du point de branchement) apprtient à $\beta_o^{(m)}$ défini pour m = 1.L'équation (C-1) peut alors être exprimée comme suit :

$$P(V_n,\beta) = (\beta - \beta_c^{(1)})^2 \, P_1(V_n,\beta) \qquad \text{(C-3)}$$

A partir de l'équation (C-3) ,on obtient :

$$\left.\frac{\partial P(V,\beta)}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_c^{(1)}} = 0 \qquad \text{(C-4)}$$

En substituant les équations (IV-40) et (IV-42) dans l'équation (C-1), on peut écrire :

$$P(V,\beta) = P(V_n + V_n\,\eta,\ \beta_o^{(m)} + \Delta\beta^{(m)}) \qquad \text{(C-5)}$$

En utilisant (C-2) et en developpant en series de *Taylor* à deux dimensions en V et β autour de V_n et $\beta_o^{(n)}$, et en négligeant

les termes d'ordres superieures en η et $\Delta\beta^{(m)}$, $P(V,\beta)$ va s'écrire pour m = 1..4 comme suit :

$$P(V,\beta) = X_9\, q^4 + (X_6 + X_{10}\eta)\, q^3 + (X_3 + X_7\eta + X_{11}^2\eta^2)\, q$$

$$+ (X_1 + X_4\eta + X_8\eta^2 + X_{12}\eta^3)\, q + (X_2\eta + X_5\,\eta^2 + X_{13}^3\eta) = 0$$

où : $q = \Delta\beta^{(m)}$ (C-6)

$$X_1 = \frac{\partial P}{\partial\beta}$$

$$X_2 = V\,\frac{\partial P}{\partial V}$$

$$X_3 = \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2 P}{\partial\beta^2}$$

$$X_4 = \frac{2V}{2!}\,\frac{\partial^2 P}{\partial V\,\partial\beta}$$

$$X_5 = \frac{V^2}{2!} \frac{\partial^2 P}{\partial V^2}$$

$$X_6 = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial \beta^3}$$

$$X_7 = \frac{3V}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial V \partial \beta^2}$$

$$X_8 = \frac{3V^2}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial V^2 \partial \beta}$$

$$X_9 = \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 P}{\partial \beta^4}$$

$$X_{10} = \frac{4}{4!} \frac{\partial^4 P}{\partial V \partial \beta^3}$$

$$X_{11} = \frac{6V^2}{4!} \frac{\partial^4 P}{\partial V^2 \partial \beta^2}$$

$$X_{12} = \frac{4V^3}{4!} \frac{\partial^4 P}{\partial V^3 \partial \beta}$$

$$X_{13} = \frac{V^3}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial V^3}$$

où : X_1 à X_{12} sont évalués à $V = {}_nV$ et $\beta = \beta_0^{(m)}$. Pour un cas spécial en compte seulement des termes d'ordres inférieures *Yachiro* [4,5] à montré que $\Delta\beta^{(1)}$ était proportionnel à $\eta^{1/2}$.

Dans le cas général, $\Delta\beta^{(m)}$ pour m = 1..4, a la forme suivante :

$$\Delta\beta^{(m)} = a\eta^{1/2} + b\eta + \gamma\eta^{3/2} + \delta\eta^2 \qquad \text{(C-7)}$$

où : a, b, γ, δ .., sont des constantes à évaluer pour chaque m. dans cette analyse les tèrmes d'ordres supérieures de η^2 se seront pas évalués. En substituant (C-7) dans (C-6), et en rassemblant les termes de mêmes puissances, et en égalant chaque terme à zero, on obtient :

$$a\,X_1 = 0$$

$$X_2 + b\,X_1 + a^2 X_3 = 0$$

$$a^3\,X_6 + 2\,a\,b\,X_3 + \gamma\,X_1 + a\,X_4 = 0$$

$$a^4\,X_9 + 3\,a^2\,b\,X_6 + (b^2 + 2\,a\,\gamma)\,X_3 + X_7 a^2 +$$

$$X_4 b + X_5 + \delta\,X_1 = 0$$

$$4\,a^3\,b\,X_9 + 3\,a^2\,b\,X_6 + a^3\,X_{10} + 2\,\gamma\,(a + b)\,X_3 +$$

$$2\,a\,b\,X_7 + \gamma\,X_4 + a\,X_8 + \gamma\,X_1 = 0 \qquad \text{(C-8)}$$

Pour le point de branchement $\beta^{(1)}$, l'équation (C-4) implique que : $X_1 = 0$, et les équations (C-8) donnent :

$$a = (-X_2/X_3)^{1/2}$$

$$b = -(X_4 + X_6\, a^2)/\, 2\, X_3$$

$$\gamma = -(a^4\, X_9 + 3\, a^2\, b\, X_6 + b^2\, X_3 + a^2\, X_7 +$$

$$b\, X_4 + X_5)/\, 2\, a\, X_3$$

$$\delta = -[a(4\, a^2\, b\, X_9 + 2\, b\, X_7 + X_8 + a^2\, X_{10}) +$$

$$\gamma(3\, a^2\, X_6 + 2\, b\, X_3 + X_4)/\,(2\, a\, X_3) \qquad \text{(C-9)}$$

Les racines $\beta^{(m)}$,pour m=2,3,4 , se sont pas nulles, et par conséquent l'équation (C-8) donne:

$$a = 0$$

$$b = -X_2/\, X_1$$

$$\gamma = 0$$

$$\delta = -(X_3 b^2 + b\, X_4 + X_5)/\, X_1 \qquad \text{(C-10)}$$

Pour une valeur faible de η ,il n'est pas nécéssaire d'inclure les tèrmes en $\eta^{3/2}$dans l'expression de $\Delta\beta^{(m)}$. Donc l'expression de $\Delta\beta^{(m)}$donnée par l'équation (IV-43) se réduit à :

$$P_3^{(m)} = 0$$

$$P_2^{(m)} = a$$

et : $$P_1^{(m)} = b \qquad \text{(C-11)}$$

où : a et b sont évalués pour chaque m par les équations (C-9) et (C-10) . Les $\alpha_i^{(m)}$, i=1..4, peuvent être obtenue en résolvant l'équation (II-16) . En négligeant de nouveau les termes en $\eta^{3/2}$, on obtient :

$$\alpha_i^{(m)} = \alpha_{i3}^{(m)} + \alpha_{i2}^{(m)} \eta^{1/2} + \alpha_{i1}^{(m)} \eta \qquad \text{(C-12)}$$

En utilisant les équations (IV-42),(IV-43) et (C-11) et ne négligeant les termes d'ordre supérieures de η , chaque terme A_{ij} ,i,j =1..4 de la matrice [A] peut s'écrire pour m=1..4 comme suit :

$$A_{ij} = A_{ij1}\, \eta + A_{ij2}\, \eta^{1/2} + A_{ij3}$$

où : $$A_{ij1} = M_{3ij3}(a^2 + 2b\beta_0^{(m)}) + (M_{1ij3} + M_{3ij1})b$$

$$A_{ij2} = 2aM_{3ij3}\, \beta_0^{(m)} + (M_{1ij3} + M_{3ij1})a$$

$$A_{ij3} = M_{3ij3}\beta_0^{(m)2} + (M_{1ij3} + M_{3ij3})\beta_0^{(m)} +$$

$$M_{3ij1} - \rho V_n^2 \delta_{ij4} \qquad \text{(C-13)}$$

En substituant les équations (C-12) et (C-13) dans l'équation (II-16), et en égalisant les tèrmes de même puissance en η , et en négligeant les termes d'ordres supérieures, les 12 équations suivantes résultent pour m=1..4 et i variant de 1..4,

$$A_{ij3}\,\alpha_{j3}^{(m)} = 0$$

$$A_{ij3}\,\alpha_{j2}^{(m)} + A_{ij2}\,\alpha_{j3}^{(m)} = 0$$

et: $$A_{ij3}\,\alpha_{j2}^{(m)} + A_{ij2}\,\alpha_{j2}^{(m)} + A_{ij3}\,\alpha_{j3}^{(m)} = 0 \qquad \text{(C-14)}$$

On choisit $\alpha_{43}^{(m)}$ égal à 1 et $\alpha_{42}^{(m)}$ et $\alpha_{41}^{(m)}$ égaux à zero les $\alpha_{ij}^{(m)}$,i,j=1..3 qui restent seront évalués pour m=1..4 à partir de 9 équations parmi les 12 équations de (C-12).

ANNEXE D :

EVALUATION DES INTEGRALES DE L'EQUATION IV-50 :

Les intégrales de l'équation (IV-50) s'écrivent comme suit :

$$I = \int_0^{\delta X} d\tau \; \frac{(\tau)^q}{1 + \tau / W} \; e^{-\tau} \qquad \text{(D-1)}$$

où : $q = 1/2$ pour le premier terme et 3/2 pour le second .

$W = X / g$

$X = k_n x_1$.

Si δX est approximativement égale à 10, le terme en exponentiel de l'intégrale assure que l'intégrale soit relativelment fiable pour $\tau > \delta X$ et l'équation IV-49 est suffisamment valide.La limite supérieure peut être remplacée par l'infini.donc ,si X est approximativement 500 ($x_1 \cong$ 75 longueurs d'onde),δ doit être au moins de l'ordre de 0.02. Pour cette valeur,la formule du développement dans l'équation (IV-47) utilisée pour évaluer les térmes de l'équation (IV-45) en négligeant les termes d'ordres superieures de $\eta^{3/2}$, est suffisamment valide.similairement pour X approximativement égal à 2000 ($x_1 \cong$300 longueurs d'onde),δ doit être au moins de l'ordre de 0.005.

L'intégrale de l'équation D-1,est évaluée pour deux intervalles de W ou de g.Le premier est $W > \delta X$ (ou $g < 1/\delta$), le second est $W < \delta X/1000$ ($g > 1000/\delta$).

Premier cas :

Comme s'est déjà dit, δX est approximativement égal à 10. Donc la condition dans ce cas va s'écrire : $g < X/10$ ou $W > 10$. Donc, par exemple, si $g < 50$, X doit être plus grand que 500 ($x_1 \cong 75$ longeurs d'onde) et si $g \cong 200$, X doit être plus grand que 2000 (ou $x_1 > 300$ longueurs d'onde). Pour toutes les valeurs de τ variant de 0 à δX, le tèrme $(1 + \tau/W)^{-1}$ peut être developpé

comme suit :

$$(1+ \tau/ W)^{-1} = 1 - \tau/ W + (\tau/ W)^2 - (\tau W)^3 + .. \qquad \text{D-2}$$

En substituant l'équation D-2 dans l'équation (D-1), on obtient:

$$I = \int_0^{\delta X} d\tau \quad e^{-\tau} \tau^q \left[1 - \tau/W + (\tau/W)^2 - .. \right] \qquad \text{(D-3)}$$

En évaluant l'intégral de l'équation D-3, on obtient :

$$I = \Gamma o\ (q+1, \delta X) - \frac{\Gamma o(q+2, \delta X)}{W} + \frac{\Gamma o(q+1, \delta X)}{W^2} \qquad \text{(D-4)}$$

ou : $\Gamma o(q,y) = \int_0^y d\tau\ \tau^{q-1}\ e^{-\tau}$

$\Gamma o(q,y)$: est la fonction gamma . Si $W > 10$, les numérateurs des termes succéssifs croissent , cependant les dénominateurs croissent plus rapidement ,ce qui mène à négliger certains termes et l'équation (D-4) devient :

$$I = \Gamma o\ (q+1, \delta X) \qquad (D-5)$$

Pour q=1/2 ou 3/2 et $\delta X \cong 10$, la fonction gamma de l'équation D-5diffère legèrement de la fonction gamma , $\Gamma(q+1)$ définie par :

$$\Gamma(q+1) = \int_0^\infty dt\ \tau^q\ e^{-t} \qquad (D-6)$$

Sachant que $\Gamma(1/2)=\pi$ et $\Gamma(q+1)=q\ \Gamma(q)$, l'équation (D-5) mène

à :

$$I = \begin{cases} \pi/2 & \text{pour } q = 1/2 \\ \\ 3\pi/4 & \text{pour } q = 3/2 \end{cases} \qquad (D-7)$$

Deuxième cas : $W < \delta X/1000$ ou $g > 1000/\delta$

Si δX est de l'ordre de 10,X doit être inférieur à 0.01g. Par exemple,dans certains cas g est de l'ordre de 10^{δ},x_1 varie de 50 à plusieurs milliers de longeurs d'onde, et W inférieur ou égal à 0.01.La limite inférieure de l'intégrale de l'équation D-1 peut varier de 0 à $\delta X/1000$ (ou 0.01 approximativement) car la contribution de l'intérvalle $0 < \tau < \delta X/1000$ est négligeable comparée à la contribution de l'intervalle restant à l'intégrale.Pour toutes les valeurs de τ variant de $\delta X/1000$ à δX,le terme $(1 + \tau/W)^{-1}$ de l'intégtale peut s'exprimer comme suit:

$$(1+ \tau/W)^{-1} = \frac{W}{\tau}(1+ W/\tau)^{-1}$$

$$= W/\tau \ \{1-W/\tau + (W/\tau)^2-(W/\tau)^3+..\} \qquad (D-8)$$

En substituant cette expression dans l'équation (D-1),on obtient :

$$I = W \int_{\delta X/1000}^{\delta X} d\tau \quad e^{-\tau} \ \tau^{q-1} \ [\,1-W/\tau + (W/\tau)^2-..] \qquad (D-9)$$

Si W est plus faible que 0.01,l'équation (D-9) peut se reduire et donner :

$$I = W \int_{\delta X/1000}^{\delta X} d\tau \quad e^{-\tau} \ \tau^{q-1} \qquad (D-10)$$

Pour q=1/2 ou 3/2 la fonction gamma, $\Gamma(q)$ a une contribution à l'intégrale relativement négligeable dans les intervalles de 0 à $\delta X/1000$ et δX à ∞ par conséquent l'intégrale de l'équation (D-10) ,devient :

$$I = \begin{cases} \pi W & \text{pour } q = 1/2 \\ W\pi/2 & \text{pour } q = 3/2 \end{cases} \qquad \text{(D-11)}\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] - E.Dieulesaint ,D.Royer .
"Ondes élastiques dans le solide
Application au traitement du signal"
Edition Masson & compagnie,1974.

[2] - Moussa Hoummady .
"Ondes élastiques transversales horizontales émises par des transducteurs interdigités déposés sur des plaques minces de Quartz . Application aux capteurs de viscosité et aux detecteurs de gaz" .
Thèse de Doctorat, Université de Franche-comté France, 1991 .

[3] - B.A ,Auld .
"Acoustic Fields And Waves In Solids".
Wiley, New York, 1973 .

[4] - Jhunjhunwala ,Ashok .
" Spectrum of waves excited in single and multiple layered crystalline media".
Thèse de Doctorat, Université de Maine , Angleterre, 1979 .

[5] - R.F.Milsom, & al .
"Analysis of generation and detection of surface and bulk acoustic waves by interdigital transducers".IEEE, trans, Sonics, Ultrasonics , Vol.SU-24, No 3, May 1977.

[6] - Armelle Renard .
"Etude des propiétés des ondes horizontales transverses pour la réalisation d'oscillateurs à ondes élastiques de surface".
Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Université Pierre & marie curie, France, 1981 .

[7] - Savage, Edward Bruce .
"Compensation For Nonideal Effects In Surface Acoustic Wave Interdigital Filters" .
Université de la Californie, Santa-Barbara, USA .Thèse de Doctorat, 1980 .

[8] - Andrew J .Slobodnik, JR .
"Surface Acoustic Waves And SAW Materials" IEEE, Vol.64, No.5, May 1976 .

[9] - Félix Cuozzo .
"Contribution à l'étude de la conversion acouto-électrique par des microrubans métalliques sur des substrats piézoélectriques.
Applications à la synthèse des filtres passe-bande" .
Thèse de Doctorat, Université de Nice , France, 1978 .

[10] - Daniel Frank Thompson .
"Temperature compensation of microwave resonators" .
Thèse de Doctorat, Université de Stanford, Angleterre, 1986 .

[11] - Jaroslava Z. Wilcox & Kuo-Hsiung Yen .
" Shear Horizontal Surface Waves On Rotated Y-Cut Quartz".
IEEE,Transactions on Sonics and Ultrasonics,Vol.Su-28,No.6,Novembre 1981.

[12] - C.A.Flory & R.L.Baer .
"Surface Transverse Wave Modes Analysis And coupling to interdigital Transducers".
IEEE,Ultrasonics Symposium pp.313-318 .

[13] - A.R.Baghai Wadji & A.A.Maradudin .
"Shear Horizontal Surface Acoustic Waves On Large Amplitude gratings".
Appl.Phys.Lett 59(15), 7 Octobre 1991.

[14] - Daniel F .Thompson & B.A.Auld .
"Surface Transverse Wave Propagation Under Metal Strip Gratings".IEEE,
Ultrasonics Symposium,pp.261-266 1986.

[15] - P.D.Bloch, N.G.Doe,
E.G.S. Paige & M.Yamaguchi.
"Observations On Surface Skimming Bulk Waves And Other Waves Launched From An IDT On Lithium Niobate".
IEEE, Ultrasonis Symposium, 1981 .

[16] - Kazuhiko Yamanouchi & Masao Takeuchi .
"Application for piezoelectric leaky surface waves" .
IEEE, Ultrasonics symposium,pp.11-18,1990.

[17] - M.Planat & P.Schiavone.
"Efficiency Of Surface Interdigital Transducers On Anisotropic Media"
J.Appl.Phys,Vol.57,No.1,Janvier 1985 .

[18] - Y .W .Zhang & M . Planat .
"Bulk waves deposited on an anisotropic substrate".Electronics letters, Vol.23 No 2pp 68-69, 1987 .

[19] - Charles Kittel .
"Phisique de l'etat solide" .
5ème edition, Dunod ,1985 .

[20] - W.H.Chen & F.C.Fu .
" Optimal Crystal Cuts And Propagation Directions for Excitation Of Acoustic Waves In $LiNbO_3$ ".
J.Appl.Phys,Vol 59,No.1, pp.49-54, premier Janvier 1986.

[21] - Kentchiro Yachiro & Naohisa Goto .
"Analysis of generation of acoustic waves on the surface of semi-infinite piezoelectric solid".IEEE, trans, Sonics, Ultrasonics, 1978.