

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI – CONSTANTINE-1  
FACULTÉ DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE  
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

N° D'ordre :

Série :

## **THÈSE**

**Présentée pour obtenir le diplôme de**

**DOCTORAT EN SCIENCES**

**Spécialité : ELECTRONIQUE**

**Option : Contrôle Des Systèmes**

Par :

**Mr : BOUROUBA Bachir**

**THEME**

**Contribution à la Commande Adaptative Optimale  
d'Ordre Fractionnaire**

Soutenue le 30/01/ 2018

Devant le Jury :

Président :	CHAREF Abdelfatah	<i>Professeur,</i>	<i>Université de Constantine 1</i>
Rapporteur :	LADACI Samir	<i>Professeur,</i>	<i>ENP Constantine</i>
Co-rapporteur	CHAABI Abdelhafid	<i>Professeur,</i>	<i>Université de Constantine 1</i>
Examineur :	CHEMACHEMA Mohamed	<i>Professeur,</i>	<i>Université de Constantine 1</i>
Examineur :	LABIOD Salim	<i>Professeur,</i>	<i>Université de Jijel</i>
Examineur :	DJOUAMBI Abdelbaki	<i>Professeur,</i>	<i>Université d'Oum Elbouaghi</i>

Année 2017-2018

● بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

"اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ (1) خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ (2) اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ  
(3) الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ (4) عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ (5)"

● بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

" رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي "

# REMERCIEMENTS

Avant tout, Je remercie Allah tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Je tiens à remercier très vivement mon directeur de thèse, le Professeur Samir LADACI, pour la proposition du sujet de cette thèse et pour m'avoir guidé et conseillé tout au long de ce travail. Je tiens également à lui exprimer toute ma gratitude pour son soutien scientifique et la confiance qu'il m'accordée pour mener ce travail de recherche.

J'exprime ma gratitude et mes remerciements à mon co-encadreur de thèse Monsieur Chaabi Abdelhafid Professeur à l'Université de Constantine 1. Je tiens à remercier aussi Monsieur Charef Abdelfatah, Professeur à l'Université de Constantine 1, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.

Je remercie également Monsieur Chemachema Mohamed, professeur à l'Université de Constantine 1, Monsieur Labiod Salim Professeur à l'Université de Jijel, ainsi que Monsieur Djouambi Abdelbaki Professeur à l'Université d'Oum Elbouaghi, qui ont accepté d'examiner ce modeste travail de recherche.

J'adresse un remerciement à mes amis et collègues Mokeddem Diab, Hamla Hichem, Khettab Zoubir , Belhaouchet Nouri, Adel Blouti , Bourahala fayçal et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin durant ma formation.

Enfin, un grand merci à ma mère et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien.

# Dédicaces

*À la mémoire de mon père,*

*À ma Mère, pour tout les sacrifices consentis, pour leur soutien durant toute mes années d'études,*

*À toute ma grande famille,*

*À mes frères et à mes sœurs,*

*À ma femme, pour la patience et le soutien dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse,*

*À mes enfants Mohamed et Maram .*

*BOUROUBA Bachir*

# Table des matières

REMERCIEMENTS .....	i
Table des matières .....	ii
Liste des tableaux .....	v
Liste des figures .....	vi
Liste des abréviations .....	ix
Introduction générale.....	1
1. Système d'ordre fractionnaire et techniques de commande .....	4
1.1. Introduction .....	4
1.2. Définitions fondamentales.....	4
1.2.1. Définition de Riemann-Liouville .....	5
1.2.2. Définition de Grünwald-Letnikov .....	5
1.2.3. Définition de Caputo .....	6
1.3. Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	6
1.4. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre non entier .....	7
1.4.1. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire .....	7
1.5. Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	8
1.5.1. Méthodes d'approximation d'une Fonction de transfert ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles .....	9
1.5.2. Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles	14
1.6. Stabilité des systèmes d'ordres fractionnaires .....	19
1.6.1. Stabilité des systèmes linéaires d'ordres fractionnaires .....	19
1.6.2. Stabilité des systèmes non linéaires d'ordres fractionnaires.....	19
1.7. Techniques de commandes.....	20
1.7.1. Commande par mode glissant .....	20

1.7.2.	Commande adaptative .....	24
1.7.3.	Commande par logique floue .....	26
1.8.	Conclusion.....	29
2.	Méthodes d'optimisations .....	30
2.1.	Introduction .....	30
2.2.	Moth-Flame Optimization (MFO) Algorithm.....	30
2.2.1.	Inspiration.....	30
2.2.2.	Algorithme .....	32
2.2.3.	Complexité computationnelle de l'algorithme MFO .....	40
2.3.	Evolution différentielle.....	41
2.3.1.	Mutation .....	42
2.3.2.	Croisement .....	43
2.3.3.	Sélection .....	43
2.4.	Essaim de particules .....	45
2.5.	Conclusion.....	47
3.	Approximation par modèle d'ordre réduit de systèmes d'ordre fractionnaire en utilisant l'algorithme d'évolution différentielle.....	48
3.1.	Introduction .....	48
3.2.	Approximation du modèle fractionnaire en utilisant algorithme DE.....	49
3.3.	Résultats de simulation.....	51
3.3.1.	DE vs méthode d'Oustaloup. ....	51
3.3.2.	DE vs méthode de Charef.....	55
3.3.3.	DE vs méthode de Charef 'deuxième ordre' .....	57
3.3.4.	DE vs méthodes de Charef et Oustaloup pour un système fractionnaire fondamental	60
3.4.	Conclusion.....	63
4.	Commande par $PI^{\lambda}D^{\mu}$ basée sur l'optimisation mite-flamme avec la configuration d'adaptation MRAC .....	64
4.1.	Introduction .....	64
4.2.	Systèmes de commande d'ordre fractionnaire .....	65
4.3.	Ajustement des paramètres du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ par MFO .....	68

4.4.	Exemples de Simulation.....	70
4.4.1.	<i>Exemple 1</i> .....	70
4.4.2.	<i>Exemple 2</i> .....	71
4.4.3.	<i>Exemple 3</i> .....	72
4.4.4.	<i>Exemple 4</i> .....	73
4.4.5.	<i>Exemple 5</i> .....	75
4.4.6.	<i>Exemple 6</i> .....	77
5.	Commande par mode glissant adaptatif flou pour la stabilisation robuste d'une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire .....	81
5.1.	Introduction .....	81
5.2.	Description générale du système chaotique d'ordre fractionnaire .....	82
5.3.	Commande par mode glissant adaptatif des systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires 83	
5.3.1.	Application sur le système d'ordre fractionnaire de Lü.....	86
5.4.	Nouvelle loi de commande par mode glissant des systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires .....	90
5.4.1.	Application sur le système d'ordre fractionnaire de Chen.....	91
5.5.	Commande floue adaptative par mode glissant des systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires incertains et perturbés.....	96
5.5.1.	Application sur le système d'ordre fractionnaire du Chen perturbé et avec des incertitudes .....	98
5.6.	Stabilisation d'une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire par un contrôleur optimale flou adaptatif par mode glissant .....	102
5.6.1.	Application sur le système d'ordre fractionnaire du Lü perturbé et avec des incertitudes .....	102
5.7.	Conclusion.....	105
	Conclusion générale .....	107
	Bibliographie .....	109

## Liste des tableaux

<b>Tableau 3-1</b> Les paramètres du DE .....	51
<b>Tableau 3-2</b> Comparaison en performances entre les deux méthodes d'approximation .....	54
<b>Tableau 3-3</b> Comparaison en performances entre les deux méthodes d'approximation .....	57
<b>Tableau 3-4</b> Comparaison en performances entre les deux méthodes d'approximation DE .....	60
<b>Tableau 3-5</b> Comparaison en performances entre DE, second ordre charef et oustaloup méthodes d'approximations.....	63
<b>Tableau 4-1</b> Paramètres du régulateur FOPID générés par l'algorithme MFO proposé et par l'algorithme TSA modifié. ....	76
<b>Tableau 4-2</b> Comparaison des performances dans le domaine temporel.....	77
<b>Tableau 4-3</b> Marge de stabilité de l'exemple 5 .....	77
<b>Tableau 5-1</b> Liste des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire publiés, qui peuvent être décrits par le modèle général proposé (5.1). ....	82

## Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> Diagramme de Bode de $G(s) = \frac{1}{(1+s/p_T)^\beta}$ .....	12
<b>Figure 1.2</b> Comment choisir les singularités pour l'approximation d'un écart constant entre la ligne à $-20\beta db/dec$ et les lignes droites en zig-zag. ....	13
<b>Figure 1.3</b> Différents modes de trajectoire dans le plan de phase .....	21
<b>Figure 1.4</b> Changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande .....	22
<b>Figure 1.5</b> Changement de structure par commutation d'une contre-réaction d'état .....	23
<b>Figure 1.6</b> Changement de structure avec ajout de la commande équivalente .....	23
<b>Figure 1.7</b> Principe des systèmes de commande adaptative .....	24
<b>Figure 1.8</b> Commande adaptative à gain préprogrammé .....	25
<b>Figure 1.9</b> Commande adaptative à contrôleur auto-ajustable .....	26
<b>Figure 1.10</b> Commande adaptative à modèle de référence .....	26
<b>Figure 2.1</b> Orientation transversale .....	31
<b>Figure 2.2</b> Trajectoire du vol spirale autour de sources lumineuses proches .....	31
<b>Figure 2.3</b> Spirale logarithmique, espace autour d'une flamme, et la position par rapport à t. ....	36
<b>Figure 2.4</b> Quelques positions possibles pouvant être atteintes par une mite par rapport à une flamme utilisant la spirale logarithmique .....	37
<b>Figure 2.5</b> Chaque mite est affecté à une flamme .....	38
<b>Figure 2.6</b> Le nombre de flammes diminue d'une manière adaptative au cours des itérations. ....	39
<b>Figure 2.7</b> Schéma de banc de poissons .....	45
<b>Figure 2.8</b> Schéma de principe du déplacement d'une particule .....	46
<b>Figure 3.1</b> Diagramme de Bode du système fractionnaire et ses approximations par l'approche proposée et celle de la méthode d'Oustaloup .....	53
<b>Figure 3.2</b> Réponse indicielles du système fractionnaire et ses approximations par l'approche proposée et celle de la méthode d'Oustaloup .....	54
<b>Figure 3.3</b> Diagramme de Bode du système fractionnaire et son approximation par l'approche proposée et celle de la méthode du Charef .....	56
<b>Figure 3.4</b> Réponse indicielles du système fractionnaire et son approximation par l'approche proposée et celle de la méthode du charef .....	57

<b>Figure 3.5</b> Diagramme de Bode du système fractionnaire et son approximation par l'approche proposée et celle de la méthode du Charef.....	59
<b>Figure 3.6</b> Réponse indicielles du système fractionnaire et son approximation par l'approche proposée et celle de la méthode du Charef.....	59
<b>Figure 3.7</b> Diagrammes de Bode du modèle d'ordre fractionnaire fondamental, Charef, Oustaloup, modèle approximé par DE.....	62
<b>Figure 3.8</b> Réponse indicielles du système fractionnaire et ces approximations par l'approche proposée et celle de la méthode du Charef et Oustaloup .....	62
<b>Figure 4.1</b> Régulateur PID standard.....	65
<b>Figure 4.2</b> Structure du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .....	67
<b>Figure 4.3</b> Régulateurs PID et PID fractionnaire .....	67
<b>Figure 4.4</b> Schéma de principe du réglage du contrôleur PID fractionnaire a base de MRAC par la méthode MFO. ....	69
<b>Figure 4.5</b> Algorithme d'optimisation Mite-Flamme.....	69
<b>Figure 4.6</b> Sorties du système équation (4.7) en boucle fermée et modèle de référence équation (4.8) .....	71
<b>Figure 4.7</b> Signal de commande .....	71
<b>Figure 4.8</b> Sortie du système équation (4.9) en boucle fermée et modèle de référence équation (4.10) .....	72
<b>Figure 4.9</b> Signal de commande .....	72
<b>Figure 4.10</b> Sortie du système équation (4.11) en boucle fermée et le modèle de référence équation (4.12) .....	73
<b>Figure 4.11</b> Signal de commande .....	73
<b>Figure 4.12</b> Sortie du système équation (13) en boucle fermée et le modèle de référence équation (14) .....	74
<b>Figure 4.13</b> Signal de commande .....	74
<b>Figure 4.14</b> Diagramme de Bode du système commandé en boucle ouverte.....	75
<b>Figure 4.15</b> Diagramme de Bode du système de l'équation (4.15) avec le régulateur FOPID optimisé par les deux méthode MFO et TSA .....	76
<b>Figure 4.16</b> Réponse indicielle du système de l'équation (4.15) commandé par l'algorithme MFO proposé et TSA modifié .....	76

<b>Figure 4.17</b>	La fonction objective pour l’algorithme proposé sur les paramètres du FOPID .....	77
<b>Figure 4.18</b>	Réponse du système de l’équation (18) avec la présence d’une perturbation .....	78
<b>Figure 4.19</b>	Diagramme de Bode du système instable en boucle ouverte.....	78
<b>Figure 4.20</b>	Diagramme de Bode du système instable en boucle fermée.....	79
<b>Figure 4.21</b>	Réponse du système de l’équation (18) avec la présence d’une perturbation .....	79
<b>Figure 4.22</b>	Signal de commande .....	80
<b>Figure 5.1</b>	Comportement Chaotique du système de Lü. ....	87
<b>Figure 5.2</b>	Allures des variables d'état stabilisées du système de Lü d'ordre fractionnaire.....	88
<b>Figure 5.3</b>	Portrait de phase du système de Lü stabilisé .....	89
<b>Figure 5.4</b>	La commande appliquée au système de Lü stabilisé .....	89
<b>Figure 5.5</b>	Surface de glissement du système de Lü stabilisé .....	89
<b>Figure 5.6</b>	Évolution du gain d’adaptation.....	90
<b>Figure 5.7</b>	Portrait de phase du système de Chen d’ordre fractionnaire .....	92
<b>Figure 5.8</b>	Trajectoires d'état du système de Chen d'ordre fractionnaire.....	93
<b>Figure 5.9</b>	Trajectoires d'état stabilisé du système de Chen d'ordre fractionnaire.....	94
<b>Figure 5.10</b>	Portrait de phase du système commandé. ....	95
<b>Figure 5.11</b>	Variation de la loi de commande $u(t)$ en fonction de temps .....	95
<b>Figure 5.12</b>	Surface de glissement .....	95
<b>Figure 5.13</b>	Trajectoires d'état du système de Chen d'ordre fractionnaire incertain stabilisé.....	99
<b>Figure 5.14</b>	Portrait de phase du système de chen .....	100
<b>Figure 5.15</b>	Commande globale appliquée au système de Chen .....	100
<b>Figure 5.16</b>	Commande floue appliquée au système.....	101
<b>Figure 5.17</b>	Trajectoire de la surface de glissement.....	101
<b>Figure 5.18</b>	Trajectoires d'état du système de Lü d'ordre fractionnaire stabilisé.....	104
<b>Figure 5.19</b>	Commande globale appliquée au système de Lü.....	104
<b>Figure 5.20</b>	Commande floue appliquée au système.....	104
<b>Figure 5.21</b>	Évolution de la surface de glissement.....	105
<b>Figure 5.22</b>	Évolution de la fonction objective .....	105

## Liste des abréviations

DE : Évolution Différentielle.

GA : Algorithme Génétique.

MFO: Optimisation Moth-Flame.

PID : Proportionnelle Intégrale Dérivée.

PSO : Optimisation par essaim de particule.

PPF : Pôle à Puissance Fractionnaire.

TOR : Tout ou Rien.

ZPF : Zéro à Puissance Fractionnaire.



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

---

## **Introduction générale**

Durant les dernières décennies, l'effort de recherche sur la commande des processus industriels et leur automatisation a été multiplié [1,2,3,4,5,6]. L'objectif principal de ces recherches est de trouver une loi de commande optimale capable de forcer la sortie du système, à suivre une trajectoire de référence désirée; cette trajectoire peut être fixe comme dans le cas d'une régulation ou variable comme le cas d'une poursuite. Le deuxième défi de l'automaticien est de proposer un modèle de connaissance capable de représenter les phénomènes physiques rencontrés [3,5,6]. Notons aussi que, les approximations sont en général susceptibles de dégrader les performances désirées pour les systèmes réels. C'est ici, qu'il est important de tenir compte de ces imprécisions pour pouvoir assurer les performances désirées par le biais de la synthèse de lois de commande.

L'extension du calcul d'ordre entier vers le calcul d'ordre non entier conduit au calcul dit fractionnaire connu depuis le dix-septième siècle [7] où la première référence est associée à Leibniz et L'Hopital en 1695 qui traitaient le problème de la dérivée d'ordre un demi. Juste après des études systématiques du calcul fractionnaire étaient élaborées par Liouville, Riemann et Holmegren [8].

De nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégrale d'ordre fractionnaire [8,9,10], leur application dans le domaine des systèmes de commande automatique remonte au début des années soixante [11]. Mais, ce n'est que dans les dernières décennies que les contrôleurs basés sur le calcul d'ordre fractionnaire gagnent de plus en plus d'intérêts [12,13,14]. De nombreux procédés dans les systèmes de physique et d'ingénierie peuvent être commandés et modélisés plus précisément par des dérivés/intégrales fractionnaires que par les dérivées ou intégrales d'ordre entier traditionnel [15], Miller et Ross [16] ont mentionné que presque tous les domaines de la science et de l'ingénierie ont une application des dérivés fractionnaires. Les applications incluent la commande des systèmes [17,18,19,20], les longues lignes réparties[21], la biomécanique[22], les comportements des matériaux viscoélastiques[23,24], les processus électrochimiques[2,25], la polarisation diélectrique [26], le bruit coloré[27] et le chaos [28,29],...etc.

L'idée d'utiliser des régulateurs d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes, revient à Outaloup qui a développé la commande CRONE (Commande Robuste d'ordre non entier) [30]. Podlubny [14] a proposé un PID d'ordre fractionnaire utilisant des actions intégrales et dérivées

d'ordre non entier. En 2003 Calderon a élargie le calcul fractionnaire à la commande par mode glissant.

Dans cette thèse, nous nous intéressons d'une part à l'approximation de ces systèmes par des modèles d'ordres entiers avec réduction d'ordre et à d'autre part, par le problème de la commande adaptative des systèmes d'ordres fractionnaires de différents types (systèmes linéaires, systèmes non linéaires).

Cette thèse est divisée en deux parties :

- La première partie traite de l'approximation d'un système fractionnaire par un système d'ordre entier, les paramètres de ce modèle sont estimés par la technique d'évolution différentielle (DE) dans le but de réduire l'ordre du modèle approximé comparativement aux résultats des méthodes classiques.
- La deuxième partie est consacrée à la commande des systèmes. Dans le cas d'un système linéaire on a proposé une commande PID fractionnaire à modèle de référence basée sur l'approche d'optimisation Mite-Flamme (MFO). Pour le cas des systèmes non linéaire on a proposé une loi de commande par mode glissant dans l'objectif de stabiliser une classe de ces systèmes (systèmes chaotiques). Pour améliorer les performances du système dans une première étape une loi adaptative est introduite sur la commande par mode glissant, ce dernier est renforcé par une loi de commande adaptative floue. Un algorithme d'optimisation par essaim de particules (PSO) est introduit pour déterminer les valeurs optimales de la loi de commande proposée.

Ce travail est structuré en cinq chapitres :

Le premier chapitre est une introduction aux notions de bases de la théorie des opérateurs d'ordre fractionnaire, ainsi que les différents outils mathématiques nécessaires au calcul d'ordre fractionnaire. Les techniques de commande utilisées dans cette thèse sont aussi présentées à la fin de ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons les méthodes d'optimisations utilisées dans cette thèse et nous mettons l'accent sur la nouvelle méthode Mite-Flamme Optimisation (MFO).

Dans le chapitre trois, nous décrivons une nouvelle méthode d'approximation pour les systèmes d'ordres fractionnaires par un système rationnelle d'ordre réduit, cette méthode est basée sur

l'approche DE. Des études comparatives avec d'autres méthodes d'approximations sont présentées.

Le chapitre quatre est consacré à une présentation d'une nouvelle méthode de conception du régulateur PID d'ordre fractionnaire basé sur un modèle de référence. Les valeurs optimales des paramètres du régulateur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  sont déterminées par la méthode de recherche méta-heuristique MFO. Des exemples numériques de simulation sont présentés à la fin de ce chapitre pour montrer l'efficacité de la méthode proposée.

Le cinquième chapitre traite le cas des systèmes non linéaires fractionnaires est spécialement les systèmes chaotiques qui sont caractérisés par l'aspect aléatoire. A cet effet on propose trois lois de commande stabilisantes. Les preuves de la stabilité au sens de Lyapunov sont présentées pour justifier notre choix. Encore une fois, nous donnons des exemples pour les approches proposées.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats obtenus dans de cette thèse et les perspectives de ce travail de recherche.

# CHAPITRE 1

---

---

## **Systeme d'ordre fractionnaire et techniques de commande**

# 1. Système d'ordre fractionnaire et techniques de commande

## 1.1. Introduction

Depuis plus de trois siècles, un grand nombre de chercheurs se sont concentrés sur calcul fractionnaire [31]. La première étincelle dans ce domaine a été déclenchée par L'Hospital en 1695 dans une lettre à Leibniz il a demandé ce qui serait le résultat d'une demi-différenciation d'une fonction. Leibniz dans une lettre ouverte datée du 30 septembre 1695 a répondu : "Cela conduit à un paradoxe, à partir duquel le premier jour des conséquences utiles seront tirées". Ce n'est qu'au début du XIXe siècle que la généralisation de la différenciation à des ordres réels a été formalisée avec le travail de Liouville et Riemann (Liouville 1832, Riemann 1876, Letnikov, 1868). Cette généralisation est mentionnée dans la littérature comme « calcul fractionnaire » [8].

Le calcul fractionnaire est considéré comme un ancien et nouveau sujet également. Actuellement les principaux sujets de recherche dans le calcul ordinaire (ordre entier) sont étendus au calcul fractionnaire comme par exemple l'extension des équations différentielles ordinaires aux équations différentielles d'ordre fractionnaire, c'est-à-dire une généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, non entier [32,25]. De telles équations peuvent fournir des modèles linéaires et des fonctions de transfert pour certains systèmes physiques à dimension infinie [33]. Depuis les premières contributions théoriques sur les dérivés fractionnaires et les intégrales réalisées par Euler, Liouville et Abel, la commande des systèmes ordres fractionnés a attiré l'attention de nombreux chercheurs [3,34], et stimulé par des applications dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie.

## 1.2. Définitions fondamentales

La théorie du dérivé d'ordre fractionnel a été développée principalement au 19<sup>ème</sup> siècle. Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque. Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions [35,36]. Trois définitions importantes et largement appliquées et les plus rencontrées sont la définition de Riemann-Liouville, la définition de Caputo et la définition de Grünwald-Letnikov qui est peut-être la plus connue en raison de sa plus grande aptitude à la réalisation d'un algorithme d'une commande discrète[14].

### 1.2.1. Définition de Riemann-Liouville

**Définition 1.** Soient  $\mathfrak{R}$  et  $\mathbb{C}$  les anneaux des nombres réels et complexes respectivement,  $\Re(\cdot)$  représente la partie réelle d'un nombre complexe. Soient  $m \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(m) > 0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $f(\cdot)$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ .

L'intégrale d'ordre  $\mu$  de  $f(t)$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par [3,14,37].

$${}_{RL}I_{t_0}^{\mu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\mu-1} f(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Avec  $t \geq t_0$  et  $\Gamma(\cdot)$  la fonction gamma d'Euler définie par ;  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

**Définition 2.** Soient  $\mathfrak{R}$  et  $\mathbb{C}$  les anneaux des nombres réels et complexes respectivement,  $\Re(\cdot)$  Symbolise la partie réelle d'un nombre complexe. Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(m) > 0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $f(\cdot)$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ , La dérivée d'ordre fractionnaire  $\lambda$  de la fonction de  $f(\cdot)$  borne inférieure  $t_0$  est définie par[3,14,37];

$${}_{RL}D_{t_0}^{\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\lambda-1} f(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < \lambda < n$ .

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie comme suit :

$${}_{RL}D_{t_0}^{\lambda} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ {}_{RL}D_{t_0}^{n-\lambda} f(t) \right\} \quad (1.3)$$

### 1.2.2. Définition de Grünwald-Letnikov

L'une des définitions la plus rencontrée dans la littérature de la dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $\mu$  avec  $\mu > 0$  est appelée définition de Grünwald-Letnikov qui est donnée par [37] :

$$D_t^{\mu} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\mu} \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{\mu}{j} f(t-j.h) \quad (1.4)$$

Où  $h$  est la période d'échantillonnage, et la notation  $\binom{\mu}{j}$  désigne le binôme de Newton généralisé

à des ordres réels avec :

$$\begin{cases} \omega_0^{(\mu)} = \binom{\mu}{0} = 1 \\ \omega_j^{(\mu)} = \binom{\mu}{j} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-j+1)}{j!} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\mu-j+1)} \end{cases} \quad (1.5)$$

La définition de Grünwald-Leitnikov de l'intégrale d'ordre fractionnaire est donnée par l'expression formule suivante :

$$I_t^\lambda f(t) = D_t^{-\lambda} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\lambda \sum_{j=0}^N (-1) \binom{-\lambda}{j} f(t - j.h) \quad (1.6)$$

Pour le calcul numérique des intégrales et des dérivés d'ordre fractionnaire, nous pouvons utiliser les définitions et les équations de Grünwald-Leitnikov (G-L) (1.4) et (1.5) respectivement. Ainsi, pour une fonction causale  $f(t)$  et pour  $t = k.h$ , la dérivée d'ordre fractionnaire est formulée comme suit [14,37]:

$$D_t^\mu f(kh) = \frac{d^\mu}{dt^\mu} f(t) \cong h^{-\mu} \sum_{j=0}^N \omega_j^{(\mu)} f(kh - jh) \quad (1.7)$$

les coefficients  $\omega_j^{(\mu)}$  peuvent être calculés en utilisant la formule récursive suivante [1,37] :

$$\omega_0^{(\mu)} = 1; \quad \omega_j^{(\mu)} = \left[ 1 - \frac{1+\mu}{j} \right] \omega_{j-1}^{(\mu)} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, k. \quad (1.8)$$

**Remarque 1.1.** Pour une large gamme de fonctions qui apparaissent dans des applications physiques et d'ingénierie réelles, les définitions de Riemann-Liouville et Grünwald-Letnikov sont équivalentes.

**Remarque 1.2.** Les expressions permettent de déterminer numériquement par discrétisation la Dérivation /Intégration non entière d'une fonction  $f(-)$  causale.

### 1.2.3. Définition de Caputo

La définition de la dérivée d'ordre fractionnaire donnée par Caputo peut être écrite sous la forme[37,38] :

$${}_c D_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{(n-m+1)}} d\tau \quad (1.9)$$

Avec  $n$  un entier positif vérifiant l'inégalité  $n-1 < m < n$ .

### 1.3. Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire sont:

1. Si  $f(t)$  est une fonction analytique de  $t$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\alpha f(t)$  est une fonction analytique de  $t$  et  $\alpha$ .

2. Pour  $\alpha = n$ , si  $n$  est un entier, l'opération  $D^\alpha f(t)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ .
3. Pour  $\alpha = 0$  l'opération  $D^\alpha f(t)$  est l'opérateur identité :  $D^0 f(t) = f(t)$
4. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires :  

$$D^\alpha a.f(t) + D^\alpha b.g(t) = a.D^\alpha f(t) + b.D^\alpha g(t) = D^\alpha [a.f(t) + b.g(t)]$$
5. La loi additive (propriété du semi-groupe)  

$$D^\alpha [D^\beta f(t)] = D^\beta [D^\alpha f(t)] = D^{\alpha+\beta} f(t)$$
est valable sous certaines contraintes sur la fonction  $f(t)$  (voir [37] pour d'autres propriétés).

**1.4.Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre non entier**

La méthode de la transformée de Laplace est un outil puissant dans le domaine fréquentiel est souvent utilisée comme étant un outil pour la résolution des problèmes posés en ingénierie pour l'analyse du système et la synthèse du contrôleur. Dans ce paragraphe, nous donnerons les transformées des opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre fractionnaire définis précédemment.

Par définition La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  est donnée par la relation suivante

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t).e^{-st} dt \tag{1.10}$$

Dans les sections suivantes concernant les transformées de Laplace des dérivées fractionnaires, nous considérons que la borne inférieure  $t_0 = 0$ .

**1.4.1. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire**

- **La dérivée au sens de Riemann-Liouville**

$$L\left\{ {}^{RL}D_t^m f(t); s \right\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}^{RL}D_0^{m-1-k} f(t) \right]_{t=0} \text{ Avec } n-1 \leq m < n \tag{1.11}$$

Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des conditions initiales c.à.d. les valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire a l'instant  $t = 0$ . [3,37].

- **La dérivée au sens de Caputo**

$$L\left\{ {}_0^C D_t^m f(t); s \right\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0) \quad \text{Avec } n-1 \leq m < n \quad (1.12)$$

- **La dérivée au sens de Grünwald-Letnikov**

$$L\left\{ {}_0^{GL} D_t^m f(t); s \right\} = s^m F(s) \quad \text{Avec } n-1 \leq m < n \quad (1.13)$$

Pour les trois définitions, la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire, dans des conditions initiales nulles pour l'ordre  $m$  est donnée par :

$$L\left\{ {}_0 D_t^m f(t) \right\} = s^m F(s) \quad (1.14)$$

### 1.5. Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Comme dans le cas des systèmes d'ordre entier les systèmes fractionnaires dynamiques temps continu peuvent être modélisés par des équations différentielles comprenant des dérivées d'ordre fractionnaire.

Un système d'ordre fractionnaire linéaire général mono-variable temps invariant d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  est décrit par l'équation suivante :

$$a_n \cdot D_t^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \cdot D_t^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 \cdot D_t^{\alpha_0} y(t) = b_m \cdot D_t^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \cdot D_t^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \cdot D_t^{\beta_0} u(t) \quad (1.15)$$

Avec  $a_i \in R, i = 1 \dots n$  et  $b_j \in R, j = 1 \dots m$

En appliquant l'opérateur de Laplace à l'équation différentielle (1.15) le système ordre fractionnaire général peut être exprimé dans une forme de la fonction de transfert suivante [37,38,39] :

$$F(s) = \frac{b_0 s^{\beta_0} + b_1 s^{\beta_1} + b_2 s^{\beta_2} + b_3 s^{\beta_3} + \dots + b_n s^{\beta_n}}{a_0 s^{\alpha_0} + a_1 s^{\alpha_1} + a_2 s^{\alpha_2} + a_3 s^{\alpha_3} + \dots + a_m s^{\alpha_m}} \quad (1.16)$$

Ou  $(a_m, b_n, \alpha_m, \beta_n) \in L(R)^4$  et  $(m, n) \in L(N)^2$  et  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0 > 0$  et  $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0 > 0$ .

Si tous les ordres de dérivation sont des multiples entiers de l'ordre de base  $\alpha$ , c'est-à-dire,  $\alpha_k, \beta_k = k\alpha, \alpha \in R^+$ , le système est dit d'ordre commensurable et l'équation précédente (1.15) devient [38,39]:

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot D_t^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot D_t^{k\alpha} u(t) \quad (1.17)$$

Si on pose dans (1.15)  $\alpha = 1/q$  le système prend la forme d'un système d'ordre rationnel.

Supposant que les conditions initiales sont nulles, en appliquant la transformée de Laplace sur équation (1.15), nous obtenons une fonction de transfert avec des puissances d'ordre non entier de la variable complexe de Laplace "s". Mais dans ce cas le système fractionnaire est un système d'ordre commensurable et la fonction de transfert est donnée par l'équation [37-40]:

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1s^\alpha + b_2s^{2\alpha} + b_3s^{3\alpha} + \dots + b_ms^{m\alpha}}{a_0 + a_1s^\alpha + a_2s^{2\alpha} + a_3s^{3\alpha} + \dots + a_ns^{n\alpha}} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} \tag{1.18}$$

Grace au changement de variable  $\lambda = s^\alpha$  dans l'équation (16) le modèle fractionnaire peut être remplacé par un modèle pseudo-rationnel  $H(\lambda)$ , de la variable  $\lambda$ .

$$F(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k} \tag{1.19}$$

Pour implémenter les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire dans des études par simulation ou dans la pratique, l'une des façons est de les approximer avec des fonctions de transfert rationnelles.

**1.5.1. Méthodes d'approximation d'une Fonction de transfert ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles**

À cause de sa représentation irrationnelle, l'utilisation des méthodes ordinaires pour la simulation et l'identification d'un système d'ordre fractionnaire est dans la plus part des cas très compliquée. Les méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles présentent une solution, qui consiste à approximer le dérivateur ou l'intégrateur d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle réalisable physiquement, dans une bande de fréquence choisie. De nombreuses méthodes d'approximation ont été développées dans la littérature du calcul fractionnaire : la méthode de Charef [41], la méthode d'Oustaloup [10], la méthode de Matsuda [42], la méthode de Carlson [43]...

Les méthodes de Charef et d'Oustaloup sont les plus utilisées et les plus populaires dans la littérature. La méthode de Charef dite méthode de la fonction de singularité est plus facile et plus pratique pour les approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire[36,37]. Les méthodes signalées auparavant sont détaillées ci-dessous.

### 1.5.1.1. Méthode de Carlson

La méthode proposée par Carlson [43] tirée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation d'une manière récursive la racine d'ordre  $\alpha$ . Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante[43] :

Si  $G(s)$  est une fonction de transfert rationnel et  $H(s)$  soit une fonction de transfert d'ordre fractionnaire telle que

$$(H(s))^{1/\alpha} - G(s) = 0 \Rightarrow H(s) = [G(s)]^q \quad (1.20)$$

En définissant  $q = m / p$  l'ordre fractionnaire de la fonction de transfert. À chaque itération, partant de la valeur initiale de la fonction de transfert  $H_0(s) = 1$  une fonction rationnelle approximée peut être exprimée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(p-m)(H_{i-1}(s))^2 + (p+m)G(s)}{(p+m)(H_{i-1}(s))^2 + (p-m)G(s)} \quad (1.21.a)$$

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{G(s) + \alpha [H_{i-1}(s)]^2}{\alpha G(s) + [H_{i-1}(s)]^2} \quad (1.21.b)$$

Avec  $\alpha = \frac{1-q}{1+q}$  et  $q = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$

Par conséquent, pour le cas le plus simple, c'est-à-dire  $H(s) = s^q$ , il agira d'un différentiateur pour  $\alpha < 0$  c.-à-d.  $q > 0$  . et il agira comme un intégrateur pour  $\alpha > 0$  c.-à-d.  $q < 0$  .

#### 1.5.1.1.1. Méthode de Matsuda

La méthode proposée par Matsuda est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $T(s) = s^\alpha$  par une fonction rationnelle identifiée en utilisant son gain. Le gain est calculé à l'aide des  $M$  points de fréquences dans une gamme  $[\omega_b, \omega_h]$ , dans lequel l'approximation est faite, Pour un ensemble de points choisis  $\omega_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, M$  l'approximation prend la forme suivante [44][37]:

$$H(s) = a_0 + \frac{s - \omega_0}{a_1 + \frac{s - \omega_1}{a_2 + \frac{s - \omega_2}{a_3 + \dots}}} \quad (1.22)$$

Où :  $a_i = f_i(\omega_i)$ ,  $f_0(\omega) = |H(j\omega)|$ ,  $f_{i+1}(s) = \frac{s - \omega_i}{f_i(s) - a_i}$  pour  $i = 1, 2, \dots, M$  (1.23)

Le modèle approximé est obtenu en remplaçant chaque opérateur fractionnaire de la fonction de transfert irrationnel explicite par son approximation.

### 1.5.1.2. Méthode d'Oustaloup

La méthode d'oustaloup basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s) = s^\gamma$ ,  $\alpha \in R$ , par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et de pôles d'ordre réels négatifs (pour assurer un minimum de comportement de phase), répartis dans une bande de fréquence limitée. Cette approximation est donnée par [36,37,45]:

$$s^\gamma = C \prod_{k=1}^{k=N} \frac{s + \omega_k'}{s + \omega_k} \quad (1.24)$$

$$\omega_k' = \omega_b \omega_u^{(2k-1-\gamma)/N}$$

$$\omega_k = \omega_b \omega_u^{(2k-1+\gamma)/N} \quad (1.25)$$

$$C = \omega_h^\gamma$$

Où  $\omega_h$  et  $\omega_b$  sont la haute et basse fréquence respectivement de la bande de fréquence d'approximation.

### 1.5.1.3. Méthode de Charef : fonction de singularité

La méthode d'approximation présentée dans cette section est appelée "Méthode de la fonction de singularité" proposée par Charef [41]. Cette méthode prend différentes formes selon la nature de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire approximée soit du premier ou du second ordre.

- **Système du premier ordre fractionnaire**

soit le modèle d'un système linéaire d'ordre fractionnaire du premier ordre :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s / p_T)^\beta} \quad (1.26)$$

où  $p_T$  est le pôle du système d'ordre fractionnaire et  $\beta$  est l'ordre fractionnaire du système. On peut réécrire la fonction (1.26) par la formule récursive suivante [3,37,44] :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s / p_T)^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{p_i})} = \frac{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (1.27)$$

Où  $(N+1)$  est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système.

$$N = \text{partie entière de} \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_1}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (1.28)$$

$\omega_{\max}$  est la bande de fréquence d'approximation.

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$\begin{aligned} p_i &= (ab)^i p_0 \quad i = 1, 2, \dots, N \\ z_i &= (ab)^i a p_0 \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Avec

$$p_0 = p_T \cdot 10^{\frac{\epsilon_p}{20\beta}}, a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\beta)}}, b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\beta}}, \beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (1.30)$$

$\epsilon_p$  est l'erreur tolérée en dB.

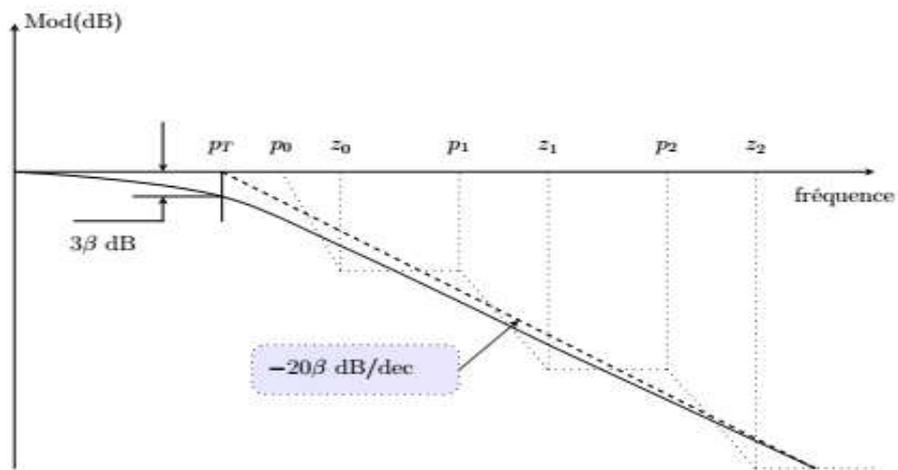


Figure 1.1 Diagramme de Bode de  $G(s) = \frac{1}{(1+s/p_T)^\beta}$

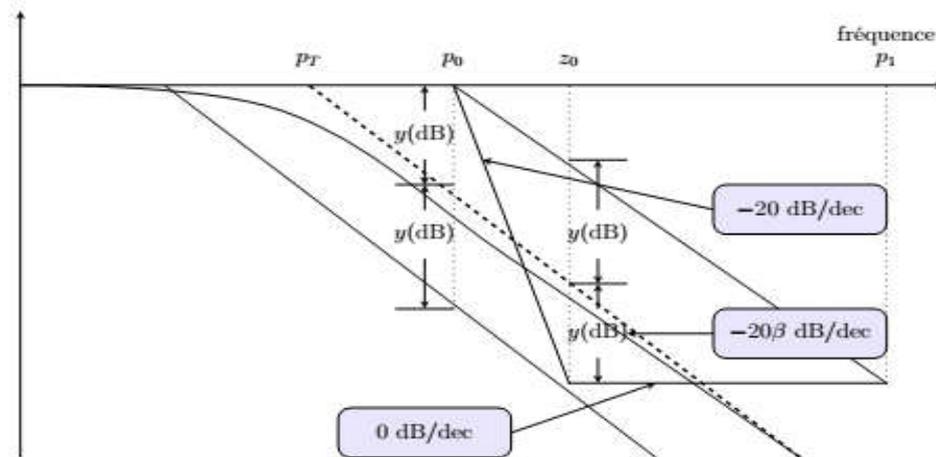
La figure (1.1) présente le diagramme de Bode du PPF de l'équation (1.26) avec une pente de  $-20\beta \text{ dB/dec}$  et son approximation par des lignes droites en zig-zag avec des pentes individuelles de  $-20 \text{ dB/dec}$  et  $0 \text{ dB/dec}$ .

- **Système du second ordre fractionnaire**

Soit maintenant un système de second ordre décrit par l'équation :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\beta} \quad (1.31)$$

Avec  $\beta$  un nombre réel positif tel que  $0 < \beta < 1$ .



**Figure 1.2** Comment choisir les singularités pour l'approximation d'un écart constant entre la ligne à  $-20\text{ dB/dec}$  et les lignes droites en zig-zag.

On peut distinguer deux cas :

- **Cas où  $0 < \beta < 0.5$  :**

L'équation (1.31) peut être exprimée comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right) \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha \frac{s}{\omega_n} + 1\right)} \quad (1.32)$$

Avec  $\alpha = \xi^\beta$  et  $\eta = 1 - 2\beta$ , ce qui peut aussi être approximé par la fonction suivante,

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha \frac{s}{\omega_n} + 1\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.33)$$

Les singularités (pôles  $p_i$  et zéros  $z_i$ ) sont données par les formules:

$$\begin{aligned} p_i &= (ab)^{i-1} a z_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \\ z_i &= (ab)^{i-1} z_1 \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\text{Avec, } z_1 = \omega_n \sqrt{b}, a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\eta)}}, b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\eta}}, \eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (1.35)$$

$\epsilon_p$  est l'erreur tolérée en dB.

L'ordre d'approximation  $N$  est calculé en fixant la bande de fréquences  $\omega_{\max}$  telle que :

$p_{N-1} < \omega_{\max} < p_N$ , ce qui mène à la valeur de  $N$  par la relation suivante :

$$N = \text{partie entière de} \left[ \frac{\log(\frac{\omega_{\max}}{p_1})}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (1.36)$$

La fonction de transfert approximée en (1.33) peut alors être écrite sous la forme :

$$G_e(s) = \frac{b_{m0}s^N + b_{m1}s^{N-1} + b_{m2}s^{N-2} + b_{m3}s^{N-3} + \dots + b_{mN}}{s^{N+2} + a_{m1}s^{N+1} + a_{m2}s^N + a_{m3}s^{N-1} + \dots + a_{mN+2}} \quad (1.37)$$

Les coefficients  $a_{mi}$  et  $b_{mi}$  sont calculés à partir des singularités des pôles  $p_i$  et des zéros  $z_i$  trouvés en (1.34) ainsi que  $\alpha$  et  $\omega_n$ .

- Cas  $0.5 < \beta < 1$  :

La fonction d'approximation est donnée comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left( \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)}{\left( \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)} \quad (1.38)$$

Où  $\alpha = \xi\beta$  et  $\eta = 2\beta - 1$ , qui développée comme précédemment avec les valeurs singulières suivantes :

$$\begin{aligned} p_i &= (ab)^{i-1} p_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \\ z_i &= (ab)^{i-1} ap_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\text{Avec, } p_1 = \omega_n \sqrt{b}, a = 10^{\frac{\varepsilon_p}{10(1-\eta)}}, b = 10^{\frac{\varepsilon_p}{10\eta}}, \eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (1.40)$$

$\varepsilon_p$  : est l'erreur tolérée en dB.

$G_e(s)$  peut alors être écrite sous la forme de la fonction paramétrique (1.37).

### 1.5.2. Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles

Ces approximations se basent essentiellement sur les travaux de Charef et al. [37,41,46] ainsi que la méthode de la fonction de singularité présentée à la section 1.5.1.4.

### 1.5.2.1. Intégration d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégral d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante[37] :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\beta} \tag{1.41}$$

Où  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $\beta$  un nombre réel positif tel que  $0 < \beta < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , l'opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H(s) = \frac{K_I}{(1 + s / \omega_c)^\beta} \tag{1.42}$$

En supposant que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$H(s) = \frac{K_I}{(s / \omega_c)^\beta} = \frac{K_I \omega_c^\beta}{s^\beta} = \frac{1}{s^\beta} \tag{1.43}$$

Avec  $K_I = \frac{1}{\omega_c^\beta}$  cet  $\omega_c$  est la fréquence de coupure de PPF qui est obtenue à partir de la basse

fréquence  $\omega_b$  :  $\omega_c = \sqrt[10]{\frac{y}{10^\beta} - 1}$  où  $\xi$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (1.41) et le PPF de l'équation (1.42) dans la bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ . Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (1.43), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de  $20\beta \text{ db} / \text{dec}$  sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente  $20\text{db} / \text{dec}$  et  $0\text{db} / \text{dec}$  correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan  $s$  tel que  $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$  ; d'où l'approximation suivante :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{(1 + s / \omega_c)^\beta} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \tag{1.44}$$

Où les  $p_i$  et les  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation. En utilisant la méthode de la fonction de singularité, les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par le choix d'une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ . Pour déterminer le nombre  $N$ , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $\omega_{\max}$ " cette bande, telle que  $\omega_{\max}$  soit égal à 100 fois  $\omega_b$ , son expression est donnée par (1.31) :

$$N = \text{partie entière de} \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (1.45)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} p_i &= (ab)^i p_0 \quad i = 0, 1, \dots, N \\ z_i &= (ab)^i ap_0 \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Où  $a$  et  $b$  sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de  $y$  et  $\beta$  sont données par :

$$p_0 = w_c \sqrt{b}, \quad a = 10^{\frac{y}{10(1-\beta)}}, \quad b = 10^{\frac{y}{10\beta}}, \quad z_0 = ap_0 \quad (1.47)$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, on doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_I(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}} \quad (1.48)$$

Où les coefficients  $h_i$  sont les résidus qui sont déterminés par :

$$h_i(s) = K_I \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \left(1 + \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j ap_0}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 + \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0}\right)} = K_I \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \left(1 + \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 + (ab)^{(i-j)}\right)} \quad (1.49)$$

**1.5.2.2. Dérivée d'ordre fractionnaire**

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$F_D(s) = s^\alpha \tag{1.50}$$

où  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $\alpha$  un nombre réel positif tel que  $0 < \alpha < 1$ . Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit :

$$F_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \tag{1.51}$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$F_D(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha = \frac{K_D}{\omega_c^\alpha} s^\alpha = s^\alpha \tag{1.52}$$

Avec  $K_D = \omega_c^\alpha$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse

fréquence  $\omega_b$  :  $\omega_c = \sqrt{10^{\frac{\xi}{10\alpha}-1}}$  où  $\xi$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (1.50) et le ZPF de l'équation (1.51) dans la bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ . Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (49), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de  $20\alpha \text{ db / dec}$  sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente  $20\text{db / dec}$  et  $0\text{db / dec}$  correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan  $s$  tel que  $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ ; d'où l'approximation suivante :

$$F_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \tag{1.53}$$

En utilisant la méthode de la fonction de singularité, les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par le choix de l'erreur d'approximation  $y$  en  $dB$  et une bande de fréquences d'approximation  $\omega_{\max}$ .

Pour déterminer le nombre  $N$ , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $\omega_{\max}$ " cette bande, tel que  $\omega_{\max}$  soit pris égal à 100 fois  $\omega_h$  son expression est donnée par :

$$N = \text{partie entière de} \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (1.54)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} z_i &= (ab)^i z_0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \\ p_i &= (ab)^i a z_0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1.55)$$

Avec  $z_0 = w_c \sqrt{b}$  et  $p_0 = a z_0$

La fonction approximée dans une bande de fréquence donnée sera donc la suivante :

$$F_D(s) = s^\alpha = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0}\right)} \quad (1.56)$$

on peut développer la fonction  $F(s)$  en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{F_D(s)}{s} = \frac{1}{s} K_D = \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0}\right)} \quad (1.57)$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$F_D(s) = F_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.58)$$

$$\text{Avec } F_0 = K_D \text{ et } g_i = \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(-(ab)^i a z_0) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (1.59)$$

## 1.6. Stabilité des systèmes d'ordres fractionnaires

### 1.6.1. Stabilité des systèmes linéaires d'ordres fractionnaires

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.60)$$

où l'opérateur  $D^\alpha x(t)$  signifie que tous les états sont des dérivées d'ordre  $\alpha$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie et  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices de dimensions appropriées.

Soient  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) les valeurs propres de la matrice d'évolution  $A$  du système fractionnaire de l'équation (1.60). On dit que le système fractionnaire de l'équation (1.60) est stable (dans le sens où des entrées bornées donnerons toujours des sorties bornées) si les conditions suivantes sont réalisées:

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \cdot \frac{\pi}{2} \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.61)$$

Dans le cas d'un système d'ordre fractionnaire décrit par la fonction de transfert (1.18), le système est stable (dans le sens où des entrées bornées donnerons toujours des sorties bornées) si et seulement si toutes les racines (complexes)  $r$  de son dénominateur vérifient aussi [37];

$$|\arg(r_i)| > \alpha \cdot \frac{\pi}{2} \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.62)$$

**Remarque :** La condition de stabilité des systèmes d'ordre entier est obtenue à partir de (1.61 et 1.62) si  $\alpha = 1$ .

### 1.6.2. Stabilité des systèmes non linéaires d'ordres fractionnaires

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique [36] :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t), t) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.63)$$

- **Définition :**

La solution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire (1.63) est dite Mittag-Leffler stable si :

$$\|x(t)\| \leq \left\{ mx(t_0)(t-t_0)^{-\gamma} \cdot E_{\alpha,1}(-\lambda(t-t_0)^\alpha) \right\}^b \quad (1.64)$$

Où  $0 < \alpha < 1$ ,  $\gamma \in [0, 1-\alpha]$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $m(0) = 0$  et  $m(x) \geq 0$ ,  $m(x)$  est localement lipschitzienne sur  $t \in B \subset \mathbb{R}^n$  avec  $m_0$  représente la constante de Lipschitz [36].

- **Remarque 1.4** La stabilité de Mittag-Leffler implique la stabilité asymptotique. On va maintenant énoncer un lemme qui est considéré comme une extension de la méthode directe de Lyapounov au cas d'un système d'équations fractionnaires, et qui a pour résultat la stabilité au sens de Mittag-Leffler [36].

- **Lemme 1.1.** Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système fractionnaire autonome (1.63). Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x(t), t)$  de classe  $k$  et  $\gamma_i (i=1,2,3)$  satisfaisant [47,48,49]:

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x(t), t) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (1.65)$$

$${}^c D_t^\beta V(x(t), t) \leq \gamma_3(\|x\|) \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (1.66)$$

Alors le système (1.63) est asymptotiquement stable.

Comme on peut le voir, le lemme 1.1 ne peut pas être utilisé lorsque le dérivé fractionnaire de la fonction de Lyapunov est seulement semi-définie négative.

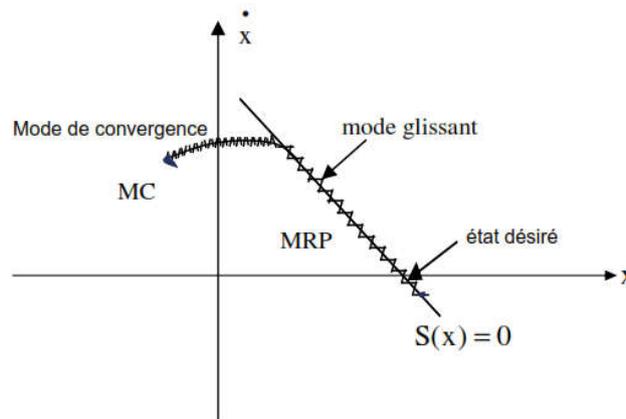
## 1.7. Techniques de commandes

### 1.7.1. Commande par mode glissant

La commande par mode glissant (SMC) est une commande à structure variable pouvant changer sa valeur suivant une logique bien spécifique. La théorie des systèmes à structure variable fait l'objet de multiples études depuis une cinquantaine d'années. Les premiers travaux sur ce type de systèmes sont ceux d'Emel'yanov [50] et Tzypkin [51] dans l'ancienne URSS. Ces recherches ont connu un nouvel essor et elle remonte aux années 1970 et à la fin des années soixante-dix Utkin introduit la théorie des modes glissants [52]. Cette technique de commande et d'observation a reçu un intérêt sans cesse croissant du fait : \* de leur relative simplicité d'élaboration ; \* de leur

robustesse vis-à-vis de certaines incertitudes paramétriques et perturbations exogènes ; \* de la large gamme de leurs applications dans les différents domaines tels que l'électrotechnique, la robotique ou la mécanique ... etc. Le principe de cette technique est de contraindre le système à atteindre et ensuite rester sur une surface donnée (représentant un ensemble de relations, statiques, entre les variables d'état). La surface considérée est alors désignée comme étant la surface de glissement ou de commutation. Le comportement dynamique résultant, appelé régime glissant idéal, est complètement déterminé par les paramètres et les équations définissant la surface. L'avantage d'obtenir un tel comportement est double : d'un côté, on a une réduction de l'ordre du système, et de l'autre, le régime glissant est insensible aux perturbations intervenant dans les mêmes directions que les entrées. La réalisation se déroule en deux temps.

- Synthétiser une surface  $S(x,t)$ , telle que toutes les trajectoires du système obéissent à un comportement désiré de poursuite, régulation et stabilité.
- Déterminer une loi de commande discontinue (commutation)  $u(t)$  qui est capable d'attirer toutes les trajectoires d'état vers la surface de glissement et les maintenir sur cette surface. C'est le mode de glissement figure (1.3).

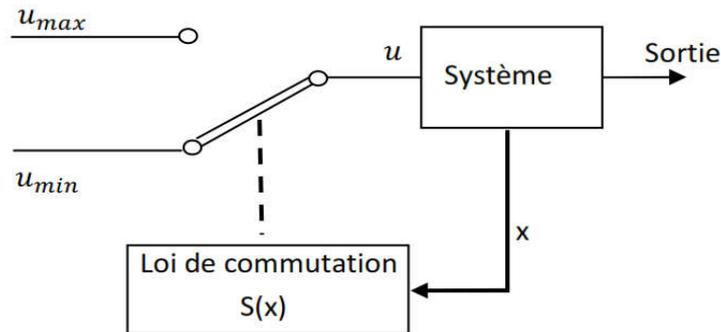


**Figure 1.3** Différents modes de trajectoire dans le plan de phase

Comme déjà mentionné, la commande par modes glissants est une commande à structure variable VSS, on peut distinguer trois configurations de base pour la synthèse des différentes commandes par mode glissant [53]. La première applique un changement sur la structure de l'organe de commande, La seconde correspond à un changement de structure par commutation d'une contre réaction d'état variable et enfin, la troisième configuration change aussi la structure au niveau de l'organe de commande mais avec ajout d'une commande dite « commande équivalente ».

**1.7.1.1. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande**

Le schéma bloc de cette commande est représenté par la figure (1.4).



**Figure 1.4** Changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande

Dans ce cas la loi de commutation est donnée par :

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{si } S(x) > 0 \\ u_{min} & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \tag{1.67}$$

Cette structure de commande correspond au fonctionnement tout ou rien «TOR». En mode de glissement (ou régime glissant), la dynamique du système est donnée par  $S(x) = 0$ .

**1.7.1.2. Structure par commutation d'une contre réaction d'état.**

La configuration de la structure par commutation d'une réaction d'état est représentée par la figure 1.5 Selon la position du commutateur, le vecteur d'état  $x$  est mis en contre-réaction d'état soit par un gain de  $-k_1$  soit par un gain de  $-k_2$ . Ceci se fait à l'aide de la loi de commutation  $S(x) = 0$  [53].

$$u(t) = \begin{cases} -k_1^T(x) & \text{si } S(x) > 0 \\ -k_2^T(x) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \tag{1.68}$$

Le schéma bloc qui représente le principe de fonctionnement est donné par la figure suivante

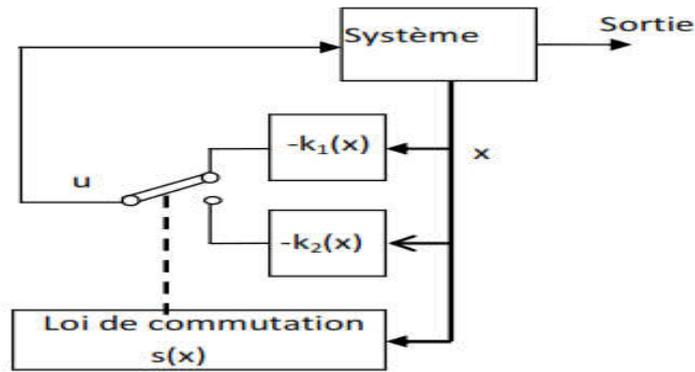


Figure 1.5 Changement de structure par commutation d'une contre-réaction d'état

**1.7.1.3. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande, avec ajout de la commande équivalente.**

Le schéma de cette structure est représenté par la figure 1.5. Cette structure de commande est simple à réaliser et a été utilisée dans beaucoup d'applications [53]. L'ajout de la commande équivalente permet de pré-positionner le système dans un état désiré stable et en plus de réduire le phénomène de chattering.

Le terme de commutation  $u_d$  assure principalement la convergence des trajectoires du système vers l'état désiré et assure son maintien. La loi de commande de cette configuration est donnée par la relation (1.62).

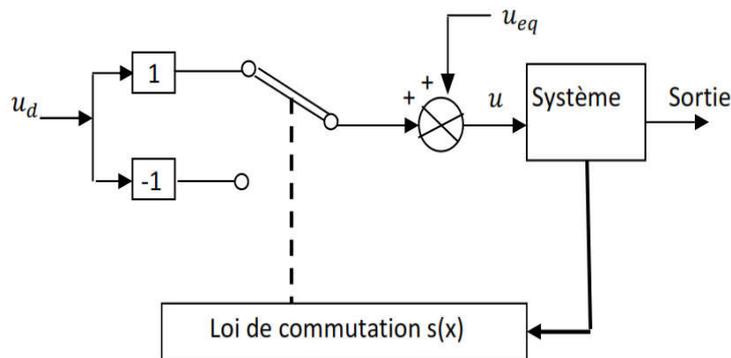


Figure 1.6 Changement de structure avec ajout de la commande équivalente

$$u(t) = \begin{cases} u_{eq} + u_d & \text{si } S(x) > 0 \\ u_{eq} - u_d & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (1.69)$$

C'est cette forme d'écriture de la loi de commande que nous avons retenue pour la suite de notre étude.

### 1.7.2. Commande adaptative

Le principe de la commande en boucle fermée consiste à maintenir une performance constante lorsqu'il y a des incertitudes dans le système ou des changements dans les points de consigne via un contrôleur de rétroaction en utilisant les mesures de la performance du système, principalement les sorties. De nombreux contrôleurs sont dotés de paramètres de contrôleurs fixes, tels que les contrôleurs conçus par le contrôle de retour d'état normal et les méthodes de contrôle  $H_\infty$ . Dans ces conditions, il faut trouver un régulateur qu'il est le pouvoir de l'adaptation devant ces variations, parmi ces régulateurs on trouve les régulateurs adaptatifs qui sont basés essentiellement sur l'identification en ligne des paramètres du procédé. Ces techniques d'estimation sont connues depuis les années soixante [54]. Elles permettent d'obtenir un modèle mathématique qui représente le plus fidèlement possible le comportement dynamique d'un processus. Donc le but fondamental de la commande adaptative est de maintenir les performances d'un système constant en présence d'incertitude ou de variation inconnue dans les paramètres du système, mais avec l'adaptation des paramètres du contrôleur. Donc, la commande adaptative fait partie d'un ensemble de techniques destinées à ajuster automatiquement les paramètres du correcteur des systèmes de commande lorsque les caractéristiques du processus et les perturbations sont inconnues ou varient dans le temps. Par principe, ce type de commande est non-linéaire puisqu'il comporte deux boucles de contre-réaction imbriquées : la boucle de correction et la boucle d'adaptation. Un certain nombre de méthodes de conception ont été développées pour la conception d'un correcteur adaptatif. Le principe des systèmes de la commande adaptative est illustré par la figure 1.7.

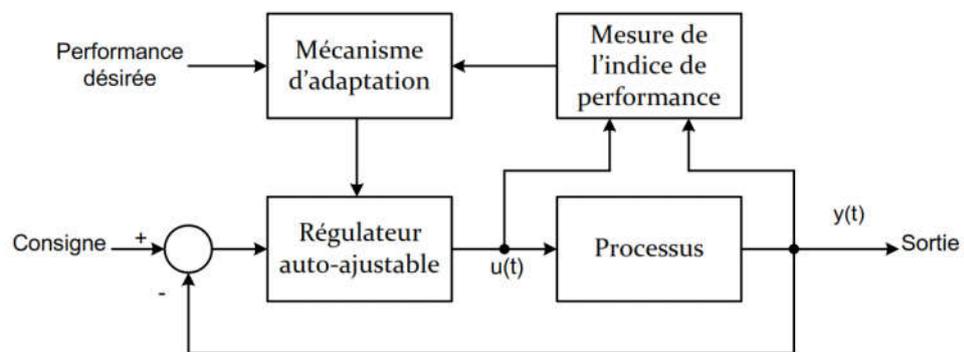


Figure 1.7 Principe des systèmes de commande adaptative

Comme en à signaler le but de commande adaptative ajuster automatiquement les paramètres du contrôleur lorsque les caractéristiques du processus et les perturbations sont inconnues ou varient dans le temps. Son utilisation demande la mesure d'un certain indice de performance qui est comparé à l'indice désiré. Suivant l'écart obtenu par cette comparaison le mécanisme d'adaptation modifie les paramètres du contrôleur ajustable afin de maintenir l'indice de performance à la valeur désirée.

Il existe essentiellement trois structures de base bien connue dans la théorie de la commande adaptative.

### 1.7.2.1. Commande adaptative a gain programme

Cette méthode suppose que les non-linéarités sont connues, car il n'existe pas de correction pour compenser une programmation incorrecte (fonctionnement en boucle ouverte). Elle a cependant l'avantage d'ajuster rapidement les paramètres du correcteur lors de changements rapides de la dynamique du processus figure 1.8.

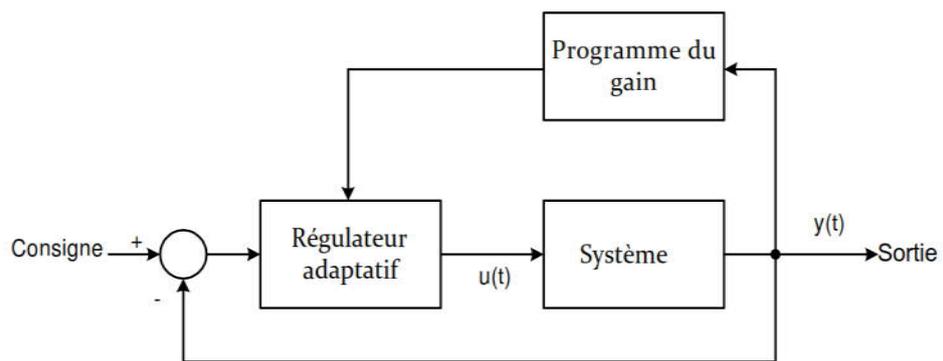


Figure 1.8 Commande adaptative à gain préprogrammé.

### 1.7.2.2. Commande adaptative a contrôleur auto-ajustable

Cette commande comporte une boucle interne, la boucle classique processus-correcteur, et une boucle externe comprenant un estimateur (identification des paramètres du processus) et un mécanisme d'adaptation qui minimise l'erreur entre la sortie du processus et son estimation comme le montre la figure 1.9.

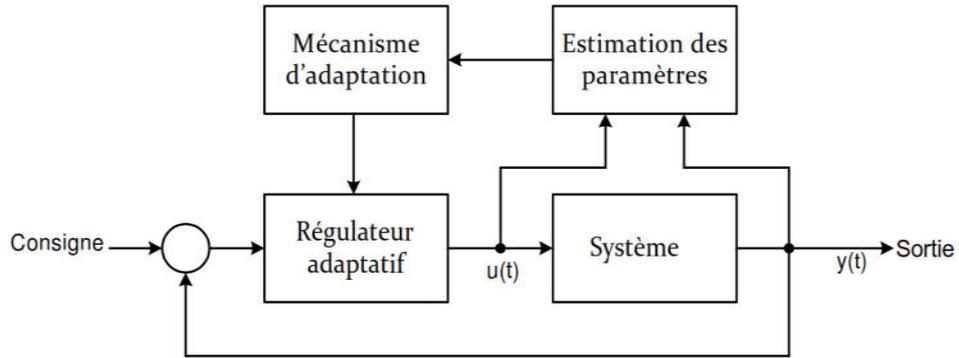


Figure 1.9 Commande adaptative à contrôleur auto-ajustable.

**1.7.2.3. Commande adaptative a modèle de référence**

La commande adaptative a modèle référence est la commande adaptative la plus rencontrée dans les publications(MRAC). La commande adaptative a modèle référence est l'une des principales approches du contrôle adaptatif. La structure de base d'un schéma MRAC est présentée dans Figure 1.10. Le modèle de référence est choisi pour générer la trajectoire souhaitée c.-à-d. défini Le comportement dynamique du processus, la sortie du système  $y(t)$ , doit suivre la sortie du modèle de référence. L'erreur de suivi  $e(t) = y_m(t) - y(t)$  représente l'écart de la sortie du système et la trajectoire désirée. Dans ces conditions les paramètres du correcteur sont ajustés par la boucle externe de façon à minimiser l'erreur de sortie processus-modèle [55.56].

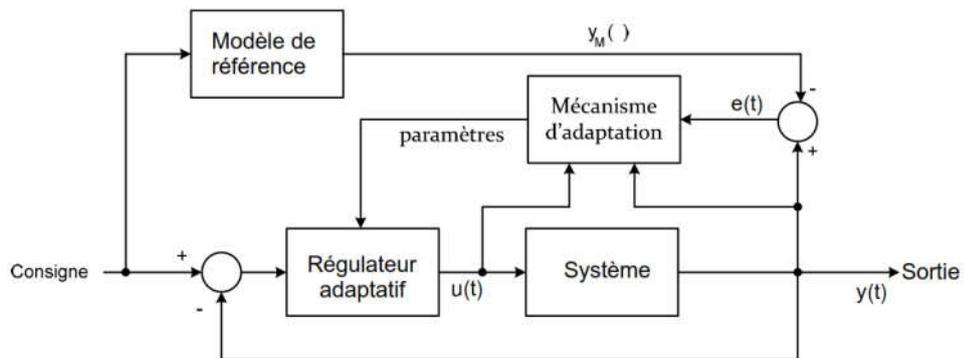


Figure 1.10 Commande adaptative à modèle de référence.

**1.7.3. Commande par logique floue**

Les bases théoriques de la logique floue ont été formulées en 1965 par le professeur Lotfi A. Zadeh, de l'Université de Berkeley en Californie [57]. Il a introduit la notion de sous-ensemble flou pour fournir un moyen de représentation et de manipulation des connaissances imparfaitement décrites, vagues ou imprécises. A cette époque, la théorie de la logique floue n'a pas été prise au sérieux

excepté par quelques experts. Dès 1975, Mamdani et Assilian publient les premiers résultats permettant une exploitation de cette théorie dans la commande des systèmes [58]. En utilisant une structure de contrôleur relativement simple, ils ont obtenu de meilleurs résultats lors de la commande de certains processus que ceux fournis par un régulateur standard de type PID. Peu de temps après, en 1977, le danois Ostergaard [59] a appliqué la logique floue à la commande de tubes broyeurs pour la fabrication de ciment. A cette époque, la plupart des études concernant les systèmes de régulation exploitant la logique floue ont été réalisées en Europe [60,61]. A partir de 1985 environ, ce sont les Japonais [62,63,64] qui commencent à utiliser largement la logique floue dans des produits industriels et de consommation pour résoudre des problèmes de réglage et de commande. Aujourd'hui, les applications des systèmes flous sont très nombreuses outre la commande, ils sont largement utilisés pour la modélisation, le diagnostic et la reconnaissance de formes ...etc. nous présentons dans ce qui suit brièvement quelques notions de base du système floue.

### 1.7.3.1. Structure de base d'un système flou

De façon générale, un système de commande a pour objectif de piloter l'entrée d'un système afin d'obtenir un fonctionnement correct de ce dernier. Lorsqu'on dispose d'un modèle plus ou moins précis du système à commander, on peut utiliser un contrôleur de structure standard, fixe ou adaptatif, dont les paramètres seront évalués à partir du modèle. Malheureusement, lorsque le système est difficilement modélisable, la conception du contrôleur peut s'avérer très complexe, sinon impossible. En se basant sur son expérience, l'opérateur humain peut exprimer des stratégies de commande de façon linguistique, sans prendre en compte le modèle du processus. En utilisant la logique floue, cette expertise peut être formalisée sous forme de règles "Si-Alors", permettant de définir une relation entre l'entrée et la sortie du processus de la forme suivante,

$$R^l : \text{ Si } x_1 \text{ est } F_1^l \text{ ET Si } x_2 \text{ est } F_2^l \text{ ET } \dots \text{ ET } x_n \text{ est } F_n^l \text{ Alors } y_l \text{ est } f_l(x) \quad \text{Ou } l=1 \dots N$$

Ou  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  sont les entrées des ensembles flous respectivement.  $N$  est le nombre des règles floues.  $(F_1^l, F_2^l, \dots, F_n^l)$  sont les entrées des ensembles flous et  $\theta = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  est le vecteur des facteurs ajustables de la partie conséquence des règles floues.  $y_l$  est la sortie du système flou elle est linguistique dans les cas des systèmes de mamdani et fonctionnelle ou numérique dans les cas des systèmes flous Takagi-Sugeno. Dans notre étude on s'intéresse à la deuxième famille du système flou.

En résumé, un contrôleur flou comporte les éléments suivants :

- Un sous-système d'interface avec le flou, composé en général d'un ensemble de variables linguistiques.
- Une base de connaissances « base de données » et « base de règles linguistiques de commande ».
- Un sous-système réalisant un raisonnement en utilisant des méthodes issues de la logique floue.
- Un sous-système d'interface avec le non flou, qui fournit la ou les commandes envoyées au système.

Afin de simplifier la mise en œuvre des contrôleurs flous et de réduire le temps de calcul, on utilise généralement le singleton pour la fuzzyfication, le somme-prod comme méthode d'inférence et la moyenne des centres pour la défuzzyfication [65,66]. Dans ce cas, la sortie du système flou est donnée par :

$$f(x) = \sum_{j=1}^N y_j \cdot \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i)}{\sum_{j=1}^N \left( \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i) \right)} = \theta^T \xi(x) \quad (1.70)$$

Avec  $\xi(x) = [\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_N(x)]^T$

### 1.7.3.2. Approximateur universel

Plusieurs techniques utilisant le principe de la boîte noire ont été développées dans la littérature pour la modélisation des systèmes [67,68]. Une des techniques consiste à utiliser des modèles linéaires de type auto-régressif (AR) ou auto-régressif avec entrée exogène (ARX). Cependant, ce type de structure ne permet pas d'obtenir un modèle optimal [69,70]. Les réseaux de neurones, étant non linéaires par nature, ont également été utilisés pour modéliser des processus non linéaires [71,82,73,74]. Il est donc intéressant d'utiliser le raisonnement flou pour approximer des processus inconnus ou incertains. Plusieurs travaux ont été développés dans ce sens [75,76], et l'énoncé suivant du théorème de l'approximateur universel a été l'un de ces aboutissements,

- **Théorème 1.2.** Pour toute fonction réelle  $f(x)$  continue sur un compact  $U \subset \mathfrak{R}$  donné, et pour toute constante  $\varepsilon \geq 0$ , il existe un système flou  $\hat{f}(x)$  sous la forme (1.63) tel que [76]:

$$\sup_{x \in U} |\hat{f}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (1.71)$$

Dans tous les chapitres de cette thèse, nous supposons que la structure du système flou et les fonctions floues de base sont convenablement spécifiées à priori par l'utilisateur.

### 1.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté d'une manière synthétique et généralisée, les éléments de base sur la théorie du calcul fractionnaire ainsi que leurs représentations et leurs propriétés. Nous avons aussi présenté les méthodes d'approximations des opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire fondamental par des fonctions rationnelles. La théorie présentée dans ce chapitre sera utilisée ultérieurement dans les suivants chapitres.

Nous avons présenté également dans la deuxième partie de ce chapitre les différentes méthodes de commande utilisées dans cette thèse.

# CHAPITRE 2

---

---

## Méthodes d'optimisations

## 2. Méthodes d'optimisations

### 2.1. Introduction

L'optimisation se réfère au processus de recherche de la meilleure solution possible pour un problème particulier. Les méthodes d'optimisation mathématique sont principalement déterministes qui souffrent d'un problème majeur : le piège d'optima local. Certains d'entre eux, comme l'algorithme basé sur le gradient nécessitent également une dérivation de l'espace de recherche. Cela les rend très inefficaces pour résoudre des problèmes réels.

À cause que la complexité augmente des problèmes posés et au cours des dernières décennies, la nécessité de nouvelles techniques d'optimisation devient plus évidente qu'auparavant. Optimisation mathématique les techniques étaient les seuls outils pour optimiser les problèmes avant la proposition de techniques d'optimisation heuristique. Les phénomènes biologiques ou les phénomènes de la nature est la source d'inspiration de nombreux algorithmes d'optimisations, ces algorithmes faisant une partie de l'intelligence artificielle.

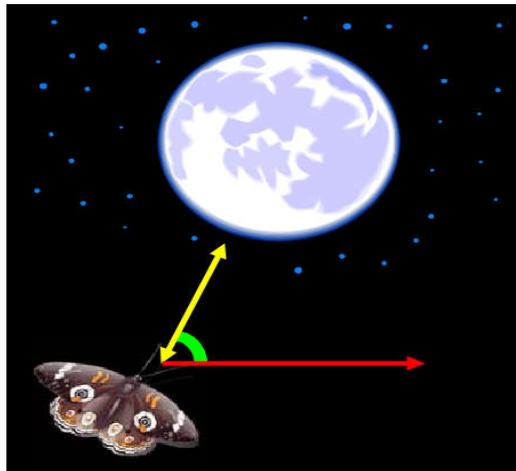
L'algorithme du recuit simulé s'inspire de la thermodynamique, les réseaux de neurones artificiels du cerveau humain...etc. Les algorithmes heuristiques ont proposé pour atténuer les inconvénients susmentionnés des algorithmes déterministes. Dans ce chapitre on va proposer trois méthodes d'optimisations, l'une des méthodes est récemment développée par [77] et l'autre méthode est ancienne proposée par Storn [78]. La troisième méthode basée sur le mouvement des essaims dans la nature, C'est le PSO.

### 2.2. Moth-Flame Optimization (MFO) Algorithm

#### 2.2.1. Inspiration

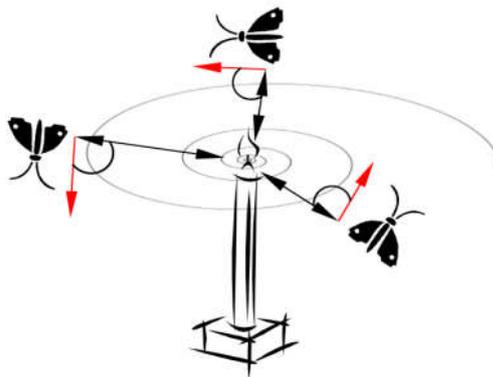
Les mites sont des insectes raffinés, très semblables à ceux de la famille des papillons. En effet, il y a plus de 160 000 différentes espèces de cet insecte dans la nature. Le fait le plus intéressant sur les mites est leurs méthodes de navigation spéciales dans la nuit. Ils volent dans la nuit en utilisant la lumière de la lune. Le mécanisme utilisé dans leur vole est appelé orientation transversale pour la navigation. Dans ce procédé, une mite vole en maintenant un angle fixe par rapport à la Lune, ce mécanisme est très efficace pour parcourir de longues distances en ligne droite [77].

La figure 2.1 montre un modèle conceptuel d'orientation transversale. Comme la lune est loin, ce mécanisme garantit le vol en ligne droite [77].



**Figure 2.1** Orientation transversale

Malgré l'efficacité de l'orientation transversale, nous observons généralement que les mites roulent en spirale autour de la lumière. En effet les mites sont trompées par les lumières artificielles et montrent de tels comportements. Ceci est dû à l'inefficacité de l'orientation transversale, dans laquelle il ne sert qu' à déplacer en ligne droite lorsque la source lumineuse est très éloignée. Lorsque les mites voient une lumière artificielle, elles essaient de maintenir un angle similaire avec cette lumière pour voler en ligne droite. Comme une telle lumière est extrêmement étroite par rapport à la lune, alors maintenir un angle similaire à la source lumineuse provoque un chemin de mouche spirale mortel pour les mites. Un modèle conceptuel de ce comportement est illustré à la figure 2.2.



**Figure 2.2** Trajectoire du vol spirale autour de sources lumineuses proches

On peut observer sur la figure 2.2 que la mite converge vers la lumière. Nous modélisons mathématiquement ce comportement et nous proposons dans le paragraphe suivant un algorithme d'optimisation appelé algorithme d'optimisation Mite-flamme (MFO).

### 2.2.2. Algorithme

Le cadre général des algorithmes basés sur la population est presque identique. La première étape consiste à générer un ensemble de solutions initiales aléatoires  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . Chacune de ces solutions est considérée comme une solution candidate pour un problème donné, évaluée par la fonction objective, et a attribué une valeur objective  $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ . L'algorithme combine ensuite / mouvements / mise à jour les solutions candidats en fonction de leurs valeurs de remise en forme avec l'espoir de les améliorer. Les solutions créées sont à nouveau évaluées par une fonction objectif et ont attribué leurs valeurs de condition physique pertinentes. Ce processus est itéré jusqu'à la satisfaction d'une condition d'arrêt. À la fin de ce processus, la meilleure solution obtenue est rapportée comme la meilleure approximation pour l'optimum global [77]

Dans l'algorithme MFO proposé, nous supposons que les solutions candidates sont les mites et les variables du problème sont les positions des mites dans l'espace. Par conséquent, les mites peuvent voler dans des espaces 1-D, 2-D, 3-D ou hyper-dimensionnels avec un changement de leurs vecteurs de position. Étant donné que l'algorithme MFO est un algorithme basé sur la population, nous représentons l'ensemble des mites dans une matrice comme suit [79]:

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,d} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & M_{n,d} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Où  $n$  est le nombre de mites et  $d$  est le nombre de variables (dimension). Pour tous les mites, on suppose également qu'il existe un vecteur pour stocker les valeurs de la fonction objectif correspondantes :

$$OM = \begin{bmatrix} OM_1 \\ OM_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ OM_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Le vecteur de position (rangée dans la matrice  $M$ ) est transmis à la fonction fitness et la sortie de la fonction fitness est affectée à la mite correspondante comme fonction objective ( $OM_1$  dans la matrice  $OM$  par exemple).

Un autre des éléments clés dans l'algorithme proposé sont des flammes. Nous considérons une matrice similaire à la matrice des mites comme suit [77] :

$$F = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & \dots & F_{1,d} \\ F_{2,1} & F_{2,2} & \dots & F_{2,d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n,1} & F_{n,2} & \dots & F_{n,d} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

On peut le voir dans l'équation (2.3) que les dimensions des deux matrices  $M$  et  $F$  sont égaux. Pour les flammes, un vecteur est défini pour stocker les valeurs de la fonction objective comme suit :

$$OF = \begin{bmatrix} OF_1 \\ OF_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ OF_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Il convient de noter ici que les mites et les flammes sont deux solutions. La différence entre eux est la façon dont nous les traitons et les actualisons à chaque itération.

Les mites sont des agents de recherche réels qui se déplacent dans l'espace de recherche, alors que les flammes sont la meilleure position des mites qui obtient jusqu'à présent. En d'autres termes, les flammes peuvent être considérées comme des drapeaux ou des broches qui sont abandonnés par les mites lors de la recherche dans l'espace de recherche. Par conséquent, chaque recherche de mite autour d'un drapeau (flamme) et met à jour en cas de trouver une meilleure solution. Avec ce mécanisme, une mite ne perd jamais sa meilleure solution.

L'algorithme MFO est un triplé (2.5), qui se rapproche de la valeur optimale globale du problème d'optimisation [79].

$$MOF = (I, P, T) \quad (2.5)$$

$I$  est une fonction qui génère une population aléatoire de mites et les valeurs correspondantes de la fonction objective. Le modèle systématique de cette fonction est le suivant,

$$I : \phi \rightarrow \{M, OM\} \quad (2.6)$$

La fonction  $P$ , qui est la fonction principale, déplace les mites autour de l'espace de recherche. Cette fonction a reçu la matrice de  $M$  et renvoie son mise à jour finalement.

$$P : M \rightarrow M \quad (2.7)$$

La fonction  $T$  retourne vraie si le critère d'arrêt est satisfait et fausse dans le cas contraire :

$$T : M \rightarrow \{\text{vraie}, \text{fausse}\} \quad (2.8)$$

Avec  $I$ ,  $P$  et  $T$ , le cadre général de l'algorithme MFO est défini comme suit:

$M=I(.);$

**Tant que**  $T(M)$  est fausse

$M=P(M);$

**Fin**

La fonction  $I$  doit générer des solutions initiales et calculer les valeurs de la fonction objective. Toute distribution aléatoire peut être utilisée dans cette fonction. Il peut être mis en œuvre comme suit,

**Pour**  $i = 1 : n$

**Pour**  $j = 1 :$

$$M(i, j) = (u_b(i) - l_b(i)) * rand( ) + l_b(i)$$

**Fin**

**Fin**

$OM = \text{Fonction objectif}(M);$

Comme on peut le voir, il y a deux autres vecteurs appelés  $u_b$  et  $l_b$ . Ces vecteurs définissent les limites supérieure et inférieure des variables comme suit :

$$u_b = [u_{b1}, u_{b2}, u_{b3}, \dots, u_{bn-1}, u_{bn}] \quad (2.9)$$

où  $u_{bi}$  indique la limite supérieure de la  $i^{\text{ème}}$  variable.

$$l_b = [l_{b1}, l_{b2}, l_{b3}, \dots, l_{bn-1}, l_{bn}] \quad (2.10)$$

Où  $l_{bi}$  indique la limite inférieure de la  $i^{\text{ème}}$  variable.

Après l'initialisation, la fonction  $P$  est itérativement exécutée jusqu'à ce que la fonction  $T$  devienne vraie. La fonction  $P$  est la fonction principale qui déplace les mites autour de l'espace de recherche. Afin de modéliser mathématiquement ce comportement, la position de chaque mite est actualisée par rapport à une flamme en utilisant l'équation suivante :

$$M_i = S(M_i, F_j) \quad (2.11)$$

où  $M_i$  indique la  $i^{\text{ème}}$  mite,  $F_j$  indique la  $j^{\text{ème}}$  flamme, et  $S$  est la fonction spirale

- **Remarque 2.1.** L'auteur de l'algorithme a choisi la spirale logarithmique comme principal mécanisme de mise à jour des mites. Cependant, tout type de spirale peut être utilisé, sous les contraintes [80,81]:

1. Le point initial de Spiral devrait commencer par la mite,
2. Le point final de Spiral devrait être la position de la flamme,
3. La fluctuation de la gamme de spirale ne doit pas dépasser de l'espace de recherche.

Compte tenu de ces points, nous définissons une spirale logarithmique pour l'algorithme MFO comme suit:

$$S(M_i, F_j) = D_i \cdot e^{bt} \cos(2\pi t) + F_j \quad (2.12)$$

Où  $D_i$  indique la distance de la  $i$ -ième mite pour la  $j$ -ième flamme,  $b$  est une constante pour définir la forme de la spirale logarithmique, et  $t$  est un nombre aléatoire dans  $[-1, 1]$ .

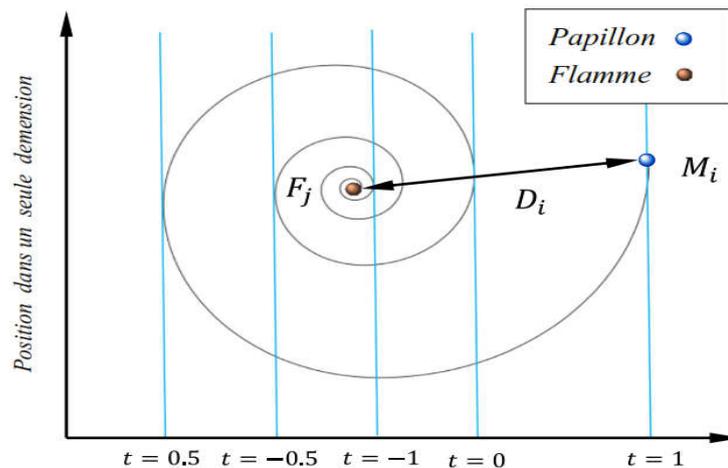
$D$  est calculé comme suit:

$$D_i = |M_i - F_j| \quad (2.13)$$

Où  $M_i$  indique la  $i^{\text{ème}}$  mite,  $F_j$  indique la  $j^{\text{ème}}$  flamme, et  $D_i$  indique la distance de la  $i^{\text{ème}}$  mite pour la  $j^{\text{ème}}$  flamme.

L'équation (2.12) est l'endroit où le trajet en spirale des mites de tête est simulé. Comme on le voit dans cette équation, la prochaine position d'une mite est définie par rapport à une flamme. Le paramètre  $t$  dans l'équation en spirale définit combien la position suivante de la mite doit être proche de la flamme ( $t = -1$  est la position la plus proche de la flamme, tandis que  $t = 1$  est le plus

éloigné). Par conséquent, une hyper-ellipse peut être supposée autour de la flamme dans toutes les directions et la prochaine position de la mite serait dans cet espace. Le mouvement en spirale est le composant principal de la méthode proposée car il dicte comment les mites modernisent leurs positions autour des flammes. L'équation en spirale permet à une mite de voler autour d'une flamme et pas nécessairement dans l'espace entre elles. Par conséquent, l'exploration et l'exploitation de l'espace de recherche peuvent être garanties. La spirale logarithmique, l'espace autour de la flamme et la position en considérant différents  $t$  sur la courbe sont illustrées à la figure 2.3.

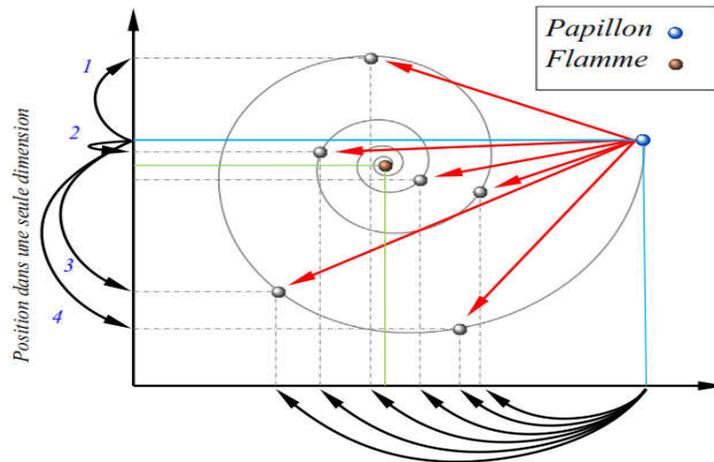


**Figure 2.3** Spirale logarithmique, espace autour d'une flamme, et la position par rapport à  $t$ .

La figure 2.4 montre un modèle conceptuel de mise à jour de la position d'une mite autour d'une flamme. Notez que l'axe vertical ne montre qu'une seule dimension (1 variable / paramètre d'un problème donné), mais la méthode proposée peut être utilisée pour changer toutes les variables du problème. Les positions possibles (lignes noires pointillées) qui peuvent être choisies comme la prochaine position de la mite (ligne horizontale bleue) autour de la flamme (ligne horizontale verte) de la figure 2.4 montrent clairement qu'une mite peut explorer et exploiter l'espace de recherche autour de la flamme dans une dimension. L'exploration se produit lorsque la position suivante se situe à l'extérieur de l'espace entre la mite et la flamme, comme on peut le voir dans les flèches étiquetées par 1, 3 et 4. L'exploitation se produit lorsque la position suivante se trouve à l'intérieur de l'espace entre la mite et la flamme comme on peut l'observer dans la flèche étiquetée par 2. Il existe quelques observations intéressantes pour ce modèle comme suit :

- Une mite peut converger vers n'importe quel point du voisinage de la flamme en changeant  $t$

- Le plus bas  $t$ , la distance la plus proche de la flamme.
- La fréquence de mise à jour de la position des deux côtés de la flamme augmente à mesure que la mite se rapproche de la flamme.



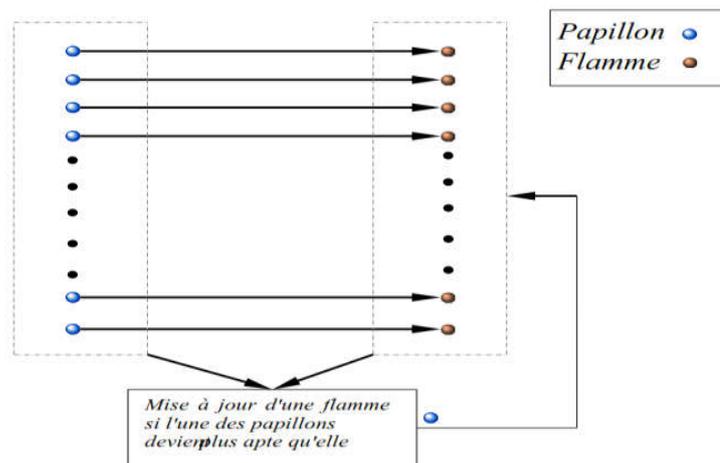
**Figure 2.4** Quelques positions possibles pouvant être atteintes par une mite par rapport à une flamme utilisant la spirale logarithmique.

La procédure de mise à jour de la position proposée peut garantir l'exploitation autour des flammes. Afin d'améliorer la probabilité de trouver de meilleures solutions, nous considérons les meilleures solutions obtenues en ce qui concerne les flammes. Ainsi, la matrice  $F$  dans l'équation (2.3) comprend toujours les dernières solutions récentes obtenues jusqu'à présent. Les mites sont obligées de mettre à jour leurs positions par rapport à cette matrice lors de l'optimisation. Afin d'accentuer davantage l'exploitation, on suppose que  $t$  est un nombre aléatoire dans  $[r, 1]$  où  $r$  est linéairement diminué de  $-1$  à  $-2$  au cours de l'itération. Notez que nous nommons  $r$  comme constante de convergence. Avec cette méthode, les mites tendent à exploiter leurs flammes correspondantes plus précisément proportionnelles au nombre d'itérations.

Une question qui pourrait surgir ici est que la mise à jour de la position dans l'équation (2.12) exige seulement que les mites se déplacent vers une flamme, mais il provoque l'algorithme MFO d'être piégé rapidement dans l'optique locale. Pour éviter cela, chaque mite est obligée de mettre à jour sa position en utilisant une seule des flammes dans l'équation (3.12). Chaque itération et après la mise à jour de la liste des flammes, les flammes sont triées en fonction de leurs valeurs physiques. Les mites mettent à jour leurs positions en fonction de leurs flammes correspondantes. La première mite met toujours à jour sa position par rapport à la meilleure flamme, alors que la dernière mite

met à jour sa position par rapport à la pire flamme de la liste. La figure 2.5 montre comment chaque mite est affectée à une flamme dans la liste des flammes.

Il convient de noter que cette hypothèse est faite pour la conception de l'algorithme MFO, alors que ce n'est peut-être pas le comportement réel des mites dans la nature. Cependant, l'orientation transversale est toujours faite par les mites artificielles. La raison pour laquelle une flamme spécifique est attribuée à chaque mite est d'éviter une stagnation locale optimale. Si toutes les mites sont attirées par une seule flamme, elles convergent toutes vers un point dans les espaces de recherche, car elles ne peuvent voler que vers une flamme et non vers l'extérieur. En exigeant qu'ils se déplacent autour de différentes flammes, cela entraîne une exploration plus approfondie de l'espace de recherche et une probabilité plus faible de stagnation optimale locale.



**Figure 2.5** Chaque mite est affecté à une flamme

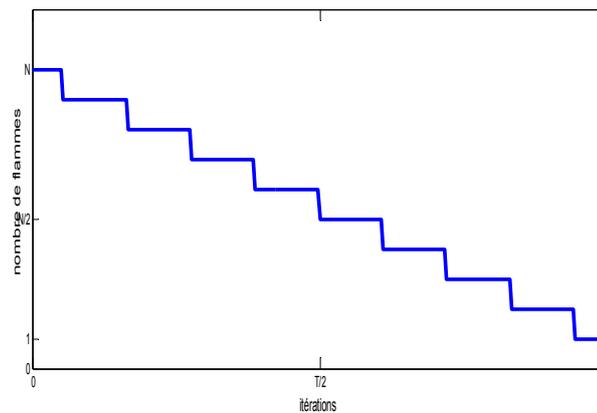
Par conséquent, l'exploration de l'espace de recherche autour des meilleurs emplacements obtenus

Jusqu'à présent est garantie avec cette méthode pour les raisons suivantes :

- Mite met à jour ses positions dans les sphères hyper autour des meilleures solutions obtenues jusqu'ici.
- La séquence des flammes est modifiée en fonction des meilleures solutions dans chaque itération, et les mites sont nécessaires pour mettre à jour leurs positions par rapport aux flammes mises à jour. Par conséquent, la mise à jour de la position des mites peut se produire autour de différentes flammes, un mécanisme qui provoque un mouvement brusque des mites dans l'espace de recherche et favorise l'exploration.

Une autre préoccupation est que la mise à jour de la position des mites par rapport à des endroits différents  $n$  dans l'espace de recherche peut dégrader l'exploitation des meilleures solutions prometteuses. Pour résoudre ce problème, nous proposons un mécanisme adaptatif pour le nombre de flammes. La figure 6 montre que le nombre de flammes diminue de manière adaptative au cours des itérations. Nous utilisons la formule suivante à cet égard :

On peut remarquer que la mise à jour de la position des mites par rapport à  $n$  endroits différents dans l'espace de recherche peut dégrader l'exploitation des meilleures solutions prometteuses. Pour résoudre ce problème, un mécanisme d'adaptation pour le nombre de flammes est ajouté.



**Figure 2.6** Le nombre de flammes diminue d'une manière adaptative au cours des itérations.

$$flamno = round(N - l \cdot \frac{N-1}{T}) \quad (2.14)$$

Où  $l$  est le nombre actuel d'itérations,  $N$  est le nombre maximal de flammes et  $T$  indique le nombre maximum d'itérations.

La figure 2.5 montre qu'il y a  $N$  nombre de flammes dans les étapes initiales des itérations. Cependant, les mites modernes ne mettent à jour leurs positions que par rapport à la meilleure flamme dans les dernières étapes des itérations. Le décroissement progressif du nombre de flammes équilibre l'exploration et l'exploitation de l'espace de recherche. Après tout, les étapes générales de la fonction  $P$  sont les suivantes.

Les étapes générales de la fonction  $P$  sont les suivantes [77] :

*mise à jour la flamme sans utiliser l'équation (3.14)*

OM=fonction objectif(M);

**Si**  $iteration == I$  **Alors**

$F = sort(M);$

$OF = sort(OM);$

**Si non**

$F = sort(M_{t-1}, Mt);$

$OF = sort(M_{t-1}, Mt);$

**Fin**

**pour**  $i = 1 : n$

**Pour**  $j = 1 : d$

*mise à jour  $r$  et  $t$*

*Calculer  $D$  en utilisant l'équation (3.13) par rapport à la mite correspondante*

*mise à jour  $M(i,j)$  en utilisant l'équation. (3.11) et (3.12) par rapport à la mite correspondante*

**Fin**

**Fin**

Ensuite, la fonction P est exécutée jusqu'à ce que la fonction T retourne true. Après la fin de la fonction P, la meilleure mite est retournée comme l'approximation la mieux obtenue de l'optimum.

L'algorithme global de la technique d'optimisation de la flamme mite est expliqué dans l'organigramme de la figure 2.6.

### 2.2.3. Complexité computationnelle de l'algorithme MFO

La complexité du calcul d'un algorithme est une métrique clé pour évaluer son temps d'exécution, qui peut être défini en fonction de la structure et de la mise en œuvre de l'algorithme. La complexité computationnelle de l'algorithme MFO dépend du nombre de mites, du nombre de variables, du nombre maximal d'itérations et du mécanisme de tri des flammes dans chaque itération. Puisque nous utilisons l'algorithme Quicksort, le tri est de F-GNF "et" F "dans le meilleur et le pire des cas, respectivement. Compte tenu de la fonction  $P$ , par conséquent, la complexité de calcul globale est définie comme suit :

$$\begin{aligned} O(MFO) &= O(t(\text{quit stor}) + O(\text{position update})) \\ O(MFO) &= O(t(n^2 + n.d) + O(t.n^2 + t.n.d)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Où  $n$  est le nombre de mites,  $t$  est le nombre maximum d'itérations, et  $d$  est le nombre de variables.

Pour voir comment l'algorithme MFO peut théoriquement être efficace pour résoudre des problèmes d'optimisation, certaines observations sont les suivantes :

- La procédure de mise à jour des positions permet d'obtenir des solutions voisines autour des flammes, un mécanisme visant principalement à promouvoir l'exploitation.
- Étant donné que MFO utilise une population, l'évitement optimal de l'optima est élevé.
- Affecter chaque mite à une flamme et mettre à jour la séquence des flammes dans chaque itération augmenter l'exploration de l'espace de recherche et diminuer la probabilité de stagnation optimale locale.
- Compte tenu de la meilleure solution obtenue jusqu'à ce que les flammes sauvent les solutions prometteuses en tant que guides pour les mites.
- Les meilleures solutions sont enregistrées dans la matrice F afin qu'elles ne se perdent jamais.
- Le nombre adaptatif de flammes équilibre l'exploration et l'exploitation.
- La constante de convergence adaptative ( $r$ ) provoque une convergence accélérée autour des flammes au cours des itérations.

Ces observations font que l'algorithme MFO est théoriquement capable d'améliorer les solutions aléatoires initiales et la convergence vers un meilleur point dans l'espace de recherche. La section suivante étudie l'efficacité de MFO en pratique ...

### 2.3. Evolution différentielle

Au cours de la dernière décennie, une technique d'optimisation évolutive appelée Différentielle évolution (DE) [77] a trouvé beaucoup d'intérêt pour son efficacité et sa facilité d'implémentation pour l'identification des paramètres et la commande[35]. DE est un algorithme évolutionnaire qui résout un problème d'optimisation en essayant itérativement d'améliorer une solution candidate en fonction d'une valeur de remise en forme. En d'autres termes, La technique DE peut être considérée comme une méthode à base de particules qui évolue dans le temps jusqu'à la solution qui donne la valeur la plus basse de la fonction objective.

La méthode d'optimisation par évolution différentielle ("Differential Evolution", DE) représente une classe des algorithmes évolutionnaires elle est inspirée de la biologie et les méta-heuristiques techniques pour résoudre beaucoup de problème dans le monde réel elle permette d'atteindre à la solution globale du problème posé.

L'évolution différentielle ("Differential Evolution", DE) est une version améliorée des algorithmes d'optimisation stochastique le plus populaire (algorithmes génétiques) proposée par

Price et Storn en 1995. DE est un algorithme basé sur une population initiale aléatoire comme les algorithmes génétiques, il utilise les mêmes principes que les algorithmes génétique « croisement, mutation et sélection ». La différence principale en construisant de meilleures solutions est que les algorithmes génétiques se fondent sur le croisement tandis que le DE se fonde sur l'opération de mutation. Donc il est simple et efficace.

Cette méthode d'optimisation comme les autres méthodes métha-heuristiques démarre avec une population initiale de  $N_P$  individus générée par tirage aléatoire uniforme sur l'ensemble des valeurs possibles de chaque variable. Chaque individu  $x_{i,G}$  est représenté par un vecteur de  $D$  dimensions. où  $G$  désigne la génération. Les bornes inférieures et supérieures des variables sont spécifiées par l'utilisateur selon la nature du problème.

$$x_{i,G} = (x_{1i,G}, x_{2i,G}, \dots, x_{Di,G}) \text{ avec } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.16)$$

Après l'initialisation, l'algorithme effectue une série de transformations sur les individus, dans un processus appelé *évolution*.

Le standard DE utilise trois techniques (mutation, croisement et sélection) comme les algorithmes génétiques. A chaque génération, l'algorithme applique successivement ces trois opérations sur chaque vecteur pour produire un vecteur d'essai (*trial vector*) :

$$u_{i,G+1} = (u_{1i,G+1}, u_{2i,G+1}, \dots, u_{Di,G+1}) \text{ avec } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.17)$$

Une opération de sélection permet de choisir les individus à conserver pour la nouvelle génération ( $G + 1$ ).

### 2.3.1. Mutation

A chaque génération, pour chaque individu  $x_{i,G}$ , on génère un vecteur mutant  $u_{i,G+1}$  qui peut être créé en utilisant une des stratégies de mutation suivantes [82,83]:

- **Rand/1** :

$$v_{i,G+1} = x_{r1,G} + F \cdot (x_{r2,G} - x_{r3,G}) \quad (2.18)$$

- **Best/1** :

$$v_{i,G+1} = x_{best,G} + F \cdot (x_{r1,G} - x_{r2,G}) \quad (2.19)$$

- **Current to best/1** :

$$v_{i,G+1} = x_{i,G} + F \cdot (x_{r1,G} - x_{r2,G}) + F \cdot (x_{best,G} - x_{i,G}) \quad (2.20)$$

- **Best/2** :

$$v_{i,G+1} = x_{best,G} + F \cdot (x_{r_1,G} - x_{r_2,G}) + F \cdot (x_{r_3,G} - x_{r_4,G}) \quad (2.21)$$

- **Rand/2 :**

$$v_{i,G+1} = x_{r_1,G} + F \cdot (x_{r_2,G} - x_{r_3,G}) + F \cdot (x_{r_4,G} - x_{r_5,G}) \quad (2.22)$$

Les indices aléatoires  $r_1, r_2, r_3, r_4$  et  $r_5 \in \{1, 2, \dots, N\}$  sont tous différents. Ils sont également choisis différents de l'indice courant  $i$ .  $x_{best,G}$  est le meilleur individu à la  $G^{ème}$  génération.  $F \in [0, 1]$  est une valeur constante, appelée differential weight, qui contrôle l'amplification de la variation différentielle de  $(x_{r_i,G} - x_{r_j,G})$

### 2.3.2. Croisement

Après la mutation, une opération de croisement binaire forme le vecteur d'essai final  $u_{i,G+1}$ , selon le vecteur  $x_{i,G}$  et le vecteur mutant correspondant  $v_{i,G+1}$ . Le processus de croisement est introduit ensuite en vue d'augmenter la diversité de la population. Le nouveau vecteur  $u_{i,G+1}$  est donné par la formule suivante [80]:

$$u_{ji,g+1} = \begin{cases} v_{ji,g+1} & \text{si } (rand_j \leq CR) \text{ ou } (j = j_{rand}) \\ x_{ji,g} & \text{si } (rand_j > CR) \text{ ou } (j \neq j_{rand}) \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $j = 1, 2, \dots, D$ ;  $rand_j \in [0, 1]$  est la  $j^{ème}$  valeur procurée un générateur de nombre aléatoire uniforme appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ ; CR est la probabilité de croisement  $\in [0, 1]$  ;

$j_{rand}$  est un indice choisi au hasard dans l'ensemble  $\{1, 2, \dots, N\}$ .  $rand_j$  est un indice aléatoire qui assure que  $u_{ji,g+1}$  ait au moins un paramètre issu du vecteur  $v_{ji,g+1}$ . Finalement, l'opérateur de sélection compare la valeur de la fonction objectif des deux vecteurs  $u_{ji,g+1}$  et  $x_{ji,g}$  et le meilleur individu est sélectionné pour la population de la génération suivante.

### 2.3.3. Sélection

Pour décider quel vecteur, parmi  $u_{ji,g+1}$  ou  $x_{i,G}$ , doit être choisi dans la génération  $G+1$ , on doit comparer les valeurs de fonction du coût de ces deux vecteurs. En effet, on garde le vecteur

ayant la plus petite valeur de fonction du cout en cas de minimisation. Le nouveau vecteur  $x_{i,G+1}$  est choisi selon l'expression suivante :

$$x_{i,G+1} = \begin{cases} u_{i,G+1} & \text{si } f(u_{i,G+1}) < f(x_{i,G}) \\ x_{i,G} & \text{sin on} \end{cases} \quad (2.24)$$

Il est clair qu'un bon réglage des principaux paramètres de l'algorithme (taille de la population  $N$ , facteur de mutation  $F$  et facteur de croisement  $CR$ ) contribue de façon important l'efficacité de la méthode. Finalement, l'opérateur de sélection compare la valeur de la fonction objectif des deux vecteurs  $u_{j,g+1}$  et  $x_{j,g}$  et le meilleur individu est sélectionné pour la population de la génération suivante. Ce processus se poursuit, génération après génération, jusqu'à atteindre le critère d'arrêt (nombre maximal de génération ou précision sur la valeur de la fonction objectif). On peut résumer l'algorithme par les étapes suivantes :

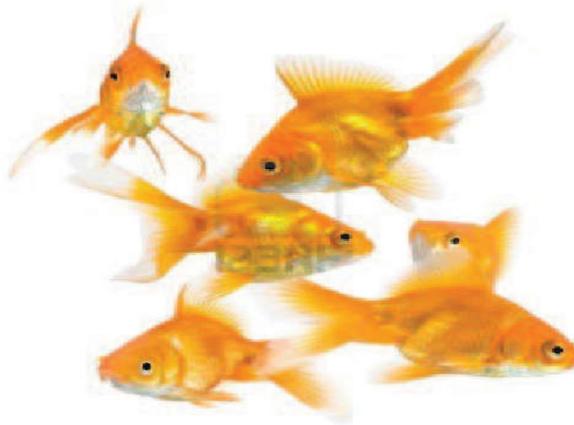
### Algorithm

- 1: **Pour**  $i = 1 : N_p$  **Faire**
- 2:  $pop_i^1 \leftarrow \text{init\_pop}(\text{pop\_limits}) \rightarrow \text{First population generation}$
- 3:  $e_i^0 \leftarrow \text{fitness}(\text{plant}, pop_i^1) \rightarrow \text{Cost function calculation}$
- 4: **Fin pour**
- 5: **Pour**  $k = 1 : \text{max}$  **Faire**
- 6: **Pour**  $i = 1 : N_p$  **Faire**
- 7:  $v_i^k = pop_a^k + F \cdot (pop_b^k - pop_c^k) \rightarrow \text{Mutation}$
- 8: **Pour**  $j = 1 : D$  **Faire**
- 9:  $u_{i,j}^k = v_{i,j}^k, \forall p_{i,j}^k < \delta$
- 10:  $u_{i,j}^k = pop_{i,j}^k, \forall p_{i,j}^k \geq \delta$
- 11: **Fin Pour**
- 12:  $e_i^k \leftarrow \text{fitness}(\text{plant}, pop_i^k) \rightarrow \text{nouveau calcul de la fonction objectif}$
- 13: **Si**  $e_i^k < e_i^{k-1}$  **Alors**  $\rightarrow \text{la Selection}$
- 14:  $pop_i^{k+1} = u_i^k$
- 15: **Sinon**
- 16:  $pop_i^{k+1} = pop_i^k$
- 17: **fin Si**
- 18: **Fin For**
- 19:  $ind\_best \leftarrow \min(e^k)$
- 20:  $bestmem \leftarrow pop^k(ind\_best)$
- 21: **Si**  $\text{convergence} = \text{vraie}$  **Alors**  
 $\text{stop l'exécution après la convergence}$
- Fin Si**

22: **Fin Pour** → *remettre la meilleure estimation*

#### 2.4. Essaim de particules

L'optimisation par essaim particulaire ("Particle Swarm Optimization", PSO) est inspiré d'une analogie avec le comportement social des animaux évoluant en essaim. Elle a été proposée en 1995 par Kennedy et Eberhart [86]. En effet, chez certains groupes d'animaux, comme les bancs de poissons, on peut observer des dynamiques de déplacement relativement complexes, alors que les individus eux-mêmes n'ont accès qu'à des informations limitées, comme la position et la vitesse de leurs plus proches voisins. On peut par exemple observer qu'un banc de poissons est capable d'éviter un prédateur : d'abord en se divisant en deux groupes, puis en réformant le banc originel (voir figure 2.7), tout en maintenant la cohésion du banc. Ces comportements collectifs s'inscrivent tout à fait dans la théorie de l'auto\_organisation [85].



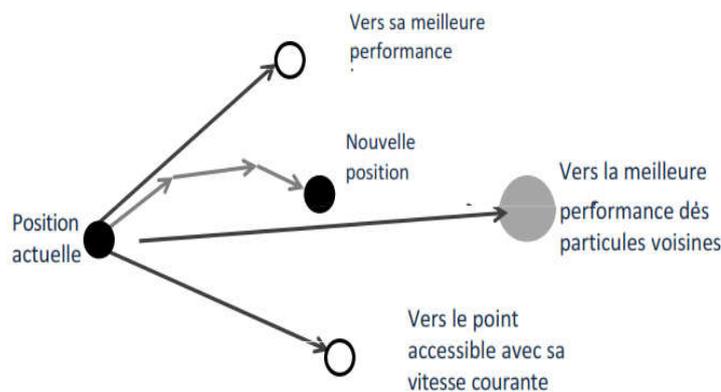
**Figure 2.7** Schéma de banc de poissons

Pour résumer, chaque individu utilise, non seulement sa propre mémoire, mais aussi l'information locale sur ses plus proches voisins pour décider de son propre déplacement. Des règles simples, telles que " aller à la même vitesse que les autres ", " se déplacer dans la même direction " ou encore " rester proche de ses voisins " sont des exemples de comportements qui suffisent à maintenir la cohésion du groupe tout entier, et à permettre des comportements collectifs complexes et adaptatifs.

Kennedy et Eberhart se sont inspirés de ces comportements socio-psychologiques pour créer PSO. Un essaim de particules, qui sont des solutions potentielles au problème d'optimisation, se déplaçant sur l'espace de recherche pour trouver l'optimum global. Le déplacement d'une particule est influencé par les trois composantes suivantes :

- Une composante physique : la particule tend à suivre sa direction courante de déplacement ;
- Une composante cognitive : la particule tend à se diriger vers le meilleur site par lequel elle est déjà passée ;
- Une composante sociale : la particule tend à se fier à l'expérience de ses congénères et, ainsi, à se diriger vers le meilleur site déjà atteint par ses voisins.

Dans le cas d'un problème d'optimisation, la qualité d'un site de l'espace de recherche est déterminée par la valeur de la fonction objective en ce point. La Figure 2.8 illustre la stratégie de déplacement d'une particule [85,86].



**Figure 2.8** Schéma de principe du déplacement d'une particule

Dans un espace de recherche de dimension  $n$ , la particule  $i$  de l'essaim est modélisée par un vecteur de position  $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]$  et une vitesse de déplacement  $V_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}]$ . La qualité de sa position est déterminée par la valeur de la fonction objective en ce point. Chaque particule garde en mémoire la meilleure position par laquelle elle est déjà passée, que l'on note  $P_i = [p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}]$ . La meilleure position atteinte par toutes les particules de l'essaim est indiquée par un vecteur  $P_g = [p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gn}]$ . Avec ces notations, les équations de mouvement d'une particule sont, pour chaque itération  $iter$ . La particule  $i$  déplace entre les itérations  $t$  et  $t+1$ , en fonction de sa vitesse et des deux meilleures positions qu'elle connaît suivant les deux équations suivantes [86,87,88]:

$$V_i^{iter+1} = V_i^{iter} + c_1 r_1^{iter} (P_i^{iter} - X_i^{iter}) + c_2 r_2^{iter} (P_g^{iter} - X_i^{iter}) \tag{2.25}$$

$$X_i^{iter+1} = X_i^{iter} + V_i^{iter} \tag{2.26}$$

$r_1$  et  $r_2$  sont des variables aléatoires uniforme tirés dans  $[0,1]$ , Les deux constante  $c_1$  et  $c_2$  représentent l'accélération.

PSO est un algorithme à population. Il commence par une initialisation aléatoire de l'essaim dans l'espace de recherche. A chaque itération de l'algorithme, chaque particule est déplacée suivant les équations (2.25) et (2.26). Une fois le déplacement des particules effectué, les nouvelles positions sont évaluées. Les  $P_i$  ainsi que  $P_g$  sont alors mis à jour. Cette procédure est résumée par l'Algorithme 3.1.  $N$  est le nombre de particules de l'essaim.

**Algorithme 3.1** : Algorithme d'optimisation par essaim particulaire.

**Initialisation** Initialiser aléatoirement (positions et vitesses) de  $N$  particule

**Évaluation** évaluer les positions des particules

**Pour** chaque particule  $i$ ,  $p_{gi} = x_i$ .

**Tant que** le critère d'arrêt n'est pas atteint **faire**

**Pour**  $i = 1$  à  $N$  faire

**Déplacement** de la particule à l'aide de (3.6) et (3.7)

**Évaluation** des positions

**Si**  $f(X_i) < f(P_i)$  Alors

$$P_i = X_i$$

**Fin Si**

**Si**  $f(P_i) < f(P_g)$

$$P_g = P_i$$

**Fin Si**

**Fin Pour**

**Fin Tant que**

## 2.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques méthodes d'optimisation, Parmi les méta-heuristiques présentées dans ce chapitre on a donné un intérêt particulier à la méthode d'optimisation mite-flamme (MFO). Car cette méthode elle est- nouvelle dans la littérature, c'est pour cette raison que nous voulons donner le maximum d'information aux lecteurs. L'application de différentes méthodes d'optimisation présentées dans ce chapitre sera dans les prochains chapitres.

# CHAPITRE 3

---

---

**Approximation par modèle d'ordre réduit de  
systèmes d'ordre fractionnaire utilisant  
l'algorithme d'évolution différentielle**

### **3. Approximation par modèle d'ordre réduit de systèmes d'ordre fractionnaire en utilisant l'algorithme d'évolution différentielle**

#### **3.1. Introduction**

L'utilisation d'un modèle entier plutôt que fractionnaire pour étudier des processus complexes nécessitent des modèles d'ordre très élevé ou il y a une négligence de certains phénomènes physiques, comme le cas du phénomène de diffusion [90].

Malheureusement, l'identification d'un système d'ordre fractionnaire n'est pas simple, car il nécessite une estimation des coefficients du modèle et ces ordres fractionnaires. Pour leur modélisation dans le domaine temporelle et fréquentiel, différentes approches ont été proposées dans la littérature. Hartley et Lorenzo [90] a montré que l'identification du système d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentiel peut être effectuée en utilisant des distributions d'ordre continues. Ensuite Djamah et al.[29] ont étudié l'identification et la réduction du modèle d'ordre non-entiers dans le domaine temporel, ou le principe est basé sur un intégrateur fractionnaire qui fonctionne sur une gamme de fréquence limitée [6]. Nazarian et al.[91] ont abordé le problème de l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire ayant des entrées et sorties continues dans le domaine fréquentiel, ils ont étudié analytiquement les effets de l'ordre commensurable dans la structure du modèle. Alors que Dzieli'nski et al. [92] ont proposé une comparaison entre les méthodes d'identification basées sur les moindres carrés et les moindres carrés généralisés dans le domaine fréquentiel.

Pour résoudre le problème de biais dans l'identification des systèmes fractionnaires continu dans le temps en boucle fermée, Yakoub et al.[93] ont introduit une méthode de correction qui est basée sur un estimateur par les moindres carrés combinés avec l'approche du filtre variable d'état. Récemment Charef et al. [94] et Djouambi et al. [95] ont également introduit une méthode d'identification, basée sur le moindre carré récursif appliqué à une équation fractionnaire de régression linéaire. D'autres chercheurs ont proposé un algorithme d'identification de domaine temporel basé sur un algorithme génétique (GA) [96,97,98,99].

Le but principal de ce chapitre est concentré sur l'approximation des systèmes linéaires fractionnaires par un système linéaire entier d'ordre réduit en utilisant la technique DE. Une

approche originale est développée dans le cas des systèmes linéaires. Nous montrons par différents exemples de simulation numérique du modèle approximé avec un ordre réduit que les résultats obtenus sont très compétitifs aux approches d'identification existantes.

### 3.2. Approximation du modèle fractionnaire en utilisant algorithme DE

Un système linéaire invariant d'ordre fractionnaire dans sa forme générale peut être représenté par une fonction de transfert d'ordre fractionnaire de la forme suivante [99,100] :

$$F(s) = \frac{b_0 s^{\beta_0} + b_1 s^{\beta_1} + b_2 s^{\beta_2} + b_3 s^{\beta_3} + \dots + b_n s^{\beta_n}}{a_0 s^{\alpha_0} + a_1 s^{\alpha_1} + a_2 s^{\alpha_2} + a_3 s^{\alpha_3} + \dots + a_m s^{\alpha_m}} \quad (3.1)$$

L'objectif de cette partie est de trouver un modèle approximé d'ordre entier qui représente le mieux possible le système fractionnaire. Dans ce cadre le modèle approximé peut se mettre sous la forme d'un rapport de deux polynômes d'ordre 4 et 5 respectivement [100] :

$$F(s) = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.2)$$

Le choix de la configuration (3.2) pour la fonction rationnelle approximée est le résultat d'une étude approfondie basée sur notre connaissance sur les méthodes d'approximation fractionnaire telles que celles d'oustaloup et de charef. Un modèle d'ordre entier de cinquième ordre avec onze coefficients réels est une configuration simple peut fournir une bonne approximation de la dynamique originale du système d'ordre fractionnaire [100].

- **Remarque 2.1.** On remarque que le coefficient  $a_5$  pourrait être simplifié dans le numérateur, mais l'algorithme d'optimisation était trop sensible à sa valeur, et le modèle résultant était beaucoup mieux sous cette forme.

Le problème est ensuite d'obtenir la valeur optimale des paramètres du vecteur  $\theta \in R^{11}$  :

$$\theta = [a_5 \ a_4 \ a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0 \ b_4 \ b_3 \ b_2 \ b_1 \ b_0]^T \quad (3.3)$$

L'utilisation de la méthode d'optimisation DE nous permet d'obtenir une solution adéquate pour le problème d'approximation donné, si la fonction objective est modélisée de manière correcte. Dans ce cas, notre objectif est d'estimer les paramètres du modèle approximatif (3.2). Une possibilité consiste à mesurer l'erreur entre les diagrammes Bode du modèle fractionnaire original et le modèle approximé réduit, c'est-à-dire la différence entre les courbes d'amplitudes  $\xi_M(\omega)$  et

la différence entre les courbes de leurs phases  $\xi_p(\omega)$  pondéré à chaque fréquence  $\omega$  dans une bande de fréquence d'approximation. Ces erreurs sont calculées via les équations suivantes [100]:

$$\begin{cases} \xi_M(\omega) = ||F(s)|_{dB} - |T(s)|_{dB}| \\ \xi_p(\omega) = |\arg(F(s)) - \arg(T(s))| \end{cases} \quad \text{avec } s = j\omega \quad (3.4)$$

Définissons la fonction d'erreur combinée  $f(\omega)$  par la formule suivante;

$$f(\omega) = \gamma \xi_p(\omega) + \beta \xi_M(\omega) \quad (3.5)$$

Avec  $\gamma \in [0 \ 1]$  et  $\beta = (1 - \gamma) / 10$

Ensuite, on définit un indice de performance  $J$  dans le domaine fréquentiel, l'indice  $J$  est proposé pour mesurer les performances du modèle entier d'ordre réduit par rapport le système fractionnaire original. En utilisant dans notre cas comme indice l'intégrale de l'erreur quadratique (ISE) donné par [100]:

$$J(\theta) = \int_0^\infty f(\omega) d\omega \quad (3.6)$$

On peut maintenant définir un ensemble de contraintes pour les paramètres  $\theta$  dans  $\theta \subset R^{11}$ , où  $\theta_i \in U_i$  ( $i = 1 : 11$ ). Le problème de recherche d'un modèle approximé d'ordre réduit du système d'ordre fractionnaire (3.2) peut être écrit comme un problème d'optimisation suivant :

Trouver  $\theta^* \in U$  tel que,

$$J(\theta^*) = \min_{\theta \in U} J(\theta) \quad (4.7)$$

L'application de la technique d'approximation de DE pour obtenir un modèle d'ordre entier réduit pour un modèle d'ordre fractionnaire peut être effectuée en utilisant la procédure suivante :

- **Procédure d'approximation de DE** [100]

- 1- Initialiser les modèles avec des valeurs aléatoires.
- 2- Pour chaque modèle, évaluer une erreur entre le diagramme Bode du modèle d'ordre fractionnaire original et le modèle réduit.
- 3- Choisir le meilleur modèle et aller à l'étape 2,
- 4- Mettre à jour les paramètres des modèles.
- 5- Fin de l'itération maximale, donner un modèle optimal.

Après avoir exécuté le DE, nous obtenons les meilleures valeurs des paramètres du modèle. Dans ce cas, le modèle d'ordre réduit résultant avec ces paramètres donne les mêmes performances que le système d'ordre fractionnaire d'origine.

- **Remarque 2.2.**

Lors de l'approximation des systèmes, la stabilité du modèle approximé est garantie par le critère d'optimisation proposé. Car l'algorithme d'optimisation élimine tous les modèles instables de manière systématique.

### 3.3. Résultats de simulation

Dans cette section, nous illustrons l'efficacité de la méthode proposée, par des exemples comparatifs numériques. Nous proposons d'utiliser l'algorithme numérique DE pour obtenir une bonne approximation des fonctions de transfert fractionnaire par des fonctions de transfert rationnel d'ordre entier relativement faible. Les performances des méthodes d'approximation d'oustaloup et de charef sont comparées avec celle proposée, afin de montrer l'avantage de la stratégie proposée comme une bonne méthode d'approximation et avec un ordre réduit.

Les paramètres de réglage de l'algorithme d'optimisation DE pour les simulations numériques présentées sont donnés dans le tableau 3.1.

**Tableau 3-1** Les paramètres du DE

Nombre maximale d'itérations	100
Taille du population	50
Facteur de mutation « F »	0.6
Facteur de croisement « CR »	0.5

#### 3.3.1. DE vs méthode d'Oustaloup.

Dans ce premier exemple on propose une étude comparative entre la méthode d'approximation proposée dans le paragraphe précédent avec celle proposée par oustaloup. Pour cette raison, on considère un système d'ordre fractionnaire linéaire dont la fonction de transfert est donnée par [98] :

$$F_1(s) = \frac{1}{0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1} \quad (3.8)$$

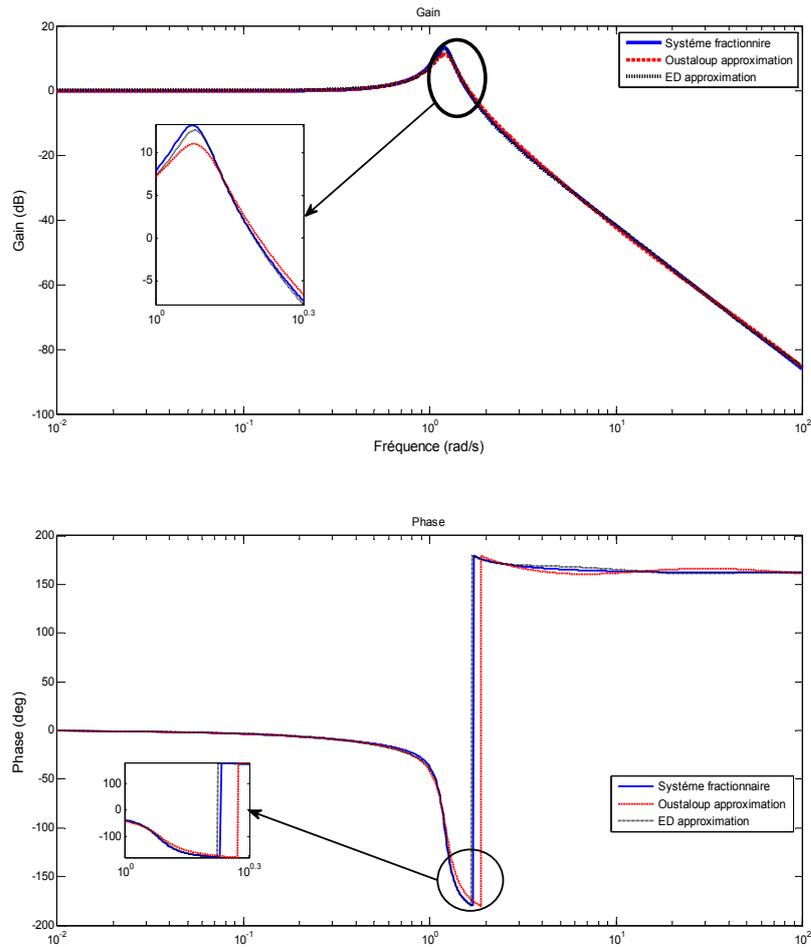
L'approximation des deux opérateurs d'ordres fractionnaires  $s^{2.2}$  et  $s^{0.9}$  du dénominateur de l'équation (3.8) dans une bande de fréquence  $[10^{-2} \ 10^2]$  par une fonction rationnelle à l'aide de la méthode d'oustaloup permet de reproduire une fonction de transfert rationnelle globale approximée donnée par :

$$\begin{aligned}
 & s^8 + 1128s^7 + 2,506.10^5 s^6 + 7,814.10^6 s^5 + 5,322.10^7 s^4 + 5,223 \cdot 10^7 s^3 + \\
 \text{Oust} F_1^{Ap}(s) = & \frac{1,119.10^7 s^2 + 3,368.10^5 s + 1995}{3,185.s^{10} + 3181.s^9 + 4,354.10^5 s^8 + 1,115.10^7 s^7 + 4,972.10^7 s^6 + 6,811.10^7 s^5 +} \quad (3.9) \\
 & 8,711.10^7 s^4 + 5,927.10^7 s^3 + 1,147.10^7 s^2 + 3,388.10^5 s + 1997
 \end{aligned}$$

De l'autre coté la recherche par algorithme optimisation DE pour trouver les valeurs optimales des paramètres de la fonction de transfert approximée (3.2) est effectué, cette recherche permet de générer le vecteur des paramètres suivant :

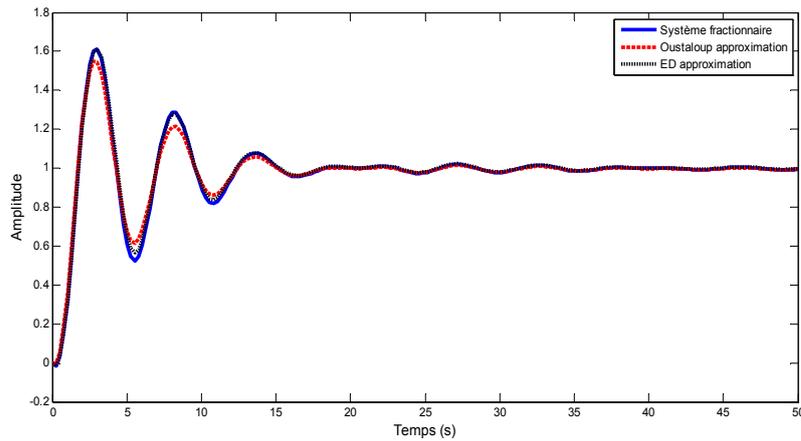
$$\theta^* = \begin{bmatrix} -40.727072552315327 \\ -14.983730125040781 \\ -2.253893874575709 \\ -0.336919088806179 \\ 18.214831716746669 \\ 1.000000000000000 \\ -40.739526743048707 \\ 6.318332816151482 \\ 15.992590057945506 \\ 0.477945195746248 \\ -0.000994017313606 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

La figures 3.1 représente le diagramme de Bode (Module et Phase) du système d'ordre fractionnaire (3.7) et son approximation rationnelle par la méthode proposée (3.2) avec le vecteur du paramètres (3.10) et celle approximé par la méthode d'oustaloup (3.19).



**Figure 3.1** Diagramme de Bode du système fractionnaire et ses approximations par l'approche proposée et celle de la méthode d'Oustaloup.

Les réponses indicielles du système fractionnaire original (3.8) et les deux modèles approximatés par la méthode de charaf (3.9) et la méthode proposée (3.10) sont illustrées par la figure 3.2. On remarque aussi que l'évolution du modèle approximaté par la méthode DE dans le domaine temporel est plus proche au système original que le modèle approximaté par la méthode d'oustaloup.



**Figure 3.2** Réponse indicielles du système fractionnaire et ses approximations par l’approche proposée et celle de la méthode d’Oustaloup

Le tableau 3.2 donne une comparaison quantitative de la performance des résultats obtenues par la méthode d'oustaloup et la technique proposée en utilisant les indices de performances ITAE, IAE, ISE et ITSE définis comme suit :

$$IAE = \int_0^{t_f} |e(t)| dt, \quad ITAE = \int_0^{t_f} t |e(t)| dt, \quad ISE = \int_0^{t_f} e^2(t) dt, \quad ITSE = \int_0^{t_f} t e^2(t) dt \quad (3.10)$$

Où

$e(t) = y_{fractionnaire}(t) - y_{Oustaloup}(t)$  représente l’erreur d’approximation instantanée sur la réponse indicielle si on approxime le modèle par la méthode d’oustaloup, et  $e(t) = y_{fractionnaire}(t) - y_{DE}(t)$  si on applique l’approche proposée pour approximer ce modèle.

**Tableau 3-2** Comparaison en performances entre les deux méthodes d’approximation

Indice	IAE	ITAE	ISE	ITSE
La méthode DE	1.309	18.202	0.025	0.169
La méthode d’Oustaloup	2.482	23.650	0.115	0.719

Comme le montrent les figures 3.1 et 3.2, et confirmé par les valeurs des indices de performance du tableau 3-2, l'approximation de par l’approche DE donne la meilleure performance que celle de la technique d'oustaloup malgré la réduction importante de l'ordre proposée dans notre approche a un modèle du cinquième ordre et de dixième ordre par la méthode d’Oustaloup.

**3.3.2. DE vs méthode de Charef**

Le second exemple proposé est un système linéaire du premier ordre continu d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est donnée par [40]:

$$F_2(s) = \frac{1}{(s + 1)^{0.75}} \tag{3.11}$$

La fonction de transfert (3.11) l'approximée par la méthode de Charef (méthode de singularité) en utilisant les équations (1.24 -28) permettent de générer la fonction de transfert approximée (3.12) sous les contraintes :

- Erreur de grandeur tolérée : 1,5 dB,
- Domaine de fréquence :  $[10^{-2}, 10^2]$  rad / s,
- Fréquence de coupure  $\omega_c = 1$  rad/s.

Dans ces conditions la fonction de transfert obtenue est représentée par l'équation :

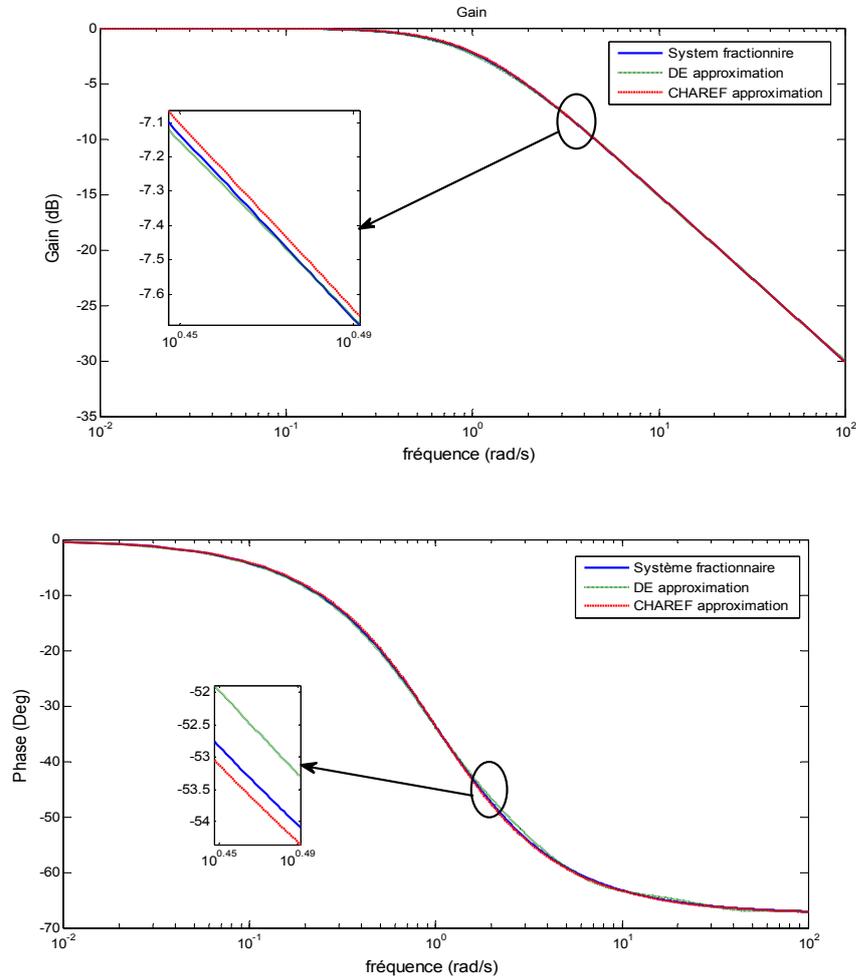
$$ch F_2^{app}(s) = \frac{4,642 \cdot 10^2 s^9 + 3,552 \cdot 10^{29} s^8 + 6,158 \cdot 10^{33} s^7 + 2,931 \cdot 10^{37} s^6 + 4,012 \cdot 10^{40} s^5 + 1,597 \cdot 10^{43} s^4 + 1,849 \cdot 10^{45} s^3 + 6,158 \cdot 10^{46} s^2 + 5,63 \cdot 10^{47} s + 1,166 \cdot 10^{48}}{2,512 \cdot 10^{28} s^{10} + 2,613 \cdot 10^{28} s^9 + 6,158 \cdot 10^{32} s^8 + 3,985 \cdot 10^{36} s^7 + 7,417 \cdot 10^{39} s^6 + 4,02 \cdot 10^{42} s^5 + 6,362 \cdot 10^{44} s^4 + 2,932 \cdot 10^{46} s^3 + 3,885 \cdot 10^{47} s^2 + 1,414 \cdot 10^{48} s + 1,166 \cdot 10^{48}} \tag{3.12}$$

La recherche par algorithme d'optimisation DE pour calculer les paramètres optimaux de la fonction de transfert (3.2) nous permet d'obtenir le vecteur des paramètres suivant :

$$\theta^* = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -4.552474479271549 \\ -4.517933307085452 \\ 0.315120213223303 \\ 0.425678830186406 \\ 0.020032141470495 \\ 0.000100000000000 \\ -4.549367841090670 \\ -1.009522336660871 \\ 0.596167689422095 \\ 0.051974053867064 \\ 0.000479601766028 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

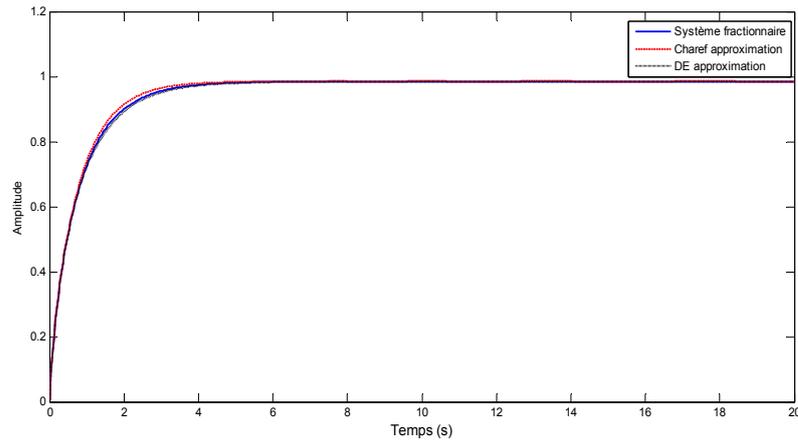
La figure (3.3) représente les diagrammes de bode du gain et de phase du système d'ordre fractionnaire (3.7) et les deux fonctions de transferts approximées en utilisant la méthode de

singularité pour aboutir à (3.12) et la technique DE pour trouver les paramètres (3.13) du modèle (3.2). La comparaison entre les courbes du gain et les courbes des phases montre que l'approximation obtenue par la méthode DE est bien meilleure que celle obtenue par la méthode de charef.



**Figure 3.3** Diagramme de Bode du système fractionnaire et son approximation par l'approche proposée et celle de la méthode du Charef

Les réponses indicielles du système fractionnaire proposé précédemment (3.11) et celles des différents modèles de l'exemple approximés par différentes méthodes est données par la figure 3.4.



**Figure 3.4** Réponse indicielles du système fractionnaire et son approximation par l’approche proposée et celle de la méthode du charef

En effet, la performance de l'approche DE proposée avec la réduction de l’ordre du modèle permet de donner un niveau de performance très compétitif par rapport à la méthode de charef.

**Tableau 3-3** Comparaison en performances entre les deux méthodes d’approximation

Indice	IAE	ITAE	ISE	ITSE
La méthode DE	0.1862	1.0911	0.0008	0.0022
La méthode de charef	0.2348	0.7334	0.0023	0.0049

Il est évident que la réduction de l'ordre implique une perte de performance, mais la précision de la technique DE permet de maintenir une bonne approximation comme illustré par le tableau 3.3 où les différents indices de performance obtenus sont plus faibles pour la technique DE proposée, à l'exception de l'indice ITAE.

### 3.3.3. DE vs méthode de Charef ‘deuxième ordre’

Considérons maintenant un système d'ordre fractionnaire linéaire du second ordre dont la fonction de transfert est donnée par [19] :

$$F_3(s) = \frac{1}{(0.01s^2 + 0.19s + 1)^{0.55}} \tag{3.14}$$

En se basant sur la méthode d’approximation de charef (fonction de singularité) pour les systèmes du second ordre (équations 1.35-38), la fonction de transfert approximée par cette dernière est donnée par :

$$\begin{aligned}
 &4,19 \cdot 10^{38} s^{14} + 6,43 \cdot 10^{42} s^{13} + 3,697 \cdot 10^{46} s^{12} + 1,04 \cdot 10^{50} s^{11} + 1,577 \cdot 10^{53} s^{10} + 1,351 \cdot 10^{56} s^9 + \\
 &6,691 \cdot 10^{58} s^8 + 1,938 \cdot 10^6 s^7 + 3,294 \cdot 10^{63} s^6 + 3,281 \cdot 10^{65} s^5 + 0,897 \cdot 10^{67} s^4 + 6,246 \cdot 10^{68} s^3 + \\
 &1,124 \cdot 10^{70} s^2 + 1,01 \cdot 10^{71} s + 3,503 \cdot 10^{71} \\
 \text{Ch } F_3^{ap}(s) = &\frac{\quad}{8,36 \cdot 10^{33} s^{16} + 2,035 \cdot 10^{38} s^{15} + 1,856 \cdot 10^{42} s^{14} + 8,288 \cdot 10^{45} s^{13} + 1,999 \cdot 10^{49} s^{12} + \\
 &2,728 \cdot 10^{52} s^{11} + 2,16 \cdot 10^{55} s^{10} + 1,006 \cdot 10^{58} s^9 + 2,775 \cdot 10^{60} s^8 + 4,562 \cdot 10^{62} s^7 + \\
 &4,477 \cdot 10^{64} s^6 + 2,624 \cdot 10^{66} s^5 + 9,158 \cdot 10^{67} s^4 + 1,883 \cdot 10^{69} s^3 + 2,215 \cdot 10^{70} s^2 + \\
 &1,375 \cdot 10^{71} s + 3,503 \cdot 10^{71}}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Lorsque les spécifications d'approximation sont:

- Erreur de grandeur tolérée :  $1 \text{ dB}$ ,
- Domaine fréquentiel :  $\omega \in [10^{-2} \ 10^2] \text{ rad / s}$ .
- Fréquence de coupure  $\omega_c = 1 \text{ rad / s}$ .

En utilisant l'algorithme DE pour trouver les paramètres optimaux du modèle approximé (3.12), les paramètres de ce modèle sont groupés dans un vecteur donné précédemment par l'équation (5.16).

Des réponses comparatives du diagramme de bode du système d'ordre fractionnaire (3.14) et les deux fonctions approximées par la méthode de singularité (3.15) et la technique proposée (3.16) sont représentées par la figure 3.5.

$$\theta^* = 10^{11} \cdot \begin{bmatrix} 1.714364329183685 \\ 0.209215147615226 \\ 0.001815278647107 \\ -0.000290403658218 \\ -0.000002269513543 \\ 01.000000000000000 \\ 1.714150025483689 \\ 0.026879336504952 \\ -0.002381130987253 \\ -0.000015179332574 \\ 0.000000000000000 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

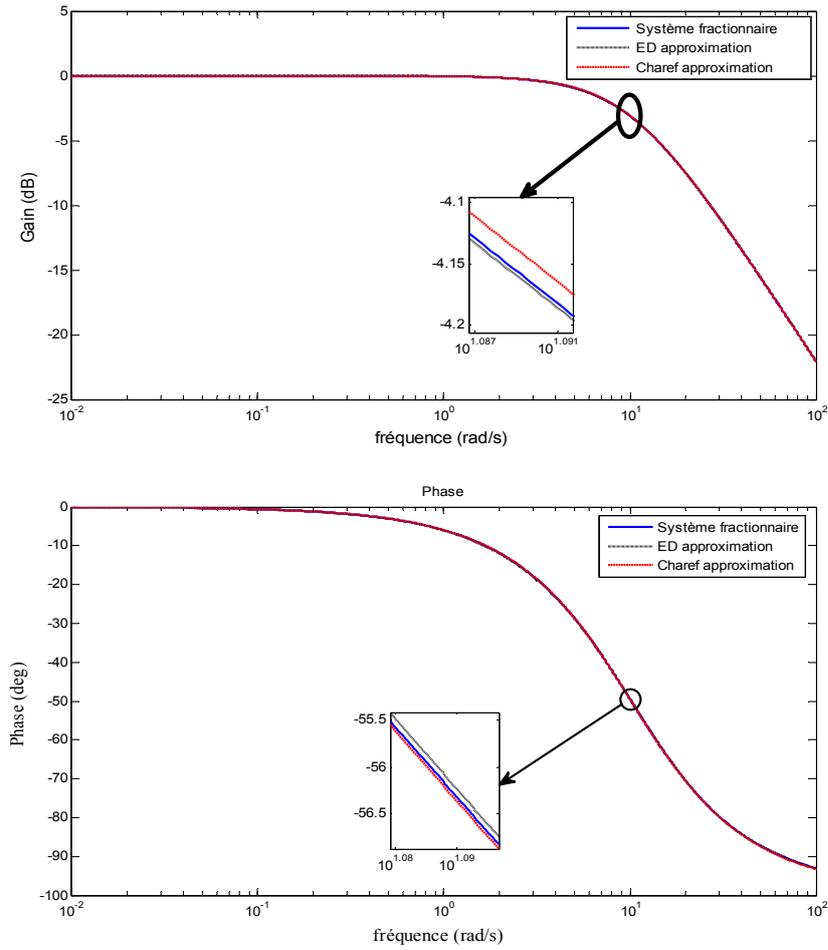


Figure 3.5 Diagramme de Bode du système fractionnaire et son approximation par l'approche proposée et celle de la méthode du Charef

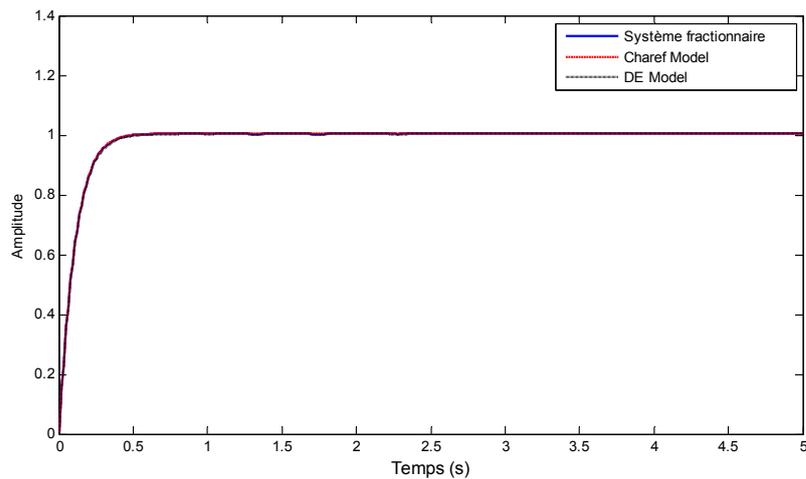


Figure 3.6 Réponse indicielles du système fractionnaire et son approximation par l'approche proposée et celle de la méthode du Charef

**Tableau 3-4** Comparaison en performances entre les deux méthodes d'approximation DE et Charef

Indice	IAE	ITAE	ISE	ITSE
La méthode DE	0.0499	0.0498	$4.4631.10^{-5}$	$4.1160.10^{-5}$
La méthode de charef	0.0709	0.1658	$1.1031.10^{-4}$	$1.1121.10^{-4}$

Le tableau 3-4 montre une comparaison quantifiée entre les méthodes DE et charef en utilisant un modèle d'ordre fractionnaire de second ordre. Pour tous les indices de performance on remarque que la méthode d'approximation et de réduction du modèle proposée par DE présente des valeurs d'erreur plus faibles. Cela démontre de nouveau la compétitivité de cette technique avec des méthodes classiques en tenant l'avantage de limiter l'ordre du modèle résultant.

**3.3.4. DE vs méthodes de Charef et Oustaloup pour un système fractionnaire fondamental**

Maintenant, considérons le système d'ordre fractionnaire fondamental dont la fonction de transfert est donnée comme [44]:

$$F_3(s) = \frac{1}{(0.1s)^{1.2} + 1} \tag{3.17}$$

Dans cet exemple on va effectuer une étude comparative entre les trois méthodes d'approximation étudiées précédemment, à savoir Charef, Oustaloup et DE. Les modèles du système fractionnaire sont approximés dans une bande de fréquence  $\omega \in [10^{-2} \ 10^{-2}]$ . L'ordre du dénominateur de la fonction de transfert approximée est 10.

L'approximation du système fractionnaire (3.17) selon Charef est donnée sous la forme suivante :

$${}_{ch}F_4^{ap}(s) = \frac{6,415.10^{23} s^8 + 3,042.10^{28} s^7 + 3,611.10^{32} s^6 + 1,321.10^{36} s^5 + 1,568.10^{39} s^4 + 6,121.10^{41} s^3 + 7,759.10^{43} s^2 + 3,029.10^{45} s + 2,961.10^{46}}{4,617.10^{20} s^{10} + 3,042.10^{25} s^9 + 5,019.10^{29} s^8 + 2,552.10^{33} s^7 + 4,221.10^{36} s^6 + 2,304.10^{39} s^5 + 4,142.10^{41} s^4 + 2,412.10^{43} s^3 + 4,497.10^{44} s^2 + 3,72.10^{45} s + 2,961.10^{46}} \tag{3.18}$$

Nous pouvons également approximer le système fractionnaire représenté par la fonction de transfert (3.17) en utilisant la méthode d'Oustaloup qui donne la fonction d'approximation suivante,

$$\begin{aligned}
 & s^9 + 1012s^8 + 1,817 \cdot 10^5 s^7 + 6,767 \cdot 10^6 s^6 + 5,386 \cdot 10^7 s^5 + \\
 {}_{Ous}F_4^{ap}(s) = & \frac{9,217 \cdot 10^7 s^4 + 3,391 \cdot 10^7 s^3 + 2,667 \cdot 10^6 s^2 + 4,352 \cdot 10^4 s + 125,9}{2,505s^{10} + 867,1s^9 + 5,408 \cdot 10^4 s^8 + 8,566 \cdot 10^5 s^7 + 8,601 \cdot 10^6 s^6 +} \quad (4.19) \\
 & 5,493 \cdot 10^7 s^5 + 9,231 \cdot 10^7 s^4 + 3,392 \cdot 10^7 s^3 + 2,667 \cdot 10^6 s^2 + 4,352 \cdot 10^4 s + \\
 & 125,9
 \end{aligned}$$

La méthode différentielle évolution est utilisée pour l'optimisation des paramètres du modèle proposé, après l'optimisation on obtient le vecteur du paramètre suivant :

$$\theta^* = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -2.407267478563445 \\ -0.008094044418957 \\ 0.055339212934548 \\ 0.006422861018111 \\ 0.000777097319824 \\ 0.000010000000000 \\ -2.408044991467207 \\ 0.003841695911245 \\ 0.090850746027396 \\ 0.002372343998927 \\ 0.000003900392555 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Le tracé comparatif du diagramme de bode du système d'ordre fractionnaire original donné par la fonction de transfert (3.17) et les trois fonctions approximées en utilisant la technique d'oustaloup (3.18) et la technique de la fonction de singularité de charef (3.19) et la méthode DE proposée (3.20) est donné par la figure 3.7. D'après les deux figures on remarque que le modèle approximé par la méthode DE donne des courbes dans le tracé de bode, ces courbes sont plus proche aux courbes données par le système fractionnaire réel.

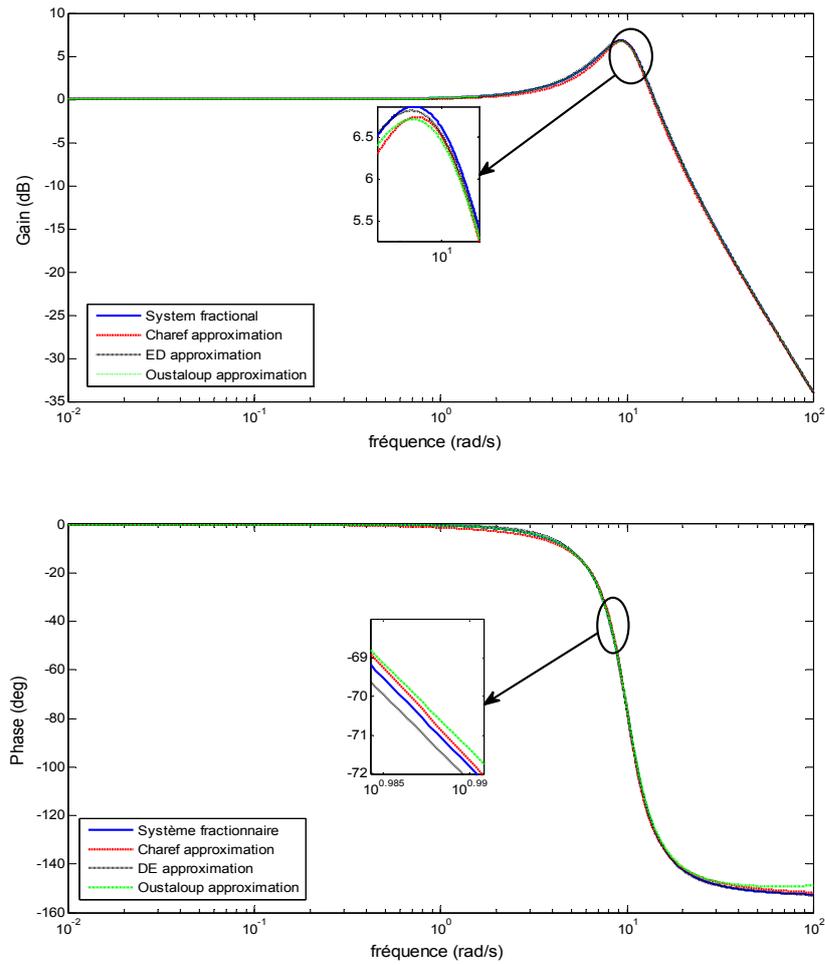


Figure 3.7 Diagrammes de Bode du modèle d'ordre fractionnaire fondamental, Charef, Oustaloup, modèle approximé par DE.

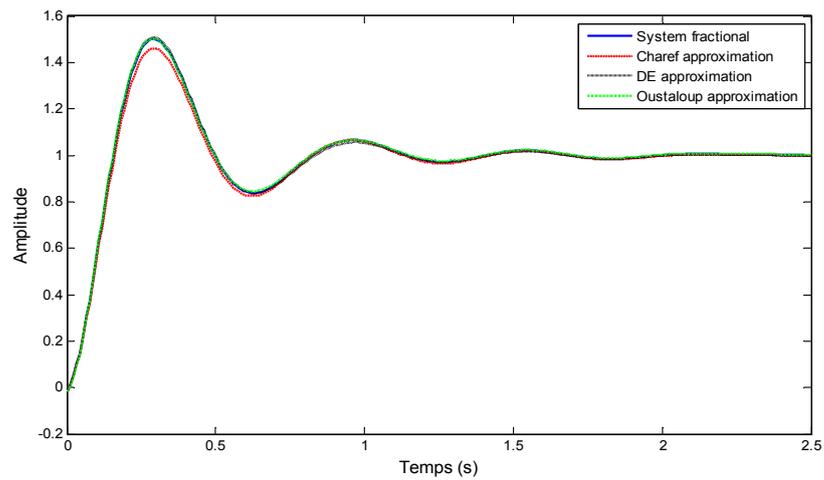


Figure 3.8 Réponse indicielles du système fractionnaire et ces approximations par l'approche proposée et celle de la méthode du Charef et Oustaloup

La figure 3.8 compare la réponse indicielle de (3.17), du système original, avec les réponses indicielles des trois approximations. On peut observer aussi que la réponse temporelle du système d'approximation obtenue par l'approche méta-heuristique est la plus proche de celle obtenue à partir du système d'ordre fractionnaire original.

Le tableau (3-5) montre une comparaison entre les performances obtenues par les trois approches à savoir l'approche proposée par DE, la fonction de singularité de charef et les méthodes d'oustaloup pour un système d'ordre fractionnaire linéaire fondamental. On remarque que pour tous les indices de performance, la méthode d'approximation et de réduction de modèle proposée par DE donne des valeurs d'erreur plus faibles. Cela démontre de nouveau la compétitivité de cette technique par rapport aux méthodes classiques, avec l'avantage de limiter l'ordre du modèle entier produit à l'ordre cinq.

**Tableau 3-5** Comparaison en performances entre DE, second ordre charef et oustaloup méthodes d'approximations

indice	IAE	ITAE	ISE	ITSE
La méthode DE	1.053	0.921	0.006	0.004
La méthode de charef	1.462	1.423	0.058	0.020
La méthode d'Oustaloup	1.248	1.351	0.007	0.005

### 3.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthode d'approximation du système fractionnaire. On a utilisé un modèle rationnel de cinquième ordre avec onze paramètres à optimiser par l'algorithme d'évolution différentielle pour représenter les systèmes fractionnaires à grande échelle. Quatre exemples numériques de simulations illustrent l'efficacité de l'algorithme d'approximation d'ordre réduit proposé ont été présentés. Les résultats obtenus à partir de l'approche évolution différentielle ont été comparés à ceux des techniques d'approximation d'Oustaloup et de Charef pour des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire. Ils ont montré clairement que l'approche proposée offre un niveau de performance très compétitif avec un modèle approximé modéré et beaucoup moins de paramètres. Cette technique proposée aura un impact positif important dans l'ingénierie des systèmes fractionnés, pour la commande, l'identification et la simulation.

# CHAPITRE 4

---

---

**Commande par PI D<sup>u</sup> basée sur l'optimisation  
mite-flamme avec la configuration  
d'adaptation MRAC**

## 4. Commande par $PI^\lambda D^\mu$ basée sur l'optimisation mite-flamme avec la configuration d'adaptation MRAC

### 4.1. Introduction

Ce chapitre propose une nouvelle méthode de conception du régulateur PID d'ordre fractionnaire (FOPID) sur la base de la configuration d'une méthode de commande adaptative à modèle de référence (MRAC). Pour ajuster les paramètres du régulateur  $PI^\lambda D^\mu$  en utilise une méthode de recherche appelée algorithme Mite-Flamme Optimisation (MFO). Les cinq paramètres du correcteur fractionnaire, à savoir les coefficients  $K_P$ ,  $K_I$  et  $K_D$  et les ordres fractionnaires intégral et dérivé  $\lambda$  et  $\mu$ , sont optimisés en évaluant un indice de performance.

L'objectif principal dans la commande à modèle de référence est de forcer un système à suivre un certain système choisi comme modèle de référence. Dans le monde réel, généralement un contrôleur adaptatif est conçu pour atteindre cet objectif [101,102]. Au cours des deux dernières décennies, la recherche dans les systèmes experts et intelligents et leurs applications dans l'environnement industriel a considérablement augmenté [103]. Néanmoins, la technique de commande dérivée proportionnelle-intégrale (PID) a toujours été largement utilisée dans de nombreuses applications industrielles telles que le contrôle des procédés, les moteurs, le contrôle de vol, etc. De nos jours, plus de 90% des boucles de contrôle dans l'industrie sont le contrôle PID. Cela est principalement dû au fait que le contrôleur PID possède des performances robustes pour faire face au changement global de processus de l'industrie, structure simple à comprendre facilement par les ingénieurs et facilité de conception et mise en œuvre [104,105]. La notion classique des régulateurs PID a été étendue à une structure plus flexible PID fractionnaire en ajoutant des actions fractionnelles-I et fractionnelles-D. En plus de définir les trois gains  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$ , on a deux autres paramètres qui signifie  $\lambda$  et  $\mu$  utilisés comme puissance de 'S' dans la partie intégrale et dérivée du contrôleur [106,107]. Podlubny [14] a démontré la meilleure réponse de ce type du régulateur par rapport au contrôleur PID classique, lorsqu'il est utilisé pour commande des systèmes d'ordre fractionnaire.

L'optimisation dans un espace à cinq dimensions se fait en trouvant une solution optimale de  $[K_P, K_I, K_D, \lambda, \mu]$  pour un système donné. En raison de la rugosité de la fonction objective, d'autres Les techniques classiques d'optimisation n'ont pas pu être mises en œuvre. Comparé à son

nombre entier contrepartie, la performance optimale du régulateur PID fractionnaire est meilleure. Par conséquent, il peut être utilisé dans de nombreuses applications.

Plusieurs approches ont été trouvées dans les littératures pour déterminer les cinq paramètres  $[K_P, K_I, K_D, \lambda, \mu]$  de ces contrôleurs : en utilisant l'Algorithme Génétique [108-109], la technique d'optimisation par essais de particules (PSO) [110,111], l'approche extrême-recherchée [112], l'évolution différentielle (DE) [113,35], l'algorithme de recherche Tabu [114], l'algorithme d'optimisation de la mouche des fruits [115], l'artificiel l'algorithme de la colonie des abeilles [116] ne sont que des exemples parmi ceux-ci. De nombreuses œuvres [117].

Dans ce chapitre, on propose une méthode d'optimisation inspirée de la nature appelée Moth-Flame Optimization (MFO) pour le réglage des paramètres du régulateur d'ordre fractionnaire  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . La technique est récemment présentée par Mirjalili [77], l'inspiration principale de cette méthode d'optimisation est la méthode de navigation des mites dans la nature.

#### 4.2. Systèmes de commande d'ordre fractionnaire

L'histoire des régulateurs est déjà longue et depuis sa première apparition à la fin du XIXe siècle, elle a attiré des chercheurs du monde entier en raison de sa simplicité et de sa capacité à fournir une excellente performance de commande. Le régulateur PID représente maintenant plus de quatre-vingt-dix pour cent des contrôleurs utilisés sur le marché [118,119]. Le régulateur standard PID qui comporte les actions proportionnelle, intégrée et dérivée est le contrôleur le plus utilisé dans les applications industrielles.

La structure classique du correcteur PID avec actions P, I, et D sur l'erreur, est décrite par la figure 4.1.

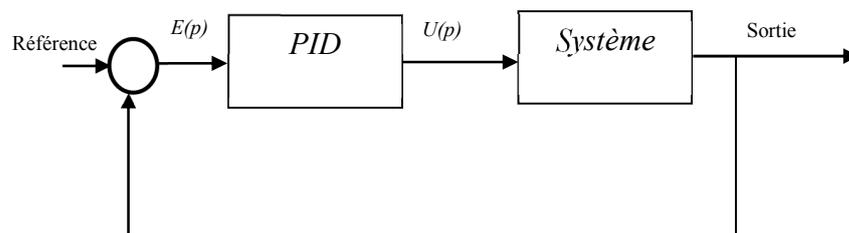


Figure 4.1 Régulateur PID standard

La commande  $u(t)$  dans sa forme classique est donnée par la relation (4.1) [52] dont l'objectif est d'obtenir un écart stationnaire nul  $e(t)$  s'il y a des changements sur la référence ou dans le cas d'une présence d'une perturbation [52].

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (4.1)$$

Un régulateur PID remplit essentiellement trois fonctions, Il fournit un signal de commande  $u(t)$  en tenant compte de l'évolution du signal de sortie par rapport à la consigne et il élimine l'erreur statique grâce au terme intégrateur en fin anticipe les variations de la sortie grâce au terme dérivateur. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (4.1) avec les conditions initiales nulles, la fonction de transfert du régulateur peut être exprimée par :

$$C(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] \quad (4.2)$$

On pose  $K_i = \frac{K_p}{T_i}$  et  $K_d = K_p T_d$  la relation (4.2) devienne ;

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (4.3)$$

La commande générée par le régulateur est la somme de trois termes dont les paramètres sont le gain proportionnel  $K_p$ , le temps intégral  $T_i$ , et le temps dérivatif  $T_d$ . Ces paramètres influencent la sortie du système de la manière suivante : Lorsque le gain  $K_p$  augmente, le temps de montée est diminué mais dans ce cas on remarque un dépassement important. Le temps de réponse varie peu et l'erreur statique est améliorée. L'augmentation du terme intégral ( $1/T_i$ ) a pour conséquence de réduire le temps de montée mais d'avoir un dépassement important et un temps de réponse assez lent. Par contre l'erreur statique est nulle. Donc plus ce paramètre est élevé, plus la réponse du système est ralentie. L'action intégrale rend le système moins stable. Lorsque le terme  $T_d$  augmente, le dépassement diminue et le temps de réponse est meilleur. L'action dérivée permet donc d'atténuer les oscillations et rend le système plus stable, etc. Le correcteur PID par sa simplicité, est très utilisé dans le monde industriel, néanmoins, ses performances deviennent insuffisantes. Récemment, Podlubny, pour améliorer le comportement de ce correcteur il a proposé un contrôleur PID fractionnaire. La structure de  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  à connexion parallèle des trois actions est montrée par la figure suivante :

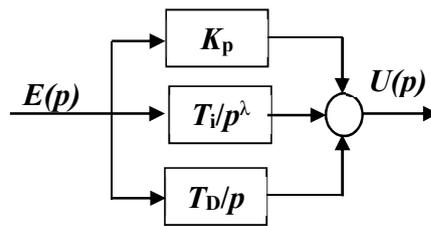


Figure 4.2 Structure du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$

Le régulateur PID fractionnaire est une généralisation du régulateur PID classique. Il comportant en plus un intégrateur fractionnaire d'ordre  $\lambda$  et un différentiateur fractionnaire d'ordre  $\mu$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  appartiennent à l'ensemble des nombres réels. Le signal de commande généré par le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  est donné par sa description temporelle suivante :

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\lambda} (e(t)) + T_d D^\mu (e(t)) \right] \tag{4.4}$$

La fonction de transfert de ce régulateur est donnée par la fonction suivante,

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \tag{4.5}$$

On remarque que le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  possède deux paramètres supplémentaires de réglage  $\lambda$  et  $\mu$ . Ceci le rend plus flexible et donne une opportunité pour mieux ajuster les propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire.

Il est évident que lorsqu'on remplace  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  dans l'équation (4.4), on obtient le correcteur PID classique en structure parallèle.  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$  donnent respectivement les correcteurs PI et PD classiques, et  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$  donne un gain. Tous ces types de correcteurs PID classiques sont des cas particuliers du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire donné par l'équation (4.5) comme le montre la figure 4.3.

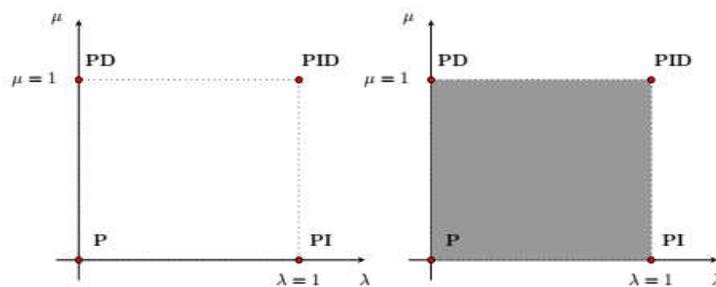


Figure 4.3 Régulateurs PID et PID fractionnaire

### 4.3. Ajustement des paramètres du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ par MFO

Suite au développement sans cesse croissant de l'informatique, les méthodes d'optimisation connaissent de nos jours un essor considérable. D'autre part, les contrôleurs PID fractionnaire se révèlent suffisants pour résoudre un grand nombre de problèmes de contrôle, particulièrement lorsque la dynamique du système est bénigne et que les exigences en terme de performances sont modestes. Du a l'absence d'une méthode de conception universelle du régulateur PID fractionnaire la majorité de control ce fait par ce type de correcteur donne une faible performance a cause du mauvais choix des paramètres du régulateur. Il y a plusieurs raisons qui poussent à développer des méthodes d'optimisation pour le réglage de contrôleurs PID fractionnaire. Il importera de saisir la finalité du problème de régulation. Deux types classiques de problèmes sont le suivi de consigne et le rejet de perturbations. Il importera également d'avoir une connaissance sur le type de perturbation et les incertitudes de modèle. Les spécifications sur le système de régulation devront être exprimées de manière adéquate en vue de la formulation d'un problème d'optimisation, qu'il conviendra alors de résoudre par voie algorithmique.

La commande adaptative a modèle de référence (MRAC) a été proposé pour résoudre un problème dans lequel les spécifications sont données en termes de modèle de référence qui indique comment la sortie du processus doit répondre au signal de commande. Le MRAC proposé par Whitaker en 1958 est une adaptation importante [119]. La boucle de retour ordinaire qui s'appelle la boucle interne composée du processus et du régulateur. Les paramètres du régulateur sont ajustés par la boucle d'adaptation en fonction de la différence entre la sortie de processus  $y$  et la sortie de modèle  $y_m$ . Un problème important associé à la commande adaptative a modèle de référence MRAC est de déterminer le mécanisme d'adaptation de façon à obtenir un système stable qui amène l'erreur à zéro. Le mécanisme de réglage des paramètres suivant, appelé règle MIT, a été utilisé à l'origine dans le MRAC [120]. Dans ce travail, une nouvelle stratégie de conception de contrôleur PID fractionnaire est proposée là où les paramètres du contrôleur sont ajustés de manière à ce que le système en boucle fermée corresponde à un modèle de référence souhaité. Les paramètres du régulateur PID fractionnaire sont estimés à l'aide d'une nouvelle technologie d'optimisation MFO, présentée ci-dessus. Schéma fonctionnel de base du contrôleur PID fractionnaire ajustée par MFO avec modèle de référence est donné par la Figure 4.4 [120].

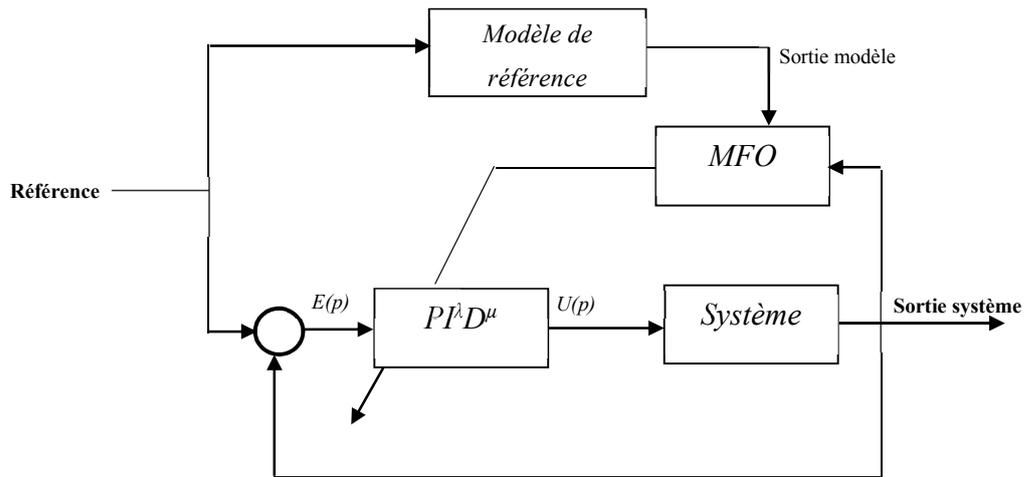


Figure 4.4 Schéma de principe du réglage du contrôleur PID fractionnaire à base de MRAC par la méthode MFO.

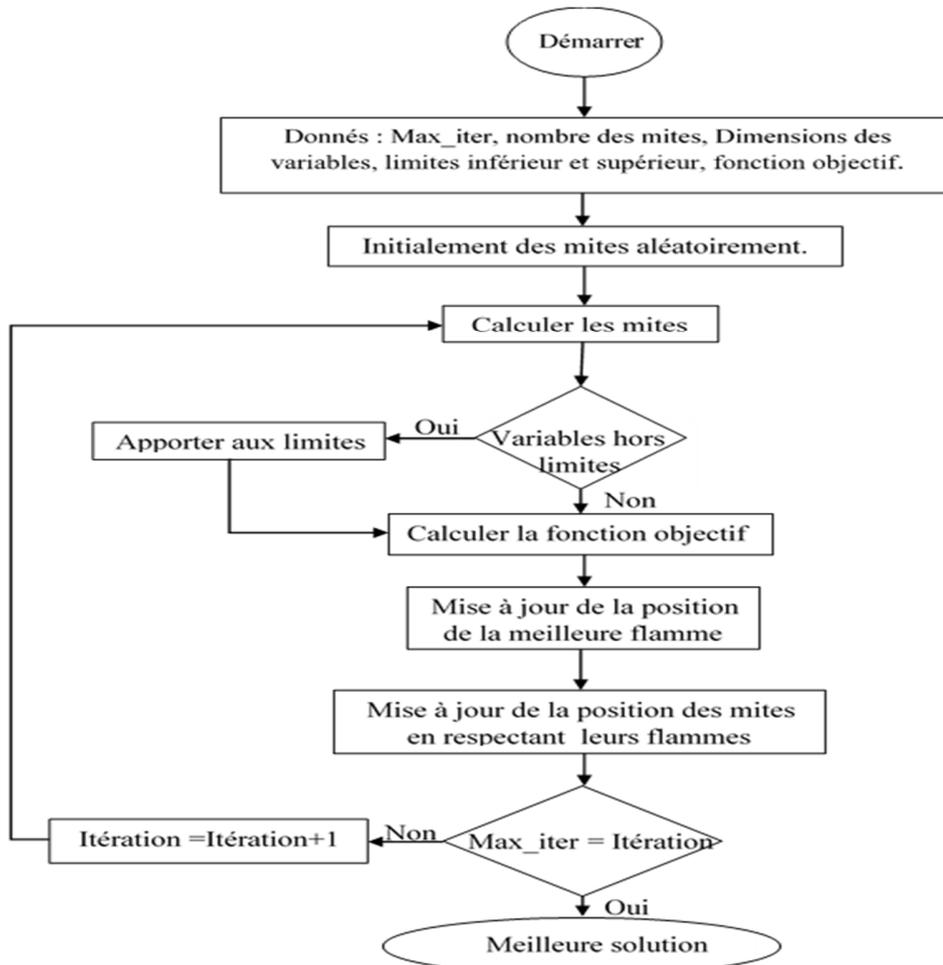


Figure 4.5 Algorithme d'optimisation Mite-Flamme.

La méthodologie proposée a été utilisée pour l'optimisation du paramètre  $[K_P, K_I, K_D, \lambda, \mu]$  en fonction la fonction de coût quadratique à minimiser suivante (J) [120].

$$J = \min \left\{ \sum (y_{model} - y_{system})^2 \right\} \quad (4.6)$$

#### 4.4. Exemples de Simulation

Après avoir présenté la nouvelle technique pour le réglage du  $PI^\lambda D^\mu$ , des exemples de simulation illustratifs avec différentes structures des systèmes et différentes structures de modèle de référence sont présentés pour montrer l'efficacité et la qualité de la commande  $PI^\lambda D^\mu$ . Pour l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire on a utilisé l'approximation d'Oustaloup. La dérivée fractionnaire et l'action intégrales sont approximées dans une bande de fréquence  $[\omega_b, \omega_h] = [10^{-3} 10^3]$  par une fonction de transfert rationnel d'ordre  $N=5$ .

##### 4.4.1. Exemple 1

Nous considérons le système d'ordre 1 à retard caractérisé par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{s + 2} \quad (4.7)$$

La fonction de transfert du modèle de référence est donnée par :

$$G(s) = \frac{10s + 100}{s^2 + 140s + 100} \quad (4.8)$$

La réponse temporelle obtenue à partir du processus sous la commande du régulateur PID fractionnaire à modèle de référence en utilisant l'algorithme d'optimisation(MFO) est tracée sur la Figure 4.6 et à la Figure 4.7. Les paramètres du correcteur PID fractionnaire sont déterminés sur la base de l'algorithme MFO comme suit  $K_P = 0.8596$ ,  $K_I = 0.7642$ ,  $K_D = 0.2947$ ,  $\lambda = 0.9320$  et  $\mu = 0.994$ .

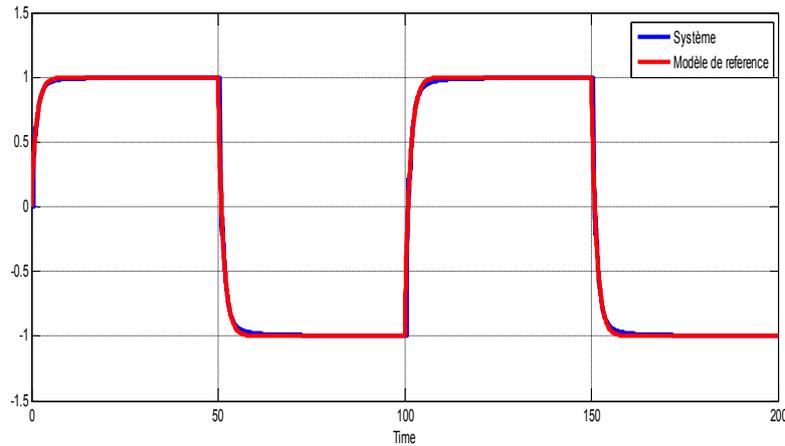


Figure 4.6 Sorties du système équation (4.7) en boucle fermée et modèle de référence équation (4.8)

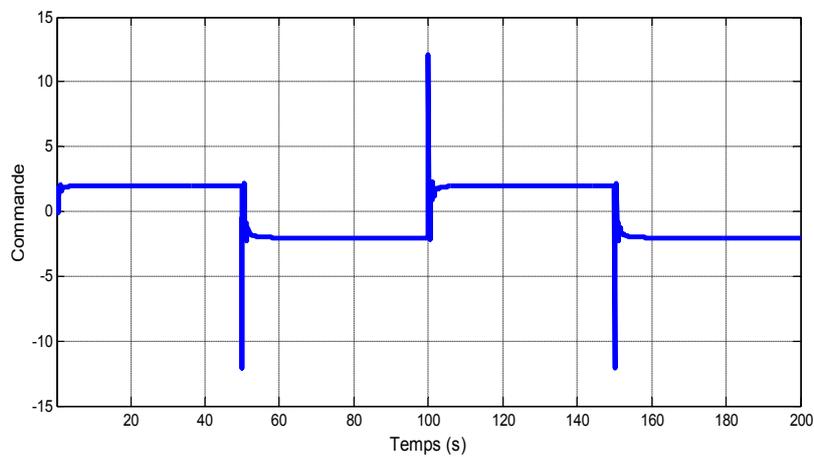


Figure 4.7 Signal de commande

#### 4.4.2. Exemple 2

On considère maintenant le système linéaire instable décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{s - 2} \tag{4.9}$$

Pour cette simulation on a choisi un modèle de référence d'ordre 2 suivant :

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \tag{4.10}$$

Les résultats de simulations obtenues de la repense temporelle du système sont données par les deux figure 4.8 et 4.9. Les paramètres du correcteur PID fractionnaire sont déterminés sur la base de l'algorithme MFO comme suit  $K_P = 5.004$ ,  $K_I = 2.100$ ,  $K_D = 1.502$ ,  $\lambda = 0.951$  et  $\mu = 0.001$ .

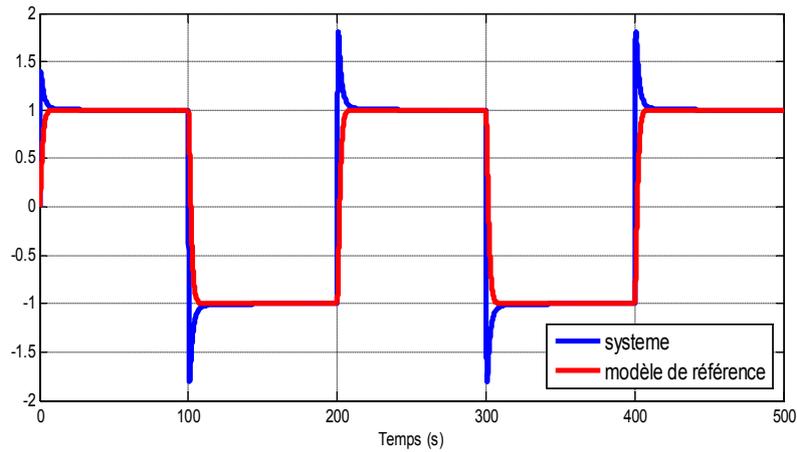


Figure 4.8 Sortie du système équation (4.9) en boucle fermée et modèle de référence équation (4.10)

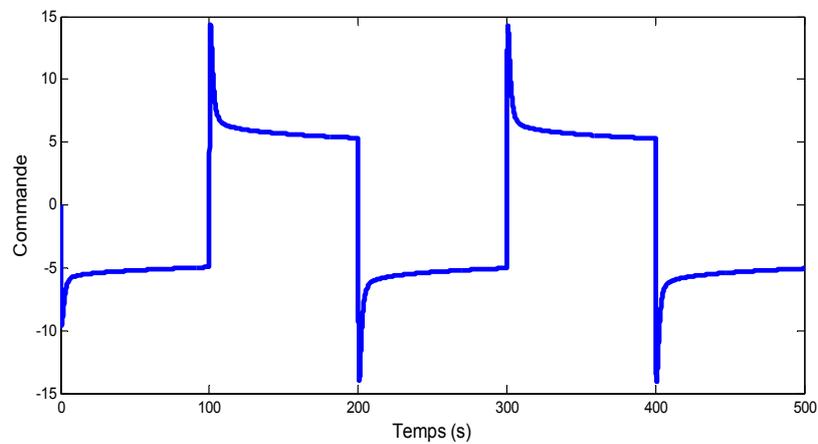


Figure 4.9 Signal de commande

#### 4.4.3. Exemple 3

Maintenant, nous allons présenter un modèle de référence d'ordre fractionnaire afin d'améliorer le comportement du système de commande et montrer par la même technique d'optimisation la validité du régulateur proposé.

$$G(s) = \frac{3600}{s^2 + 84.12s + 3600} \tag{4.11}$$

Comme dans la première tentative, nous sélectionnons le modèle de référence d'ordre fractionnaire tous simplement comme suit :

$$G_m(s) = \frac{3600}{s^{1.13} + 84.12s^{0.35} + 3600} \tag{4.12}$$

Les réponses dans le domaine temporel sont présentées dans la Figure 4.10 et la Figure 4.11. Les paramètres du correcteur PID fractionnaire sont déterminés à partir de l'algorithme MFO par  $K_P = 5.3805$ ,  $K_I = 9.4151$ ,  $K_D = 9.988$ ,  $\lambda = 0.5402$  et  $\mu = 0.003$ .

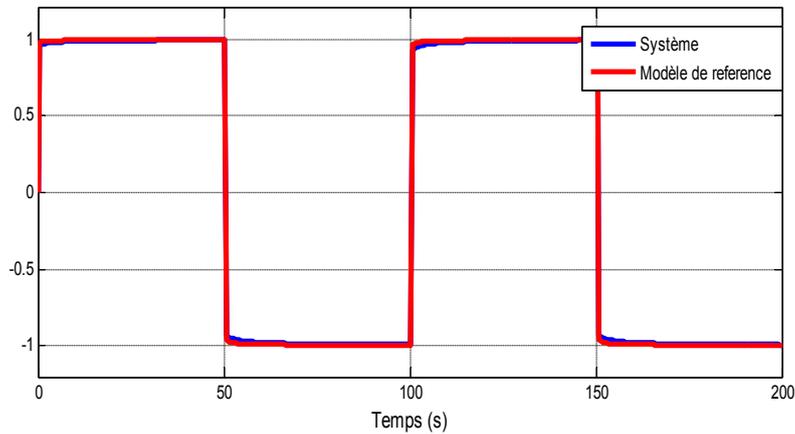


Figure 4.10 Sortie du système équation (4.11) en boucle fermée et le modèle de référence équation (4.12)

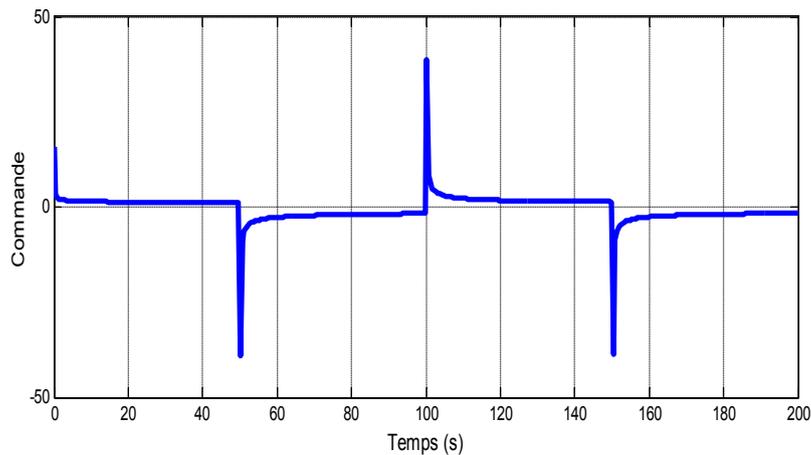


Figure 4.11 Signal de commande

#### 4.4.4. Exemple 4

Pour un système SISO de deuxième ordre, représenté par la fonction de transfert suivante

$$G(s) = \frac{k}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} \tag{4.13}$$

Avec  $k = 1$ ,  $\xi = 0.90$ ,  $\omega_n = 30$ ,  $\beta = 0.65$  et  $\omega_{max} = 100$

Dans ces conditions le modèle de référence est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_m(s) = \frac{k}{\left[ \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2.\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1 \right]^{\beta}} \tag{4.14}$$

On approxime la fonction de transfert du modèle fractionnaire donné l'équation (4.14) par l'approximation de charef donnée par les équations (1.29-1.34) on obtient les Réponses du système sont données par les deux figure 4.12 et 4.13. Les paramètres du correcteur PID fractionnaire sont déterminés sur la base de l'algorithme MFO par  $K_P = 2.1200$ ,  $K_I = 1.8330$ ,  $K_D = 1.5510$ ,  $\lambda = 0.9542$  et  $\mu = 0.9986$ .

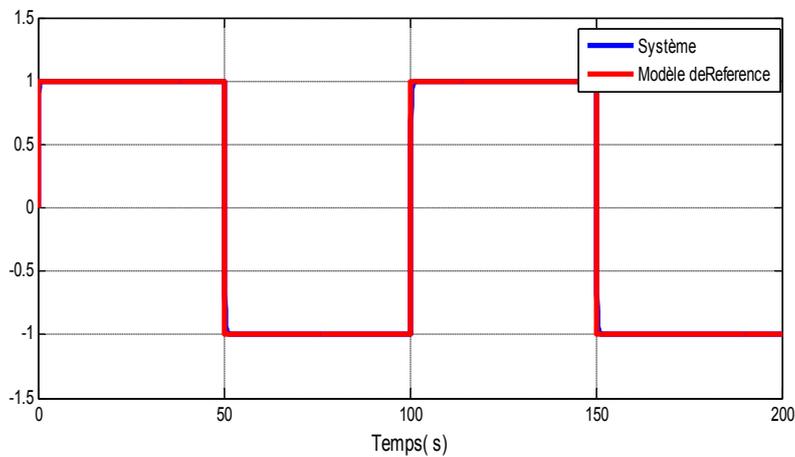


Figure 4.12 Sortie du système équation (13) en boucle fermée et le modèle de référence équation (14)

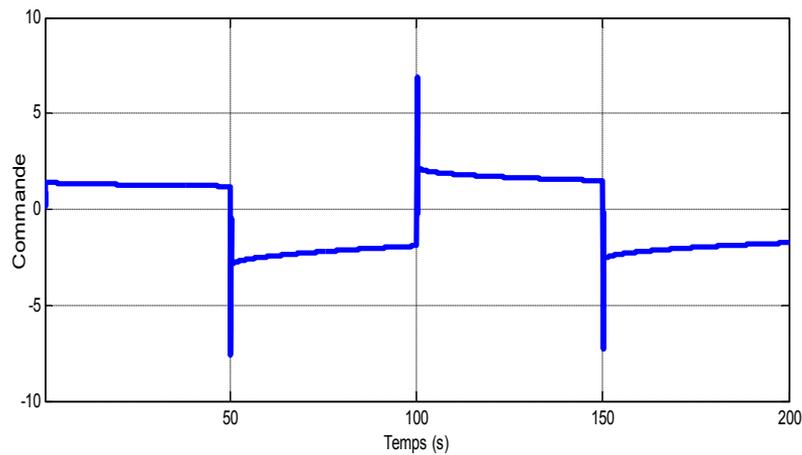


Figure 4.13 Signal de commande

4.4.5. Exemple 5

Dans ce qui suit de simulation un système de 4ème ordre est considéré [122], afin d'effectuer une comparaison avec d'autres méthodes d'optimisation. [122] à proposer un algorithme basé sur la recherche Tabu (TSA) pour l'optimisation et le réglage les paramètres du régulateur PID à ordre fractionnaire.

- La fonction de transfert du système est donnée par :

$$G(s) = \frac{27}{(s + 1)(s + 3)^3} \tag{4.15}$$

La réponse fréquentielle du système en boucle ouverte est illustrée par le diagramme Bode de la figure 4.14.

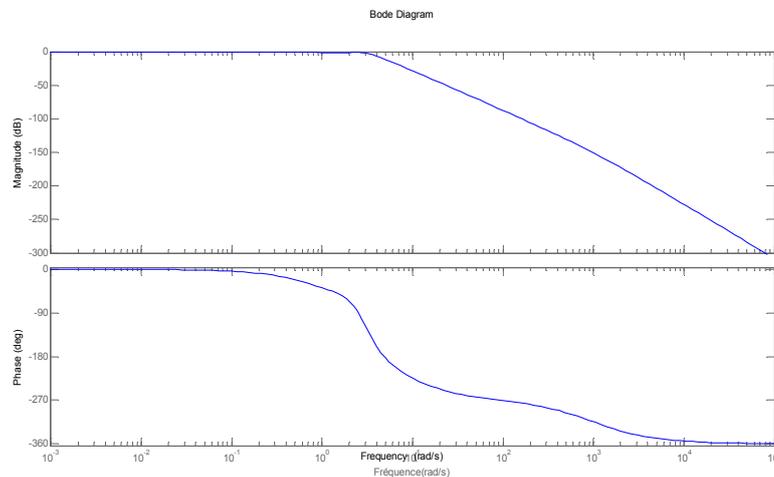


Figure 4.14 Diagramme de Bode du système commandé en boucle ouverte

On suppose maintenant un simple modèle de référence donné par l'équation suivante :

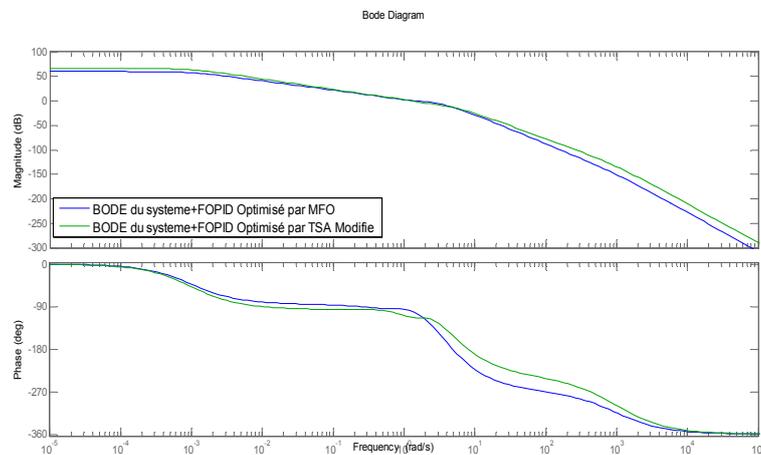
$$G_m(s) = \frac{1}{0.75s + 1} \tag{4.16}$$

Le tableau 4.1 et le tableau 4.2 donnent une évaluation comparative de l'ajustement des paramètres et de la performance du système de contrôle, tandis que les diagrammes comparatifs de bode du système et les réponses indicielles sont représentés respectivement à la figure 4.15 et à la figure 4.16.

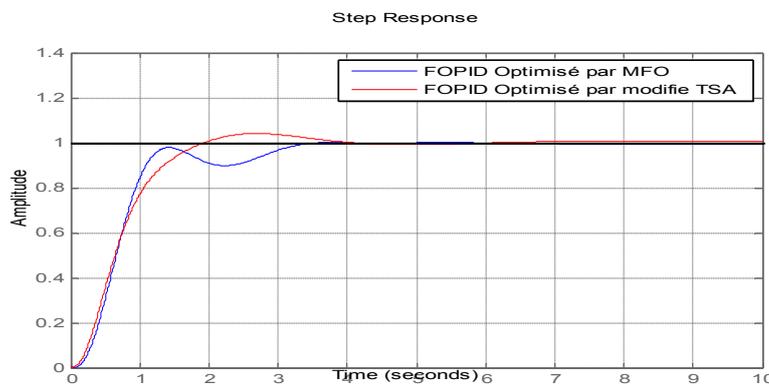
**Tableau 4-1** Paramètres du régulateur FOPID générés par l'algorithme MFO proposé et par l'algorithme TSA modifié.

	$K_p$	$K_I$	$K_d$	$\lambda$	$\mu$
Les paramètres du FOPID trouvés par MFO	2.121	1.383	1.550	0.954	0.998
Les paramètres du FOPID trouvés par (TSA)	2.940	0.414	0.011	1.240	1.002

Les paramètres du correcteur FOPID présentés dans le tableau 4.1, qui sont optimisés par la technique MFO donnent une meilleure performance que les résultats obtenues en utilisant l'algorithme TSA [121]. On peut constater une amélioration de l'indice de performance ITAE de 7%. Ceci est confirmé par la valeur de la fonction Fitness  $J_{MFO} = 51.95$  qui est plus faible que dans le cas de l'algorithme TSA  $J_{MFO} = 59.52$ .



**Figure 4.15** Diagramme de Bode du système de l'équation (4.15) avec le régulateur FOPID optimisé par les deux méthode MFO et TSA

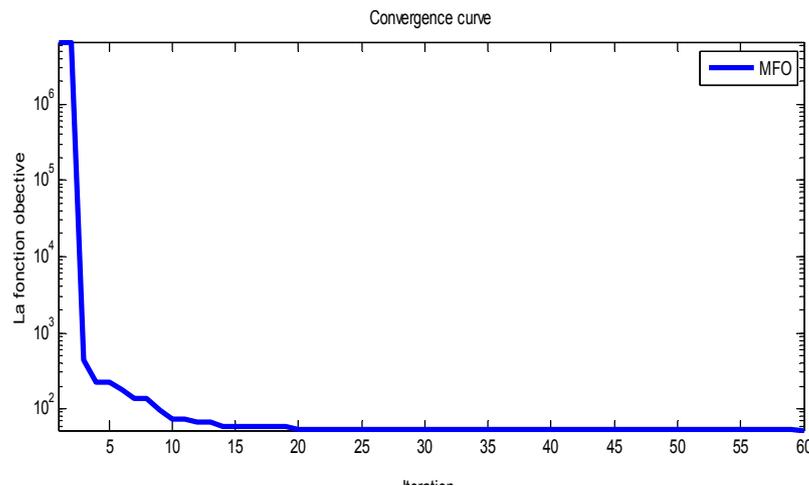


**Figure 4.16** Réponse indicielle du système de l'équation (4.15) commandé par l'algorithme MFO proposé et TSA modifié

**Tableau 4-2** Comparaison des performances dans le domaine temporel

Methoded'optimisation	D(%)	Tr (s)	Ts (s)	CritèreITAE
MFO	0.270	0.788	3.130	70.240
TSA modifiée	4.160	1.090	3.490	74.900

Les marges de stabilité dans les deux cas sont données dans le tableau 4.2 montrant la robustesse d'une telle stratégie de contrôle d'ordre fractionnaire. La figure 4.16 des réponses aux étapes comparatives et la figure 4.2 de la fonction objective démontrent clairement l'avantage de la stratégie de contrôle d'accord proposée.



**Figure 4.17** La fonction objective pour l’algorithme proposé sur les paramètres du FOPID

En outre, nous avons effectué un test de robustesse pour étudier l'effet de contrôle du contrôleur fractionnaire en cas de perturbation externe pour un signal d'entrée additif donné par,

$$d(t) = 0.02\sin(\pi / 2t) + 0.01\sin(2.5t) \tag{4.17}$$

La réponse du système est illustrée à la figure 4.11 montre évidemment la capacité anti-interférence du contrôleur

**Tableau 4-3** Marge de stabilité de l’exemple 5

Méthode d'optimisation	Marge du gain MG	GM Fréquence Rad/s	Marge de phase	PM Fréquence Rad/s
MFO	13.1	4.84	74.4	1.57
Modified TSA	20.8	8.03	66.3	1.32

#### 4.4.6. Exemple 6

Dans l'exemple suivant, nous considérons un modèle d'ordre supérieur d'un système instable.

1- Modèle du système

Le modèle du système est décrit par la fonction de transfert suivante,

$$G(s) = \frac{s^4 + 23s^3 + 182s^2 + 568s + 576}{s^6 + 21s^5 + 160s^4 + 510s^3 + 469s^2 - 531s - 630} \tag{4.18}$$

Le comportement instable de ce système est illustré par le diagramme de Bode en boucle ouverte de la figure 4.19.

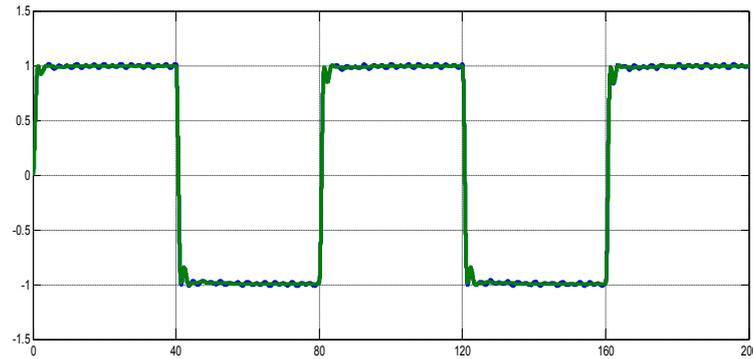


Figure 4.18 Réponse du système de l'équation (18) avec la présence d'une perturbation

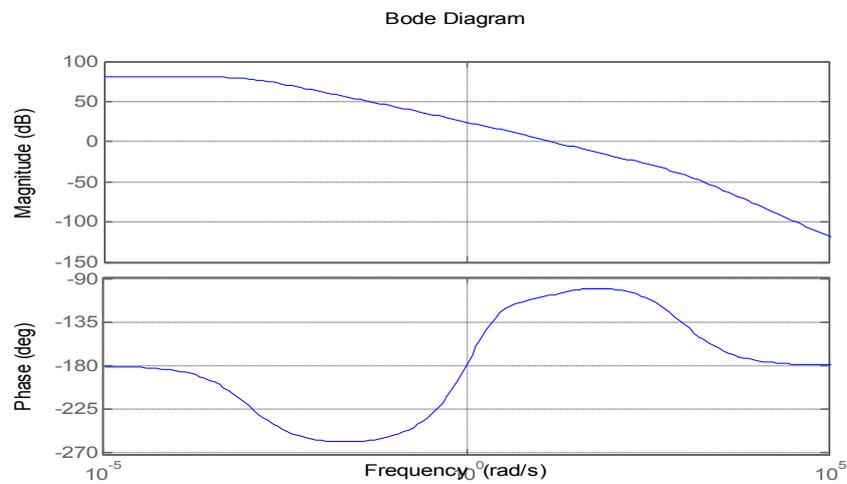


Figure 4.19 Diagramme de Bode du système instable en boucle ouverte

On garde la même forme du modèle de référence donné par l'équation (4) :

$$G(s) = \frac{k}{\left[ \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2.\xi \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right]^\beta} \tag{4.19}$$

Avec  $k = 1$ ,  $\beta = 0.65$  et  $\omega_{max} = 100$ ,  $\xi = 0.90$ ,  $\omega_n = 25$ ,

Le diagramme de Bode en boucle fermée avec le contrôleur résultant en utilisant l'optimisation MFO est donné par la Figure 4.20.

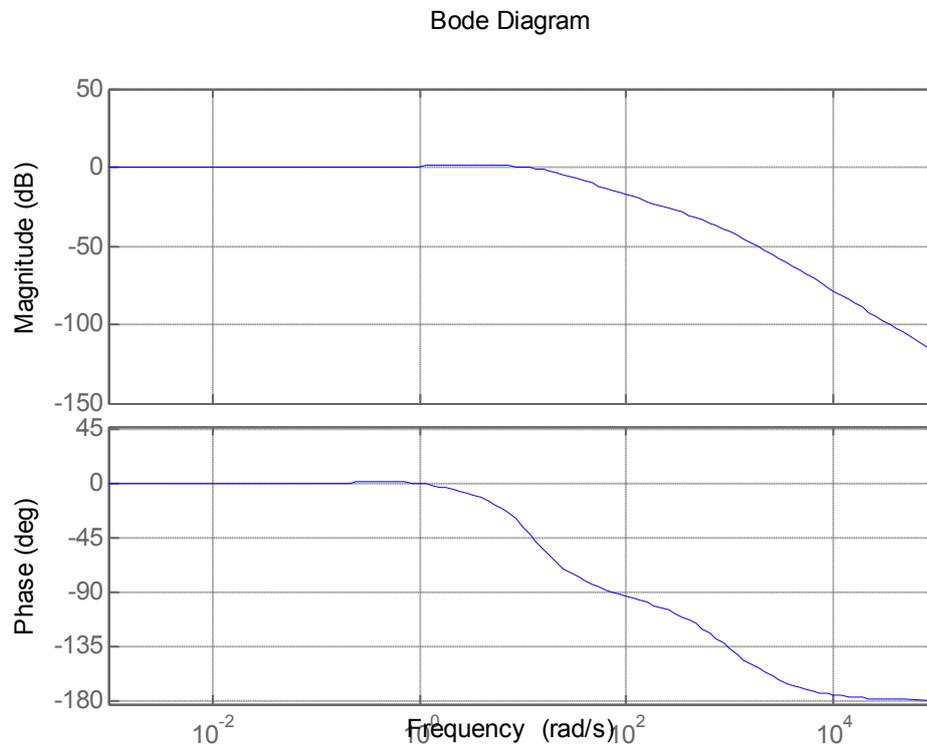


Figure 4.20 Diagramme de Bode du système instable en boucle fermée

Les paramètres du contrôleur PID fractionnaire sont déterminés comme selon la configuration présentée par :  $K_P = 30.2230$ ,  $K_I = 8.9577$ ,  $K_D = 15.4316$ ,  $\lambda = 0.9336$  et  $\mu = 0.9681$ .

Nous obtenons la réponse du temps système donnée dans la Figure 4.21 et la Figure 4.22.

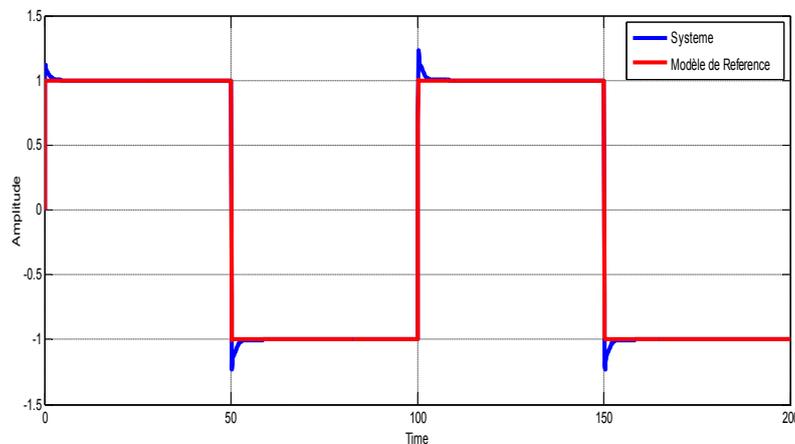


Figure 4.21 Réponse du système de l'équation (18) avec la présence d'une perturbation

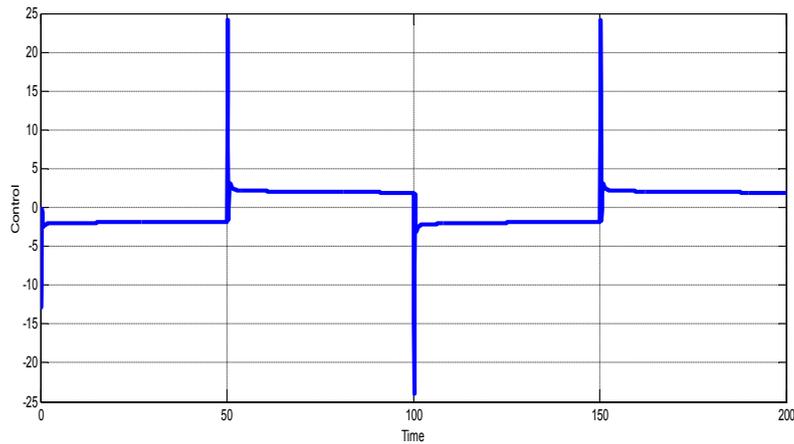


Figure 4.22 Signal de commande

#### 4.5. Conclusion

Ce chapitre suggère une nouvelle méthode très efficace pour le réglage automatique de paramétrage du contrôleur PID ordre fractionnaire sur la base d'une configuration MRAC. L'optimisation par la méthode MFO dans notre travail permet la résolution du problème de détermination des paramètres du régulateur fractionnaire avec une grande efficacité. Nous montrons par des exemples comparatifs que l'on peut acquérir de meilleurs résultats d'optimisation de paramètres pour un contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire si en utilisant cette approche.

# CHAPITRE 5

---

---

**Commande par mode glissant adaptatif flou  
pour la stabilisation robuste d'une classe de  
systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire**

## **5. Commande par mode glissant adaptatif flou pour la stabilisation robuste d'une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire**

### **5.1. Introduction**

Au cours des trois dernières décennies, le sujet du calcul fractionnaire a été largement étudié [6]. Cette popularité croissante et importante est due principalement à ses applications démontrées dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie [5,122,123]. Un grand nombre de chercheurs sont concentrés sur l'étude de la dynamique des systèmes chaotique d'ordre fractionnaire [124,125,126]. De nombreuses stratégies de contrôle ont été proposées dans la littérature dans ce contexte pour la stabilisation et la synchronisation du chaos dans les systèmes d'ordre fractionnaire non linéaire tels que : les contrôleurs linéaires d'ordre fractionnaire [127], la commande par  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire [128], la commande adaptative [129], la commande  $H^{\infty}$  adaptative [130], la commande adaptative floue [30], la commande par backstepping adaptatif [131] ...

Récemment, la commande par mode glissant (SMC) a attiré beaucoup d'attention pour la commande et la synchronisation des systèmes d'ordres fractionnaires chaotiques [6,130,132]. Cela s'explique généralement par sa robustesse face aux variations de paramètres et aux perturbations externes dans les conditions correspondantes [125,133]. En effet, la robustesse d'un système de commande est très importante car il existe diverses incertitudes dans les applications pratiques, en plus que les bruits sont omniprésents dans les systèmes naturels et synthétiques [134]. Sur la base de la théorie de la stabilité de Lyapunov, la commande par mode glissant est avantageuse pour cette considération, car elle peut changer la loi de contrôle très rapidement pour conduire les états du système à partir de tous les états initiaux vers une surface de glissement spécifiée par l'utilisateur [135].

Les systèmes flous ont été largement associés à la commande par mode glissant pour faire face aux incertitudes et aux perturbations dans le cas des systèmes classiques et d'ordre fractionnaire [29,130,136]. En plus des lois adaptatives sont introduites pour améliorer les performances des différentes structures de commandes proposées.

Dans le cas d'absence d'une méthode d'adaptation numérique on fait appel aux algorithmes d'optimisation.

Nous proposons dans ce chapitre trois types de commandes dans le but de stabiliser une classe des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

**5.2. Description générale du système chaotique d'ordre fractionnaire**

Depuis que le premier modèle chaotique a été trouvé par Lorenz en 1963, les chercheurs sont engagés à construire de nouveaux systèmes chaotiques et analyser leurs comportements dynamiques. De nombreux systèmes chaotiques sont proposés dans la littérature, tels que le système Chen, le système Liu, le système Lü et le système de Lorenz [10,11]. Les modèles de ces systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire sont montrés dans le tableau 5.1.

**Tableau 5-1** Liste des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire publiés, qui peuvent être décrits par le modèle général proposé (5.1).

Name	Model	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$	$h(x, y, z)$	$\phi(x, y, z)$
Chen's system	$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = a.(x - y) \\ D_t^{q_2} y(t) = d - x.z + c.y \\ D_t^{q_3} z(t) = x.y - b.z \end{cases}$	$a$	$d - x.z + c.y$	$x$	$0$
Lorenz system	$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = a.(y - x) \\ D_t^{q_2} y(t) = x(b - z) - y \\ D_t^{q_3} z(t) = x.y - c.z \end{cases}$	$a$	$x(b - z)$	$x$	$0$
Lu's system	$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = a.(y - x) \\ D_t^{q_2} y(t) = -x.z + c.y \\ D_t^{q_3} z(t) = x.y - b.z \end{cases}$	$a$	$-x.z + c.y$	$x$	$0$
Liu system	$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = -a.x - e.y^2 \\ D_t^{q_2} y(t) = -k.x.z + b.y \\ D_t^{q_3} z(t) = m.x.y - c.z \end{cases}$	$-e.y$	$-k.x.z + b.y$	$x$	$0$
Financial system	$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = z + x.(y - a) \\ D_t^{q_2} y(t) = 1 - b.y - x^2 \\ D_t^{q_3} z(t) = -x - c.z \end{cases}$	$x$	$1 - x^2$	$0$	$1$

La forme générale des systèmes chaotiques tridimensionnels d'ordre fractionnaire peut être exprimée par :

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = y.f(x, y, z) + z.\phi(x, y, z) - \alpha x \\ D_t^{q_2} y(t) = g(x, y, z) - \beta.y(t) \\ D_t^{q_3} z(t) = y.h(x, y, z) - x.\phi(x, y, z) - \gamma z \end{cases} \quad (5.1)$$

Où  $0 < q_i < 1, (i = 1, 2, 3)$  sont des ordres fractionnaires,  $x, y$  et  $z$  représentent les variables d'état, les fonctions  $f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)$  et  $\phi(\cdot)$  sont considérées comme des fonctions vectorielles non linéaires appartenant à l'espace  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des constantes connues.

### 5.3. Commande par mode glissant adaptatif des systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires

Considérons le système chaotique d'ordre fractionnaire donné par (5.1). Nous montrons que ce système peut être stabilisé sous la loi de commande par mode glissant adaptatif additionnée à la deuxième équation dans la représentation d'état. Alors (5.1) peut être réécrite comme suit [31] :

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = y.f(x, y, z) + z.\phi(x, y, y) - \alpha x \\ D_t^{q_2} y(t) = g(x, y, z) - \beta.y(t) + u(t) \\ D_t^{q_3} z(t) = y.h(x, y, z) - x.\phi(x, y, y) - \gamma z \end{cases} \quad (5.2)$$

La procédure de la conception d'une commande par mode glissant comporte deux étapes : La première étape consiste à construire une surface de glissement qui représente la dynamique du système souhaité.

La deuxième étape consiste à développer une loi de commande de commutation pour rendre possible le glissement sur chaque point de la surface de glissement. Tous les états extérieurs de la surface sont entraînés pour atteindre la surface en un temps fini [138].

Nous proposons une surface de glissement de la forme suivante :

$$S(t) = D^{q_2-1} y(t) + \int_0^t \psi(\tau) d\tau \quad (5.3)$$

Où  $\psi(t)$  est une fonction décrite par :

$$\psi(t) = x(t).f(x, y, z) + z(t).h(x, y, z) + \beta.y(t) \quad (5.4)$$

Pour la technique de commande par mode glissant, la surface de glissement et sa dérivée doivent satisfaire les deux conditions :

$$S(t) = D^{q_2-1} y(t) + \int_0^t \psi(t) dt = 0 \quad (5.5)$$

Et

$$\dot{S}(t) = 0 \Rightarrow D^{q_2} y(t) = -\psi(t) \quad (5.6)$$

Selon la théorie du mode glissant et si on utilise les formules (5.2) et (5.6), on choisit la loi de commande équivalente suivante :

$$u_{eq}(t) = -x.f(x,y,z) - z.h(x,y,z) - g(x,y,z) \quad (5.7)$$

Pour aboutir à concevoir une loi de commande par mode glissant, qui amène tous les états sur la surface de glissement, une loi de commande discontinue peut être choisie comme suit :

$$u_r(t) = -K_r \cdot \text{sgn}(S(t)) \quad (5.8)$$

Où

$$\text{sgn}(S(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si } S(t) < 0 \\ 0 & \text{si } S(t) = 0 \\ +1 & \text{si } S(t) > 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

$K_r$  représente le gain du contrôleur ou le gain du glissement ( $K_r > 0$ ). Enfin, la structure de la commande globale choisie est la suivante :

$$u_s(t) = u_{eq} + u_r(t) \quad (5.10)$$

Nous pouvons alors établir le résultat suivant,

- **Théorème 5.1.**

Le système chaotique fractionnaire nominal (5.2) est stabilisé de manière asymptotique sous la loi de contrôle coulissante proposée (5.10).

- **Preuve**

Pour étudier la stabilité globale du système (5.2) et obtenir une loi d'adaptation du gain, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} S^2 + \frac{1}{2\delta} \tilde{k}^T \tilde{k} \quad (5.11)$$

Où  $\delta$  est une constante positive et  $\tilde{k} = k - k^*$ ,  $k^*$  est la valeur optimale du gain de la commande par mode glissant.

La dérivée de (5.11) dans le temps donne :

$$\dot{V} = S\dot{S} + \frac{1}{\delta} \dot{k} \cdot \tilde{k} \quad (5.12)$$

On remplace la surface de glissement par sa formule dans l'équation précédente en obtient ;

$$\begin{aligned}\dot{V} &= S(t) \cdot \frac{d}{dt} \left\{ D^{q_2-1} y(t) + \int_0^t x(t) \cdot f(x, y, z) + z(t) \cdot h(x, y, z) + \beta \cdot y(t) dt \right\} + \frac{1}{\delta} \dot{k} \tilde{k} \\ &= S(t) \cdot \left\{ D^{q_2} y(t) + x(t) \cdot f(x, y, z) + z(t) \cdot h(x, y, z) + \beta \cdot y(t) \right\} + \frac{1}{\delta} \dot{k} \tilde{k}\end{aligned}\quad (5.13)$$

A partir des équations (5.7), (5.8), (5.10) et (5.13)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= S(t) \cdot \left[ -k \cdot \text{sgn}(S(t)) + \frac{1}{\delta} \dot{k} \tilde{k} \right] \\ &= k \cdot |S(t)| + \frac{1}{\delta} \dot{k} k - \frac{1}{\delta} \dot{k} k^* \\ &= k \cdot \left[ |S(t)| - \frac{1}{\delta} \dot{k} \right] - \frac{1}{\delta} \dot{k} k^* \\ &= -\frac{1}{\delta} \dot{k} k^*\end{aligned}\quad (5.14)$$

Si l'on choisit la loi d'adaptation suivante :

$$\dot{k} = \delta |S(t)| \quad (5.15)$$

L'équation (5.14) devient :

$$\dot{V} = -|S(t)| k^* < 0 \quad (5.16)$$

La loi de commande (5.10) permet donc d'assurer la stabilité du système (5.1).

On suppose maintenant que le système (5.2) subit d'une perturbation externe et une incertitude sur l'état, l'équation (5.2) devient :

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = y \cdot f(x, y, z) + z \cdot \phi(x, y, y) - \alpha x \\ D_t^{q_2} y(t) = g(x, y, z) + \Delta g(x, y, z) - \beta \cdot y(t) + d(t) + u(t) \\ D_t^{q_3} z(t) = y \cdot h(x, y, z) - x \cdot \phi(x, y, y) - \gamma z \end{cases} \quad (5.17)$$

Ou  $\Delta g(x, y, z)$  et  $d(t)$  sont supposés bornées, la borne supérieure de l'incertitude  $\Delta g(x, y, z)$  est  $\delta_1$  c.-à-d.  $|\Delta g(x, y, z)| \leq \delta_1$  et la perturbation  $d(t)$  est bornée par  $\delta_2$ , c.-à-d.  $|d(t)| \leq \delta_2$ .

La dérivée de la fonction candidate de Lyapunov proposée précédemment par l'équation (5.11) donne :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= S\dot{S} + \frac{1}{\delta} \dot{k} \tilde{k} \\
 &= S(t) \cdot \frac{d}{dt} \left\{ D^{q_2-1} y(t) + \int_0^t x(t) \cdot f(x, y, z) + z(t) \cdot h(x, y, z) + \beta \cdot y(t) dt \right\} + \frac{1}{\delta} \dot{k} \tilde{k} \quad (5.18) \\
 &= S(t) \cdot \left\{ D^{q_2} y(t) + x(t) \cdot f(x, y, z) + z(t) \cdot h(x, y, z) + \beta \cdot y(t) \right\} + \frac{1}{\delta} \dot{k} \tilde{k}
 \end{aligned}$$

Dans le cas du système (5.17), la deuxième variable d'état est donnée par:

$$D^{q_2} y(t) = g(x, y, z) + \Delta g(x, y, z) - \beta \cdot y(t) + d(t) + u(t) \quad (5.19)$$

Si on remplace (5.19) dans (5.18) on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= S(t) \cdot [\Delta g(x, y, z) + d(t) - k \cdot \text{sgn}(S(t))] + \frac{1}{\delta} \dot{k} \tilde{k} \\
 &= S(t) \cdot [\Delta g(x, y, z) + d(t)] - k \cdot |S(t)| + \frac{1}{\delta} \dot{k} k - \frac{1}{\delta} \dot{k} k^* \\
 &= k \cdot \left[ |S(t)| - \frac{1}{\delta} \dot{k} \right] - \frac{1}{\delta} \dot{k} k^* + S(t) \cdot [\Delta g(x, y, z) + d(t)] \quad (5.20) \\
 &= -\frac{1}{\delta} \dot{k} k^* + S(t) \cdot [\Delta g(x, y, z) + d(t)] \\
 &= -|S(t)| k^* + S(t) \cdot [\Delta g(x, y, z) + d(t)] \\
 &\leq -|S(t)| [k^* - \delta_1 - \delta_2]
 \end{aligned}$$

Le système (5.17) sous la commande par mode glissant adaptatif (5.10) et la loi adaptation (5.15) est globalement asymptotiquement stable lorsque  $k^* > \delta_1 + \delta_2$ , dans ce cas  $\dot{V} < 0$ .

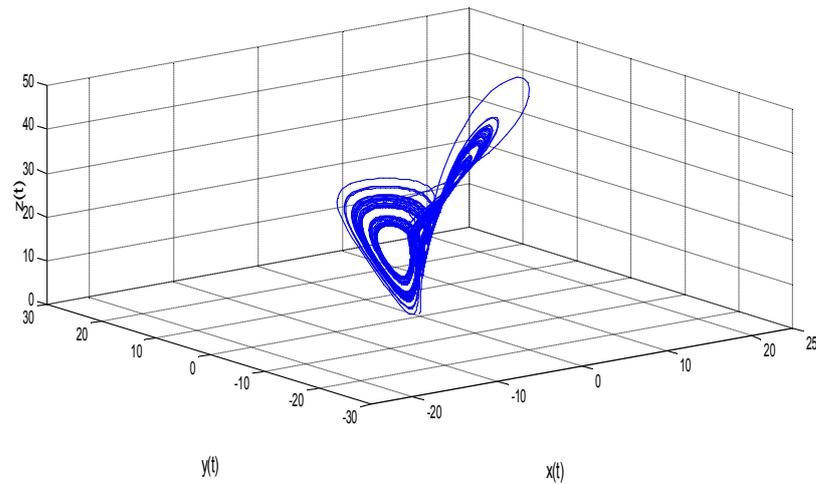
### 5.3.1. Application sur le système d'ordre fractionnaire de Lü

Dans cette section, nous allons appliquer la commande par mode glissant adaptatif pour stabiliser le système de Lü. Ce système est connu comme un «pont» entre le système de Lorenz et le système de Chen[138]. Son modèle est donné par:

$$\begin{cases}
 D_t^{q_1} x(t) = a \cdot (y(t) - x(t)) \\
 D_t^{q_2} y(t) = -x(t) \cdot y(t) - c \cdot y(t) \\
 D_t^{q_3} z(t) = x(t) \cdot y(t) - b \cdot z(t)
 \end{cases} \quad (5.21)$$

La figure 5.1 montre le comportement chaotique du système de Lü où ses paramètres sont :

$$(a, b, c) = (36, 3, 20), \quad q_1 = 0.985, \quad q_2 = 0.990 \quad \text{et} \quad q_3 = 0.980 .$$



**Figure 5.1** Comportement Chaotique du système de Lü.

On suppose maintenant que le système de Lü est soumis à une perturbation externe et à une erreur sur la structure (incertitude). La valeur initiale du gain est supposée nulle, les conditions initiales pour les trois variables états sont :  $[x, y, z]^T = [-9, 5, 14]^T$ , le gain d'adaptation est  $\delta = 50$ . On choisit une perturbation externe comme suit:  $d(t) = 0,45 \cdot \sin(\pi t)$  et l'incertitude sur la seconde variable d'état:  $\Delta g(x, y, z) = 0.5 \sin(\pi x) \cdot \cos(5 \cdot y(t))$

L'évolution des variables d'état sous la loi de commande (5.10) et la loi d'adaptation (5.15) sont présentées par la figure 5.2. On remarque sur les trois figures qu'elles représentent l'évolution des trois états que ces états stabilisent autour de zéro, Le portrait de phase du système de Lü stabilisé est présenté par la figure 5.3. La loi de commande appliquée au système est donnée par la figure 5.4. il est clair que cette loi de commande converge vers zéro. La surface de glissement regroupe l'information sur les états, donc la convergence de ces états vers zéro provoque la convergence de la surface de glissement vers zéro figure 5.5. L'évolution du gain d'adaptation est présentée par la figure 5.6, on remarque qu'après le passage par le régime transitoire le gain est stabilisé à la valeur 0.0966. D'une façon générale on peut dire le système fractionnaire chaotique présenté atteint son point d'équilibre sous la commande développée.

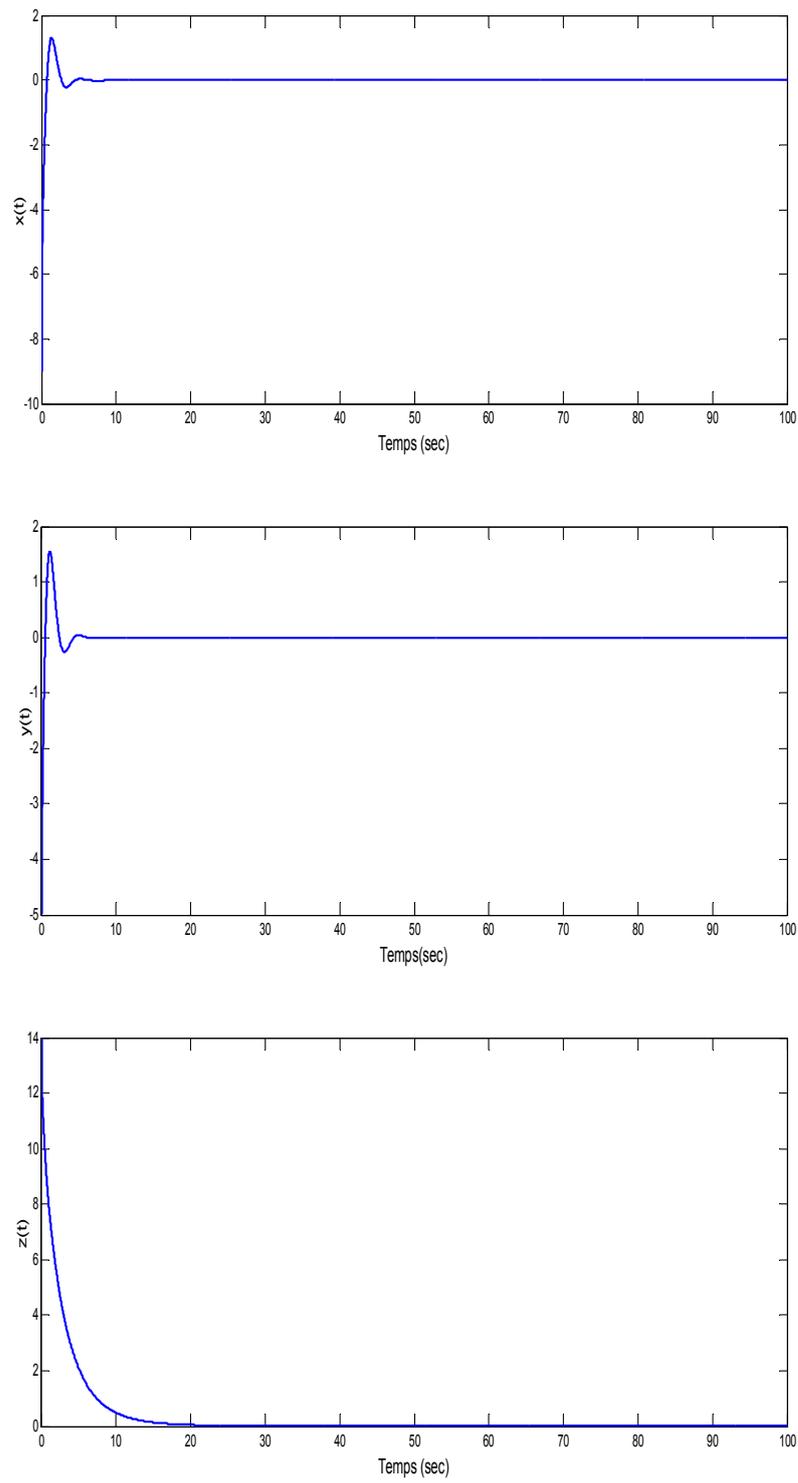


Figure 5.2 Allures des variables d'état stabilisées du système de Lü d'ordre fractionnaire

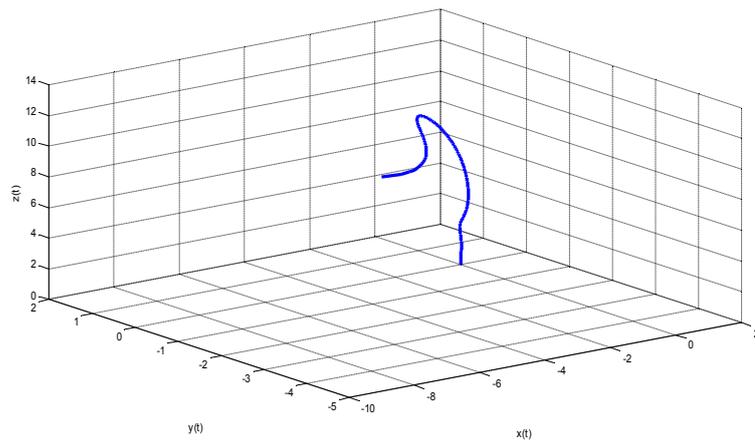


Figure 5.3 Portrait de phase du système de Lü stabilisé

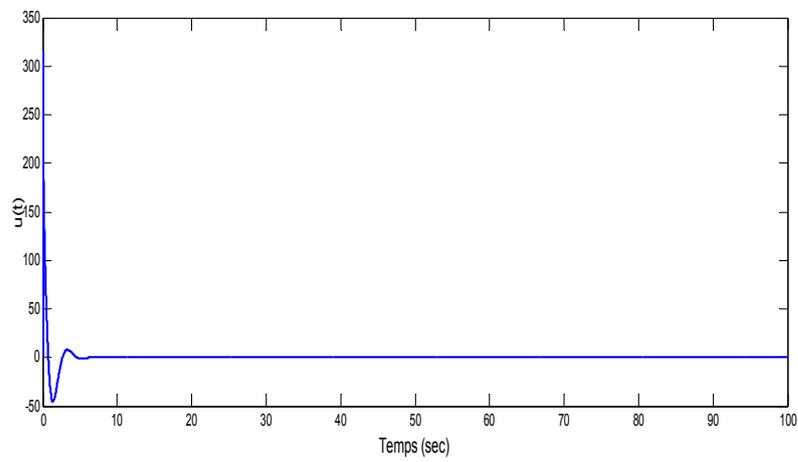


Figure 5.4 La commande appliquée au système de Lü stabilisé

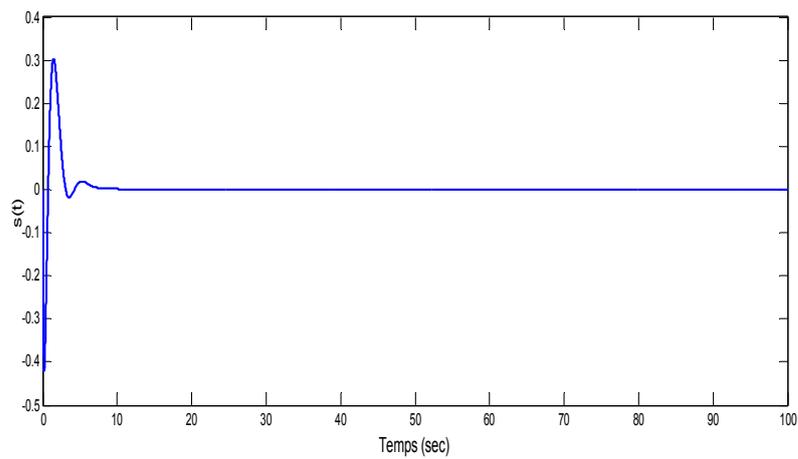


Figure 5.5 Surface de glissement du système de Lü stabilisé

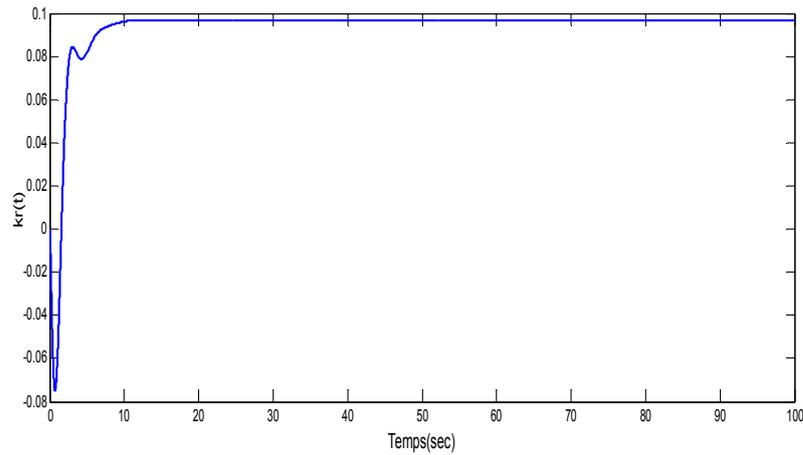


Figure 5.6 Évolution du gain d'adaptation

#### 5.4. Nouvelle loi de commande par mode glissant des systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires

Dans le but d'obtenir une nouvelle loi de commande du système d'ordre fractionnaire chaotique donné par (5.2), on propose une modification au niveau de la surface de glissement (5.4), dans ce cas la fonction  $\psi(t)$  est décrite par :

$$\psi(t) = y.f(x, y, z) + C_1.h(x, y, z) - (1 - C_2)g(x, y, z) + \beta y \quad (5.22)$$

Selon la théorie du mode glissant et sur la base des formules (5.2) et (5.6), cette nouvelle surface de glissement permet d'avoir une loi de commande équivalente donnée par :

$$u_{eq}(t) = -y.f(x, y, z) - C_2.g(x, y, z) - C_1.h(x, y, z) \quad (5.23)$$

La loi de commande additive est choisie de la même façon (5.8), (5.9). Enfin, la loi de commande globale qui regroupe (5.8) et (5.23) peut être définie par :

$$u_s(t) = u_{eq} + u_r(t) \quad (5.24)$$

Nous pouvons alors établir le résultat suivant,

- **Théorème 5.2.**

Le système chaotique fractionnaire nominal (5.2) est stabilisé de manière asymptotique sous la loi de commande coulissante proposée (5.24).

- **Preuve :** Afin d'analyser la stabilité en boucle fermée, la fonction candidate de Lyapunov est choisie comme :

$$V = \frac{1}{2} S^2 \quad (5.25)$$

La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V} = S\dot{S} \quad (5.26)$$

où  $\dot{S}(t) = \frac{d}{dt}\{S(t)\}$ , Nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S(D^{q_2} y(t) + \psi(t)) \\ &= S(g(x, y, z) - \beta y + u_s(t) + y.f(x, y, z)) + C_1.h(x, y, z) \\ &\quad - (1 - C_2)g(x, y, z) + \beta y \\ &= (g(x, y, z) + u_{eq} + u_r(t) + y.f(x, y, z)) + C_1.h(x, y, z) \\ &\quad - (1 - C_2)g(x, y, z) \\ &= S.(-K_r \cdot \text{sgn}(S(t))) \\ &= -K_r \cdot |S(t)| < 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ainsi, le système en boucle fermée est globalement asymptotiquement stable via la commande par mode glissant.

- **Remarque 5.1.**

La même formule (5.5) est utilisée pour la surface de glissement que dans [139,140], mais la fonction proposée  $\psi(t)$  définie par (5.22) est différente par la présence de la fonction  $g(x, y, z)$ , conduisant à une nouvelle loi de commande différente (5.23).

En outre, les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  ont été introduits dans la loi de commande par mode glissant (5.23) en considérant que ces paramètres sont des paramètres de réglage, ce qui permet de contrôler le taux de convergence des variables d'état du système.

#### 5.4.1. Application sur le système d'ordre fractionnaire de Chen

Dans cette section, nous présentons un exemple illustratif pour vérifier l'efficacité du schéma de commande proposé, La commande  $u(t)$  est ajoutée à la deuxième équation dans la représentation d'état pour stabiliser le système du Chen, afin de contrôler le chaos dans le système d'ordre fractionnaire de chen, La classe proposée de modèle d'ordre fractionnaire peut être décrite comme suit :

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = a.(y(t) - x(t)) \\ D_t^{q_2} y(t) = (c - a).x(t) - x(t).z(t) + c.y(t) + u(t) \\ D_t^{q_3} z(t) = x(t).y(t) - b.z(t) \end{cases} \quad (5.28)$$

Le système (5.28) sans commande présente un comportement chaotique tel qu'illustré par les Fig. 5.7, avec le choix des paramètres  $(a, b, c, d) = (35, 3, 28, -7)$  [139].

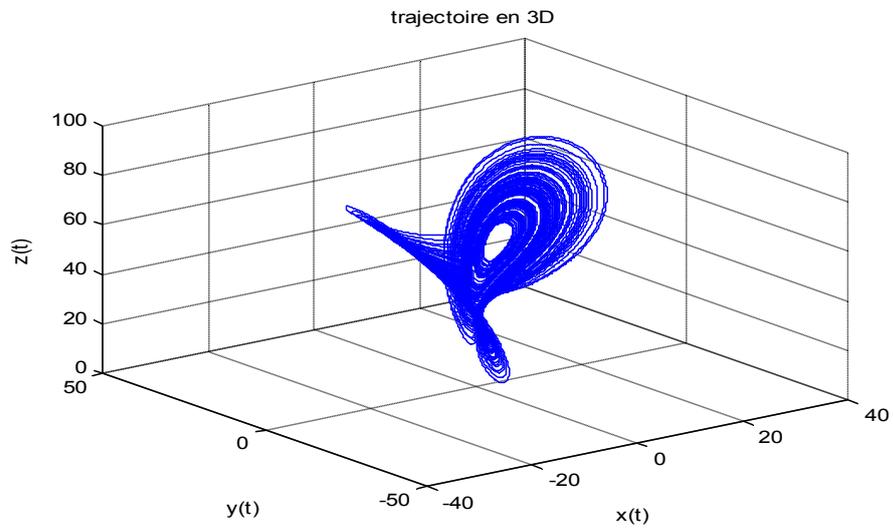
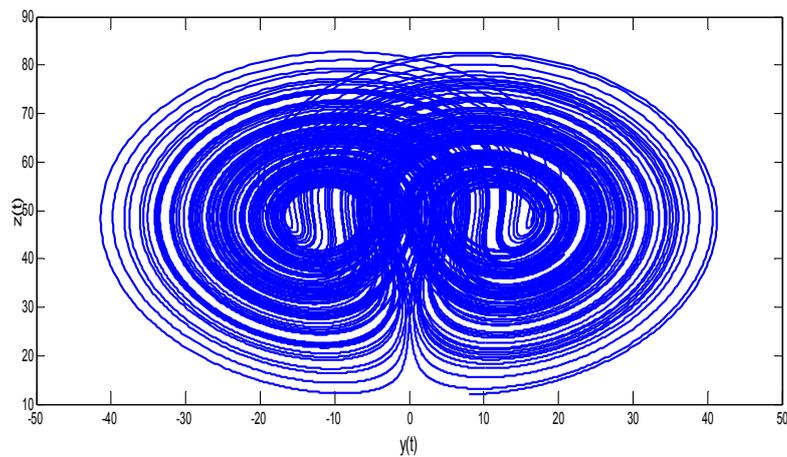
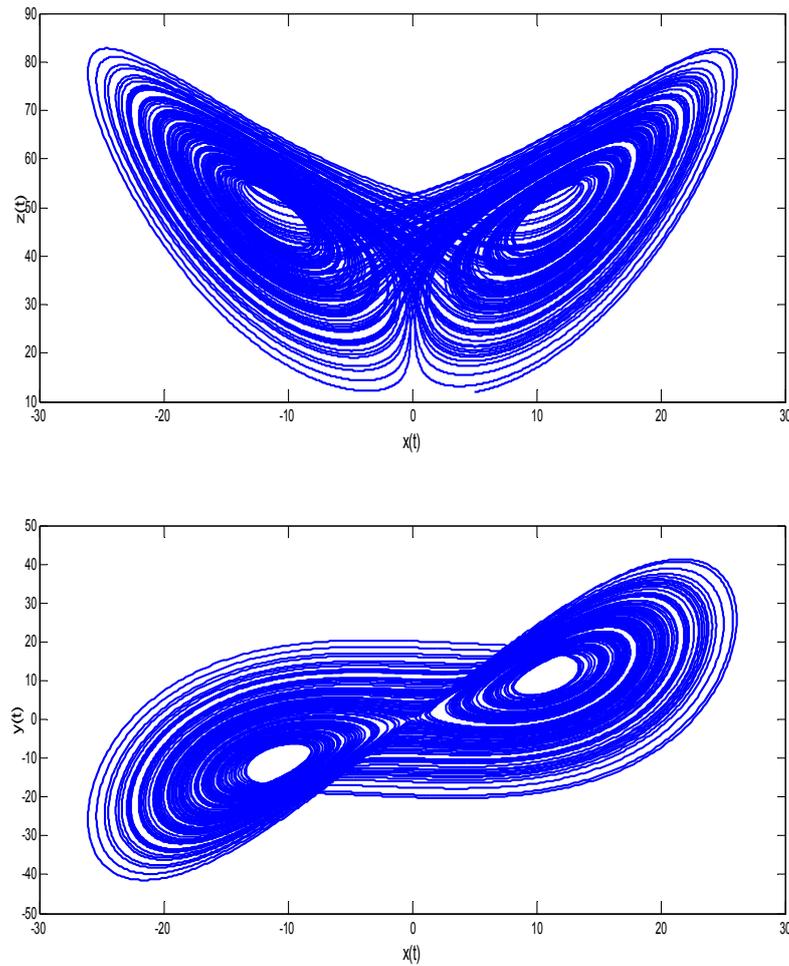


Figure 5.7 Portrait de phase du système de Chen d'ordre fractionnaire





**Figure 5.8** Trajectoires d'état du système de Chen d'ordre fractionnaire.

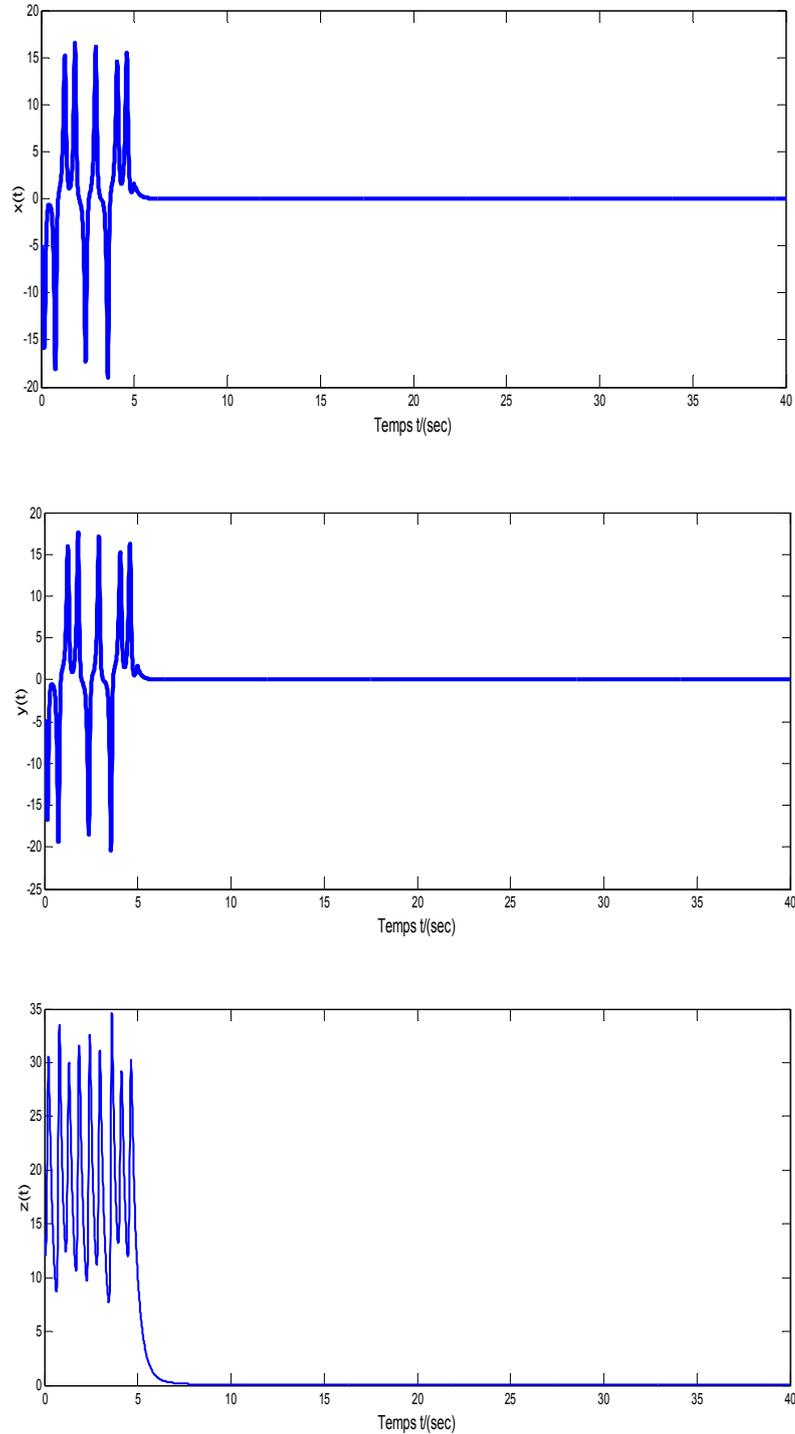
Pour stabiliser le système Chen d'ordre fractionnaire en utilisant la loi de commande par mode glissant donnée par (5.24), alors la loi de commande résultante qui décrit l'action de commande avec  $c_1 = 0,9$  et  $c_2 = 0,5$  est donnée par,

$$u(t) = -c.x(t) - K_c \cdot \text{sgn}(s(t)) \quad (5.29)$$

Les résultats de la simulation sont présentés dans les figures 5.9-5.12, avec une valeur du gain  $K_c = 0.1$ , les conditions initiales des états sont :  $[x, y, z] = [-9, -5, 14]$ .

L'évolution des états du système (5.28) sous la commande (5.29) est illustrée par la figure 5.9. Le portrait de phase de ce système est donné par la figure 5.10, La surface de glissement (5.3) est illustrée par la figure 5.11 et finalement la loi de commande appliquée pour stabiliser le système est présentée par la figure 5.12.

Les résultats de simulations montrent que la loi de commande par mode glissant garantit la stabilité des états du système chaotique et la stabilisation de la surface de glissement. Finalement il convient de noter que la commande est activée à l'instant  $t = 5s$ .



**Figure 5.9** Trajectoires d'état stabilisé du système de Chen d'ordre fractionnaire

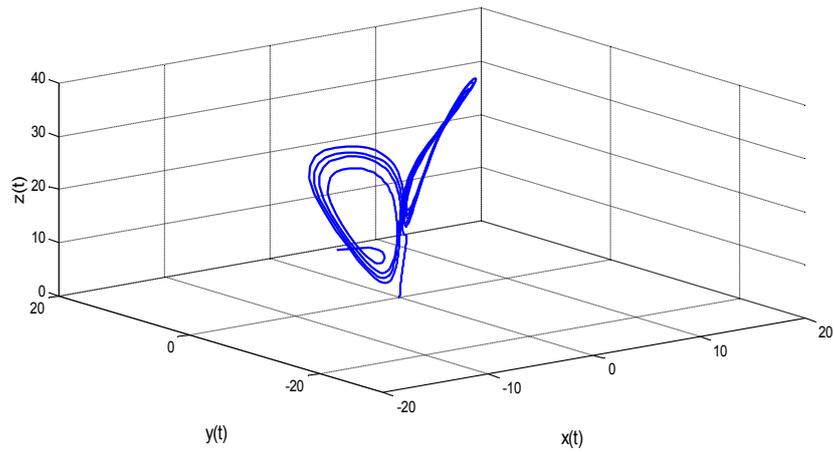


Figure 5.10 Portrait de phase du système commandé.

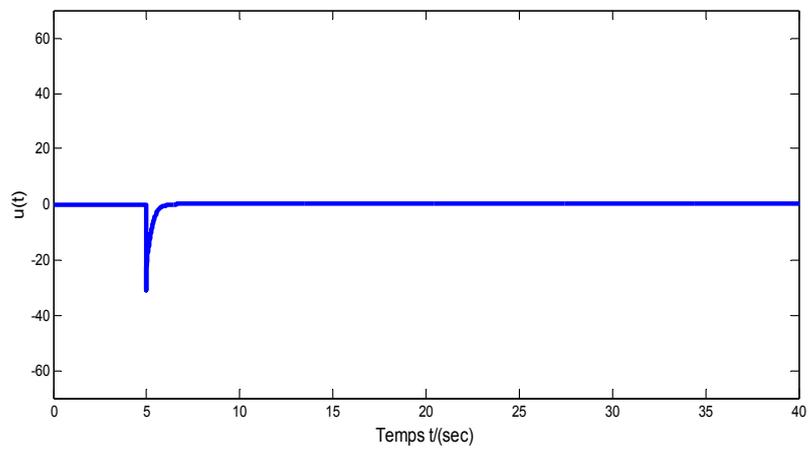


Figure 5.11 Variation de la loi de commande  $u(t)$  en fonction de temps

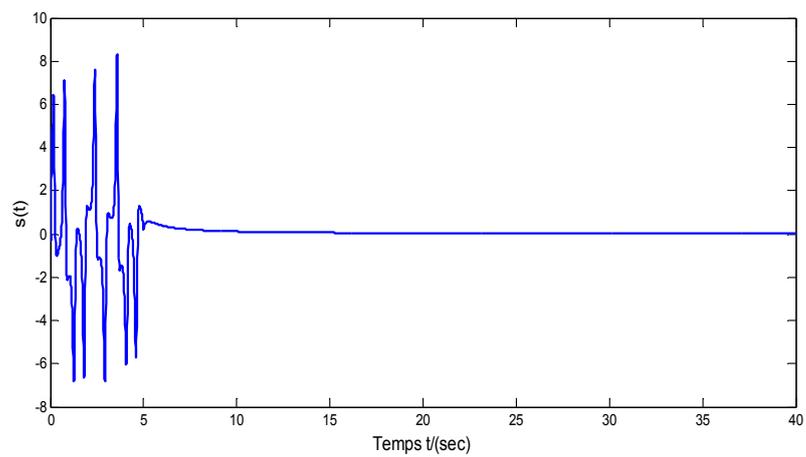


Figure 5.12 Surface de glissement

**5.5. Commande floue adaptative par mode glissant des systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires incertains et perturbés**

Considérons un système chaotique d'ordre fractionnaire (5.2) avec des incertitudes sur le modèle et en présence d'une perturbation externe. Il sera illustré que le système peut être stabilisé sous une commande floue adaptative par mode glissant

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_1} x(t) = y.f(x, y, z) + z.\phi(x, y, y) - \alpha x \\ D_t^{\alpha_2} y(t) = g(x, y, z) - \beta.y(t) + \Delta g(x, y, z) + d(t) + u(t) \\ D_t^{\alpha_3} z(t) = y.h(x, y, z) - x.\phi(x, y, y) - \gamma z \end{cases} \quad (5.30)$$

Où  $\Delta g(x, y, z)$  représente l'incertitude sur le système supposée inconnue mais bornée, et  $d(t)$  représente les perturbations externes supposées inconnues mais bornées aussi.

L'objectif est de trouver une commande permettant de stabiliser le système (5.30), pour cela on superpose un signal supplémentaire  $u_f(t)$  de type flou adaptatif au contrôleur (5.24), la nouvelle loi de commande devient donc :

$$u(t) = u_s(t) + u_f(t) \quad (5.31)$$

Où  $u_s(t)$  est la loi de la commande par mode glissant dans le cas idéal est donnée par (5.24) et  $u_f(t)$  est la loi additive de contrôleur flou adaptatif définie comme suit,

$$u_f(t) = \theta^T \xi(x) \quad (5.32)$$

Avec

$$\dot{\theta}(t) = -\gamma.\xi(x).S(t) \quad (5.33)$$

où  $\gamma$  est un scalaire positif.

Le commande  $u_f(t)$  est utilisé pour réduire l'effet de l'incertitude  $\Delta g(x, y, z)$  et la perturbation externe  $d(t)$ . Cela nous conduit au résultat principal donné par le théorème 2.

• **Théorème 5.3.**

Le système chaotique fractionnaire (5.30) sous l'incertitude du modèle borné  $\Delta g(x, y, z)$  et sous la perturbation additive  $d(t)$  sur le deuxième état est asymptotiquement stable sous la loi de commande floue adaptative par mode glissant(5.31).

• **Preuve**

La fonction candidate de Lyapunov est choisie comme suit :

$$V = \frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{2\gamma}\phi^T\phi \quad (5.34)$$

où  $\phi = \theta^* - \theta$  et  $\theta^*$  est le vecteur de paramètres optimal.

La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov est donnée par

$$\dot{V} = S\dot{S} + \frac{1}{\gamma}\phi^T\dot{\phi} \quad (5.35)$$

Où  $\dot{S}(t) = \frac{d}{dt}\{S(t)\}$  et  $\dot{\phi} = -\dot{\theta}$  Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S(D^{q_2}y(t) + \psi(t)) + \frac{1}{\gamma}\phi^T\dot{\phi} \\ &= S(g(x, y, z) - \beta y + \Delta g(x, y, z) + D(t) + u(t) + u_{fuzzy}(t) + y.f(x, y, z)) + \\ &\quad C_1.h(x, y, z) - (1 - C_2)g(x, y, z) + \beta y) - \frac{1}{\gamma}\phi^T\dot{\theta} \\ &= (g(x, y, z) + \Delta g(x, y, z) + d(t) + u_{eq} + u_r(t) + u_{fuzzy}(t) + y.f(x, y, z)) + \\ &\quad C_1.h(x, y, z) - (1 - C_2)g(x, y, z)) - \frac{1}{\gamma}\phi^T\dot{\theta} \\ &= S.[u_{fuzzy}(t) + \Delta g(x, y, z) + d(t) - K_r.\text{sgn}(S(t))] - \frac{1}{\gamma}\phi^T\dot{\theta} \\ &= S.[\theta^T\xi(x) + \Delta g(x, y, z) + d(t) - K_r.\text{sgn}(S(t))] - \frac{1}{\gamma}\phi^T\dot{\theta} \\ &= S.[\theta^T\xi(x) - \theta^{*T}\xi(x) + \theta^{*T}\xi(x) + \Delta g(x, y, z) + d(t) - K_r.\text{sgn}(S(t))] - \frac{1}{\gamma}\phi^T\dot{\theta} \\ &= S.[-\phi^T\xi(x) + \theta^{*T}\xi(x) + \Delta g(x, y, z) + d(t) - K_r.\text{sgn}(S(t))] - \frac{1}{\gamma}\phi^T\dot{\theta} \\ &= S[-\phi^T\xi(x) + \theta^{*T}\xi(x) + \Delta g(x, y, z) + d(t) - K_r.\text{sgn}(S(t))] - \phi^T\left[\xi(x)S + \frac{1}{\gamma}\dot{\theta}\right] \\ &= S.[\theta^{*T}\xi(x) + W(t) - K_r.\text{sgn}(S(t))] \end{aligned} \quad (5.36)$$

Où le terme d'incertitude et de perturbation est défini comme,

$$W(t) = \Delta g(x, y, z) + d(t) \quad (5.37)$$

Les systèmes flous sont des approximateurs universels, c'est-à-dire qu'ils peuvent approximer toute fonction lisse sur un espace compact [72]. Ainsi, nous pouvons obtenir  $\theta^*$  tel que:

$$W(t) = -\theta^{*T}\xi(x) \quad (5.38)$$

Si on remplace l'équation (5.38) dans la dernière équation du (5.36), nous obtenons la fonction de Lyapunov simplifiée suivante :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= S \cdot (-K_r \cdot \text{sgn}(S(t))) \\ &= -K_r |S| < 0\end{aligned}\quad (5.39)$$

$\dot{V} < 0$  Cela prouve que la commande choisie est capable de stabiliser les systèmes chaotiques dans la forme (5.1).

### 5.5.1. Application sur le système d'ordre fractionnaire du Chen perturbé et avec des incertitudes

Pour illustrer la performance de l'approche proposée, nous considérons le système chaotique d'ordre fractionnaire de Chen (5.14), avec la présence des incertitudes sur le modèle et des perturbations externes. Le processus à commander (5.14) sous la perturbation peut être décrit par :

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x(t) = a \cdot (y(t) - x(t)) \\ D_t^{q_2} y(t) = (c - a) \cdot x(t) - x(t) \cdot z(t) + c \cdot y(t) + \Delta g(x, y, z) + d(t) + u(t) \\ D_t^{q_3} z(t) = x(t) \cdot y(t) - b \cdot z(t) \end{cases}\quad (5.40)$$

Nous utiliserons les mêmes valeurs des paramètres du système fractionnaire de Chen donné dans la section 5.4.1. Le terme d'incertitude  $\Delta g(x, y, z)$  appliqué au système est donné par,

$$\Delta g(x, y, z) = 0.75 \sin(10x(t)) \cdot \cos(3 \cdot y(t)) \cdot \cos(\pi \cdot z(t))\quad (5.41)$$

et les perturbations externes  $d(t)$  sont définies comme suit:

$$d(t) = 1.25 \cdot \cos(2y(t) \cdot t) + 0.5 \cdot \sin(3t)\quad (5.42)$$

Définissons maintenant les fonctions d'appartenance de l'erreur et sa dérivée,

$$\begin{aligned}\mu_{F_1^j}(e_i) &= \exp\left[-(e_i + 1.25) / 0.3\right]^2, & \mu_{F_2^j}(e_i) &= \exp\left[-((e_i + 0.625) / 0.3)^2\right] \\ \mu_{F_3^j}(e_i) &= \exp\left[-(e_i / 0.3)^2\right], & \mu_{F_4^j}(e_i) &= \exp\left[-((e_i - 0.625) / 0.3)^2\right] \\ \mu_{F_5^j}(e_i) &= \exp\left[-(e_i - 1.25) / 0.3\right]^2\end{aligned}\quad (5.43)$$

$e_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $i=1$  pour le cas d'erreur et  $i=2$  pour sa dérivée et le gain adaptatif Sélectionné est  $\gamma = 20$ .

Afin de montrer la robustesse de la commande proposée, la commande est activée à l'instant  $t=5s$ . Les résultats de simulation sont donnés sur les figures. 5.13-5.17.

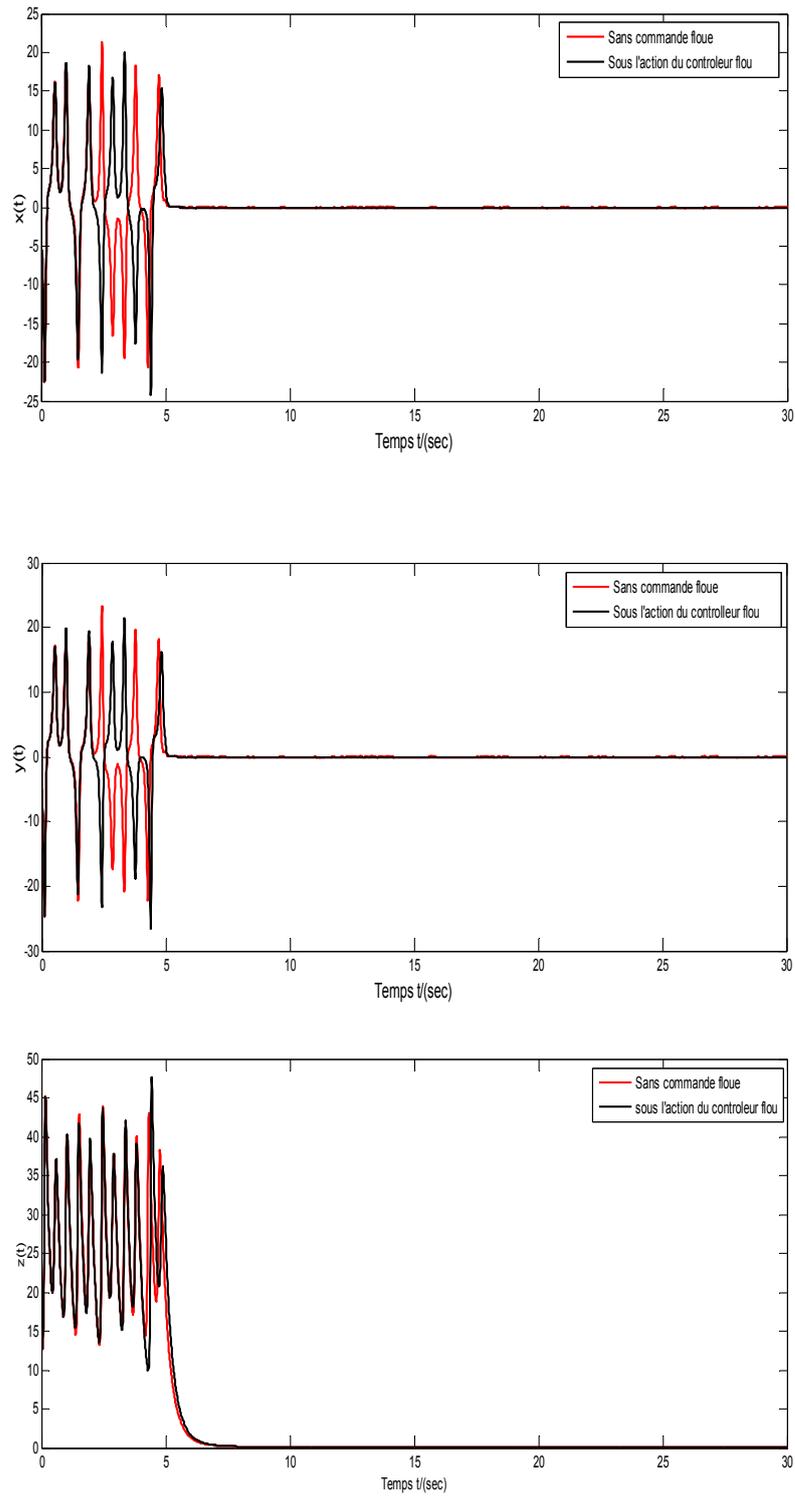
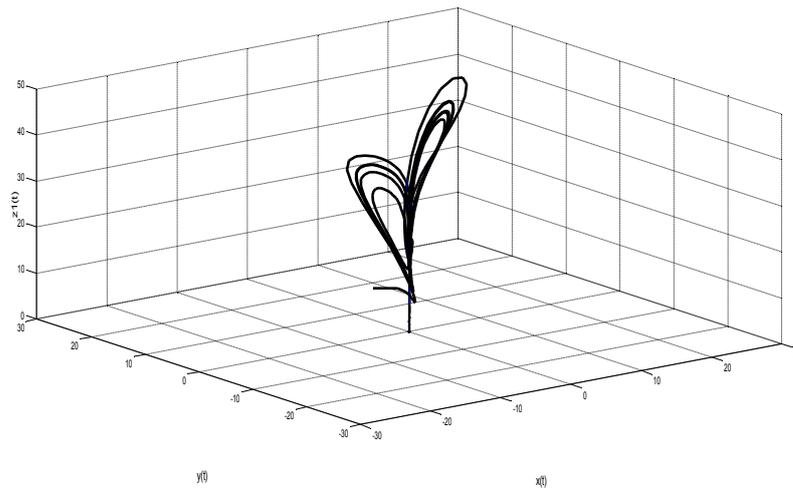
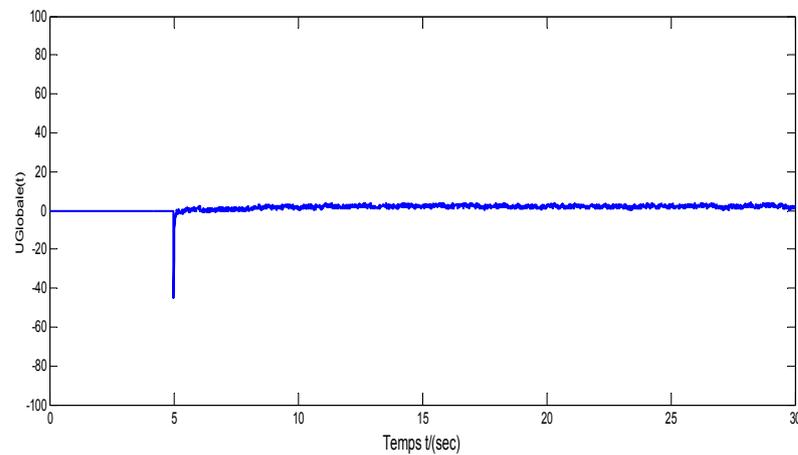
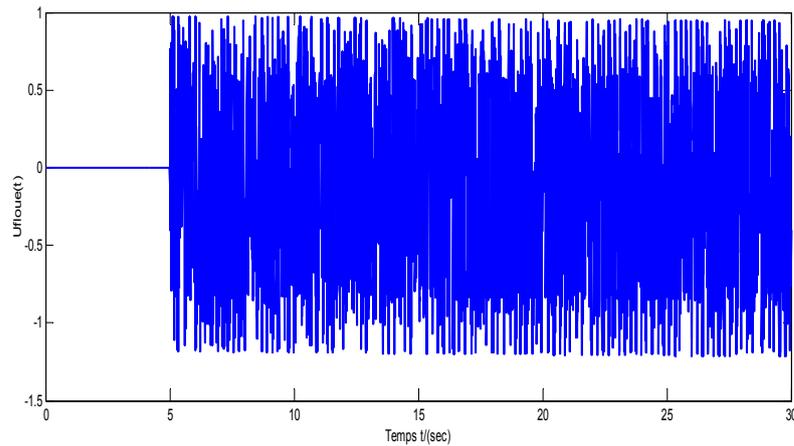


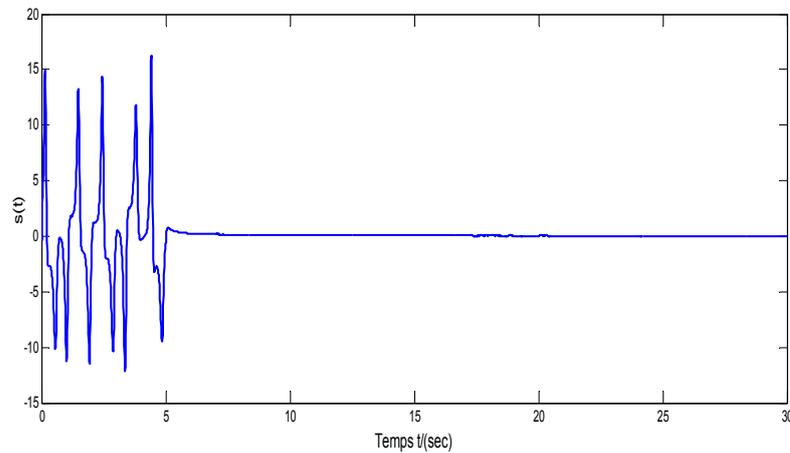
Figure 5.13 Trajectoires d'état du système de Chen d'ordre fractionnaire incertain stabilisé

**Figure 5.14** Portrait de phase du système de chen**Figure 5.15** Commande globale appliquée au système de Chen

La figure 5.13 montre l'évolution des trajectoires d'états  $x$ ,  $y$  et  $z$  du système de Chen d'ordre fractionnaire incertain stabilisé. Alors que la figure 5.14 présente un portrait de phase du système chaotique incertain sous l'action de contrôle. Nous pouvons voir qu'une convergence rapide vers 0 est atteinte lorsque la commande est appliquée. La trajectoire de contrôle qui représente la commande globale est illustrée par la figure 5.15, et la trajectoire de la surface de glissement  $S(t)$  est représentée sur la figure 5.17.



**Figure 5.16** Commande floue appliquée au système



**Figure 5.17** Trajectoire de la surface de glissement

Nous remarquons que les performances du contrôleur conçu sont satisfaisantes. La robustesse du contrôleur adaptatif flou conçu est également vérifiée. Même la grandeur de perturbation  $\|d(t)\| \leq 1.2$  dans cette étude numérique est largement augmentée par rapport à des conceptions de contrôle similaires proposés dans la littérature, nous citons par exemple [136], avec  $\|d(t)\| \leq 0.5$  et [133] avec  $\|d(t)\| \leq 0.1$ . Ceci illustre la supériorité de la conception de contrôle proposée pour rejeter les perturbations d'additifs

### 5.6. Stabilisation d'une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire par un contrôleur optimale flou adaptatif par mode glissant

Dans cette partie on va approximer les paramètres de la loi de commande proposé précédemment (5.31), pour cela on utilise l'une des techniques d'optimisation. La relation (5.31) peut être décrit par :

$$u_s(t) = u_{eq} + u_r(t) + u_{fuzzy}(t) \quad (5.44)$$

Où

$$\begin{cases} u_{fuzzy}(t) = \theta^T \xi(x) & \text{avec } \dot{\theta}(t) = -\eta \cdot \xi(x) \cdot S(t) \\ u_r(t) = -K_r \cdot \text{sgn}(S(t)) & \text{avec } \text{sgn}(S(t)) = \begin{cases} -1 & \text{if } S(t) < 0 \\ 0 & \text{if } S(t) = 0 \\ +1 & \text{if } S(t) > 0 \end{cases} \\ u_{eq}(t) = -y \cdot f(x, y, z) - C_2 \cdot g(x, y, z) - C_1 \cdot h(x, y, z) \end{cases} \quad (5.45)$$

On utilise La technique essaims de particule pour estimer les trois paramètres de la loi de commande globale  $C_1$ ,  $C_2$  et  $k$ , plus précisément les paramètres du loi de commande par mode glissant.

- **Remarque 5.2.**

- On garde les mêmes formules et les mêmes équations de la partie 5.5.
- Les preuves et les développements restent valables pour cette partie

#### 5.6.1. Application sur le système d'ordre fractionnaire du Lü perturbé et avec des incertitudes

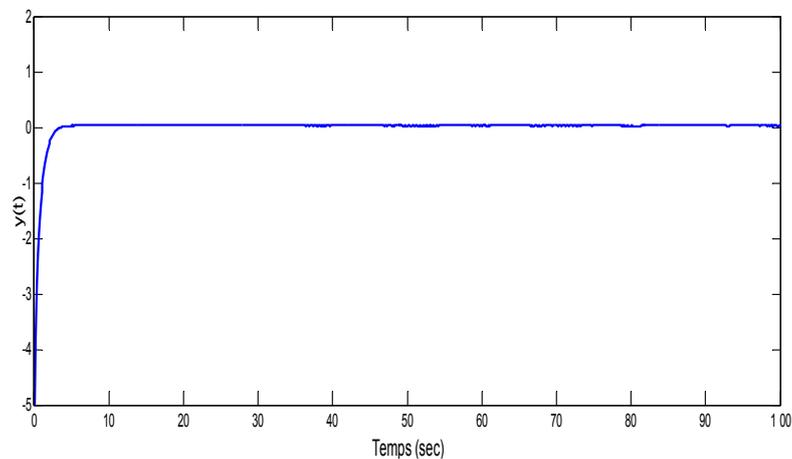
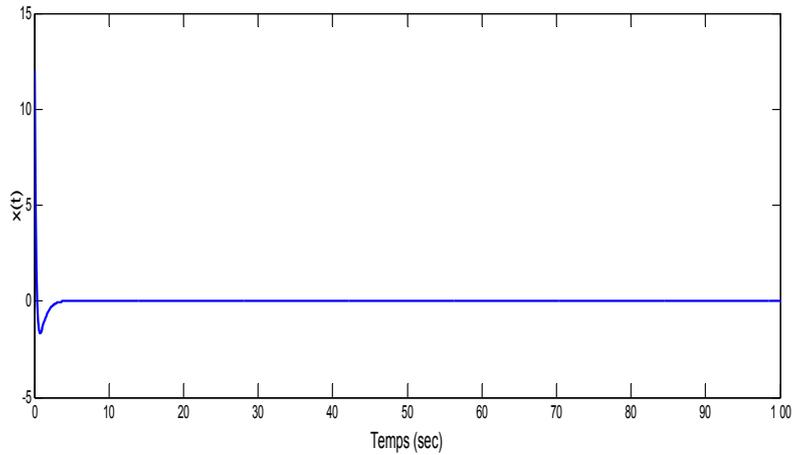
Pour valider l'approche proposée on considère l'exemple du système de Lü donné précédemment, comme notre objectif est stabilisé le système de Lü avec la loi (5.54) et comme cette loi contient des paramètres à optimisés par PSO, alors le choix de ces paramètres et pour cette application est tenu comme suit :

- Taille de la population : 30
- Nombre d'itération : 100
- Les coefficients :  $c_1=1.5$  et  $c_2=1.2$

Le choix de la fonction objectif est basé sur la pondération des états dans la même fonction pour éviter le passage vers l'optimisation multi objective, donc la fonction objectif choisie est donnée par la formule suivante :

$$J = \int_0^t [x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 + \chi.u^2(t)] dt \quad (5.46)$$

Après l'optimisation les paramètres obtenues sont donnés par :  $C_1=0.8214$ ,  $C_2= 0.0556$  et  $k_r=0.0124$ . Les résultats de simulations par matlab sont présentés par les figures 5.18-5.22.



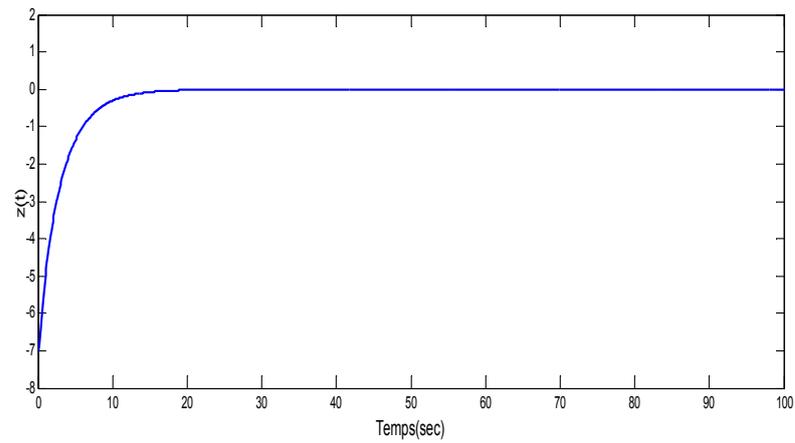


Figure 5.18 Trajectoires d'état du système de Lü d'ordre fractionnaire stabilisé

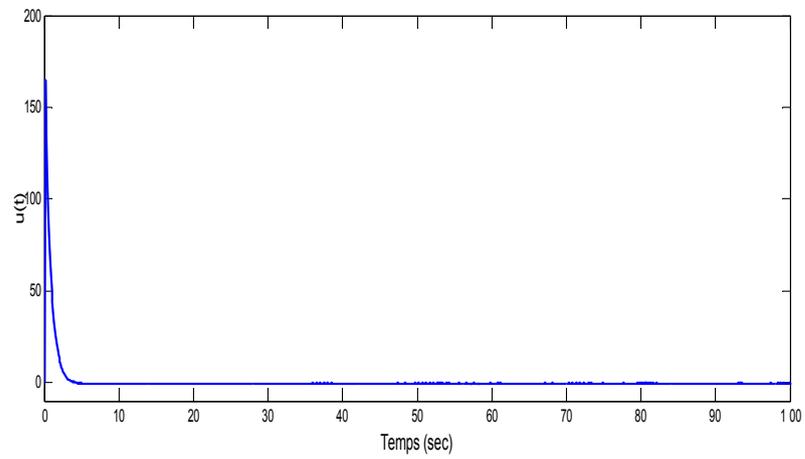


Figure 5.19 Commande globale appliquée au système de Lü

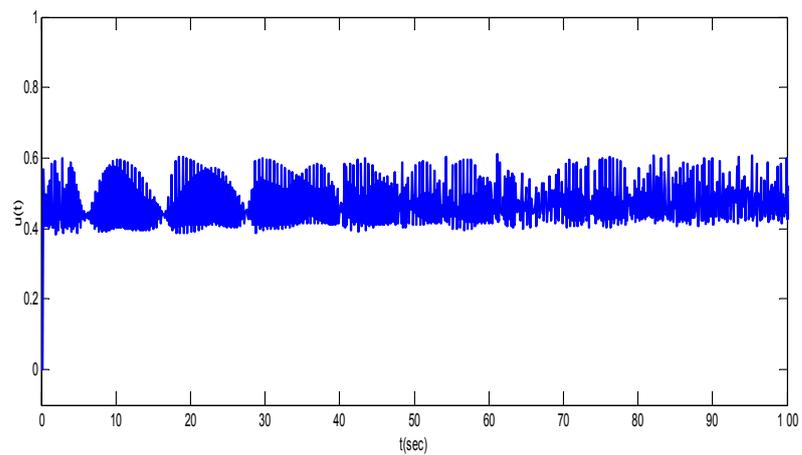
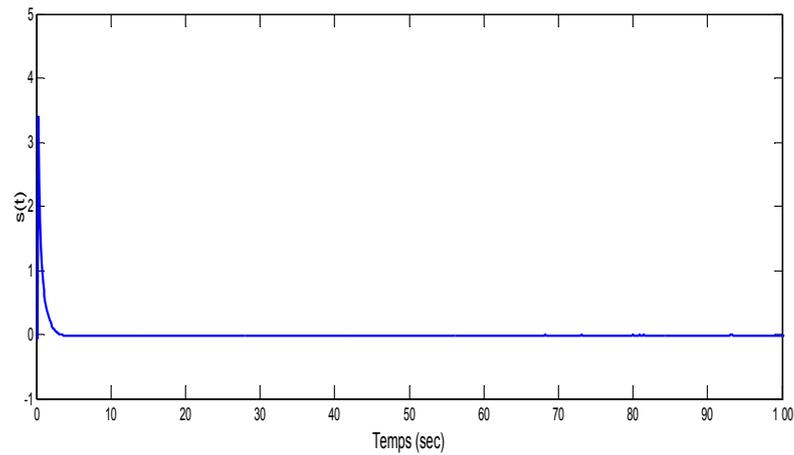
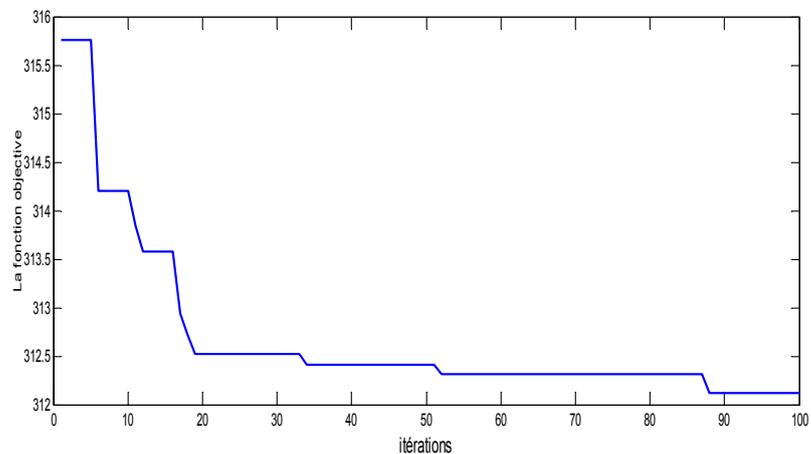


Figure 5.20 Commande floue appliquée au système



**Figure 5.21** Évolution de la surface de glissement



**Figure 5.22** Évolution de la fonction objective

D'après les figures présentées on remarque que les états convergent rapidement si on compare avec le premier exemple sa d'un côté et autre coté si nous comparons la valeur maximale de la commande on remarque que dans le cas d'une commande par mode glissant adaptative la valeur maximale est 336 mais dans notre cas la valeur obtenue est 167.

### 5.7. Conclusion

Dans ce chapitre des méthodes pour stabiliser une classe des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire ont été proposées, Les trois approches étudiées dans ce chapitre sont basées sur la commande par mode glissant. Dans le premier temps, on a essayé d'améliorer les performances de la commande glissante par la variation de la loi de commande par l'adaptation selon un critère tiré par l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov. La deuxième contribution dans ce chapitre réside

par l'introduction d'une loi de commande additive basée sur l'approche adaptative floue pour compenser les incertitudes et les perturbations, l'étude de la stabilité est présente aussi dans cette partie. En fin pour améliorer la commande proposée est de trouver la valeur optimale du contrôleur, on a introduit une méthode d'optimisation basée sur les essaims de particules. Enfin, des exemples numériques sont présentés dans chaque partie pour démontrer l'efficacité du schéma de commande proposé.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

---

---

## **Conclusion générale**

Le modeste travail présenté dans cette thèse est une contribution relative aux systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Ces contributions touchent la conception d'une méthode d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire, ainsi que la commande de ces systèmes par différentes techniques. En effet de nouvelles techniques sont proposées dans ce sens.

La première contribution concerne l'approximation d'un modèle fractionnaire continu linéaire par un modèle linéaire continu d'ordre réduit, en se basant sur la méthode d'optimisation par évolution différentielle. Des exemples de simulation sont présentés, il apparaît évident et cela a été montré par la comparaison des résultats obtenus entre la méthode proposée et les autres méthodes déjà existantes dans la littérature que cette nouvelle technique donne des résultats remarquables, dans le sens qu'elle réalise une approximation par modèles rationnels avec un ordre réduit et avec une erreur d'approximation très faible. Cette contribution donne une autre clé pour l'approximation des systèmes fractionnaire.

La deuxième contribution dans cette thèse est présentée dans le quatrième chapitre ou on a proposé une nouvelle structure de commande pour les systèmes fractionnaires linéaires, l'approche utilisée est basée sur une commande par un correcteur PID d'ordre fractionnaire a modèle de référence, ce modèle regroupe toutes les performances désirées. Les valeurs optimales des paramètres du régulateur fractionnaire sont calculées sur la base d'une nouvelle technique d'optimisation récemment développée.

Dans le cinquième chapitre on a présenté trois autres contributions permettant d'améliorer la commande par mode glissant. Dans le premier temps on a proposé une loi de commande par mode glissant adaptatif, le gain du contrôleur par mode glissant est adapté en temps réel pour assurer la stabiliser les systèmes chaotiques fractionnaire en présence des perturbations externes et l'incertitude du système. La deuxième contribution est donnée par la proposition d'une nouvelle loi de commande floue adaptative par mode glissant pour contrôler la même catégorie des systèmes fractionnaires, en se basons sur le lemme que les systèmes fous sont des approximateurs universels, un système flou est introduit pour approximé les dynamiques inconnues des systèmes d'ordre fractionnaire, la loi d'adaptation dans ce système flou est introduit pour compenser le manque de l'information délivré par l'expert sur le système étudié. Enfin un algorithme d'optimisation basé les essais de particules est introduit pour calculer les paramètres ( $c_1$  et  $c_2$ ) du contrôleur par mode glissant adaptative floue, les paramètres du contrôleur par mode glissant jouent le rôle d'un

potentiomètre qu'il commande la vitesse de convergence des états du système chaotique d'ordre fractionnaire. L'analyse de la stabilité et la robustesse de toutes les lois de commande proposées dans ce chapitre sont justifiées par l'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov.

Les résultats de simulations présentés dans les différents chapitres permettent de mettre en évidence l'efficacité des méthodes développées.

En ce qui concerne la poursuite de ce travail et les perspectives de recherche envisagées dans le futur proche, on propose les points suivants :

- Développer de calcul des paramètres de ce modèle d'ordre réduit.
- Développer des méthodes pour calculer les paramètres du régulateur PID fractionnaire.
- Combiner la loi de commande par mode glissant avec d'autres techniques telles que  $H_{\infty}$  et faire une extension de ces lois au monde fractionnaire.
- Implémentation de ce type de commande sur différents systèmes physiques réels.

## **Bibliographie**

- [1] Diethlem, K. “Efficient solution of multi-term fractional differential equations using p(ec)me methods”. *Computing*, Vol. 71, pp. 305–319., 2003.
- [2] Koeller, R. “Application of fractional calculus to the theory of viscoelasticity”, *Appl. Mech.* Vol. 51, pp. 299–307, 1984.
- [3] Ladaci, S., and Charef, A. “On fractional adaptive control”, *Nonlinear Dynamics*,. Vol. 43, No. 4, pp. 365-378., 2006.
- [4] Reyes-Melo, M., Martinez-Vega, J., Guerrero-Salazar, C., and Ortiz-Mendez, U. “Application of fractional calculus to modelling of relaxation phenomena of organic dielectric materials”. In: *IEEE Int. Conf. Solid Dielectrics*, pp. 530–533. Toulouse, France, 2004.
- [5] Necaibia, A., Ladaci, S., Charef, A., and Loiseau, J. J., “Fractional order extremum seeking approach for maximum power point tracking of photovoltaic panels”. *Front. Energy*, Vol. 9, No. 1, pp. 43–53., 2015.
- [6] Rabah, K., and Ladaci, S., “Fractional adaptive sliding mode control laws for fractional-order chaotic systems synchronization”. In *Int. Conf. on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering (STA’2016)*, Vol. 17, IEEE, pp. 293–302., 2016.
- [7] Delavari, H., Ranjbar A.N., Ghaderi, R., and Momani, S., “Fractional order control”, *journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 61, pp.383-397, 2010.
- [8] Oldham, K.B., and J. Spanier. “*Fractional Calculus*”, Academic Press, New York, 1974.
- [9] Kilbas, A.A., Srisvastava, H.M., and Trujillo, J.J. “*Theory and Applications of Fractional Differential Equations*”, Elsevier, North-Holland., 2006.
- [10] Oustaloup, A. ” *La Dérivation non Entiere*” Paris: Hermès , 1995.
- [11] Manabe, S. “The non-integer integral and its application to control systems”. *JIEE*, 1960.
- [12] Oustaloup, A. “*Systèmes Asservis Linéaires d’Ordre Fractionnaire :Théorie et Pratique*” Editions Masson, Paris, 1983.
- [13] Axtell, M., and Bise, E.M. “*Fractional Calculus Applications in Control Systems*”. *Proc. of the IEEE Nat. Aerospace and Electronics Conf.*, New.York,USA, pp. 563-566, 1990.
- [14] Podlubny, I. “*Fractional Order Systems and PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> Controllers*”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 1, pp 208-214., 1999.

- [15] Agrawal, O.P., "A quadratic numerical scheme for fractional optimal control". ASME J Dynamic Syst, Measurement, Control 130(1):011010.1–011010.6, 2008.
- [16] Miller, K., and Ross, B. "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations". Wiley: New York, 1993.
- [17] Skaar S.B., Michel A.N., Miller R.K. "Stability of viscoelastic control systems". IEEE Trans Automatic Control, Vol. 33, No. 4, pp.348–357, 1988.
- [18] Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B., Nanot, F.M. "Frequency-band complex noninteger differentiator: Characterization and synthesis". IEEE Trans Circ Syst I Vol. 47, No. 1, pp.25–39, 2000.
- [19] Xue, D., and Chen, Y.Q. "A comparative introduction of four fractional order controllers". In: Proceedings of the fourth IEEE world congress on intelligent control and automation (WCICA02), IEEE, Vol. 4, pp. 3228–3235, 2002.
- [20] Manabe, S. "Early development of fractional order control". In: Proceedings of the ASME international design engineering technical conference, Chicago, IL, Paper No. DETC2003/VIB-48370, 2003.
- [21] Heaviside, O. "Electromagnetic Theory". Vol. II. New York, Chelsea Edition, 1971.
- [22] Ho, H. F., Wong, Y. K., and Rad, A. B. "Adaptive fuzzy sliding mode control with chattering elimination for nonlinear siso systems". Simulation Modelling Practice and Theory". Vol. 17, pp. 1199–1210. 2009.
- [23] Magin, R.L. "Fractional calculus in bioengineering". Begell House, Connecticut, 2006.
- [24] Bagley, R.L., and Calico, R.A. "Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures". J Guid Control Dyn, Vol. 14, No. 2, pp. 304–311, 1991.
- [25] Ichise, M., Nagayanagi, Y., and Kojima, T. "An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes". J Electroanal Chem Interfacial Electrochem Vol. 33 No. 2, pp. 253–265, 1971.
- [26] Sun, H.H., Abdelwahab, A.A., and Onaral, B. "Linear approximation of transfer function with a pole of fractional power". IEEE Trans Automatic Control, Vol. 29, No. 5, pp.441–444, 1984b.
- [27] Mandelbrot, B. "Some noises with 1/f spectrum, a bridge between direct current and white noise". IEEE Trans Info Theory, vol. 13, No. 2, pp. 289–298, 1967.
- [28] Neçaibia, A. "Contribution à la commande  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  adaptative et aux régulateurs auto-ajustables d'ordre fractionnaire", these doctorat université 20 aout 55 skikda. 2016.

- [29] Hartley, T.T., Lorenzo, C.F., and Qammar, H.K. "Chaos in a fractional order Chua's system". IEEE Trans Circuits Syst: Part I: Fund Theory Appl, Vol. 42, No. 8, pp.485–490, 1995.
- [30] Khettab, K., Ladaci, S., and Bensafia, Y. "Fuzzy adaptive control of fractional order chaotic systems with unknown control gain sign using a fractional order nussbaum gain". IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, pp. 1–8. DOI: 10.1109/JAS.2016.7510169, 2017.
- [31] Oustaloup, A. "La commande CRONE". Hermès.1991.
- [32] Sutha, S., Lakshmi, P., and Sankaranarayanan, S. "Fractional-order sliding mode controller design for a modified quadruple tank process via multi-level switching". Computers and Electrical Engineering, Vol. 45, pp. 10–21, 2015.
- [33] Hotzel, R., and Fliess, M. "On linear systems with a fractional derivation: Introductory theory and examples". Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 45, pp. 385–395., 1998.
- [34] Zamani, M., Karimi-Ghartemani, M., Sadati, N., and Parniani, M. "Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization", Control Engineering Practice, Vol. 17, pp. 1380–1387, 2009.
- [35] Martin, F., Monje, C. A., Moreno, L., and Balaguer, C. "DE-based tuning of  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers". ISA Transactions, Vol. 59, pp. 398–407, 2015.
- [36] Khettab, K. "Techniques avancées pour la synthèse et l'amélioration des performances des systèmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour les processus incertains". thèse Université du 20 Aout 1955 Skikda, 2016.
- [37] Ladaci, S. "Contribution A La Commande Adaptative D'ordre Fractionnaire". Thèse doctorat, Université Mentouri de Constantine 1. 2006
- [38] Bensafia, Y. "Utilisation des filtres fractionnaires pour la conception de régulateurs adaptatifs robustes". Thèse, Université du 20 Août 1955 Skikda, 2016.
- [39] Djari, A. "Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire des systèmes dynamiques". Thèse de Doctorat, Université de Jijel., 2016.
- [40] Hartley, T.T., and Lorenzo, C.F., "Fractional-order system identification based on continuous order-distributions". Signal Processing, Vol.83, pp. 2287–2300, 2003.
- [41] Charef, A., Sun, H.H., Tsao, Y.Y., and Onaral, B. "Fractal system as represented by singularity function". IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. 37, No. 9, pp. 1465–1470, 1992
- [42] Matsuda, K., and Fujii, H. " $H_{\infty}$  optimized wave-absorbing control: Analytical and experimental results". Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 16, No. 6 , pp. 1146–1153, 1993.

- 
- [43] Carlson. G., and Halijak, C., "Approximation of fractional capacitors  $(1/s)^{1/n}$  by a regular newton process". IEEE Trans. Circuit Theory Vol. 11, No. 2, pp. 210–213 , 1964.
- [44] Saptarshi. D, and Indranil. P. ‘‘Fractional Order Signal Processing Introductory Concepts and Applications’’. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, 2012.
- [45] Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B., and Nanot, F.M. ‘‘Frequency-band complex noninteger differentiator: Characterization and synthesis’’. IEEE Trans Circ Syst, Vol. 47, No. 1, pp.25–39, 2000.
- [46] Charef. A. "Modelling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation’’. Nonlinear Dynamics, Vol. 46, pp. 195–210, 2006.
- [47] M.A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, N. Gallegos et al., "Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 22, pp. 650-659, 2015.
- [48] N. Aguila-Camacho, M.A. Duarte-Mermoud, J.A. Gallegos, "Lyapunov functions for fractional order systems", Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 19, pp. 2951-2957, 2014.
- [49] Yan. L., YangQuan. C., Igor. P., ‘‘mittag leffler stability of fractional order nonlinear dynamic system’’, Automatica, Vol. 45, pp. 1965-1969. 2009.
- [50] Emel'yanov, S.V. "On peculiarities of variable structure control systems with discontinuous switching functions",. Doklady ANSSR, Vol. 153, pp. 776-778, 1963.
- [51] Tzypkin, Y.Z. "Theory of control relay systems". Moscow : Gostekhizdat, 1955. Utkin, V.I. "Variable structure systems with sliding modes", . IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, No. 2, pp. 212-222, 1977.
- [52] Utkin, V.I. "Variable structure systems with sliding modes", . IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, No. 2, pp. 212-222, 1977.
- [53] SI-Ammour, A. ‘‘Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire’’. thèse, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou,, 2011.
- [54] Landau. I.D., and Dugard. L. "Commande adaptative". Edition Hermès Paris, 1988.
- [55] Zhengtao. D. ‘‘ Nonlinear and Adaptive Control Systems’’. Published by The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom. 2013.
- [56] Hagglund,. T., and astrom. K,J., ‘‘The control handbook’’. Editeur W.W.Levine,CRC Press,, 1996.
- [57] Zadeh, L.A. ‘‘Fuzzy sets. Information and Control’’. Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
-

- [58] Mamdani, E.H. "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller". *Int. J. Man Mach. Studies*, Vol. 7, No. 1, pp.1-13, 1975.
- [59] Ostergaad, J. "Fuzzy logic control of a heat exchange process". In *Fuzzy Automata and Decision Processes*, M.M. Gupta, G.N. Saridis, and B.R. Gaines, Eds., pp. 285-320, 1977.
- [60] Willaeyts, D., Malvache, N., and Hammad, P. "Utilization of fuzzy sets for systems modelling and control." . In *IEEE International Conference on Decision and Control*, , 1977.
- [61] Willaeyts, D., Mangin, P., and Malvache, N." Use of fuzzy sets for systems modelling and control: Application to the speed control of a strongly perturbed motor." In *IFAC/IFIP International Conference on Digital Computer Applications to Process Control*, , 1997.
- [62] Murakami, and Sugeno, M. "Fuzzy parking control of model car". in *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*,, 1984.
- [63] Kiszka, J.B., Gupta, M.M., and Nikiforuk, P.N. "Energetic stability of fuzzy dynamic systems." . *IEEE Trans. on Syst. Man Cybern.*, SMC- Vol. 15, No. 5, pp. 783-792, , 1985.
- [64] Tamakawa, T. "High speed fuzzy controller hardware system." *Proc. 2nd Fuzzy System Symp.*, pp. 122-130, 1986.
- [65] Wang L.-X. "Stable Adaptive Fuzzy Controllers with application to Inverted Pendulum Tracking",. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 26, pp. 677-691, , 1996.
- [66] Mendel J.M. "Fuzzy Logic Systems for Engineering: a Tutorial", . *Proc. of the IEEE*, vol. 83, pp. 354-377, 1995.
- [67] Ljung L. "System Identification: Theory for the User", . Prentice-Hall information and System Sciences series, Prentice-Hall, 1987.
- [68] Söderström T. and Stoica P. "System Identification",. Prentice-Hall International, Hemel Hempstead, Hertfordshire, 1989.
- [69] Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Delyon, B., Glorennec, P.Y., and Hjalmarsson, H. "Nonlinear Black-box Modelling in System Identification: a Unified Overview", . *Automatica*, vol. 31, pp. 1691-1724, , 1995.
- [70] Lindskog, P., and Ljung, L. "Tools for Semiphysical Modelling",. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 9, pp. 509-523,, 1995.
- [71] Brown, M., and Harris, C.J. "Neuro-Fuzzy Adaptive Modelling and Control". Prentice-Hall, Hemel Hempstead, 1994.

- [72] Chen, B.S., Lee, C.H., and Chang, Y.C. "H $\infty$  tracking design of uncertain nonlinear siso systems: Adaptive fuzzy approach". IEEE Trans.Fuzzy Syst, Vol. 4, 1996.
- [73] Chen, S., Cowan, C.F.N., and Grant, P.M., " Orthogonal Least Squares Learning Algorithm for Radial Basis Function Neural Networks", . IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 2, pp. 302-209, 1991.
- [74] Chen, S., and Billings, S.A. " Recursive Hybrid Algorithm for Non Linear System Identification Using Radial Basis Function Networks",. International Journal of Control, vol. 55, pp. 1051-1070, 1992.
- [75] Kosko, B., and Dickerson, J.A. " Function Approximation with Additive Fuzzy Systems". in Theoretical Aspects of Fuzzy Control, Nguyen H.T., Sugeno M., Tong R. and Yager R. eds. New York: Wiley, Chap. 12,, 1994.
- [76] Wang, L.X. " Adaptive Fuzzy Systems and Control",. Englewood Cliffs, New Jersey: PrenticeHall, 1994.
- [77] Mirjalili, S."Moth-Flame Optimization Algorithm: A Novel Nature-inspired Heuristic Paradigm", Knowledge-Based Systems, Vol. 89, pp. 228–249. 2015.
- [78] Storn, R., and Parice, K. "Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces". Journal of global optimization, vol. 11, pp. 341-359., 1997.
- [79] Bentouati, B., Chaib, L., and Chettih, S."Optimal Power Flow using the Moth Flam Optimizer: A Case Study of the Algerian Power System', Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science, Vol. 1, No.3, pp. 431–445. 2016.
- [80] Algabalawy, M., Mekhamer, S.F., Abdelaziz, A.Y., and Bader, M.A.L. "Optimal Multi-Criteria Design of Hybrid Power Generation Systems: A New Contribution". Int. J. of Computer Applications Vol. 129, No. 2, pp. 13–24. 2015.
- [81] Bourouba, B., Ladaci, S., and Chaabi, A. "Moth-Flame optimization algorithm based fractional order PI $^{\lambda}$ D $^{\mu}$  controller with MRAC tuning configuration" . Accepted to International Journal of Systems, Control and Communications (Inderscience), 2017.
- [82] Kenneth, V., Price, R., andStorn, M. "Differential Evolution Apractical Approach to Global Optimization With 292 Figures, 48 Tables and CD-ROM " Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.
- [83] Jingqiao, Z., and Arthur, C. S. "Adaptive Differential Evolution A Robust approach to Multimodal Problem Optimization". Springer-Verlag Berlin Heidelberg., 2009,

- [84] Kennedy, J., and Eberhart. R.C. "A new optimizer using particle swarm",. 6 ème International Symposium on Micro Machine and Human, 1995.
- [85] Hachimi, H. " Hybridations d'algorithmes méthaheuristiques en optimisation globale et leurs application ". thèse doctorat - université mohamed 5 rabat, 2013.
- [86] Srikanta, P., Ishwar, K., and Xiaolong, L. "Modeling and Optimization in Science and Technologies". DOI 10.1007/978-3-319-26245-1 Springer International Publishing Switzerland 2016.
- [87] Smairi, N. "Optimisation par essaim particulière : adaptation de tribes `a l'optimisation multiobjectif ". these doctorat Université de manouba, 2013.
- [88] Gherboudj, A. "Méthodes de résolution de problèmes difficiles académiques". Thèse Doctorat 3ème cycle, Université de Constantine2, 2013.
- [89] Yakoub, Z., Amairi, M., Chetou, M., and Aoun, M. "On the closed-loop system identification with fractional models". *Circuits Syst Signal Process.* Vol. 34, No. 12, pp. 3833–3860, 2015.
- [90] Djamah., T., Mansouri. R., Djennoune, S., and Bettayeb, M. "Optimal low order model identification of fractional dynamic systems ". *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 206, No. 2, pp. 543–554, 2008.
- [91] Nazarian.P., Haeri, M., and Tavazoei, M. " Identifiability of fractional order systems using input output frequency contents". *ISA Transactions*, Vol. 49, pp. 207–214 , 2010.
- [92] Dzielinski, A., Sierociuk, D., Sarwas, G., and Podlubny, I. "Identification of the fractional-order systems: A frequency domain approach". *Acta Montanistica Slovaca*, Vol. 16, No. 1, pp. 26–33 , 2011.
- [93] Yakoub, Z., Chetoui, M., Amairi, M., and Aoun, M. "A bias correction method for fractional closed-loop system identification". *Journal of Process Control*, Vol. 33, pp. 25–36, 2015.
- [94] Charef, A., Idiou, D., Djouambi, A., and Voda, A. "Identification of linear fractional systems of commensurate order",. In: *The 3rd International Conference on Systems and Control*, pp. 1–6. Algiers, Algeria (October 29-31, 2013), 2013.
- [95] Djouambi, A., Charef, A., and Voda, A. "Numerical simulation and identification of fractional systems using digital adjustable fractional order integrator". In: *The 2013 European Control Conference (ECC)*, pp. 2615–2620. Zurich, Switzerland (July 17-19, 2013), 2013.
- [96] Zhou, S., Cao, J., Chen, Y. "Genetic algorithm-based identification of fractional-order systems." *Entropy*, Vol. 15, pp. 1624–1642, 2013.

- [97] Othman, M., and Al-Sabawi, E. "Fractional order system identification based on genetic algorithms". *J. Engineering Science and Technology*, Vol. 8, No. 6, pp. 713–722, 2013.
- [98] Bouyedda, H., and Ladaci, S. "Optimal tuning of fractional order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers using genetic algorithms". In: *8th IEEE International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC 2016)*, pp. 207–212. November 15-17, 2016, Algiers, Algeria, 2016.
- [99] Tang, Y., Liu, H., Wang, W., Guan, X. "Parameter identification of fractional order systems using block pulse functions". *Signal Processing*, Vol. 107, pp. 272–281, 2015.
- [100] Bourouba, B., Ladaci, S., and Chaabi, A. "Reduced order model approximation of fractional order systems using Differential Evolution algorithm". *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, (Springer) doi: 10.1007/s40313-017-0356-5, 2017.
- [101] Ladaci, S., and Bensafia, Y. "Indirect fractional order pole assignment based adaptive control". *Engineering Science and Technology, an International Journal*, Vol. 19, pp. 518–530. 2016.
- [102] Bensafia, Y., and Ladaci, S. "Adaptive Control with Fractional Order Reference Model". *Int. J. of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering*, Vol. 5, No. 2, pp. 1614–1623, 2011.
- [103] Ananthababu, P., Raja, Ch.V.N., Latha, D.V.P., and Sudha, K.R. "Design of fractional model reference adaptive PID controller to magnetic levitation system with permagnet". *Int. J. of Systems, Control and Communications*, Vol. 7, No. 1, pp. 35–44., 2016.
- [104] Mishra P., Kumar V., and Rana K. P. S. "A fractional order fuzzy PID controller for binary distillation column control". *Expert Systems With Applications*, Vol. 42, pp. 8533–8549., 2015.
- [105] Tang Y., Cui M., Hua C., Li L., and Yang Y. "Optimum design of fractional order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller for AVR system using chaotic ant swarm". *Expert Systems with Applications*, Vol. 39, No. 8, pp. 6887–6896, 2012.
- [106] Nema, S., and Padhy, P.K. "PI-PD controller for stable and unstable processes". *Int. J. of Systems, Control and Communications*, Vol. 5, No. 2, pp. 156–165., 2013.
- [107] Liu, X. "Optimization design on fractional order PID controller based on adaptive particle swarm optimization algorithm". *Nonlinear Dynamics*, Vol. 84, pp. 379–386., 2016.
- [108] Das, S., Pan, I., Das, S., and Gupta, A. "A novel fractional order fuzzy PID controller and its optimal time domain tuning based on integral performance indices". *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Vol. 25, pp. 430–442., 2012.

- [109] Machado, J.A. "Optimal tuning of fractional controllers using genetic algorithms." *Nonlinear Dynamics*, Vol.62, pp. 447-452, 2010.
- [110] Lazarevic, M. P., Batalov, S. A., and Latinovic, T.S. "Fractional PID Controller Tuned by Genetic Algorithms for a Three DOF's Robot System Driven by DC motors",. 6th Workshop on Fractional Differentiation and its Applications Part of 2013 IFAC Joint Conference SSSC, FDA, TDS, Grenoble, France, 4–6 February 2013, pp. 385–390., 2013.
- [111] Cao, J.Y., and Cao, B.G. "Design of fractional order PID controllers based on Particle Swarm Optimization". *Int. J. of Control, Automation and Systems*, Vol. 4, No. 6, pp. 775–781, 2006.
- [112] Nasirpour, N., and Balochian, S. "Optimal design of fractional-order PID controllers for multi-input multioutput (variable air volume) air-conditioning system using particle swarm optimization". *Intelligent Buildings International*, DOI: 10.1080/17508975.2016.1170659., 2016.
- [113] Neçaibia, A., and Ladaci, S. "Self-tuning fractional order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller based on extremum seeking approach". *Int. J. of Automation and Control*, Vol. 8, No. 2, pp.99–121., 2014.
- [114] Biswas, A., Das, S., Abraham, A., and Das gupta, S. "Design of fractional-order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers with an improved differential evolution". *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Vol. 22, pp. 343—350., 2009.
- [115] Bagis, A. "Tabu search algorithm based PID controller tuning for desired system specifications". *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 348, pp. 2795–2812., 2011.
- [116] Sheng, W., and Bao, Y. "Fruit fly optimization algorithm based fractional order fuzzy PID controller for electronic throttle". *Nonlinear Dynamics*, Vol. 73, pp. 611–619., 2013.
- [117] Kesarkar, A. A., and Selvaganesan, N. "Tuning of optimal fractional-order PID controller using an artificial bee colony algorithm". *Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal*, Vol. 3, pp. 99—105, 2015.
- [118] Tamer, M. "PID Control, Implementation and Tuning". Edition InTech, Croatia. 2011.
- [119] Bourouba, B., and Ladaci, S. "Comparative performance analysis of AG, PSO, CA and ABC algorithm's for fractional PID controller". 8th IEEE International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC 2016), Algiers, Algeria, 15-17 November 2016, pp. 960–965., 2016.
- [120] Bourouba, B., Ladaci, S., and Chaabi, A. "MRAC-Based Fractional Order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Controller Tuning Using Moth-Flame Optimization Approach", Accepted to *International Journal of Systems, Control and Communications (Inderscience)*, 2017.

- [121] Whitaker, H.P., Yamron J., and Kezer A. “Design of model-reference adaptive control systems for aircraft”, Technical Report, Instrumentation Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Boston, USA. 1958.
- [122] Ladaci, S., and Charef, A. “MIT adaptive rule with fractional Integration”, CESA’2003 IMACS Multi-conference Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, 9–11 July 2003.
- [123] Ates, A., and Yeroglu, C. “Optimal fractional order PID design via Tabu Search based algorithm”. *ISA Transactions*, Vol. 60, pp. 109–118, 2016.
- [124] Ladaci, S., Loiseau, J.J. and Charef, A. “Adaptive Internal Model Control with Fractional Order Parameter”. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley, Vol 24, pp.944–960, October 2010.
- [125] Tsai, J.S., Chien, T.H., Guo, S.M., Chang, Y.P., and Shieh, L.S. “State-space self-tuning control for stochastic fractional-order chaotic systems”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 54, No. 3, pp. 632–642, 2007.
- [126] Yang, L., and Jiang, J. “Complex dynamical behavior and modified projective synchronization in fractional-order hyper-chaotic complex Lu system “. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 78, pp. 267-276, 2015.
- [127] Xu, Y., Wang, H., Liu, D., and Huang, H.,. “Sliding mode control of a class of fractional chaotic systems in the presence of parameter perturbations”. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 21, No. 3, February, pp. 435–448, 2015.
- [128] Xu, Y., Wang, H., Li, Y., and Pei, B. “Image encryption based on synchronization of fractional chaotic systems”. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, Vol. 19, No. 10, pp. 3735–3744., 2014.
- [129] Tavazoei, M.S., and Haeri, M. “Stabilization of unstable fixed points of fractional-order systems by fractional-order linear controllers and its applications in suppression of chaotic oscillations”. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 132, No. 2, pp. 70-76, 2010.
- [130] Rabah, K., Ladaci, S., and Lashab, M.,. “Bifurcation-based fractional-order PID controller design approach for nonlinear chaotic systems”. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*. doi: 10.1631/FITEE.1601543, 2017.
- [131] Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M. A., and Delgado-Aguilera, E. “Adaptive synchronization of fractional lorenz systems using a reduced number of control signals and parameters”. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 87, pp. 1–11, 2016.
-

- [132] Lin, T.C., and Kuo, C.H. “ $H_\infty$  synchronization of uncertain fractional order chaotic systems: Adaptive fuzzy approach”. *ISA Transactions*, Vol. 50, pp. 548–556, 2011.
- [133] Shukla, M.K., and Sharma, B. B. “Stabilization of a class of uncertain fractional order chaotic systems via adaptive backstepping control”. In *Indian Control Conference (ICC)*, Vol. 17, IEEE, pp. 462–467, 2017.
- [134] Chen, D., Liu, Y., Ma, X., and Zhang, R., “Control of a class of fractional-order chaotic systems via sliding mode”. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 67, pp. 893–901, 2012.
- [135] Huang, Y.J., Kuo, T.C., and Chang, S.H. “Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, Vol. 38, No. 2, pp. 534–539, 2008.
- [136] Morari, M., and Zafiriou, E., *Robust Process Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1989.
- [137] Hosseinnia, S.H., Ghaderi, R., Ranjbar, N.A., Mahmoudiana, M., and Momani, S. “Sliding mode synchronization of an uncertain fractional order chaotic system”. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 59, pp. 1637–1643, 2010.
- [138] Ho, H.F., Wong, Y.K., and Rad, A.B. “Adaptive fuzzy sliding mode control with chattering elimination for nonlinear siso systems”. *Simulation Modelling Practice and Theory*, Vol. 17, pp. 1199–1210. 2009.
- [139] Deng. H., and Lib. C.P. “Chaos synchronization of the fractional Lu’s system”. *Physica A* Vol. 353, pp. 61–72. , 2005.
- [140] Yin, C., Zhong, S., and Chen, W. “Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems”. . *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 17, pp. 356–366, 2012.

**Résumé** –Ce travail porte essentiellement sur l'introduction de techniques d'optimisation dans les systèmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire, et sur l'approximation optimisée des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles d'ordre réduit pour l'identification et la commandes. D'abord, une nouvelle technique d'approximation a été proposée dans ce sens, qui utilise la technique d'optimisation DE (Evolution différentielle) tout en montrant son avantage par comparaison avec d'autres techniques célèbres telles que celles développées par Charef ou Oustaloup.

Ensuite, on a développé de nouvelles lois de commande adaptatives fractionnaire avec paramètres optimisés pour améliorer le comportement du système de commande : Pour les systèmes linéaires, on a proposé une commande PID d'ordre fractionnaire à modèle de référence basé sur un nouvel algorithme d'optimisation (Moth-Flame). Dans le cas des systèmes non linéaires chaotiques d'ordre fractionnaire les approches suivantes sont abordées : une première commande par mode glissant adaptative pour améliorer les performances et la robustesse. Comme les systèmes flous sont des approximateurs universel, on exploite cette propriété pour renforcer la loi de commande précédente par un contrôleur flou adaptatif. En fin pour que la commande soit optimale, les paramètres du contrôleur par mode glissant sont calculés par la technique d'optimisation PSO. Dans tous les cas précédents, l'analyse de la stabilité et de la robustesse sont justifiés par l'approche de Lyapunov. Les résultats théoriques sont validés par des exemples de simulation.

**Mots Clés** - Calcul fractionnaire, système de commande d'ordre fractionnaire, commande adaptative à modèle de référence, commande optimale, commande par mode glissant, commande floue, commande adaptative, optimisation.

**Summary** - This work focuses on the introduction of optimization techniques in fractional adaptive control systems and on optimized approximation of fractional systems with reduced order models for identification and control purpose. Indeed, a new technique of approximation has been proposed in this direction, using the DE (differential evolution) technique while showing its advantage compared to other famous techniques such as those developed by Charef or Oustaloup.

Fractional adaptive control laws with optimized parameters are developed in order to improve the control system behavior: In the case of fractional order linear systems, a model reference PID control based on a new optimization algorithm (Moth-Flame) has been proposed. In the case of fractional order chaotic nonlinear systems, the following approaches are considered: a first control with adaptive sliding mode to improve performance and robustness. Since fuzzy systems are universal approximators, this property is exploited to strengthen the previous control law by an adaptive fuzzy controller. For an optimal control, the parameters of the sliding controller are calculated by PSO optimization technique. In all the previous cases, the analysis of stability and robustness are justified by the Lyapunov approach. The theoretical results are validated by simulation examples.

**Keywords** - Fractional calculus, Fractional order control system, Model reference adaptive control, Optimal control, Sliding mode control, Adaptive control, Optimization

**ملخص-** يركز هذا العمل اساسا على إدخال تقنيات التحسين في أنظمة التحكم التكيفية الجزئية وعلى التقريب الأمثل من لنظم الجزئية بنماذج نظام منخفض الدرجة وهذا لغرض التشخيص والتحكم. في الواقع، تم اقتراح تقنية جديدة للتقريب في هذا الاتجاه، وذلك باستخدام تقنية DE (التطور التفاضلي) وقد تم تبين ميزتها بالمقارنة مع التقنيات الشهيرة الأخرى مثل تلك التي وضعها شارف أو أوستالوب. فيما بعد قمنا بتطوير قوانين التحكم التكيفي الجزئي بأمثل بمعاملات وذلك لتحسين سلوك نظام التحكم: في حالة النظم الخطية الجزئية قمنا باقتراح PID جزئي ذو نموذج مرجعي يستند إلى خوارزمية جديدة للتحسين (العثة - اللهب). في حالة الأنظمة الغير الخطية الفوضوية المقاربات التالية تم استعراضها: أول نظام تحكم انزلاقي تكيفي من اجل تحسين الأداء والمتانة. ونظرا لأن الأنظمة الضبابية هي مقاربات شاملة، نستغل هذه الخاصية لتعزيز قانون المراقبة السابق بواسطة وحدة تحكم غامضة تكيفية. من أجل أن يكون التحكم أمثل، يتم حساب المعاملات في وحدة تحكم انزلاقي بواسطة تقنية اسراب الجزئية PSO. بالنسبة لكل الحالات السابقة تحليل الاستقرار والمتانة. تم تبريره بواسطة مقارنة ليايبنوف. النتائج النظرية تم التحقق منها من خلال محاكاة العديد من الأمثلة.

**الكلمات المفتاحية -** الحساب الجزئي، نظام التحكم الجزئي، التحكم التكيفي مع نموذج مرجعي، التحكم الأمثل، التحكم في وضع الانزلاق، التحكم الغامض، التحكم التكيفي، التحسين