

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

N° d'Ordre :.....

Série :.....

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : CONTROLE DES SYSTEMES

Par :

BOUCHERMA Djamel

THEME

RESOLUTION DES EQUATIONS D'ETAT LINEAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Soutenue le : 29 / 06 / 2017

Devant le Jury :

Président	F. Soltani	Professeur	Université mentouri de Constantine
Rapporteur	A. Charef	Professeur	Université mentouri de Constantine
Examineurs	A. Bennis	Professeur	Université mentouri de Constantine
	M. Kidouche	Professeur	Université de Boumerdes
	A. Boukabou	Professeur	Université de Jijel

Année : 2017

Dédicaces

A mes parents,

A ma petite famille,

A mes frères et sœurs,

A tous mes amis,

Remerciements

Avant tout, mes remerciements à mon dieu **ALLAH** le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire de traitement du signal de l'Université de Constantine, sous la direction scientifique de Monsieur le professeur **Abdelfatah CHAREF**, que je tiens à remercier très vivement de son enthousiasme envers mon travail, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Je le remercie également, pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements et ses précieux conseils.

Je suis très honoré que Monsieur **Faouzi SOLTANI**, Professeur à l'université de Constantine, ait accepté de présider le jury de cette thèse. Je remercie également Messieurs **Abdelhak BENNIA**, Professeur à l'université de Constantine, **Madjid KIDOUCHE**, Professeur à l'université de Boumerdes et **Abdelkrim BOUKABOU**, Professeur à l'université de Jijel, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire de traitement du signal, équipe système, pour leurs aides, serviabilités et leurs encouragements.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes amis et mes collègues de travail.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	ii
Liste des figures	v
Introduction Générale	1
Chapitre I : Introduction aux Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaire	4
I.1 Introduction	4
I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire	4
I.2.1 Définitions fondamentales des opérateurs d'ordre fractionnaire	4
I.2.1.1 Définition de Riemann-Liouville	4
I.2.1.2 Définition de Grünwald-Leitnikov	5
I.2.1.3 Définition de Caputo	5
I.2.2 Quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	5
I.2.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	6
I.2.3.1 Transformée de Laplace des intégrales fractionnaires	6
I.2.3.2 Transformée de Laplace pour les dérivées d'ordre fractionnaires	6
I.2.4 Fonctions utilisées en calcul fractionnaire	7
I.2.4.1 Fonction Gamma d'Euler	7
I.2.4.2 Fonction Mittag-Leffler	8
I.2.5 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	8
I.2.5.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire	9
I.2.5.2 Approximation du différentiateur d'ordre fractionnaire	10
I.3 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	11
I.3.1 Représentation des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	11
I.3.1.1 Equations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire	12
I.3.1.2 Fonction de transfert	12
I.3.2 Systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable	12
I.3.2.1 Equation différentielle fractionnaire d'ordre commensurable	12
I.3.2.2 Fonction de transfert	13

I.3.2.3	Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert	13
I.3.2.4	Passage de la fonction de transfert à l'équation d'état pour la représentation des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable.....	13
I.3.2.4.1	Forme canonique contrôlable	14
I.3.2.4.2	Forme canonique observable	15
I.3.2.4.3	Forme canonique modale	16
I.3.3	Propriétés structurelles des systèmes d'ordre fractionnaire	18
I.3.3.1	Stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	18
I.3.3.2	Contrôlabilité	18
I.3.3.3	Observabilité	19
I.3.4	Solution des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable	19
I.3.4.1	Calcul des matrices $\psi(t)$ et $\hat{\psi}(t)$	20
I.3.4.1.1	Méthode de la transformation de Laplace inverse	20
I.3.4.1.2	Méthode de la décomposition Modale	21
I.3.4.1.3	Méthode de Cayley-Hamilton	22
I.4	Conclusion	23

Chapitre II : Fonctions Fondamentales des Systèmes Linéaires Fractionnaires d'Ordre

Commensurable	24	
II.1	Introduction	24
II.2	Fonctions fondamentales pour le cas des pôles réels	25
II.2.1	Exemple illustratif	27
II.2.1.1	Cas d'un pôle réel et simple	27
II.2.1.2	Cas d'un pôle réel et multiple	29
II.3	Fonctions fondamentales pour le cas des pôles complexes	31
II.3.1	Fonctions fondamentales pour une paire de pôles complexes conjugués avec parties réelles nulles	31
II.3.1.1	Cas 1 : $0 < m < 0.5$	32
II.3.1.2	Cas 2: $m = 0.5$	34
II.3.1.3	Cas 3: $0.5 < m < 1$	34
II.3.2	Fonctions fondamentales pour une paire de pôles complexes conjugués avec partie réelle négative	39
II.3.3	Exemples illustratifs	41
II.3.3.1	Cas 1 : $m = 0.23$ ($0 < m < 0.5$)	41

II.3.3.2 Cas 2: $m = 0.5$	45
II.3.3.3 Cas 3 : $m = 0.92$ ($0.5 < m < 1$)	47
II.4 Conclusion	51
 Chapitre III : Résolution de l'Equation d'Etat Linéaire Fractionnaire d'Ordre	
Commensurable avec Valeurs Propres Réelles	52
III.1 Introduction	52
III.2 Solution de l'équation d'état linéaire fractionnaire d'ordre commensurable	52
III.2.1 Théorème de Cayley-Hamilton	52
III.2.2 Calcul de fonctions de matrices carrées	53
III.2.3 Solution	54
III.2.3.1 Cas des valeurs propres réelles et distinctes	54
III.2.3.2 Cas des valeurs propres réelles et multiples	57
III.3 Exemples illustratifs	61
III.3.1 Exemple 1 : Cas des valeurs propres réelles et distinctes	61
III.3.2 Exemple 2 : Cas des valeurs propres réelles et multiples	64
III.4. Conclusion.....	68
 Chapitre IV : Solution de l'Equation d'Etat du Système Linéaire Fractionnaire d'Ordre	
Commensurable avec les Valeurs Propres Complexes en Utilisant les	
Fonctions Exponentielles et Trigonométriques Régulières	69
IV.1 Introduction	69
IV.2 Solution de l'équation d'état du système linéaire d'ordre fractionnaire	69
IV.2.1 Décomposition modale	69
IV.2.2 Solution	70
IV.3 Exemple illustratif	74
IV.3.1 Cas 1 : $0 < m < 0.5$	76
IV.3.2 Cas 2 : $m = 0.5$	79
IV.3.3 Cas 3 : $0.5 < m < 1$	81
IV.4 Conclusion	84
 Conclusion Générale	85
Références	87

Liste des figures

I.1	Tracé de la fonction Gamma d'Euler.....	7
I.2	Tracé de certaines Fonction de Mittag-Leffler	8
I.3	Région de stabilité pour un système d'ordre fractionnaire $0 < m < 2$	18
II.1	Tracé de la fonction $\text{gexp}_1(t, -3, 0.38)$	28
II.2	Tracé de la fonction $\text{hexp}_1(t, -3, 0.38)$	28
II.3	Tracé de la fonction $\text{gexp}_2(t, -5, 0.72)$	30
II.4	Tracé de la fonction $\text{hexp}_2(t, -5, 0.72)$	30
II.5	Tracé des fonctions $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.23)$ et $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.23)$	44
II.6	Tracé des fonctions $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.23)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.23)$	44
II.7	Tracé des fonctions $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$	46
II.8	Tracés des fonctions $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$	47
II.9	Tracé des fonctions $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.92)$ et $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.92)$	50
II.10	Tracé des fonctions $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.92)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.92)$	50
III.1	Tracés des fonctions $\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)$, $5 \cdot \text{hexp}_1(t, -4, 0.83)$ et $5 \cdot \text{hexp}_1(t, -7, 0.83)$..	63
III.2	Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_1(t)$ de la solution $x(t)$	64
III.3	Tracés des fonctions $\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)$, $\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)$ et $5 \cdot \text{hexp}_1(t, -5, 0.36)$	67
III.4	Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_1(t)$ de la solution $x(t)$	68
IV.1	Tracés des fonctions $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.3)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.3)$ $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.3)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.3)$	78
IV.2	Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de la solution $x(t)$	78
IV.3	Tracés des fonctions $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$	80
IV.4	Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de la solution $x(t)$	81

IV.5	Tracés des fonctions $hfcos(t, \lambda_{01}, 0.87)$, $hfsin(t, \lambda_{01}, 0.87)$, $hfdcoss(t, \lambda_3, 0.87)$ et $hfdssin(t, \lambda_3, 0.87)$	83
IV.6	Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de la solution $x(t)$	84

Résumé

Dans ce travail, la résolution de l'équation d'état fractionnaire $\frac{d^m x(t)}{dt^m} = Ax(t) + Be(t)$, $0 < m < 1$, représentant les systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable, pour tous les cas de figure des valeurs propres de la matrice d'état A et l'ordre de différentiation m a été proposé. Les expressions explicites des solutions homogènes et non homogènes de cette équation d'état fractionnaire ont été développées. Pour différentes valeurs propres de la matrice d'état A et l'ordre m , les solutions obtenues sont des combinaisons linéaires de fonctions fondamentales fractionnaires appropriées dont les transformées de Laplace sont des fonctions irrationnelles. Les approximations de ces fonctions irrationnelles par des fonctions rationnelles ont été obtenues pour que les solutions de l'équation d'état fractionnaire soient des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles, cosinus, sinus, cosinus amorti et sinus amorti classiques. Des exemples illustratifs pour tous les cas de figure des valeurs propres de la matrice d'état A et l'ordre m ont été présentés et les résultats obtenus ont été très satisfaisants.

Mots Clés :

Décomposition modale ; Fonction irrationnelle ; Fonction rationnelle ; Représentation d'état fractionnaire d'ordre commensurable ; Système fractionnaire d'ordre commensurable ; Théorème de Cayley-Hamilton ; Valeurs propres

Introduction Générale

Introduction Générale

Dans les dernières décennies, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été utilisés dans la modélisation des processus de diverses applications dans différents domaines de la science et de l'ingénierie [1-7]. Ils ont reçu une grande attention grâce à leur plus large flexibilité par rapport aux systèmes entiers pour modéliser plus correctement des systèmes de plus en plus complexes. A cause de leur représentation par des fonctions de transfert irrationnelles, les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire ont été étudiés marginalement dans la théorie et la pratique des systèmes. Seulement dans les dernières années qu'on peut trouver un progrès significatif de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans la théorie des systèmes et la théorie de la commande [8-11]. Donc, un travail de recherche intensif est encore en cours pour développer et établir des outils convenables pour l'étude, l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire.

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques linéaires représentés par des équations différentielles linéaires dont les ordres de leurs dérivées sont des nombres réels. Une représentation utile des systèmes d'ordre fractionnaire est la représentation d'état. Pour les systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable, la représentation d'état est définie comme la représentation d'état régulière avec la différentiation d'ordre réel du vecteur d'état comme [10]:

$$\begin{cases} D^m x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}, \quad 0 < m < 1$$

Une attention considérable a été accordée à ces équations différentielles pour établir des techniques convenables et efficaces pour leurs solutions et analyses afin qu'ils puissent être accessibles à la communauté de l'ingénierie. Malgré leur résolution était beaucoup impliqué, des solutions exactes ne peuvent pas être trouvées. Donc les approximations et les techniques numériques doivent être utilisées intensivement. Jusqu'ici, il y a eu quelques ouvrages fondamentaux sur les équations différentielles fractionnaires qui fournissent une bonne compréhension de leur analyse telle que l'existence, l'unicité et quelques méthodes numériques et analytiques pour leurs solutions [8-9], [12-13]. Mais, ces méthodes de résolutions des systèmes d'ordre fractionnaire sont généralement développées par des mathématiciens qui s'intéressent qu'à l'aspect purement théoriques des solutions obtenues. Plus récemment, il y a eu plusieurs travaux consacrés aux équations différentielles fractionnaires, y compris le développement de méthodes et de techniques efficaces pour les

résoudre en s'intéressent à l'aspect ingénierie des solutions obtenues. Les méthodes les plus utilisées pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire sont basées sur une large variété de techniques telles que les transformées de Laplace et de Fourier, la méthode de la transformation différentielle, les différentes méthodes itératives et de différences finis, la méthode de la décomposition d'Adomian, la méthode de l'analyse d'homotopie, la méthode de collocation, les différentes techniques des ondelettes, les méthodes des fonctions de Legendre, de Chebychev et de Besse, ainsi que beaucoup d'autres méthodes dans la littérature. Ces méthodes développées peuvent être largement classifiées en deux classes, analytique et numérique. L'objectif des méthodes analytiques est d'obtenir une expression explicite de la solution générale des équations différentielles d'ordre fractionnaires [14-20]. Cependant, le but des techniques numériques est le développement de solutions computationnelles efficaces des équations différentielles d'ordre fractionnaires [21-27].

Objectif de la thèse

L'objectif principal de ce travail porte essentiellement sur la contribution au développement de techniques de résolution des systèmes linéaires fractionnaire d'ordre commensurable en

représentation d'état $\frac{d^m x(t)}{dt^m} = Ax(t) + Be(t)$, $0 < m < 1$, pour tous les cas de figure des

valeurs propres de la matrice d'état A en les traitant comme les systèmes linéaires classiques afin d'établir des expressions explicites des solutions homogènes et non homogènes. Puisque ces équations différentielles n'ont pas de solutions analytiques exactes, des techniques d'approximations vont être élaborées pour l'obtention de leurs solutions. Alors, l'approche proposée dans cette thèse pour la résolution de cette équation d'état fractionnaire est basée sur l'utilisation des fonctions fondamentales fractionnaires appropriées obtenues pour différentes valeurs propres de la matrice d'état A et l'ordre m. Comme la transformée de Laplace de ces fonctions fondamentales fractionnaires sont des fonctions irrationnelles, alors leurs approximations par des fonctions rationnelles ont été faites pour que ces fonctions deviennent des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles, cosinus, sinus, cosinus amorti et sinus amorti classiques. Les méthodes utilisées pour la dérivation des solutions sont la méthode de Cayley-Hamilton et la méthode de la décomposition modale.

Organisation de la thèse

Les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l'objet de cette thèse sont présentés en quatre chapitres :

Chapitre I : Introduction aux Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaire

Ce chapitre présente les idées de base des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire aux chercheurs non-initiés. Premièrement, les principales définitions et propriétés de l'intégration et de la différentiation d'ordre fractionnaire sont données. Puis, les systèmes d'ordre fractionnaire décrit par des équations différentielles d'ordre fractionnaire sont examinés. Les différentes représentations des ces systèmes telles que les équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire, la fonction de transfert et l'équation d'état ont été présentées. L'analyse des propriétés structurelles des systèmes fractionnaires d'ordre commensurable telles que la stabilité, la contrôlabilité et l'observabilité ont aussi été présentées. Enfin, les expressions de la solution de l'équation d'état des systèmes linéaires fractionnaire d'ordre commensurable ont été présentées.

Chapitre II : Fonctions Fondamentales des Systèmes Linéaires Fractionnaires d'Ordre Commensurable

Ce chapitre est consacré à la présentation des fonctions fondamentales fractionnaires correspondantes aux différents types de valeurs propres de la matrice d'état A . Ces fonctions fondamentales sont définies dans ce contexte par l'exponentiel fractionnaire, le cosinus fractionnaire, le sinus fractionnaire, le cosinus amorti fractionnaire et le sinus amorti fractionnaire. Les approximations de ces fonctions fondamentales fractionnaires irrationnelles par des fonctions rationnelles ont été faites. Leurs réponses impulsionnelles et indicielles partir de leur approximations ont aussi été obtenues.

Chapitre III : Résolution de l'Equation d'Etat Linéaire Fractionnaire d'Ordre Commensurable avec Valeurs Propres Réelles

L'objectif de ce chapitre est de présenter les solutions homogènes et non homogènes de l'équation d'état des systèmes linéaires fractionnaire d'ordre commensurable pour le cas des valeurs propres de la matrice d'état A réelles simples et/ou multiples.

Chapitre IV : Solution de l'équation d'état d'un système linéaire fractionnaire d'ordre Commensurable avec Valeurs Propres Complexes en Utilisant les Fonctions Exponentielles et Trigonométriques Régulières

Le dernier chapitre est consacré à la présentation des solutions homogènes et non homogènes de l'équation d'état des systèmes linéaires fractionnaire d'ordre commensurable pour le cas des valeurs propres de la matrice d'état A réelles complexes. Les expressions des solutions sont obtenues pour différents types de valeurs propres complexes de la matrice d'état A et de la plage du paramètre m .

Conclusion

La conclusion regroupe les contributions et les résultats obtenus et présente des perspectives pour des travaux futures.

Chapitre

1

*Introduction aux
Opérateurs et Systèmes
d'Ordre Fractionnaire*

Chapitre I

Introduction aux Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaire

I.1. Introduction

L'opérateur fondamental représentant la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire est donné par ${}_a D_t^m$; où $m \in \mathbb{R}$ est l'ordre de la différentiation ou de l'intégration et les paramètres a et t sont les limites de l'opération. Cette opération est définie comme [8] :

$${}_a D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m}, & m > 0 \\ 1, & m = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^m, & m < 0 \end{cases} \quad (I.1)$$

Il existe diverses définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, mais les plus utilisées dans la littérature sont celles de Grünwald-Letnikov (GL), de Riemann-Liouville (RL) et de Caputo qui sont équivalentes sous certaines conditions pour une large classe de fonctions [8].

Ce chapitre introduit les idées de base du calcul fractionnaire aux chercheurs non-initiés. Les principales définitions, les propriétés ainsi que la transformée de Laplace de ces opérateurs sont discutées. Les fonctions importantes utilisées en calcul fractionnaire sont introduites ainsi que les systèmes d'ordre fractionnaire décrit par des équations différentielles d'ordre fractionnaire sont aussi brièvement examinés.

I.2. Opérateurs d'ordre fractionnaire

Il est connu que la formulation du concept des opérateurs d'ordre fractionnaires est une extension naturelle des opérateurs d'ordre entier qui pour les différentiations successives d'ordre entier n d'une fonction f on a :

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \equiv f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (I.2)$$

$$\text{où } \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

I.2.1. Définitions fondamentales des opérateurs d'ordre fractionnaire

I.2.1.1. Définitions de Riemann-Liouville

L'intégrale d'ordre fractionnaire m d'une fonction $f(t)$ est définie par [10]:

$${}_a I_t^m f(t) = {}_a D_t^{-m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_a^t (t - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \quad (I.3)$$

où $a < t$ et $m > 0$ et $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est la fonction Gamma d'Euler.

La dérivée d'ordre fractionnaire m d'une fonction $f(t)$ est définie par [10] :

$${}_{\text{RL}}D_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-m-1} f(\tau) dt \quad (\text{I.4})$$

où $t_0 < t$ et le nombre entier n est tel que $(n-1) < m < n$.

I.2.1.2. Définition de Grünwald-Letnikov

L'extension de l'expression de l'équation (I.2) pour des ordres non entiers conduit à la définition de Grünwald-Letnikov. L'intégrale ou la dérivée d'ordre fractionnaire m d'une fonction $f(t)$ est définie par [10]:

$${}_{\text{GL}}D_t^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m}{j} f(t-jh) \quad (\text{I.5})$$

où $m \in \mathbb{R}$ avec $m < 0$ pour la dérivée et $m > 0$ pour l'intégrale et $\binom{m}{j} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(m-j+1)}$.

Cette expression est largement utilisée dans la littérature pour le calcul numérique de la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire.

I.2.1.3. Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par [10]:

$${}_C D_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-m-1} f^{(n)}(\tau) dt \quad (\text{I.6})$$

où le nombre entier n est tel que $(n-1) < m < n$ et $f^{(n)}(t)$ est la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(t)$. Les définitions de Riemann-Liouville ${}_{\text{RL}}D_t^m f(t)$ et de Caputo ${}_C D_t^m f(t)$ sont équivalentes et sont reliées par la relation suivante [10] :

$${}_{\text{RL}}D_t^m f(t) = {}_C D_t^m f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t)^{(k-m)}}{\Gamma(k-m+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (\text{I.7})$$

pour $f^{(k)}(a) = 0$, où $(k = 0, 1, \dots, n-1)$.

I.2.2. Quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les propriétés les plus importantes de la différentiation et d'intégration fractionnaire sont données comme suit [10]:

- Si la fonction $f(t)$ est une fonction analytique de t , alors sa dérivée d'ordre fractionnaires ${}_0D^m f(t)$ est une fonction analytique de t et m .

- Lorsque $m = n$, où n est un nombre entier, l'opérateur ${}_0D^m f(t)$ donne le même résultat que la différentiation ou l'intégration d'ordre entier classique.
- Lorsque $m = 0$, l'opération ${}_0D^m f(t)$ est l'opérateur identité ; ${}_0D^0 f(t) = f(t)$.
- La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires :

$$D^m (a f (t) + b g(t)) = a D^m f(t) + b D^m g(t) \quad (I.8)$$

- Si m et n sont des nombres réels positifs, la relation suivante appelée la loi additive :

$$D^m D^n f (t) = D^{m+n} f (t) \quad (I.9)$$

- Il y a d'autres propriétés des dérivées et d'intégrales d'ordre fractionnaire spécifiques aux différentes définitions [9, 12, 28-29].

L'interprétation géométrique et physique de l'intégration et de la différentiation d'ordre fractionnaire sont données dans le travail de Podlubny [29].

I.2.3. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

I.2.3.1. Transformée de Laplace des intégrales fractionnaires

L'intégration fractionnaire d'ordre $m > 0$ de R-L peut être exprimée comme une convolution des deux fonctions $g(t) = t^{m-1}$ et $f(t)$ comme suit [10] :

$${}_0D_t^{-m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau = t^{m-1} * f(t) \quad (I.10)$$

La transformée de Laplace $G(s)$, de la fonction $g(t) = t^{m-1}$ est donnée par :

$$G(s) = L\{t^{m-1}\} = \Gamma(m) s^{-m} \quad (I.11)$$

Donc, la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L est donnée par [9, 12, 28] :

$$L\{{}_0D_t^{-m} f(t)\} = s^{-m} F(s) \quad (I.12)$$

I.2.3.2. Transformée de Laplace pour les dérivées d'ordre fractionnaires

L'expression de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire $m > 0$ de R-L est donnée comme suit [9, 12, 28]:

$$L\{{}_0D_t^m f(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{m-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (I.13)$$

L'expression de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire $m > 0$ de Caputo est donnée comme suit [9, 12, 28]:

$$\int_0^\infty e^{-st} {}_0D_t^m f(t) dt = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \quad (I.14)$$

où $n-1 \leq m < n$. Lorsque toutes les conditions initiales sont nulles, l'expression de la transformée de Laplace de G-L, R-L et de Caputo sont égales et données comme suit [9, 12, 28]:

$$L\{{}_0D_t^m f(t)\} = s^m F(s) \quad (I.15)$$

L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est que celle de Caputo permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à utiliser dans la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaires. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à $t = 0$. Alors dans la suite de cette thèse, on utilise la définition de Caputo à cause des conditions initiales.

I.2.4. Fonctions utilisées en calcul fractionnaire

La compréhension des définitions et de l'utilisation du calcul fractionnaire sera plus claire en introduisant quelques fonctions particulières. La première fonction est la fonction Gamma qui généralise l'expression de la factorielle utilisée dans la différentiation multiple et les intégrations répétées dans le calcul d'ordre entier. La seconde est la fonction de Mittag-Leffler qui est une fonction de base dans le calcul fractionnaire et qui joue un rôle similaire à celui de la fonction exponentielle dans le calcul d'ordre entier.

I.2.4.1. Fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler est définie par l'équation suivante [8] :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du, \quad \forall x \in \mathfrak{R} \quad (\text{I.16})$$

Figure (I.1) montre le tracé de la fonction de gamma autour de zéro. On note que pour des valeurs entières négatives, la fonction gamma tend vers l'infini ; mais elle est définie pour des valeurs non entières.

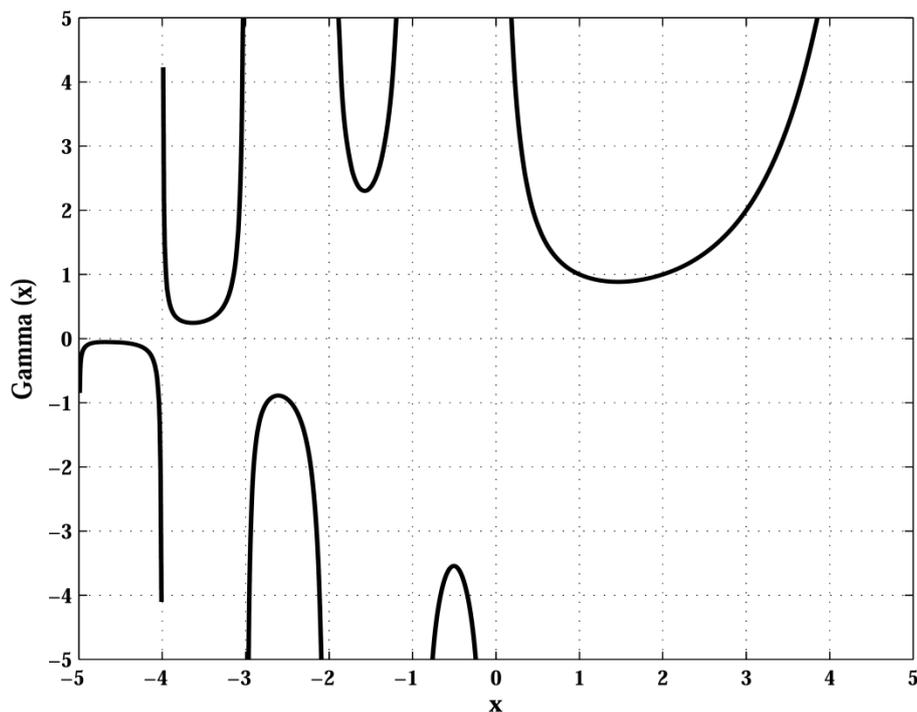


Figure (I.1) : Tracé de la fonction Gamma d'Euler

I.2.4.2. Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler (ML) est souvent utilisée dans la solution des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaires similaires aux fonctions exponentielles pour la solution des équations différentielles linéaires ordinaires d'ordre entier. La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre est définie comme suit [30] :

$$E_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(mk+1)}, \quad m > 0 \quad (\text{I.18})$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par l'expression suivante [30]:

$$E_{m,n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(mk+n)}, \quad m > 0, n > 0 \quad (\text{I.19})$$

La relation entre les fonctions de Mittag-Leffler à une et deux paramètres est donnée par [30]:

$$E_{m,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(mk+1)} = E_m(t) \quad (\text{I.20})$$

Figure (I.2) montre le tracé d'une fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre et de quelques fonctions de Mittag-Leffler à deux paramètres.

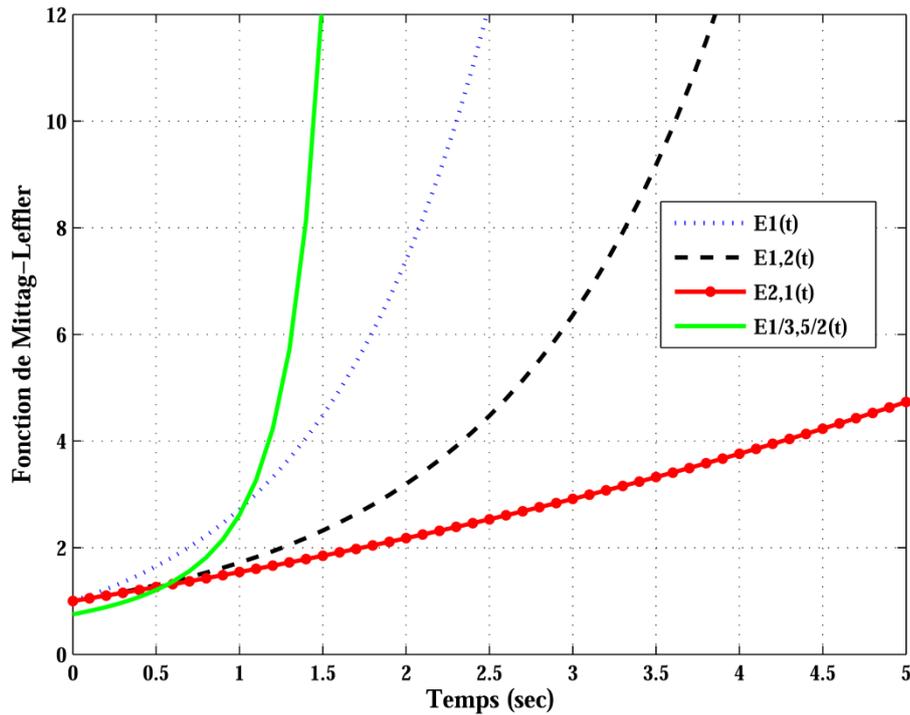


Figure (I.2) : Tracé de certaines fonctions de Mittag-Leffler

I.2.5. Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

A cause de leur représentation par des fonctions de transfert irrationnelles, les opérateurs d'ordre fractionnaire ont été étudiés marginalement dans la théorie des systèmes. Dans cette section, on

va utiliser la méthode de Charef [31-32] pour l'approximation de l'intégrateur s^{-m} d'ordre fractionnaire et du différentiateur d'ordre fractionnaire s^m , $0 < m < 1$, par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence donnée avec une précision désirée.

I.2.5.1. Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction de transfert irrationnelle suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m}, \quad 0 < m < 1 \quad (\text{I.21})$$

où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et m est un nombre réel positif tel que $0 < m < 1$. Dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique $[\omega_L, \omega_H]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) dont la fonction de transfert est donnée comme suit [32] :

$$G(s) = \frac{K_I}{(1 + (s/\omega_c))^m} \quad (\text{I.22})$$

Si pour $\omega \in [\omega_L, \omega_H]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut donc écrire que :

$$G(s) = \frac{K_I}{(s/\omega_c)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = G_I(s) \quad (\text{I.23})$$

avec $K_I = (1/\omega_c^m)$ et ω_c est la fréquence à -3m dB du PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_L comme : $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(\varepsilon/10m)} - 1}$, où ε est l'erreur maximale permise entre les pentes de l'intégrateur d'ordre fractionnaire de (I.21) et le PPF de (I.22) dans la bande de fréquence d'intérêt donnée $[\omega_L, \omega_H]$.

Afin de représenter la PPF de (I.22) et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire par un système linéaire invariant dans le temps il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle. La méthode d'approximation consiste en une approximation de la pente de 20m dB/dec sur le diagramme de Bode du PPF par un certain nombre de pentes alternatives de 20 et 0 dB/dec correspondant aux pôles et aux zéros alternés sur l'axe réel négatif du plan s tel que $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ [31]. Par conséquent, l'approximation est donnée par :

$$G(s) = \frac{K_I}{(1 + (s/\omega_c))^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.24})$$

En utilisant une méthode graphique simple qui commence avec une erreur y spécifiée en décibels et la bande de fréquence ω_{\max} , qui peut être $100\omega_H$, les paramètres a , b , p_0 , z_0 et N peuvent être calculées comme suit [31] :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}, b = 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}, p_0 = \omega_c \sqrt{b}, z_0 = ap_0 \text{ et } N = \left\{ \text{Integer} \left[\frac{\log(\omega_{\max}/p_0)}{\log(ab)} \right] + 1 \right\} \quad (\text{I.25})$$

Les pôles p_i et les zéros z_i de (I.25) peuvent être calculés à partir des paramètres de (I.25) comme : $p_i = p_0 (ab)^i$ pour $i = 0, 1, \dots, N$ et $z_i = z_0 (ab)^i$ pour $i = 0, 1, \dots, N-1$. Par conséquent, l'intégrateur d'ordre fractionnaire peut être approximé par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence donnée d'intérêt comme suit :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} = \frac{K_I}{(1 + (s/\omega_c))^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0 (ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0 (ab)^i} \right)} \quad (\text{I.26})$$

I.2.5.2. Approximation du différentiateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert du différentiateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (\text{I.27})$$

où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et m est un nombre réel positif tel que $0 < m < 1$. Dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique $[\omega_L, \omega_H]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) dont la fonction de transfert est donnée comme suit [32] :

$$G(s) = K_D (1 + (s/\omega_c))^m \quad (\text{I.28})$$

Si pour $\omega \in [\omega_L, \omega_H]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut donc écrire que :

$$G(s) = K_D (s/\omega_c)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} s^m = s^m = G_D(s) \quad (\text{I.29})$$

avec $K_D = \omega_c^m$ et ω_c est la fréquence à 3m dB du ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_L comme : $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(\varepsilon/10m)} - 1}$, où ε est l'erreur maximale permise entre les pentes du différentiateur d'ordre fractionnaire de (I.27) et le ZPF de (I.28) dans la bande de fréquence d'intérêt donnée (ω_L, ω_H) .

Afin de représenter la ZPF de (I.28) et par conséquent le différentiateur d'ordre fractionnaire par un système linéaire invariant dans le temps il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle. La méthode d'approximation consiste en une

approximation de la pente de 20m dB/dec sur le diagramme de Bode du ZPF par un certain nombre de pentes alternatives de 20 et 0 dB/dec correspondant aux pôles et aux zéros alternés sur l'axe réel négatif du plan s tel que $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_N < p_N$ [32]. Par conséquent, l'approximation est donnée par :

$$G(s) = K_D (1 + (s/\omega_c))^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N (1 + s/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1 + s/p_i)} \quad (I.30)$$

En utilisant la même idée de la méthode utilisée pour l'approximation du PPF [32] qui commence avec une erreur y spécifiée en décibels et une bande de fréquence ω_{\max} , qui peut être $100\omega_H$, les paramètres a , b , p_0 , z_0 et N peuvent être calculées comme suit [32] :

$$a = 10^{\left\lceil \frac{y}{10(1-m)} \right\rceil}, b = 10^{\left\lceil \frac{y}{10m} \right\rceil}, z_0 = \omega_c \sqrt{b}, p_0 = az_0 \quad \text{et} \quad N = \left\{ \text{Integer} \left[\frac{\log(\omega_{\max}/z_0)}{\log(ab)} \right] + 1 \right\} \quad (I.31)$$

Les zéros z_i et les pôles p_i de (I.30) peuvent alors être calculés à partir des paramètres de [32] comme : $z_i = z_0 (ab)^i$ pour $i = 0, 1, \dots, N$ et $p_i = p_0 (ab)^i$ pour $i = 0, 1, \dots, N$. Par conséquent, le dérivateur d'ordre fractionnaire peut être approximé par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence donnée d'intérêt comme :

$$G_D(s) = s^m = K_D (1 + (s/\omega_c))^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N (1 + s/z_0 (ab)^i)}{\prod_{i=0}^N (1 + s/p_0 (ab)^i)} \quad (I.32)$$

I.3. Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Dans les dernières décennies, le concept du calcul fractionnaire a été associé à des applications dans différents domaines de la science et de l'ingénierie ou plusieurs processus ont été trouvés qu'ils peuvent être décrits par des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire qui fournissent une excellente description de leurs propriétés conduisant à la formulation des équations différentielles d'ordre fractionnaire [1-3, 33-35]. Par conséquent, une attention considérable a été donnée aux systèmes d'ordre fractionnaire pour établir des techniques fiables et efficaces pour leur représentation, analyse et résolution. Cette section est consacrée à la représentation, à l'analyse de la stabilité, à la contrôlabilité et à l'observabilité ainsi que la solution des systèmes linéaires fractionnaire d'ordre commensurable [10], [9, 36-38].

I.3.1. Représentation des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Les systèmes linéaires invariants dans le temps (LIT) peuvent être classifiés comme suit [10]:

$$\text{Systèmes LIT} \begin{cases} \text{Fractionnaire} & \begin{cases} \text{Commensurable} & \begin{cases} \text{Rationnelle} \\ \text{Irrationnelle} \end{cases} \\ \text{Non-Commensurable} \end{cases} \\ \text{Entier} \end{cases}$$

I.3.1.1. Equations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques linéaires représentés par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire ou par une représentation d'état d'ordre fractionnaire. L'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire est définie par :

$$a_N D^{\alpha_N} y(t) + a_{N-1} D^{\alpha_{N-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_M D^{\beta_M} u(t) + b_{M-1} D^{\beta_{M-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (\text{I.33})$$

où a_k ($k = 0, \dots, N$), b_k ($k = 0, \dots, M$) sont des constantes, et α_k ($k = 0, \dots, N$) et β_k ($k = 0, \dots, M$) sont aussi des nombres réels tels que $\alpha_N > \alpha_{N-1} > \dots > \alpha_0$, et $\beta_M > \beta_{M-1} > \dots > \beta_0$ et $\beta_M < \alpha_N$.

I.3.1.2. Fonction de transfert

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.33) avec des conditions initiales nulles on obtient la fonction de transfert du système linéaire d'ordre fractionnaire comme suit [10] :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_M s^{\beta_M} + b_{M-1} s^{\beta_{M-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_N s^{\alpha_N} + a_{N-1} s^{\alpha_{N-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (\text{I.34})$$

I.3.2. Systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable

Une classe importante des systèmes fractionnaires LIT est l'ensemble des systèmes fractionnaires d'ordre commensurable.

I.3.2.1. Equation différentielle fractionnaire d'ordre commensurable

Un système fractionnaire LIT représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.33) est dit commensurable si tous les exposants sont des multiples entiers du même nombre réel m , c. a. d $\alpha_k = km$ et $\beta_k = km$, avec $0 < m < 1$. Alors l'équation différentielle linéaire fractionnaire d'ordre commensurable prend la forme suivante :

$$\sum_{k=0}^N a_k D^{km} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k D^{km} u(t) \quad (\text{I.35})$$

L'équation d'état d'ordre fractionnaire est aussi définie par :

$$\begin{aligned} D_t^m x(t) &= \frac{d^m x(t)}{dt^m} = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad 0 < m < 1 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

où m est l'ordre fractionnaire, $u(t)$ est le vecteur d'entrée, $x(t)$ est le pseudo vecteur d'état, $y(t)$ est le vecteur de la sortie, A est la matrice d'état, B est la matrice d'entrée, C est la matrice de la sortie et D est la matrice de transmission directe.

I.3.2.2. Fonction de transfert

Pour les systèmes fractionnaires d'ordre commensurable la fonction de transfert prend la forme suivante [10] :

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (s^m)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (s^m)^k} = \frac{Q(s^m)}{P(s^m)} \quad (\text{I.37})$$

avec $M < N$ et $Q(s^m)$ et $P(s^m)$ sont deux polynômes en s^m . Alors, la fonction de transfert $G(s)$ devienne une fonction rationnelle de la variable complexe s^m et peut être décomposée en fractions simples de la forme suivante :

$$G(s) = \left[\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s^m + \lambda_i} \right] \quad (\text{I.38})$$

où λ_i ($i=1,2, \dots, N$) sont les racines du pseudo polynôme $P(s^m)$.

I.3.2.3. Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert

Utilisation de la transformée de Laplace de l'équation d'état d'ordre fractionnaire de l'équation (I.36) avec des conditions initiales non nulles, en tenant compte de la définition de la différentiation utilisée dans ce cas est celle de Caputo, on obtient [10] :

$$\begin{aligned} s^m X(s) - s^{m-1} x(0) &= A X(s) + B U(s) \\ Y(s) &= C X(s) + D U(s) \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

Alors, on aura :

$$\begin{aligned} X(s) &= (s^m I - A)^{-1} B U(s) + s^{m-1} (s^m I - A)^{-1} x(0) \\ Y(s) &= C X(s) + D U(s) \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

Dans le cas des conditions initiales nulles l'équation (I.40) devienne :

$$\begin{aligned} X(s) &= (s^m I - A)^{-1} B U(s) \\ Y(s) &= C X(s) + D U(s) \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

Donc la fonction de transfert $G(s)$ est donnée comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C (s^m I - A)^{-1} B + D \quad (\text{I.42})$$

$G(s)$ représente la fonction de transfert dont les polynômes de numérateur et de dénominateur sont exprimés en termes de puissance de nombre entier de s^m .

I.3.2.4. Passage de la fonction de transfert à l'équation d'état pour la représentation des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable

Soit un système linéaire invariant dans le temps monovarié fractionnaire d'ordre commensurable représenté par sa fonction de transfert $G(s)$ comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (s^m)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (s^m)^k} \quad (\text{I.43})$$

avec M et N des entiers tel que $M \leq N$, $0 < m < 1$, $a_N = 1$ et a_k et b_k des réels. Pour dériver la représentation d'état correspondante à $G(s)$, on procède en trois étapes [39].

Étape1 :

A l'aide du changement de variable $p = s^m$, $0 < m < 1$, on transforme le modèle non entier $G(s)$ en un modèle entier $G(p)$ qui s'écrit sous la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k p^k}{\sum_{k=0}^N a_k p^k} \quad (\text{I.44})$$

Étape2 :

Dériver la représentation d'état correspondante à $G(p)$. On peut obtenir toutes les formes particulières utilisées dans la théorie des systèmes d'ordre entier (forme contrôlable, observable, ...) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I.45})$$

Étape3 : Remplacer la différentiation d'ordre un dans la représentation d'état de l'équation (I.45) par la différentiation fractionnaire d'ordre m , $0 < m < 1$, pour obtenir la représentation d'état correspondante à la fonction de transfert $G(s)$ du système LIT fractionnaire d'ordre commensurable comme suit :

$$\begin{cases} D^m x = Ax + Bu \\ y = Cx + Bu \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

Associée à cette fonction de transfert, trois représentations canoniques de l'équation d'état peuvent être proposées, qui sont similaires à celles classiques développés pour les systèmes d'équations différentielles d'ordre entier.

I.3.2.4.1. Forme canonique contrôlable

Définir le premier état en termes de sa transformée de Laplace comme suit [10] :

$$X_1(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k (s^m)^k} U(s) \quad (\text{I.47})$$

puis les états restants sont définis de manière récursive à partir de celui-ci comme : $x_{i+1} = D^m x_i$, pour $i=1, 2, \dots, N-1$. La représentation d'état, exprimée sous la forme canonique contrôlable, est donc donnée par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} D^m x_1 \\ D^m x_2 \\ \vdots \\ D^m x_{N-2} \\ D^m x_{N-1} \\ D^m x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{N-2} & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (\text{I.48})$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_N a_0 & b_1 - b_N a_1 & \cdots & b_{N-1} - b_N a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u \quad (\text{I.49})$$

où $b_i = 0$, pour $M < i \leq N$

I.3.2.4.2. Forme canonique observable

De l'équation (I.43), en mettant dans le côté gauche de cette équation les termes qui contiennent les puissances de s et dans le côté droit le reste des termes, nous aurons alors [10] :

$$s^m \left[\left((s^m)^{N-1} + a_{N-1} (s^m)^{N-2} + \cdots + a_1 \right) Y(s) - \left(b_N (s^m)^{N-1} + \cdots + b_1 \right) U(s) \right] = b_0 U(s) - a_0 Y(s) \quad (\text{I.50})$$

On définit le premier état x_1 comme suit :

$$X_1(s) = \left((s^m)^{N-1} + a_{N-1} (s^m)^{N-2} + \cdots + a_1 \right) Y(s) - \left(b_N (s^m)^{N-1} + \cdots + b_1 \right) U(s) \quad (\text{I.51})$$

De l'équation (I.50), on obtient :

$$D^m x_1 = b_0 u - a_0 y \quad (\text{I.52})$$

On met l'équation (I.51) sous la forme suivante :

$$X_1(s) = s^m \left[\left((s^m)^{N-2} + a_{N-1} (s^m)^{N-3} + \cdots + a_2 \right) Y(s) - \left(b_N (s^m)^{N-2} + \cdots + b_2 \right) U(s) \right] + a_1 Y(s) - b_1 U(s) \quad (\text{I.53})$$

On définit le second état x_2 comme suit :

$$X_2(s) = \left((s^m)^{N-2} + a_{N-1} (s^m)^{N-3} + \cdots + a_2 \right) Y(s) - \left(b_N (s^m)^{N-2} + \cdots + b_2 \right) U(s) \quad (\text{I.54})$$

De l'équation (I.53), on obtient :

$$D^m x_2 = x_1 - a_1 y + b_1 u \quad (\text{I.55})$$

On répète cette procédure jusqu'à ce qu'on arrive à l'expression suivante :

$$X_{N-1}(s) = s^m [Y(s) - b_N U(s)] + a_{N-1} Y(s) - b_{N-1} U(s) \quad (I.56)$$

On définit le dernier état x_N comme suit :

$$X_N(s) = Y(s) - b_N U(s) \quad (I.57)$$

De l'équation (I.56), on obtient donc:

$$D^m x_N = x_{N-1} - a_{N-1} y + b_{N-1} u \quad (I.58)$$

La sortie y est obtenue de l'équation (I.57) comme suit :

$$y = x_N + b_N u \quad (I.59)$$

En substituant la sortie y de l'équation (I.59) dans les équations de (I.52), (I.55), (I.58) et en réarrangeant les équations obtenues on obtient la représentation d'état sous la forme canonique observable par les équations matricielles comme suit :

$$\begin{bmatrix} D^m x_1 \\ D^m x_2 \\ D^m x_3 \\ \vdots \\ D^m x_{N-1} \\ D^m x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{N-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_N a_0 \\ b_1 - b_N a_1 \\ b_2 - b_N a_2 \\ \vdots \\ b_{N-2} - b_N a_{N-2} \\ b_{N-1} - b_N a_{N-1} \end{bmatrix} u \quad (I.61)$$

$$y = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u \quad (I.62)$$

où $b_i = 0$, pour $M < i \leq N$.

I.3.2.4.3. Forme canonique modale

La fonction de transfert $G(s)$ de l'équation (I.37) peut être décomposée en fractions simples de la forme suivante [10]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left[b_N + \frac{\rho_1}{(s^m - \lambda_1)^r} + \cdots + \frac{\rho_{r-1}}{(s^m - \lambda_1)^2} + \frac{\rho_r}{s^m - \lambda_1} + \frac{\rho_{r+1}}{s^m - \lambda_{r+1}} + \cdots + \frac{\rho_N}{s^m - \lambda_N} \right] \quad (I.63)$$

où λ_i ($i=1,2, \dots, N$) sont les racines du pseudo polynôme $P(s^m)$ et ρ_i ($i=1,2, \dots, N$) sont les résidus. On suppose que la première racine λ_1 est réelle et multiple de multiplicité r , et les $(N-r)$ racines restantes sont réelles, simples et distinctes. De l'équation (I.63), on peut écrire :

$$Y(s) = \left[b_N + \frac{\rho_1}{(s^m - \lambda_1)^r} + \cdots + \frac{\rho_{r-1}}{(s^m - \lambda_1)^2} + \frac{\rho_r}{s^m - \lambda_1} + \frac{\rho_{r+1}}{s^m - \lambda_{r+1}} + \cdots + \frac{\rho_N}{s^m - \lambda_N} \right] U(s) \quad (I.64)$$

Les variables d'état sont alors définies comme :

$$\begin{aligned}
X_1(s) &= \frac{1}{(s^m - \lambda_1)^r} U(s) = \frac{1}{s^m - \lambda_1} X_2(s) \\
X_2(s) &= \frac{1}{(s^m - \lambda_1)^{r-1}} U(s) = \frac{1}{s^m - \lambda_1} X_3(s) \\
&\vdots \\
X_{r-1}(s) &= \frac{1}{(s^m - \lambda_1)^2} U(s) = \frac{1}{s^m - \lambda_1} X_r(s) \\
X_r(s) &= \frac{1}{s^m - \lambda_1} U(s) \\
X_{r+1}(s) &= \frac{1}{s^m - \lambda_{r+1}} U(s) \\
&\vdots \\
X_N(s) &= \frac{1}{s^m - \lambda_N} U(s)
\end{aligned} \tag{I.65}$$

$$Y(s) = b_N U(s) + \rho_1 X_1(s) + \dots + \rho_r X_r(s) + \rho_{r+1} X_{r+1}(s) + \dots + \rho_N X_N(s)$$

De l'équation (I.65), on obtient donc :

$$\begin{aligned}
D^m x_1 &= -\lambda_1 x_1 + x_2 \\
D^m x_2 &= -\lambda_1 x_2 + x_3 \\
&\vdots \\
D^m x_{r-1} &= -\lambda_1 x_{r-1} + x_r \\
D^m x_r &= -\lambda_1 x_r + u \\
D^m x_{r+1} &= -\lambda_{r+1} x_{r+1} + u \\
&\vdots \\
D^m x_N &= -\lambda_N x_N + u
\end{aligned} \tag{I.66}$$

$$y = b_N u + \rho_1 x_1 + \dots + \rho_r x_r + \rho_{r+1} x_{r+1} + \dots + \rho_N x_N$$

En réarrangeant les équations du dessus, la représentation d'état sous la forme canonique modale est donnée par les équations matricielles comme suit :

$$\begin{bmatrix} D^m x_1 \\ D^m x_2 \\ \vdots \\ D^m x_r \\ D^m x_{r+1} \\ \vdots \\ D^m x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{r+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{I.67}$$

$$y = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \cdots \quad \rho_r \quad \rho_{r+1} \quad \cdots \quad \rho_N] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u \tag{I.68}$$

où $b_N = 0$, si $M < N$.

I.3.3. Propriétés structurelles des systèmes d'ordre fractionnaire

I.3.3.1. Stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Les méthodes algébriques conventionnelles pour l'analyse de la stabilité, comme les critères Routh Hurwitz, ne peuvent pas être utilisées directement pour le cas d'ordre fractionnaire, sauf sous certaines conditions spéciales [40]. Cela est dû au fait qu'il n'existe pas un polynôme caractéristique. Mais pour les systèmes fractionnaires d'ordre commensurable un théorème est établi pour l'état de leur stabilité [37].

Théorème de stabilité

Le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (I.35) est stable (dans le sens entrées bornées-sorties bornées) si et seulement si toutes les racines λ_i de son dénominateur de l'équation (I.37) vérifient l'inégalité suivante [37] :

$$\text{Arg}(\lambda_i) > \frac{\pi}{2}m \quad \forall i=1, \dots, N \text{ et } 0 < m < 2 \quad (\text{I.69})$$

La région de stabilité pour un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable est montrée sur la figure (I.3) pour différentes valeurs de m . Contrairement au cas d'ordre entier où pour tout pôle dans le demi plan droit implique un système instable, les systèmes linéaire fractionnaire d'ordre commensurable peuvent être stables même si certains de ses pôles sont dans le demi plan droit comme indiqué la figure (I.3).

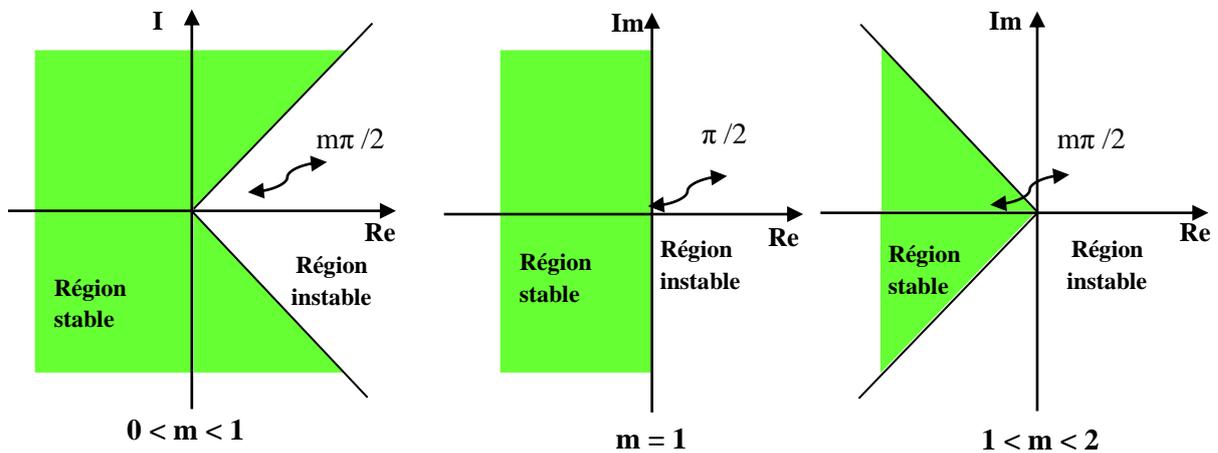


Figure (I.3) : Région de stabilité pour un système d'ordre fractionnaire $0 < m < 2$

I.3.3.2. Contrôlabilité

Le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable représenté par l'équation d'état de l'équation (I.36) contrôlable si la matrice de contrôlabilité définie par [36] :

$$C_a = \left[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{N-1}B \right] \quad (\text{I.70})$$

est une matrice de rang N (N est le nombre des états).

I.3.3.3. Observabilité

Le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable représenté par l'équation d'état de l'équation (I.36) observable si la matrice de d'observabilité définie par [36]:

$$O_a = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \quad (I.71)$$

est une matrice de rang N (N est le nombre des états).

I.3.4. Solution des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable [10, 41]

Nous présenterons dans cette section la solution de l'équation d'état des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurables invariants dans le temps continu représenté par l'équation d'état suivante :

$$D^m x(t) = A x(t) + B e(t) \quad (I.72)$$

où D^m est la dérivée d'ordre fractionnaire m de Caputo (pour $0 < m < 1$), $x(t)$ est le vecteur d'état de dimension N, $e(t)$ est l'entrée et $A_{(N \times N)}$ est la matrice d'état. En prenant la transformée de Laplace de l'équation (I.72) et en arrangeant les termes on obtient :

$$X(s) = (s^m I - A)^{-1} [s^{(m-1)} x(0)] + (s^m I - A)^{-1} B E(s) \quad (I.73)$$

où $x(0)$ est l'état initial. L'expression du vecteur d'état $x(t)$ est déterminée en prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation (I.73) comme suit:

$$x(t) = L^{-1} \{X(s)\} = L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m I - A)^{-1} \right\} x(0) + L^{-1} \left\{ (s^m I - A)^{-1} \right\} * B e(t) \quad (I.74)$$

On définit les matrices de dimension $(N \times N)$ $\hat{\psi}(t)$ et $\psi(t)$ comme suit :

$$\hat{\psi}(t) = L^{-1} \left\{ (s^m I - A)^{-1} \right\} \quad \text{et} \quad \psi(t) = L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m I - A)^{-1} \right\} \quad (I.75)$$

Alors le vecteur d'état $x(t)$ est donnée par :

$$x(t) = L^{-1} \{ X(s) \} = \psi(t) x(0) + \hat{\psi}(t) * B e(t) \quad (I.76)$$

De l'équation (I.75), on peut écrire que $\psi(t) = \hat{\psi}(t) * \chi_{(m-1)}(t)$; où $\chi_{(m-1)}(t)$ est donnée par l'expression suivante :

$$\chi_{(m-1)}(t) = L^{-1} (s^{(m-1)}) = \begin{cases} \frac{t^{-m}}{\Gamma(1-m)} & , m < 1 \\ \delta(t) & , m = 1 \end{cases} \quad (I.77)$$

où $\delta(t)$ est la fonction delta de Dirac. L'application de la propriété de la transformée de Laplace lié au produit de convolution, l'expression suivante est obtenue :

$$\mathbf{x}(t) = \psi(t) \mathbf{x}_0 + \hat{\psi}(t) * [\mathbf{B} \mathbf{u}(t)] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \psi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \hat{\psi}(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (\text{I.78})$$

On remarque que la solution $\mathbf{x}(t)$ de l'équation d'état (I.72) est formée de deux termes. Le premier terme représente la réponse libre et le second terme représente la réponse forcée.

On peut facilement voir aussi que trouver les matrices $\psi(t)$ et $\hat{\psi}(t)$, conduit à la solution de l'équation d'état du système linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.72). Alors, l'objectif de ce travail est de trouver une technique pour le calcul des expressions des matrices $\psi(t)$ et $\hat{\psi}(t)$ données par les expressions suivantes :

$$\hat{\psi}(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ (s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\} \quad \text{et} \quad \psi(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\} \quad (\text{I.79})$$

I.3.4.1. Calcul des matrices $\psi(t)$ et $\hat{\psi}(t)$

Dans cette section trois méthodes sont proposées pour calculer les matrices $\psi(t)$ et $\hat{\psi}(t)$. Ces méthodes sont des généralisations des méthodes bien connues utilisés pour les systèmes linéaires invariants dans le temps d'ordre entier. On suppose que la matrice \mathbf{A} a N valeurs propres λ_i $1 \leq i \leq N$ distinctes.

I.3.4.1.1. Méthode de la transformée de Laplace inverse [10]

La procédure de calcul est donnée comme suit :

- 1- Calculer la matrice $\hat{\Psi}(s^m) = (s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ qui une matrice de fonctions rationnelles en s^m comme suit:

$$\hat{\Psi}(s^m) = (s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det \{ (s^m \mathbf{I} - \mathbf{A}) \}} \left\{ \text{Adjoint } e (s^m \mathbf{I} - \mathbf{A}) \right\}^T \quad (\text{I.80})$$

avec $\det (s^m \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \prod_{i_3=1}^N (s^m - \lambda_{i_3})$ est le polynôme caractéristique du système. Donc,

pour $1 \leq i_1, i_2 \leq N$, chaque élément de la matrice $\hat{\Psi}(s^m)$ est donné par :

$$\hat{\Psi}_{i_1, i_2} (s) = \frac{\alpha_{i_1, i_2} (s)}{\prod_{i_3=1}^N (s^m - \lambda_{i_3})} \quad (\text{I.81})$$

où les $\alpha_{i_1, i_2}(s)$ sont les cofacteurs des éléments de la matrice $(s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})$.

- 2- Par décomposition en éléments simples de l'équation (I.81) en termes de s^m , on obtient :

$$\hat{\Psi}_{i_1, i_2} (s) = \frac{\alpha_{i_1, i_2} (s)}{\prod_{i_3=1}^N (s^m - \lambda_{i_3})} = \sum_{i_3=1}^N \frac{r(i_1, i_2, i_3)}{s^m - \lambda_{i_3}} \quad (\text{I.82})$$

où les $r(i_1, i_2, i_3)$, pour $1 \leq i_1, i_2 \leq N$, sont les résidus.

$$\hat{\psi}_{i_1, i_2} (t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \hat{\Psi}_{i_1, i_2} (s^m) \right\} \quad (\text{I.83})$$

3- Alors, pour $1 \leq i_1, i_2 \leq N$, les éléments $\widehat{\psi}_{i_1, i_2}(t)$ de la matrice $\widehat{\psi}(t) = L^{-1} \left\{ (s^m I - A)^{-1} \right\}$ sont donnés par:

$$\widehat{\psi}_{i_1, i_2}(t) = \left\{ L^{-1} [\widehat{\Psi}_{i_1, i_2}(s^m)] \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i_3=1}^N \frac{r(i_1, i_2, i_3)}{s^m - \lambda_{i_3}} \right\} \quad (I.84)$$

et, pour $1 \leq i_1, i_2 \leq N$, les éléments $\psi_{i_1, i_2}(t)$ de la matrice $\psi(t) = L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m I - A)^{-1} \right\}$ sont aussi donnés par:

$$\psi_{i_1, i_2}(t) = \left\{ L^{-1} [s^{(m-1)} \widehat{\Psi}_{i_1, i_2}(s^m)] \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i_3=1}^N \frac{r(i_1, i_2, i_3) s^{(m-1)}}{s^m - \lambda_{i_3}} \right\} \quad (I.85)$$

I.3.4.1.2. Méthode de la décomposition Modale [10]

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et λ_N les valeurs propres distinctes de la matrice A et v_1, v_2, \dots et v_N les vecteurs propres de la matrice A correspondants à ces valeurs propres. Soient $V = [v_1 \vdots v_2 \vdots \dots \vdots v_N]$ la matrice des modes et $J = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \}$ avec $J = V^{-1} A V$ et $A = V J V^{-1}$. Alors on a :

$$\widehat{\Psi}(s^m) = (s^m I - A)^{-1} = [s^m I - (V J V^{-1})]^{-1} = V [s^m I - J]^{-1} V^{-1} \quad (I.86)$$

La matrice $(s^m I - J)^{-1}$ est donnée comme suit :

$$(s^m I - J)^{-1} = \begin{bmatrix} (s^m - \lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (s^m - \lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (s^m - \lambda_N) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^m - \lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^m - \lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s^m - \lambda_N} \end{bmatrix} \quad (I.87)$$

Donc, $\widehat{\Psi}(s^m) = (s^m I - A)^{-1}$ est donnée par l'expression suivante :

$$\widehat{\Psi}(s^m) = (s^m I - A)^{-1} = V \left\{ (s^m I - J)^{-1} \right\} V^{-1} = V \begin{bmatrix} \frac{1}{s^m - \lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^m - \lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s^m - \lambda_N} \end{bmatrix} V^{-1} \quad (I.88)$$

Alors, $\widehat{\psi}(t) = L^{-1} \left\{ \widehat{\Psi}(s^m) \right\} = L^{-1} \left\{ (s^m I - A)^{-1} \right\}$ et $\psi(t) = L^{-1} \left\{ \Psi(s^m) \right\} = L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m I - A)^{-1} \right\}$ sont donnés comme suit :

$$\hat{\psi}(t) = \mathbf{L}^{-1}\{\hat{\Psi}(s^m)\} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^m - \lambda_1}\right\} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^m - \lambda_2}\right\} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^m - \lambda_N}\right\} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \quad (\text{I.89})$$

$$\psi(t) = \mathbf{L}^{-1}\{\Psi(s^m)\} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s^{(m-1)}}{s^m - \lambda_1}\right\} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s^{(m-1)}}{s^m - \lambda_2}\right\} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s^{(m-1)}}{s^m - \lambda_N}\right\} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \quad (\text{I.90})$$

I.3.4.1.3. Méthode de Cayley-Hamilton [10]

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et λ_N les valeurs propres distinctes de la matrice A et soit $\Delta(\lambda)$ son polynôme caractéristique de degré N . Soit une fonction $f(\lambda)$ qu'on peut représenter par son développement en série comme suit:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k \lambda^k \quad (\text{I.91})$$

Il est possible de diviser $f(\lambda)$ par $\Delta(\lambda)$, on obtient :

$$f(\lambda) = \left[\Delta(\lambda) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \lambda^k \right] + [\mathbf{R}(\lambda)] \quad (\text{I.92})$$

où $\mathbf{R}(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{N-1} \lambda^{N-1}$ est un polynôme de degré $(N-1)$ parce que $\Delta(\lambda)$ est un polynôme de degré N . Pour $\lambda = \lambda_i$ ($i=1, 2, \dots, N$) on a $\Delta(\lambda_i) = 0$, alors on peut écrire que :

$$f(\lambda_i) = \mathbf{R}(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \dots + \alpha_{N-1} \lambda_i^{N-1} \quad (\text{I.93})$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on peut donc avoir [10] :

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{N-1} A^{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i A^i \quad (\text{I.93})$$

Alors, pour calculer $f(A)$ il suffit de trouver les coefficients α_i (pour $i = 1, 2, \dots, N-1$). Dans le cas où les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et λ_N de la matrice A sont distinctes, les coefficients α_i (pour $i = 1, 2, \dots, N-1$) sont donnés par l'expression suivante [10]:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_N) \end{bmatrix} \quad (\text{I.94})$$

Pour $f(\lambda) = (s^m - \lambda)^{-1}$, on peut donc avoir :

$$f(A) = \widehat{\Psi}(s^m) = (s^m I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (s^m) A^i \quad (\text{I.95})$$

où les coefficients $\alpha_i(s^m)$ (pour $i = 0, 1, \dots, N-1$) sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(s^m) \\ \alpha_1(s^m) \\ \vdots \\ \alpha_{N-1}(s^m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (s^m - \lambda_1)^{-1} \\ (s^m - \lambda_2)^{-1} \\ \vdots \\ (s^m - \lambda_N)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.96})$$

De l'équation (I.96), chaque coefficient $\alpha_i(s^m) = \sum_{j=1}^N \theta_{i,j} (s^m - \lambda_j)^{-1}$ (pour $i = 0, 1, \dots, N-1$) est

une combinaison linéaire des fonctions $(s^m - \lambda_j)^{-1}$ (pour $j = 1, 2, \dots, N-1$). Alors,

$\widehat{\psi}(t) = L^{-1} \{ \widehat{\Psi}(s^m) \} = L^{-1} \{ (s^m I - A)^{-1} \}$ et $\psi(t) = L^{-1} \{ \Psi(s^m) \} = L^{-1} \{ s^{(m-1)} (s^m I - A)^{-1} \}$ sont donnés comme suit :

$$\widehat{\psi}(t) = L^{-1} \{ (s^m I - A)^{-1} \} = \sum_{i=0}^{N-1} L^{-1} \{ \alpha_i(s^m) \} A^i = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^N \theta_{i,j} L^{-1} \{ (s^m - \lambda_j)^{-1} \} A^i \quad (\text{I.97})$$

$$\psi(t) = L^{-1} \{ s^{(m-1)} (s^m I - A)^{-1} \} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^N \theta_{i,j} L^{-1} \{ s^{(m-1)} (s^m - \lambda_j)^{-1} \} A^i \quad (\text{I.98})$$

I.4 Conclusion

Dans les dernières décennies, le concept des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire a été associé à des applications dans différents domaines de la science et de l'ingénierie conduisant à la formulation des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans ce chapitre une introduction aux opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire a été faite. Les principales définitions, propriétés et les approximations analogiques de ces opérateurs sont présentées. Les différentes représentations des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire par équations différentielles, par fonction de transfert et par équation d'état ont été données. L'analyse des propriétés structurelles des systèmes fractionnaires d'ordre commensurable telles que la stabilité, la contrôlabilité et l'observabilité ont aussi été faites. Enfin, la solution de l'équation d'état des systèmes linéaires fractionnaire d'ordre commensurable a été présentée.

Chapitre **2**

Fonctions
Fondamentales des
Systemes Linéaires
Fractionnaires d'Ordre
Commensurable

Chapitre II

Fonctions fondamentales des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable

II. 1 Introduction

Un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable monovarié est décrit par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante [10]:

$$\sum_{i=0}^N a_i D^{im} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j D^{jm} u(t) \quad (\text{II.1})$$

où $u(t)$ est l'entrée, $y(t)$ est la sortie, m est un nombre réel tel que $0 < m < 1$, a_i ($1 \leq i \leq N$) et b_j ($0 \leq j \leq M$) sont des nombres réels constants avec $M \leq N$. La fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire est donnée comme [10]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j (s^m)^j}{\sum_{i=0}^N a_i (s^m)^i}, \quad 0 < m < 1 \quad (\text{II.2})$$

Cette fonction de transfert peut être décomposée en plusieurs fonctions fondamentales élémentaires qui correspondent aux différents types de pôles du système en s^m . Ces soi-disant

pôles sont les racines du polynôme $Q(p) = \sum_{i=0}^N a_i p^i$ où $p = s^m$. Donc, on peut écrire :

$$G(s) = \sum_{k=1}^K H_k(s) \quad (\text{II.3})$$

où chaque fonction $H_k(s)$ correspond à un type de pôles du système. Alors, ces fonctions fondamentales sont données comme suit :

- Pour un pôle réel de multiplicité n :

$$H_k(s) = \frac{1}{(s^m - \lambda)^n} \quad (\text{II.4})$$

- Pour une paire de pôles complexes à parties réelles nulles :

$$H_k(s) = \frac{\omega_n^2}{[s^{2m} + \omega_n^2]} \quad (\text{II.5})$$

$$H_k(s) = \frac{\omega_n s^m}{[s^{2m} + \omega_n^2]} \quad (\text{II.6})$$

- Pour une paire de pôles complexes à parties réelles négatives :

$$H_k(s) = \frac{\omega_n^2}{[s^{2m} + 2\zeta\omega_n s^m + \omega_n^2]} \quad (\text{II.7})$$

$$H_k(s) = \frac{s^m + \omega_n \zeta}{[s^{2m} + 2\zeta\omega_n s^m + \omega_n^2]} \quad (\text{II.8})$$

On note que toutes ces fonctions fondamentales sont des fonctions irrationnelles. Alors, pour étudier le comportement dynamique de ce type de système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable représenté par l'équation (II.1), les fonctions irrationnelles $H_k(s)$ doivent être approximées par des fonctions rationnelles. Dans [17, 32, 42-47], les fonctions fondamentales élémentaires définies dans les équations (II.4), (II.5), (II.6), (II.7), et (II.8) ont été approximées par des fonctions rationnelles, dans une bande de fréquence d'intérêt pratique, afin de les représentées par des modèles de systèmes linéaires invariants dans le temps.

Donc, ce chapitre sera consacré à l'approximation par des fonctions rationnelles ainsi qu'aux réponses impulsionnelles et indicielles des fonctions fondamentales des équations (II.4), (II.5), (II.6), (II.7), et (II.8) correspondantes aux différents types de pôles en s^m du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable.

II.2. Fonctions fondamentales pour le cas des pôles réels

Dans ce contexte, les fonctions fondamentales sont définies par les fonctions de l'équation (II.4). Pour $t \geq 0$, on définit $\text{gexp}_n(t, \lambda, m)$ la fonction exponentielle généralisée d'ordre n ($n = 1, 2, \dots$), où sa transformée de Laplace est donnée par :

$$L\{\text{gexp}_n(t, \lambda, m)\} = G_n(s) = \frac{1}{(s^m - \lambda)^n} \quad (\text{II.9})$$

avec λ et m deux nombres réels tels que $\lambda < 0$ et $0 < m < 1$.

Pour $n = 1$, l'approximation, dans une bande de fréquence d'intérêt $[0, \omega_H]$, de la fonction irrationnelle $G_1(s)$ de l'équation (II.9) par une fonction rationnelle est donnée comme suit [42] :

$$G_1(s) = \frac{1}{(s^m - \lambda)} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{(s + p_i)} \quad (\text{II.10})$$

où les pôles p_i ($i = 1, 2, \dots, 2N-1$), les résidus k_i ($i = 1, 2, \dots, 2N-1$) et le nombre N de l'approximation sont donnés par [42] :

$$p_i = \frac{(\beta)^{(i-N)}}{\tau_0} \quad \text{et} \quad k_i = \left(\frac{-p_i}{2\pi\lambda} \right) \left[\frac{\sin[(1-m)\pi]}{\cosh \left[m \log \left(\frac{1}{\tau_0 p_i} \right) \right] - \cos[(1-m)\pi]} \right] \quad (\text{II.11})$$

$$N = \text{Integer} \left[\frac{\log(\tau_0 \omega_{\max})}{\log(\beta)} \right] + 1 \quad (\text{II.12})$$

avec $\tau_0 = \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^{\left(\frac{1}{m}\right)}$, $\omega_{\max} = 1000\omega_H$ est la fréquence d'approximation maximale et $\beta > 1$ est le rapport d'un pôle à son précédent. En prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation (II.10), la fonction $\text{gexp}_1(t, \lambda, m)$ est alors obtenu comme suit :

$$\text{gexp}_1(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^m - \lambda)} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{(s + p_i)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \exp(-p_i t) \quad (\text{II.13})$$

Une fois l'approximation par des fonctions rationnelles de la fonction fondamentale $G_1(s)$ est obtenue, toutes les approximations par des fonctions rationnelles des fonctions fondamentales $G_n(s)$ ($n = 2, 3, \dots$) peuvent alors être facilement dérivées comme suit [17] :

$$G_n(s) = \frac{1}{(s^m - \lambda)^n} = \left[\sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{(s + p_i)} \right]^n = \left[\frac{K_0 \prod_{i=1}^{2N-2} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{2N-1} (s + p_i)} \right]^n = (K_0)^n \left[\frac{\prod_{i=1}^{2N-2} (s + z_i)^n}{\prod_{i=1}^{2N-1} (s + p_i)^n} \right] \quad (\text{II.14})$$

où les zéros z_i ($i = 1, 2, \dots, 2N-2$) et K_0 peuvent être facilement calculés à partir des pôles p_i et des résidus k_i (pour $i = 1, 2, \dots, 2N-1$). Par décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles $G_n(s)$ ($n = 2, 3, \dots$), on obtient [17] :

$$G_n(s) = (K_0)^n \left[\frac{\prod_{i=1}^{2N-2} (s + z_i)^n}{\prod_{i=1}^{2N-1} (s + p_i)^n} \right] = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^n \frac{k_{ij}}{(s + p_i)^j} \quad (\text{II.15})$$

où les résidus k_{ij} ($i = 1, 2, \dots, 2N-1$ et $j = 1, 2, \dots, n$) sont donnés comme suit :

$$k_{ij} = \frac{1}{(n-j)!} \frac{d^{(n-j)}}{ds^{(n-j)}} \left\{ (s + p_i)^n G_n(s) \right\} \Big|_{s = -p_i} \quad (\text{II.16})$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation (II.15), la fonction $\text{gexp}_n(t, \lambda, m)$ est alors donnée par l'expression suivante [17]:

$$\text{gexp}_n(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^m - \lambda)^n} \right\} = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^n \frac{k_{ij}}{(j-1)!} t^{(j-1)} \exp(-p_i t) \quad (\text{II.17})$$

On va introduire une seconde fonction $\text{hexp}_n(t, \lambda, m)$ ($n = 1, 2, \dots$) qui sera également utilisé dans la solution de l'équation différentielle des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire de l'équation (II.1). La fonction $\text{hexp}_n(t, \lambda, m)$ est définie comme la convolution de la fonction exponentielle généralisée $\text{gexp}_n(t, \lambda, m)$ avec la fonction échelon unité $u(t)$ comme suit [17] :

$$\text{hexp}_n(t, \lambda, m) = [\text{gexp}_n(t, \lambda, m)] * u(t) \quad (\text{II.18})$$

En utilisant la transformée de Laplace, on aura :

$$L\{\text{hexp}_n(t, \lambda, m)\} = L\{\text{gexp}_n(t, \lambda, m) * u(t)\} = \frac{1}{s(s^m - \lambda)^n} \quad (\text{II.19})$$

de l'équation (II.15), on peut écrire que :

$$\frac{1}{s(s^m - \lambda)^n} = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^n \frac{k_{ij}}{s(s + p_i)^j} = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^n k_{ij} \left\{ \left(\frac{r_{ij}}{s} \right) + \sum_{q=1}^j \frac{r_{ijq}}{(s + p_i)^q} \right\} \quad (\text{II.20})$$

où les résidus r_{ijq} et r_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n$ et $q = 1, 2, \dots, j$) sont donnés comme suit :

$$r_{ijq} = \left[\frac{d^{(j-q)}}{ds^{(j-q)}} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \right]_{s = -p_i} = -\frac{(j-q)!}{(p_i)^{(1+j-q)}} \quad \text{et} \quad r_{ij} = \frac{1}{(p_i)^j} \quad (\text{II.21})$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation (II.20), la fonction $\text{hexp}_n(t, \lambda, m)$ est alors obtenue par :

$$\text{hexp}_n(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^m - \lambda)^n} \right\} = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^n k_{ij} \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{r_{ij}}{s} \right\} + L^{-1} \left\{ \sum_{q=1}^j \frac{r_{ijq}}{(s + p_i)^q} \right\} \right\} \quad (\text{II.22})$$

$$\text{hexp}_n(t, \lambda, m) = \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^n \left\{ k_{ij} r_{ij} u(t) + \sum_{q=1}^j \frac{k_{ij} r_{ijq}}{(q-1)!} t^{(q-1)} \exp(-p_i t) \right\} \quad (\text{II.23})$$

II.2.1. Exemple illustratif

Pour le but d'illustration prenons deux exemples numériques simulés sur un PC en utilisant MATLAB pour les fonctions fondamentales suivantes :

$$\text{gexp}_n(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^m - \lambda)^n} \right\} \quad \text{et} \quad \text{hexp}_n(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^m - \lambda)^n} \right\} \quad (\text{II.24})$$

II.2.1.1. Cas d'un pôle réel et simple

Dans ce cas la valeur du pôle est $\lambda = -3$ avec $m = 0.38$ et à partir des équations (II.13) et (II.23), les fonctions $\text{gexp}_1(t, -3, 0.38)$ et $\text{hexp}_1(t, -3, 0.38)$ peuvent être calculées en utilisant les paramètres d'approximation $\beta = 3$, $\omega_h = 100$ rad/s et $\omega_{\max} = 10000000\omega_h = 10^9$ rad/s comme suit :

$$\text{gexp}_1(t, -3, 0.38) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^{0.38} + 3)} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{(s + p_i)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \exp(-p_i t)$$

$$\text{hexp}_1(t, -3, 0.38) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{0.38} + 3)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + p_i)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i [1 - \exp(-p_i t)]$$

avec $\tau_0 = \left(\frac{-1}{\lambda} \right)^{\left(\frac{1}{m} \right)} = 0.055$ et $N = \text{Integer} \left[\frac{\log(\tau_0 \omega_{\max})}{\log(\beta)} \right] + 1 = 17$. Alors, pour $0 \leq i \leq 33$, on a :

$$p_i = (18.013) * 3^{(i-17)}, \quad k_i = \frac{6 * (3)^{(i-17)}}{2\pi} \left[\frac{\sin[(0.62)\pi]}{\cosh[0.38 \log(3)^{(i-17)}] - \cos[(0.62)\pi]} \right]$$

Figures (II.1) et (II.2) montrent les tracés des fonctions $\text{gexp}_1(t, -3, 0.38)$ et $\text{hexp}_1(t, -3, 0.38)$.

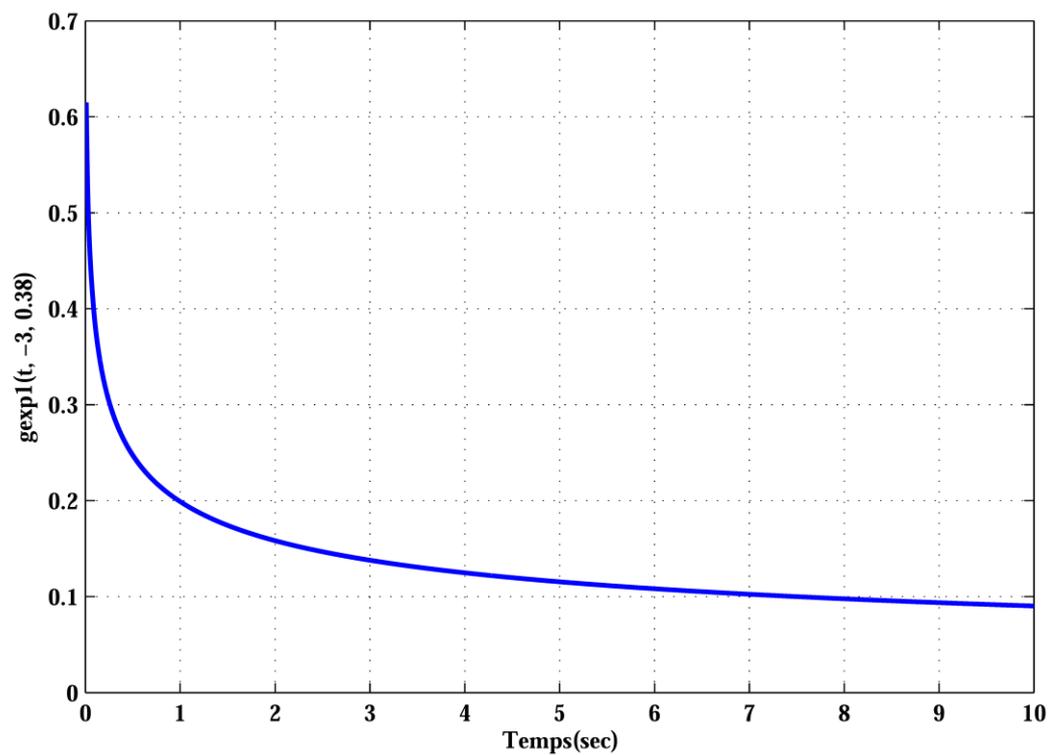


Figure (II.1) : Tracé de la fonction $gexp_1(t, -3, 0.38)$

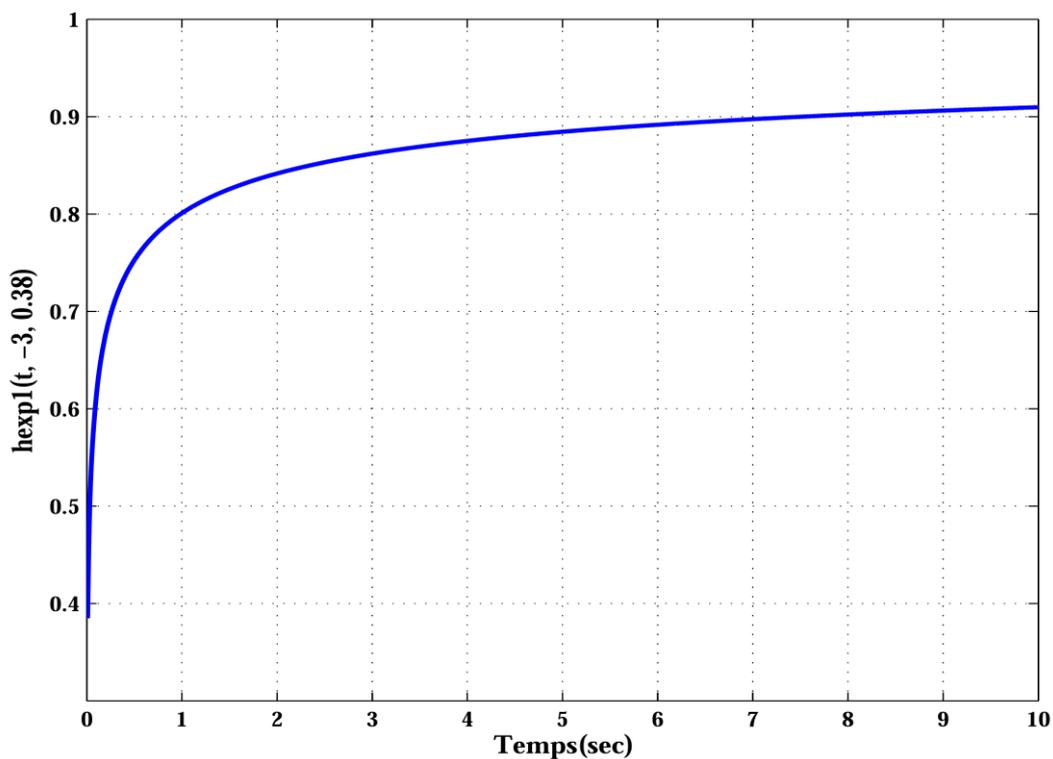


Figure (II.2) : Tracé de la fonction $hexp_1(t, -3, 0.38)$

II.2.1.2. Cas d'un pôle réel et multiple

Dans ce cas la valeur du pôle est $\lambda = -5$ de multiplicité $m_1 = 2$ avec $m = 0.72$ et à partir des équations (II.17) et (II.23), les fonctions $\text{gexp}_2(t, -5, 0.72)$ et $\text{hexp}_2(t, -5, 0.72)$ peuvent être facilement calculées en utilisant les paramètres d'approximation $\beta = 1.25$, $\omega_h = 100$ rad/s et $\omega_{\max} = 10^7 \omega_h = 10^9$ rad/s comme suit:

$$\begin{aligned} \text{gexp}_2(t, -5, 0.72) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^{0.72} + 5)^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{2N-1} \frac{(k_i)^2}{(s + p_i)^2} + \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{2N-1} \frac{k_i k_j}{(s + p_i)(s + p_j)} \right] \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{2N-1} (k_i)^2 t \exp(-p_i t) + \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{2N-1} \left(\frac{k_i k_j}{p_j - p_i} \right) [\exp(-p_i t) - \exp(-p_j t)] \right\} \\ \text{hexp}_2(t, -5, 0.72) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{0.72} + 5)^2} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{2N-1} \frac{(k_i)^2}{s(s + p_i)^2} + \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{2N-1} \left(\frac{k_i k_j}{p_j - p_i} \right) \left[\frac{1}{s(s + p_i)} - \frac{1}{s(s + p_j)} \right] \right] \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{2N-1} \left[\frac{(k_i)^2}{(p_i)^2} [1 - \exp(-p_i t)] - \frac{(k_i)^2}{p_i} t \exp(-p_i t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{2N-1} \left[\left(\frac{k_i k_j}{p_i (p_j - p_i)} \right) [1 - \exp(-p_i t)] - \left(\frac{k_i k_j}{p_j (p_j - p_i)} \right) [1 - \exp(-p_j t)] \right] \right\} \end{aligned}$$

avec $\tau_0 = \left(\frac{-1}{\lambda} \right)^{\left(\frac{1}{m} \right)} = 0.107$ et $N = \text{Integer} \left[\frac{\log(\tau_0 \omega_{\max})}{\log(\beta)} \right] + 1 = 83$. Alors, pour $0 \leq i \leq 165$, on a

$$p_i = (9.35) * (1.25)^{(i-83)}, \quad k_i = \left(\frac{(1.87) * (1.25)^{(i-83)}}{2\pi} \right) \left[\frac{\sin[(0.28)\pi]}{\cosh[0.72 \log((1.25)^{(83-i)})] - \cos[(0.28)\pi]} \right]$$

Figures (II.3) et (II.4) montrent les tracés des fonctions $\text{gexp}_2(t, -5, 0.72)$ et de $\text{hexp}_2(t, -5, 0.72)$.

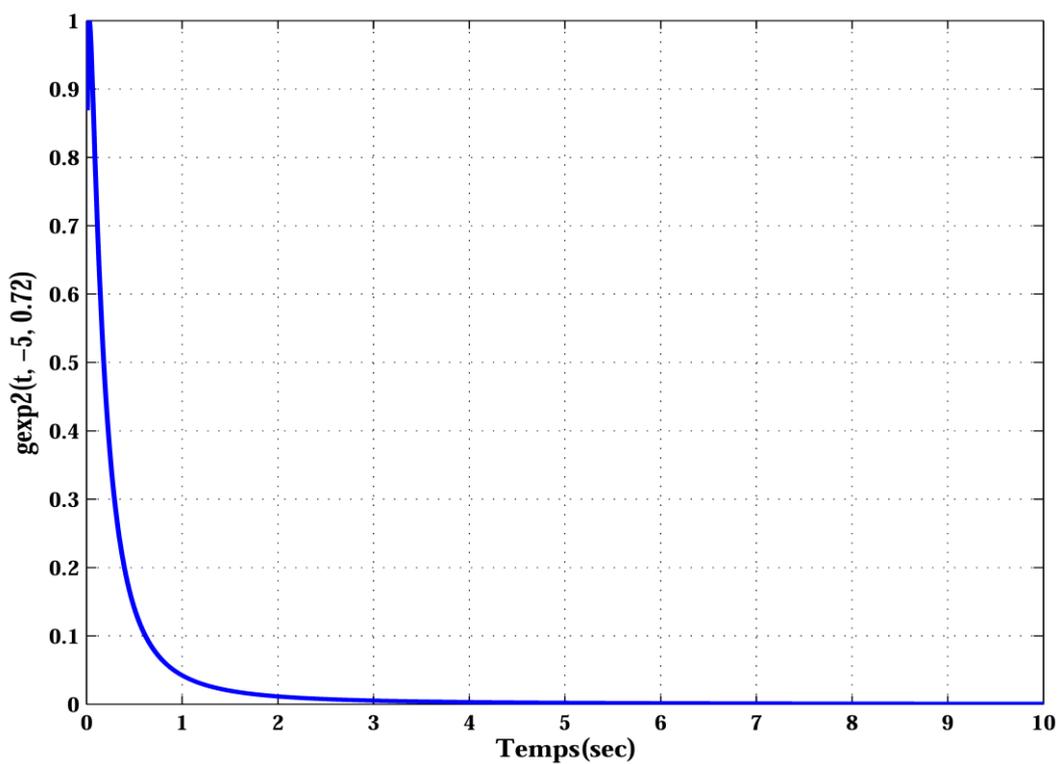


Figure (II.3) : Tracé de la fonction $gexp_2(t, -5, 0.72)$

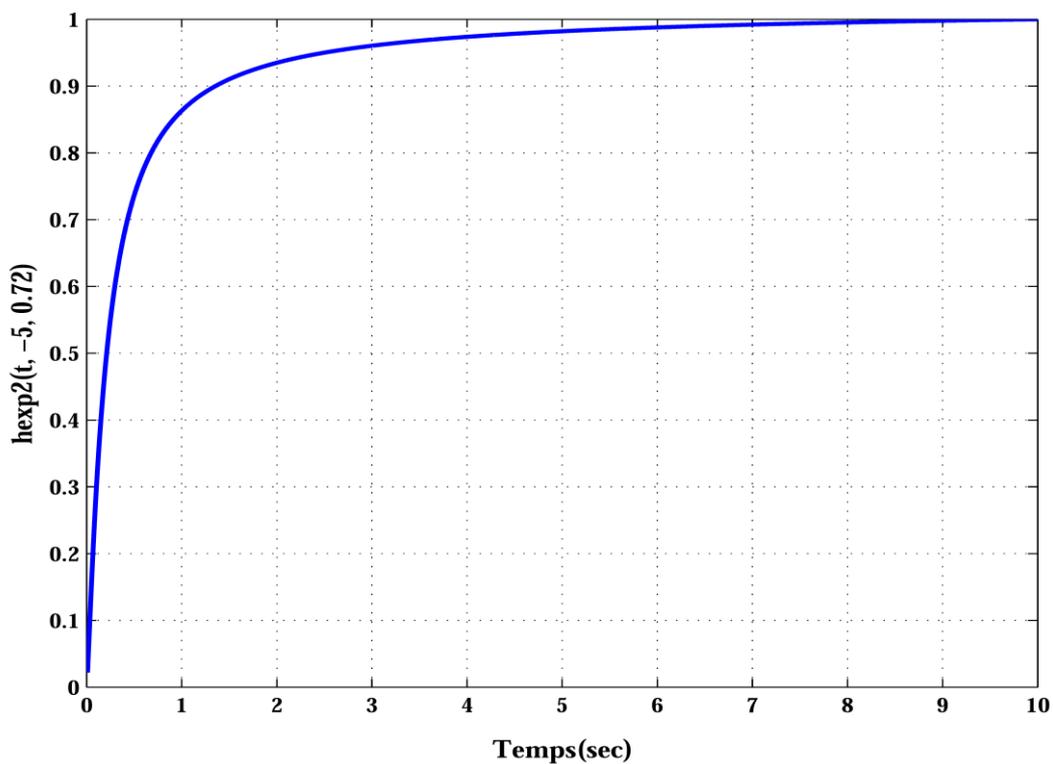


Figure (II.4) : Tracé de la fonction $hexp_2(t, -5, 0.72)$

II.3. Fonctions fondamentales pour le cas des pôles complexes

Les fonctions fondamentales considérées ont uniquement une paire de pôles complexes conjugués λ et λ^* , en s^m avec $0 < m < 1$, donnée comme suit :

$$\lambda = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad , \quad \lambda^* = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (\text{II.25})$$

où ω_n est un nombre réel positif et $0 \leq \zeta < 1$. Donc, les fonctions fondamentales appropriées sont définies selon les plages des valeurs du paramètre ζ et de l'ordre de la dérivée fractionnaire m .

II.3.1. Fonctions fondamentales pour une paire de pôles complexes conjugués avec parties réelles nulles [43]

Dans ce cas $\zeta = 0$, la paire de pôles complexes conjugués λ et λ^* sont $\lambda = j\omega_n$ et $\lambda^* = -j\omega_n$, avec $\|\lambda\|^2 = \omega_n^2$. Les deux fonctions fondamentales correspondantes à ces pôles sont données comme :

$$Ff_1(s) = \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \quad , \quad Ff_2(s) = \frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \quad (\text{II.26})$$

On définit la fonction sinus fractionnaire $f_{\sin}(t, \lambda, m)$ et la fonction cosinus fractionnaire $f_{\cos}(t, \lambda, m)$ en tant que la transformée de Laplace inverse des fonctions $Ff_1(s)$ et $Ff_2(s)$, respectivement. Alors, on peut écrire que :

$$f_{\sin}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right\} \quad , \quad f_{\cos}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right\} \quad (\text{II.27})$$

On note que ces deux fonctions fondamentales sont appelées, respectivement, les fonctions sinus fractionnaire et cosinus fractionnaire parce que si $m = 1$, la transformée de Laplace inverse des fonctions $Ff_1(s)$ et $Ff_2(s)$ de (II.26) sont, respectivement, les fonctions $\sin(\omega_n t)$ et $\cos(\omega_n t)$.

Nous allons aussi introduire deux autres fonctions $hf_{\sin}(t, \lambda, m)$ et $hf_{\cos}(t, \lambda, m)$ qui seront utilisées dans la solution de l'équation différentielle des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire de l'équation (II.1). Ces deux fonctions sont définies, respectivement, comme la convolution des fonctions sinus fractionnaire $f_{\sin}(t, \lambda, m)$ et cosinus fractionnaire $f_{\cos}(t, \lambda, m)$ avec la fonction échelon unitaire $u(t)$ comme suit [43]:

$$hf_{\sin}(t, \lambda, m) = [f_{\sin}(t, \lambda, m)] * u(t) \quad , \quad hf_{\cos}(t, \lambda, m) = [f_{\cos}(t, \lambda, m)] * u(t) \quad (\text{II.28})$$

De l'équation (II.27), on peut alors écrire que :

$$hf_{\sin}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \quad , \quad hf_{\cos}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \quad (\text{II.29})$$

Les fonctions $Ff_1(s)$ et $Ff_2(s)$ de (II.26) sont des fonctions irrationnelles. Pour être utilisés dans les solutions de l'équation différentielle des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire de l'équation

(II.1), ils doivent être approximées par des fonctions rationnelles. L'approximation sera considérée selon le choix de l'ordre de la dérivée fractionnaire m .

II.3.1.1. Cas 1 : $0 < m < 0.5$

Dans ce cas, $0 < 2m < 1$, donc l'approximation de la fonction fondamentale $Ff_1(s)$ de (II.26) par une fonction rationnelle, dans une bande de fréquence intérêt $[0, \omega_H]$, est donnée par [42] :

$$Ff_1(s) = \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \cong \sum_{i=1}^{N_1} \frac{k_{1i}}{(s + p_{1i})} \quad (\text{II.30})$$

où les pôles p_{1i} ($i = 1, 2, \dots, N_1$), les résidus k_{1i} ($i = 1, 2, \dots, N_1$) et le nombre N_1 de l'approximation sont donnés par :

$$p_{1i} = \frac{(\rho)^{(i-N)}}{\tau_0} \quad \text{et} \quad k_{1i} = \left(\frac{p_{1i}}{2\pi} \right) \left[\frac{\sin[(1-2m)\pi]}{\cosh \left[2m \log \left(\frac{1}{\tau_0 p_{1i}} \right) \right] - \cos[(1-2m)\pi]} \right] \quad (\text{II.31})$$

$$N_1 = 2N - 1 \text{ sachant que } N = \text{Integer} \left[\frac{\log(\tau_0 \omega_{\max})}{\log(\rho)} \right] + 1 \quad (\text{II.32})$$

avec $\tau_0 = \left(\frac{1}{\|\lambda\|} \right)^{(1/m)}$, $\omega_{\max} = 1000\omega_H$ est la fréquence d'approximation maximale et $\rho > 1$ est le

rapport d'un pôle à son précédent.

Alors, la fonction sinus fractionnaire $f_{\sin}(t, \lambda, m)$ est donnée par [43]:

$$f_{\sin}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right\} \cong L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \frac{k_{1i}}{(s + p_{1i})} \right\} = \sum_{i=1}^{N_1} k_{1i} \exp(-p_{1i}t) \quad (\text{II.33})$$

L'approximation par une fonction rationnelle de la fonction $Ff_2(s)$ de (II.26), dans la bande de fréquence d'intérêt $[\omega_L, \omega_H]$, est également donnée en [32, 44] :

$$Ff_2(s) = \frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \cong \sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{(s + p_{2i})} \quad (\text{II.34})$$

avec le nombre N_2 de l'approximation est donné par : $N_2 = N_{21} + N_{22}$

Les pôles p_{2i} et les résidus k_{2i} ($i = 1, 2, \dots, N_2$) sont donnés comme suit [32, 44] :

$$p_{2i} = \begin{cases} p_0 (ab)^i & \text{pour } 1 \leq i \leq N_{21} + 1 \\ \frac{(\rho)^{(i-N)}}{\tau_0} & \text{pour } N_{21} + 2 \leq i \leq N_{22} + N_{21} + 1 \end{cases} \quad \text{avec } \tau_0 = \left(\frac{1}{\|\lambda\|} \right)^{\left(\frac{1}{m} \right)} \text{ et } \rho > 1 \quad (\text{II.35})$$

$$k_{2i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_{22}} A_{ij} & \text{pour } 1 \leq i \leq N_{21} + 1 \\ \left[(\tau_0^{2m} K_D) (\bar{p}_j \bar{k}_j) \right] + \sum_{i=1}^{N_{21}+1} B_{ij} & \text{pour } N_{21} + 2 \leq j \leq N_{22} + N_{21} + 1 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

où les résidus A_{ij} et B_{ij} (pour $0 \leq i \leq N_{21}$ et $1 \leq j \leq N_{22}$) sont donnés par :

$$A_{ij} = \frac{(\tau_0^{2m})(p_i^2 k_i)(\bar{p}_j \bar{k}_j)}{p_i - \bar{p}_j}, \quad B_{ij} = \frac{(\tau_0^{2m})(p_i k_i)(\bar{p}_j \bar{k}_j)}{\bar{p}_j - p_i} \quad (\text{II.37})$$

Pour des valeurs réelles données de y (dB), δ et β , les paramètres d'approximation a , b , p_0 , z_0 , ω_c , ω_{\max} , N_{21} , N_{22} , les pôles p_i et les résidus k_i peuvent être calculés comme :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)} \right]}, \quad b = 10^{\left[\frac{y}{10m} \right]}, \quad \omega_c = \delta \omega_L, \quad \omega_{\max} = \beta \omega_H, \quad z_0 = \omega_c \sqrt{b} \text{ et } p_0 = a z_0, \quad K_D = (\omega_c)^m \quad (\text{II.38})$$

$$N_{21} = \text{Integer} \left[\frac{\log(\omega_{\max}/z_0)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II.39})$$

$$N_{22} = 2N - 1 \text{ avec } N = \text{Integer} \left[\frac{\log[\tau_0 \beta \omega_H]}{\log(\rho)} \right] + 1$$

$$p_i = p_0 (ab)^i, \quad k_i = -\frac{K_D \prod_{j=0}^{N_{21}} (1 - a(ab)^{(i-j)})}{p_0 (ab)^i \prod_{j=0, j \neq i}^{N_{21}} (1 - (ab)^{(i-j)})}, \quad \text{pour } i=0, 1, \dots, N_{21} \quad (\text{II.40})$$

Les pôles \bar{p}_j et les résidus \bar{k}_j (pour $1 \leq j \leq N_{22}$), de l'approximation sont donnés par :

$$\bar{p}_j = \frac{(\rho)^{(j-N)}}{\tau_0}, \quad \bar{k}_j = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-m)\pi]}{\cosh[m \log(\frac{1}{\tau_0 p_j})] - \cos[(1-m)\pi]} \right] \quad (\text{II.41})$$

Alors, la fonction cosinus fractionnaire $f_{\cos}(t, \lambda, m)$ est donnée par [43] :

$$f_{\cos}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right\} \cong L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{(s + p_{2i})} \right\} = \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} \exp(-p_{2i} t) \quad (\text{II.42})$$

A partir des équations (II.28), (II.29), (II.31) et (II.42), les fonctions $h_{\sin}(t, \lambda, m)$ et $h_{\cos}(t, \lambda, m)$ sont alors obtenues comme [43]:

$$h_{\sin}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{k_{1i}}{s + p_{1i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{k_{1i}}{p_{1i}} \right) \left[1 - \exp(-p_{1i} t) \right] \quad (\text{II.43})$$

$$h_{\cos}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{p_{2i}} \right) \left[1 - \exp(-p_{2i} t) \right] \quad (\text{II.44})$$

II.3.1.2. Cas 2: $m = 0.5$

Dans ce cas, la fonction fondamentale $Ff_1(s)$ de (II.26) est donnée par:

$$Ff_1(s) = \frac{\|\lambda\|^2}{[s + \|\lambda\|^2]} \quad (\text{II.45})$$

et la fonction sinus fractionnaire $f_{\sin}(t, \lambda, 0.5)$ sera [43]:

$$f_{\sin}(t, \lambda, 0.5) = L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda\|^2}{[s + \|\lambda\|^2]} \right\} = \|\lambda\|^2 \exp(-\|\lambda\|^2 t) \quad (\text{II.46})$$

L'approximation par une fonction rationnelle de la fonction $Ff_2(s)$ de (II.26), dans la bande de fréquence d'intérêt $[\omega_L, \omega_H]$, est également donnée par [44] :

$$Ff_2(s) = \frac{s^{0.5}}{[s + \|\lambda\|^2]} \cong \frac{k_{20}}{[s + \|\lambda\|^2]} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{(s + p_{2i})} \quad (\text{II.47})$$

Des l'équations (II.38), (II.39) et (II.40), les résidus k_{2i} et k_{20} sont donnés par ($0 \leq i \leq N_2 = N_{21}$) :

$$k_{2i} = \frac{(p_i^2 k_i)}{(\tau_0 p_i - 1)}, \quad k_{20} = \left[\frac{K_D}{\tau_0} \right] + \left[\sum_{i=0}^{N_2} D_i \right], \quad D_i = \frac{(p_i k_i)}{(\tau_0^2 - \tau_0 p_i)} \quad \text{et} \quad p_{2i} = p_i = \frac{(\rho)^{(i-N)}}{\tau_0} \quad (\text{II.48})$$

et la fonction cosinus fractionnaire $f_{\cos}(t, \lambda, 0.5)$ sera [43] :

$$\begin{aligned} f_{\cos}(t, \lambda, 0.5) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{0.5}}{[s + \|\lambda\|^2]} \right\} \cong L^{-1} \left\{ \left(\frac{k_{20}}{s + \|\lambda\|^2} \right) + \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right) \right\} \\ &= k_{20} \exp(-\|\lambda\|^2 t) + \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} \exp(-p_{2i} t) \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Donc, les fonctions $hf_{\sin}(t, \lambda, 0.5)$ et $hf_{\cos}(t, \lambda, 0.5)$ sont obtenues, respectivement, à partir de (II.28), (II.29), (II.45) et (II.47), comme [43]:

$$hf_{\sin}(t, \lambda, 0.5) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda\|^2}{s + \|\lambda\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = [1 - \exp(-\|\lambda\|^2 t)] \quad (\text{II.50})$$

$$\begin{aligned} hf_{\cos}(t, \lambda, 0.5) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^{0.5}}{s + \|\lambda\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \left(\frac{k_{20}}{s + \|\lambda\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) + \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{k_{20}}{\|\lambda\|^2} \right) [1 - \exp(-\|\lambda\|^2 t)] + \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{p_{2i}} \right) [1 - \exp(-p_{2i} t)] \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

II.3.1.3. Cas 3: $0.5 < m < 1$

Dans ce cas $1 < 2m < 2$, donc l'approximation par une fonction rationnelle de la fonction fondamentale $Ff_1(s)$ de (II.26), dans une bande de fréquence d'intérêt $[0, \omega_H]$, est donnée par [42] :

$$Ff_1(s) = \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \cong \left[\frac{A_1 s + B_1}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} s + \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} \right] + \left[\sum_{i=1}^{N_1} \frac{k_{li}}{s + p_{li}} \right] \quad (\text{II.52})$$

où, k_{li} et p_{li} ($i=0, 1, \dots, N_1$) sont les résidus et les pôles qui peuvent être calculés comme suit [42]:

$$p_{li} = p_0 (ab)^i, \quad k_{li} = \frac{1}{(\tau_0 p_0 (ab)^i)^2 - 2\alpha (\tau_0 p_0 (ab)^i) + 1} \frac{\prod_{j=0}^{N_1} (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{N_1} (1 - (ab)^{i-j})} \quad (\text{II.53})$$

Cette méthode d'approximation commence par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation $[\omega_B, \omega_H]$. Les paramètres a, b, z_0, p_0, α et N_1 de l'approximation peuvent être déterminés comme suit [42] :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10[1-2(1-m)]} \right]}, \quad b = 10^{[y/20(1-m)]}, \quad z_0 = \left(\|\lambda\|^{\left\{ \frac{1}{m} \right\}} \right) 10^{[y/40(1-m)]}, \quad p_0 = az_0, \quad \alpha = \sqrt{\frac{[1 + \cos(m\pi)]}{2^{2m-1}}} \quad (\text{II.54})$$

$$N_1 = \text{Integer} \left(\log \left(\frac{\omega_{\max}}{z_0} \right) / \log(ab) \right) + 1 \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \left(1 / \|\lambda\|^{\left\{ \frac{1}{m} \right\}} \right)$$

Les constantes A_1 et B_1 sont données par :

$$B_1 = 1 - \sum_{i=0}^{N_1} k_{li} \quad \text{et} \quad A_1 = -\tau_0^2 \sum_{i=0}^{N_1} k_{li} p_0 (ab)^i \quad (\text{II.55})$$

Alors, la fonction sinus fractionnaire $\text{fsin}(t, \lambda, m)$ est donnée par [43]:

$$\begin{aligned} \text{fsin}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \left[\frac{A_1 s + B_1}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} s + \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} \right] + \left[\sum_{i=1}^{N_1} \frac{k_{li}}{s + p_{li}} \right] \right\} \\ &= C_1 \exp \left(-\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} t \right) \sin \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} t + \Phi_1 \right) + \sum_{i=1}^{N_1} k_{li} \exp(-p_{li} t) \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

où les constantes C_1 et Φ_1 sont données par [42] :

$$C_1 = \frac{B}{\tau_0} \sqrt{\frac{A_1^2 - 2A_1 B_1 \alpha \tau_0 + (B_1 \tau_0)^2}{(B_1 \tau_0)^2 (1 - \alpha^2)}} \quad \text{et} \quad \Phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{A_1 \sqrt{1 - \alpha^2}}{B_1 \tau_0 - A_1 \alpha} \right) \quad (\text{II.57})$$

L'approximation de la fonction fondamentale $Ff_2(s)$ de (II.26) par une fonction rationnelle, dans une bande de fréquence d'intérêt $[\omega_L, \omega_H]$, est donnée par [45] :

$$Ff_2(s) = \frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \cong L^{-1} \left\{ \left[\frac{A_2 s + B_2}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} s + \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} \right] + \left[\sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right] \right\} \quad (\text{II.58})$$

La fonction rationnelle de l'équation (II.58) est obtenue comme suit [45] :

$$Ff_2(s) = \frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \approx \frac{1}{\|\lambda\|^{\left(2-\frac{2}{m}\right)}} \frac{s^m \left(1 + (\tau_0 s)\right)^{(2-2m)}}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} s + \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} \quad (\text{II.59})$$

De [32], le différentiateur d'ordre fractionnaire s^m est approximé par $K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m$, où

$$\tau_c = \frac{1}{\omega_c}, \tau_0 = (1/\lambda)^{(1/m)} = \frac{1}{\omega_0}, \omega_c \ll \omega_0, K_D = (\omega_c)^m ; \text{ alors, on peut mettre } Ff_2(s) \text{ de l'équation}$$

(II.59) sous forme suivante :

$$Ff_2(s) = \tau_0^{2m} K_D \left[\frac{(1 + (\tau_0 s))}{(\tau_0 s)^2 + 2 \xi (\tau_0 s) + 1} \right] \frac{(1 + (\tau_c s))^m}{(1 + (\tau_0 s))^{(2m-1)}} \quad (\text{II.60})$$

Dans ce qui suit, on va utiliser une technique de normalisation de pôles des deux zéros à puissance fractionnaire, pour normaliser le dénominateur de la fonction $Ff_2(s)$. Donc, pour une erreur y_1 en dB choisie, les pôles de l'approximation de $(1 + (\tau_c s))^m$ de l'équation (II.60) sont donnés par [32]:

$$p_{2i}(m) = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N_{11}, N_{11} = \text{Integer} \left(\log \left(\frac{\omega_{\max}}{p_0} \right) / \log(a_1 b_1) \right) + 1 \quad (\text{II.61})$$

Les paramètres a_1 et b_1 en fonction de y_1 et m sont donnés par :

$$a_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10(1-m)} \right)}, b_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10m} \right)} \quad \text{avec: } z_0 = \omega_c \sqrt{b_1} \text{ et } p_0 = a_1 z_0 \quad (\text{II.62})$$

Pour une erreur y_2 en dB choisie, les pôles de l'approximation de $\frac{1}{(1 + (\tau_0 s))^{(2m-1)}}$ sont aussi

donnés par [32] :

$$p_{2i}(m_2) = (a_2 b_2)^i p_0, \text{ } i = 0, 1, \dots, N_{12}, N_{12} = \text{Integer} \left(\log \left(\frac{\omega_{\max}}{z_0} \right) / \log(a_2 b_2) \right) + 1 \quad (\text{II.63})$$

où a_2 et b_2 sont données par :

$$a_2 = 10^{\left(\frac{y_2}{10(1-m_2)} \right)}, b_2 = 10^{\left(\frac{y_2}{10m_2} \right)} \quad (\text{II.64})$$

et p_0 est le premier pôle d'approximation défini comme : $p_0 = a_1 \omega_c \sqrt{b_1}$.

Pour garantir l'égalité des pôles des équations (II.61) et (II.63) des deux approximations quelque soit les ordres $m \neq m_2 = (2m-1)$ on doit avoir $p_i(m_2) = p_i(m)$ ($i=0, 1, 2, \dots, N_{11} + N_{12} + 1$), c'est-à-dire :

$$p_{2i}(m_2) = p_{2i}(m) \Rightarrow (a_1 b_1)^i p_0 = (a_2 b_2)^i p_0 \Rightarrow a_1 b_1 = a_2 b_2 = ab \quad (\text{II.65})$$

Cela conduit à :

$$10^{\left[\frac{y_2}{10(1-m_2)}\right]} \times 10^{\left[\frac{y_2}{10m_2}\right]} = 10^{\left[\frac{y_1}{10(1-m)}\right]} \times 10^{\left[\frac{y_1}{10m}\right]} \quad (\text{II.66})$$

Donc les erreurs d'approximation y_1 et y_2 et les ordres m et m_2 sont liés par la relation suivante :

$$y_2 = y_1 \frac{m_2(1-m_2)}{m(1-m)} \quad (\text{II.67})$$

L'approximation de la fonction $Ff_2(s)$ est donnée par [45]:

$$Ff_2(s) \approx \tau_0^{2m} K_D \left[\frac{(1+(\tau_0 s))}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} \right] \frac{\prod_{i1=0}^{N11} \left(1 + \frac{s}{z_{i1}}\right) \prod_{i2=0}^{N12} \left(1 + \frac{s}{z_{i2+N1+1}}\right)}{\prod_{i=0}^{N11+N12+1} \left(1 + \frac{s}{p_{2i}}\right)} \quad (\text{II.68})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les progressions géométriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{2i} = p_0 (ab)^i, \quad 0 \leq i \leq N_{11} + N_{12} + 1 \\ z_{i1} = (ab)^{i1} \frac{p_0}{a_1}, \quad 0 \leq i1 \leq N_{11} \\ z_{i2+N1+1} = (ab)^{i2+N1+1} \frac{p_0}{a_2}, \quad 0 \leq i2 \leq N_{12} \end{array} \right. \quad (\text{II.69})$$

N_{11} est obtenu en utilisant y_1 et $\omega_{\max 1} = \omega_0$, $\omega_{\max 2} = 100\omega_H$ pour calculer N_{12} . Par décomposition en éléments simples de l'équation (II.68), il est possible de représenter la fonction de transfert $Ff_2(s)$ par une combinaison de fonctions élémentaires simples, comme suit [45]:

$$Ff_2(s) = \frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \cong L^{-1} \left\{ \left[\frac{A_2 s + B_2}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} s + \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} \right] + \left[\sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right] \right\} \quad (\text{II.70})$$

où, les k_{2i} ($i=0, 1, \dots, N_2 = N_{11} + N_{12} + 1$) sont les résidus des pôles qui sont calculés par :

$$k_{2i} = \tau_0^{2m} K_D \left[\frac{(1 - (\tau_0 p_0 (ab)^i)) (p_0 (ab)^i)}{(\tau_0 p_0 (ab)^i)^2 - 2\xi(\tau_0 p_0 (ab)^i) + 1} \right] \frac{\prod_{i1=0}^{N11} (1 - a_1 (ab)^{(i-i1)}) \prod_{i2=0}^{N12} (1 - a_2 (ab)^{(i-i2+N1+1)})}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{N_2} (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (\text{II.71})$$

Les constants A_2 et B_2 sont données par :

$$s = 0 \Rightarrow Ff_2(0) = \tau_0^{2m} K_D = \frac{B_2}{\left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{p_{2i}} \Rightarrow B_2 = \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\} \left[\tau_0^{2m} K_D - \sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{p_{2i}} \right] \quad (\text{II.72})$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s F f_2(s) = \tau_0^{2m} K_D \frac{1}{(\tau_0)} \frac{\prod_{i=1}^{N_{11}} \left(\frac{1}{Z_{i1}} \right) \prod_{i=2}^{N_{12}} \left(\frac{1}{Z_{i2+N_{11}+1}} \right)}{\prod_{i=0}^{N_2} \left(\frac{1}{P_{2i}} \right)} = A_2 + \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} \Rightarrow \quad (\text{II.73})$$

$$A_2 = \tau_0^{(2m-1)} K_D \left[\frac{\prod_{i=0}^{N_2} P_{2i}}{\prod_{i=1}^{N_{11}} Z_{i1} \prod_{i=2}^{N_{12}} Z_{i2+N_{11}+1}} \right] - \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} \quad (\text{II.74})$$

La fonction $f_{\cos}(t, \lambda, m)$ est alors donnée par l'expression suivante [43] :

$$\begin{aligned} f_{\cos}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{A_2 s + B_2}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} s + \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} + \left[\sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{s + P_{2i}} \right] \right\} \\ &= C_2 \exp \left(-\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} t \right) \cos \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} t + \Phi_2 \right) + \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} \exp(-p_{2i} t) \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

où les constants C_2 et Φ_2 sont donnés par [42] :

$$C_2 = \tau_0^{(2m-1)} B_2 \sqrt{\frac{(A_2)^2 - 2A_2 B_2 \alpha \tau_0 + (B_2 \tau_0)^2}{(B_2 \tau_0)^2 (1 - \alpha^2)}} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{A_2 \sqrt{1 - \alpha^2}}{B_2 \tau_0 - A_2 \alpha} \right) \quad (\text{II.76})$$

Dans ce cas, les deux fonctions $h_{\sin}(t, \lambda, m)$ et $h_{\cos}(t, \lambda, m)$ sont également données à partir des équations (II.28), (II.29), (II.56) et (II.75) comme suit [43]:

$$\begin{aligned} h_{\sin}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \left[\frac{A_1 s + B_1}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} s + \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} \right] \left(\frac{1}{s} \right) + \left[\sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{k_{1i}}{s + p_{1i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right] \right\} \\ &= 1 + C_{11} \exp \left(-\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} t \right) \sin \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} t + \Phi_{11} \right) - \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{k_{1i}}{p_{1i}} \right) \left[\exp(-p_{1i} t) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

où les constantes $C_{11} = (1/\lambda)^{(1/m)} C_1$ et Φ_{11} sont données par [42] :

$$\Phi_{11} = \tan^{-1} \left(\frac{A_1 \sqrt{1 - \alpha^2}}{B_1 \tau_0 - A_1 \alpha} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{-\alpha} \right) \quad (\text{II.78})$$

$$\begin{aligned}
\text{hfcos}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{A_2 s + B_2}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} s + \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right] + \left[\left(\sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right] \right\} \quad (\text{II.79}) \\
&= \frac{K_D}{\|\lambda\|^2} + C_{21} \exp \left(-\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} t \right) \sin \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} t + \Phi_{21} \right) - \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{p_{2i}} \right) \exp(-p_{2i} t)
\end{aligned}$$

où les constants $C_{21} = (1/\lambda)^{(1/m)} C_2$ et Φ_{21} sont donnés par [42]:

$$\Phi_{21} = \tan^{-1} \left(\frac{A_2 \sqrt{1 - \alpha^2}}{B_2 \tau_0 - A_2 \alpha} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{-\alpha} \right) \quad (\text{II.80})$$

II.3.2. Fonctions fondamentales pour une paire de pôles complexes conjugués avec partie réelle négative [43]

Dans ce cas, $0 < \zeta < 1$, les pôles sont sous la forme de paires de pôles complexes $\lambda = -\zeta\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ et $\lambda^* = -\zeta\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Les deux fonctions fondamentales correspondant à ces pôles sont données comme :

$$\text{Ff}_3(s) = \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2]} \quad \text{et} \quad \text{Ff}_4(s) = \frac{s^m + \|\lambda\|\zeta}{[s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2]} \quad (\text{II.81})$$

On définit la fonction sinus amorti fractionnaire $\text{fdsin}(t, \lambda, m)$ et la fonction cosinus amorti fractionnaire $\text{fdcos}(t, \lambda, m)$ en tant que la transformée de Laplace inverse de la fonction $\text{Ff}_3(s)$ et $\text{Ff}_4(s)$, respectivement, parce que, si $m = 1$, la transformée de Laplace inverse de la fonction $\text{Ff}_3(s)$ et $\text{Ff}_4(s)$ de (II.81) sont respectivement, la fonction sinus amorti $\exp(-\zeta\omega_n t) \sin(\omega_n t)$ et la fonction cosinus amorti $\exp(-\zeta\omega_n t) \cos(\omega_n t)$. Alors, nous avons :

$$\text{fd sin}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2]} \right\} \quad \text{et} \quad \text{fd cos}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \frac{s^m + \|\lambda\|\zeta}{[s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2]} \right\} \quad (\text{II.82})$$

Pour $0 < m < 1$, les fonctions rationnelles d'approximation des fonctions fondamentales $\text{Ff}_3(s)$ et $\text{Ff}_4(s)$ de (II.81), dans une bande de fréquence d'intérêt $[0, \omega_H]$, sont donnés comme suit [46-47] :

$$\text{Ff}_3(s) = \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2]} \cong \left[\sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{a_{3i}s + \sqrt{1 - \zeta^2}}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right] \quad (\text{II.83})$$

pour $N = \text{Integer} \left[\frac{\log[(\omega_n)^{(1/m)} \omega_{\max}]}{\log(\rho)} \right] + 1$ et $\varphi_3 = \text{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$, les coefficients β , a_{3i} , ω_i et les

résidus k_{3i} , pour $i = 1, 2, \dots, N_3 = 2N - 1$, sont donnés par [46]:

$$\beta = \cos\left(\frac{\varphi_3}{m}\right) \quad (\text{II.84})$$

$$a_{3i} = (\omega_n)^{\left\{\frac{1}{m}\right\}} \rho^{(N-i)} \left(\beta \sqrt{1-\xi^2} - \xi \sqrt{1-\beta^2} \right) \quad (\text{II.85})$$

$$\omega_i = \frac{1}{\tau_0 \rho^{(N-i)}} \quad (\text{II.86})$$

$$k_{3i} = \frac{(\omega_i)^2}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-m)\pi]}{\cosh[m \log(\rho)^{N-i}] - \cos[(1-m)\pi]} \right] \quad (\text{II.87})$$

avec $\rho > 1$ est le rapport d'un pôle à son précédent et ω_{\max} est une fréquence d'approximation qui est choisie comme un très grand multiple de ω_H afin d'avoir une bonne approximation dans la bande de fréquence d'intérêt $[0, \omega_H]$.

$$Ff_4(s) = \frac{s^m + \|\lambda\|\zeta}{[s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2]} \cong \left[\sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{a_{4i}s + \zeta}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right] \quad (\text{II.88})$$

les coefficients a_{4i} et les résidus k_{4i} , pour $i = 1, 2, \dots, N_4 = N_3 = 2N-1$, sont [47] :

$$a_{4i} = (\omega_n)^{\left\{\frac{1}{m}\right\}} \rho^{(N-i)} \left(\xi \beta + \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-\beta^2} \right) \quad (\text{II.89})$$

$$k_{4i} = \frac{(\omega_i)^2}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-m)\pi]}{\cosh[m \log(\rho)^{N-i}] - \cos[(1-m)\pi]} \right] \quad (\text{II.90})$$

Donc, les fonctions $fd\sin(t, \lambda, m)$ et $fd\cos(t, \lambda, m)$ seront [43]:

$$\begin{aligned} fd\sin(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{a_{3i}s + \sqrt{1-\zeta^2}}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_3} \omega_i k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin \left(\omega_i \left(\sqrt{1-\beta^2} \right) t + \left(\frac{m-1}{m} \right) \varphi_3 \right) \end{aligned} \quad (\text{II.91})$$

$$\begin{aligned} fd\cos(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^m + \|\lambda\|\zeta}{[s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{a_{4i}s + \zeta}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_3} \omega_i k_{4i} \exp(-\beta\omega_i t) \cos \left(\omega_i \left(\sqrt{1-\beta^2} \right) t + \left(\frac{m-1}{m} \right) \varphi_3 \right) \end{aligned} \quad (\text{II.92})$$

Les fonctions $hfdsin(t, \lambda, m)$ et $hfdcos(t, \lambda, m)$ qui seront utilisés dans la solution de l'équation différentielle des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire de l'équation (II.1) sont définies, respectivement, comme la convolution de la fonction sinus amortie fractionnaire $fd\sin(t, \lambda, m)$ et la fonction cosinus amortie fractionnaire $fd\cos(t, \lambda, m)$ avec la fonction de l'échelon unitaire $u(t)$. Par conséquent, ils sont donnés par les expressions suivantes [43] :

$$hfdsin(t, \lambda, m) = [fd\sin(t, \lambda, m)] * u(t) \quad \text{et} \quad hfdcos(t, \lambda, m) = [fd\cos(t, \lambda, m)] * u(t) \quad (\text{II.93})$$

De (II.91) et (II.92), on peut alors écrire que [43]:

$$\begin{aligned} \text{hfdsin}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda\|^2}{s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{a_{3i}s + \sqrt{1-\zeta^2}}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= \left\{ 1 - C_3 \left[\sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin(\omega_i(\sqrt{1-\beta^2})t + \varphi_3) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.94})$$

avec $C_3 = 1/\sqrt{1-\zeta^2}$.

$$\begin{aligned} \text{hfdcos}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^m + \|\lambda\|\zeta}{s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{a_{4i}s + \zeta}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= \left\{ \frac{\xi}{\|\lambda\|} - C_4 \left[\sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \exp(-\beta\omega_i t) \cos(\omega_i(\sqrt{1-\beta^2})t + \varphi_3) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

avec $C_4 = 1/\|\lambda\|$.

II.3.3. Exemples illustratifs

Pour le but d'illustration considérons le calcul numérique des fonctions fondamentales des équations (II.27), (II.29), (II.82), (II.94) et (II.95) données comme suit:

$$\begin{aligned} \text{fsin}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \right\}, \quad \text{fcos}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \right\}, \\ \text{hfsin}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda\|^2}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\}, \quad \text{hfcos}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^m}{[s^{2m} + \|\lambda\|^2]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\}, \\ \text{fdsin}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda\|^2}{s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2} \right) \right\}, \quad \text{fdcos}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^m + \|\lambda\|\zeta}{s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2} \right) \right\} \\ \text{hfdsin}(t, \lambda, m) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda\|^2}{s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \quad \text{et} \quad \text{hfdcos}(t, \lambda, m) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^m + \|\lambda\|\zeta}{s^{2m} + 2\zeta\|\lambda\|s^m + \|\lambda\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Les exemples seront considérés selon le type des pôles complexes et de la plage de la dérivée fractionnaire m . Dans ce qui suit les pôles considérées sont données par :

$$\lambda_{01} = (5j) \quad \text{et} \quad \lambda_{02} = (-5j) \quad , \quad \lambda_3 = (-1+2j) \quad \text{et} \quad \lambda_4 = (-1-2j).$$

II.3.3.1. Cas 1 : $m = 0.23$ ($0 < m < 0.5$)

A partir des équations (II.33), (II.42), (II.43), (II.44), (II.91), (II.92), (II.94) et (II.95), les fonctions fondamentales $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.23)$, $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.23)$, $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.23)$ et $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.23)$ peuvent être facilement obtenues comme suit :

$$\diamond \text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.23) \quad \text{et} \quad \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.23)$$

$$f_{\sin}(t, \lambda_{01}, 0.23) = L^{-1} \left\{ \frac{25}{[s^{0.46} + 25]} \right\} \cong L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \frac{k_{1i}}{(s + p_{1i})} \right\} = \sum_{i=1}^{N_1} k_{1i} \exp(-p_{1i}t)$$

$$hf_{\sin}(t, \lambda_{01}, 0.23) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{25}{[s^{0.46} + 25]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \cong L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{k_{1i}}{(s + p_{1i})} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N_1} k_{1i} [1 - \exp(-p_{1i}t)]$$

avec $\|\lambda_{01}\| = 5$, $N_1 = 15$, pour $1 \leq i \leq 29$, les pôles p_{1i} et leurs résidus correspondants k_{1i} sont donnés comme :

$$p_{1i} = (1.09 * 10^3) * (3)^{(i-15)} \quad , \quad k_{1i} = \frac{(1.09 * 10^3)(3)^{(i-15)}}{2\pi} \left[\frac{\sin[0.54\pi]}{\cosh[0.46 \log((3)^{(15-i)})] - \cos[0.54\pi]} \right]$$

❖ $f_{\cos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$ et $hf_{\cos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$

$$f_{\cos}(t, \lambda_{01}, 0.23) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^{0.23}}{[s^{0.46} + 25]} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{(s + p_{2i})} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} \exp(-p_{2i}t)$$

$$hf_{\cos}(t, \lambda_{01}, 0.23) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^{0.23}}{[s^{0.46} + 25]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{(s + p_{2i})} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} [1 - \exp(-p_{2i}t)]$$

avec $\|\lambda_{01}\| = 5$, $N_{21} = 37$ et $N_{22} = 29$, les pôles p_{2i} et leurs correspondants résidus k_{2i} sont donnés comme suit:

- pour $1 \leq i \leq N_{21} + 1 = 38$

$$p_{2i} = (2.23 * 10^{-11}) * (3.67)^{(i-1)} \quad ,$$

$$k_{2i} = \frac{(2.93 * 10^{-12})}{2\pi} \sum_{\ell=1}^{29} \left\{ \left[\frac{(3.67)^i (3)^{(\ell-15)} \prod_{j=1}^{38} (1 - (1.35)(3.67)^{(i-j)})}{[(1.09 * 10^3)(3)^{(\ell-15)} - (2.23 * 10^{-11})(3.67)^{(i)}] \prod_{j=1, i \neq j}^{38} (1 - (3.67)^{(i-j)})} \right] \times \left[\frac{\sin[(0.54)\pi]}{\cosh[(0.46)\log((3)^{(15-\ell)})] - \cos[(0.54)\pi]} \right] \right\}$$

- pour $N_{21} + 2 = 39 \leq i \leq N_{21} + N_{22} + 1 = 67$

$$p_{2i} = (1.09 * 10^3) * (3)^{(i-54)} \quad ,$$

$$k_{2i} = \left[\frac{(0.13)(3)^{(j-54)}}{2\pi} \left(\frac{\sin[(0.54)\pi]}{\cosh[(0.46)\log((3)^{(54-i)})] - \cos[(0.54)\pi]} \right) \right] + \sum_{i=1}^{39} \left\{ \left[\frac{-(141.21)(3)^{2(j-54)} \prod_{j=1}^{39} (1 - (1.35)(3.67)^{(\ell-j)})}{2\pi [(1.09 * 10^3)(3)^{(i-54)} - (2.23 * 10^{-11})(3.67)^{\ell-1}] \prod_{j=1, \ell \neq j}^{39} (1 - (3.67)^{(\ell-j)})} \right] \times \left[\frac{\sin[(0.54)\pi]}{\cosh[(0.46)\log((3)^{(54-i)})] - \cos[(0.54)\pi]} \right] \right\}$$

❖ $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.23)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.23)$

$$\begin{aligned} \text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.23) &= L^{-1} \left\{ \frac{5}{[s^{0.46} + (4.47)\zeta s^{0.23} + 5]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{a_{3i}s + \sqrt{1-\zeta^2}}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_3} \omega_i k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin(\omega_i(\sqrt{1-\beta^2})t - (3.35)\varphi_3) \\ \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.23) &= L^{-1} \left\{ \frac{5}{s[s^{0.46} + (4.47)\zeta s^{0.23} + 5]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + a_{3i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[1 - C_3 \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin(\omega_i(\sqrt{1-\beta^2})t + \varphi_3) \right] \end{aligned}$$

❖ $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.23)$ et $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.23)$

$$\begin{aligned} \text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.23) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{0.23} + (2.24)\zeta}{[s^{0.46} + (4.47)\zeta s^{0.23} + 5]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{a_{4i}s + \zeta}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_4} \omega_i k_{4i} \exp(-\beta\omega_i t) \cos(\omega_i(\sqrt{1-\beta^2})t - (3.35)\varphi_3) \\ \text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.23) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{0.23} + (2.24)\zeta}{s[s^{0.46} + (4.47)\zeta s^{0.23} + 5]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{\zeta + a_{4i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[\frac{\zeta}{2.24} - C_4 \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \exp(-\beta\omega_i t) \cos(\omega_i(\sqrt{1-\beta^2})t + \varphi_3) \right] \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_3\| = 2.24$, $\zeta = 0.97$, $\beta = 0.48$, $C_3 = 4.11$, $C_4 = 0.45$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0.25$, $N_3 = N_4 = 821$ et les paramètres ω_i , a_{3i} , a_{4i} et $k_{3i} = k_{4i}$ sont donnés, pour $1 \leq i \leq 821$, comme :

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{1}{(0.03) * (1.10)^{(411-i)}}, \quad a_{3i} = (-0.02) * (1.10)^{(411-i)}, \quad a_{4i} = (0.021) * (1.10)^{(411-i)}, \\ k_{3i} = k_{4i} &= \frac{1}{(0.002) * (1.10)^{2(411-i)}} \left[\frac{\sin[0.77\pi]}{\cosh[(0.23)\log((1.10)^{(411-i)})] - \cos[0.77\pi]} \right] \end{aligned}$$

Figures (II.5) et (II.6) montrent les tracés des fonctions $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.23)$, $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.23)$, $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.23)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.23)$.

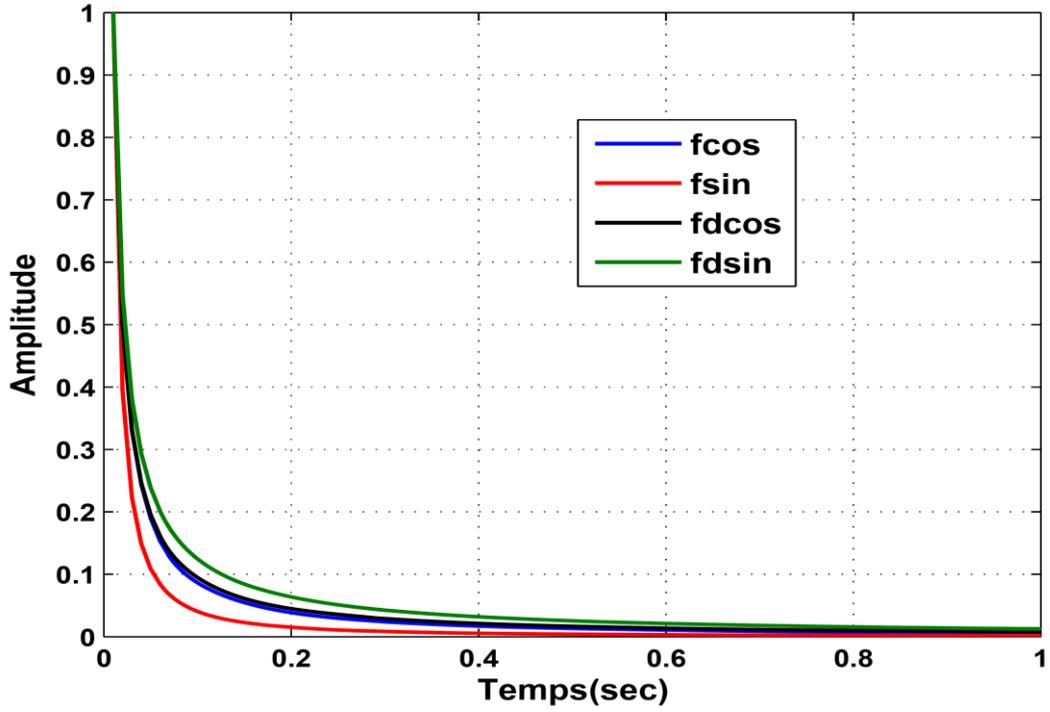


Figure (II.5) : Tracé des fonctions $f_{\cos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $f_{\sin}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $f_{dcos}(t, \lambda_3, 0.23)$ et $f_{dsin}(t, \lambda_3, 0.23)$.

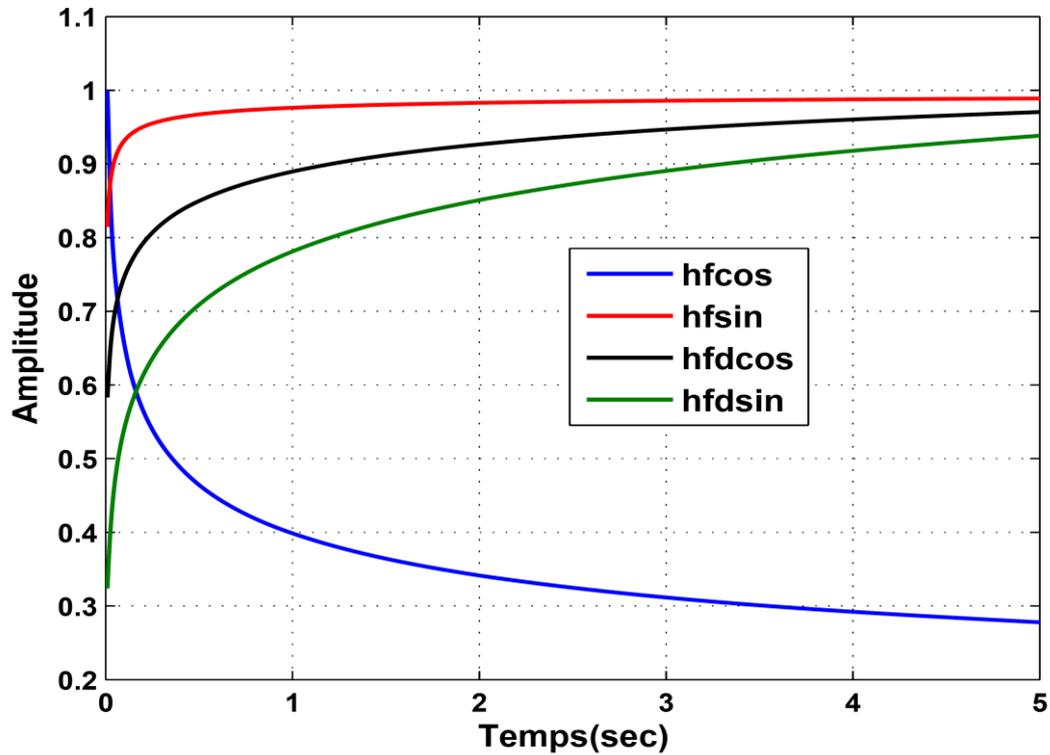


Figure (II.6) : Tracés des fonctions $h_{f\cos}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $h_{f\sin}(t, \lambda_{01}, 0.23)$, $h_{fdcos}(t, \lambda_3, 0.23)$ et $h_{fdsin}(t, \lambda_3, 0.23)$.

II.3.3.2. Cas 2 : m = 0.5

A partir des équations (II.46), (II.49), (II.50), (II.51), (II.91), (II.92), (II.94) et (II.95), les fonctions fondamentales $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$, $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$, $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$ sont données comme suit :

❖ $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$ et $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$

$$\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.5) = L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda_{01}\|^2}{[s + \|\lambda_{01}\|^2]} \right\} = \|\lambda_{01}\|^2 \exp(-\|\lambda_{01}\|^2 t)$$

$$\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda_{01}\|^2}{s + \|\lambda_{01}\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = [1 - \exp(-\|\lambda_{01}\|^2 t)]$$

❖ $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$ et $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$

$$\begin{aligned} \text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.5) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{0.5}}{[s + \|\lambda_{01}\|^2]} \right\} \cong L^{-1} \left\{ \left(\frac{k_{20}}{s + \|\lambda_{01}\|^2} \right) + \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right) \right\} \\ &= k_{20} \exp(-\|\lambda_{01}\|^2 t) + \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} \exp(-p_{2i} t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^{0.5}}{s + \|\lambda_{01}\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \left(\frac{k_{20}}{s + \|\lambda_{01}\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) + \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{k_{20}}{\|\lambda_{01}\|^2} \right) [1 - \exp(-\|\lambda_{01}\|^2 t)] + \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} [1 - \exp(-p_{2i} t)] \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_{01}\| = 5$, $N_2 = 41$, $k_{20} = -24.20$ et pour $1 < i < 41$, les pôles p_{2i} et leurs résidus correspondants k_{2i} sont donnés par :

$$p_{2i} = (1.99 * 10^{-8}) (2.52)^{(i-1)}, \quad k_{2i} = \frac{-(19.80 * 10^{-20}) (2.52)^{2(i-1)} \prod_{j=1}^{41} (1 - (1.58) (2.52)^{(i-j)})}{[(1.99 * 10^{-8}) (2.52)^{(i-1)} - 25] \prod_{j=1, j \neq i}^{41} (1 - (2.52)^{(i-j)})}$$

❖ $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$

$$\begin{aligned} \text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.5) &= L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda_3\|^2}{[s + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.5} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{a_{3i}s + \sqrt{1-\zeta^2}}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_3} \omega_i k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2}) t - \varphi_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5) &= L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda_3\|^2}{s[s + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.5} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + a_{3i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[1 - C_3 \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2}) t + \varphi_3) \right] \end{aligned}$$

❖ $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$

$$\begin{aligned} \text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.5) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{0.5} + \|\lambda_3\| \zeta}{[s + 2\zeta \|\lambda_3\| s^{0.5} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{a_{4i} s + \zeta}{s^2 + 2\beta \omega_i s + \omega_i^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_3} \omega_i k_{4i} \exp(-\beta \omega_i t) \cos(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2}) t - \varphi_4) \\ \text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{0.5} + \|\lambda_3\| \zeta}{s[s + 2\zeta \|\lambda_3\| s^{0.5} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{\zeta + a_{4i} s}{s^2 + 2\beta \omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[\frac{\zeta}{\|\lambda_3\|} - C_4 \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \exp(-\beta \omega_i t) \cos(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2}) t + \varphi_4) \right] \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_3\| = 2.24$, $\zeta = 0.91$, $\beta = 0.66$, $C_3 = 2.41$, $C_4 = 0.45$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0.43$, $N_3 = N_4 = 725$ et pour $1 \leq i \leq 725$, les paramètres ω_i , a_{3i} , a_{4i} et $k_{3i} = k_{4i}$ sont donnés comme :

$$\omega_i = \frac{1}{(0.2) * (1.10)^{(363-i)}}, \quad a_{3i} = (-0.08) * (1.10)^{(363-i)}, \quad a_{4i} = 0.18 * (1.10)^{(363-i)},$$

$$k_{3i} = \frac{1}{(0.56) * (1.10)^{2(363-i)}} \left[\frac{\sin[0.5\pi]}{\cosh[0.5 \log((1.10)^{(363-i)})] - \cos[0.5\pi]} \right]$$

Figure (II.7) et (II.8) montrent les tracés des fonctions $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$, $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$, $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$.

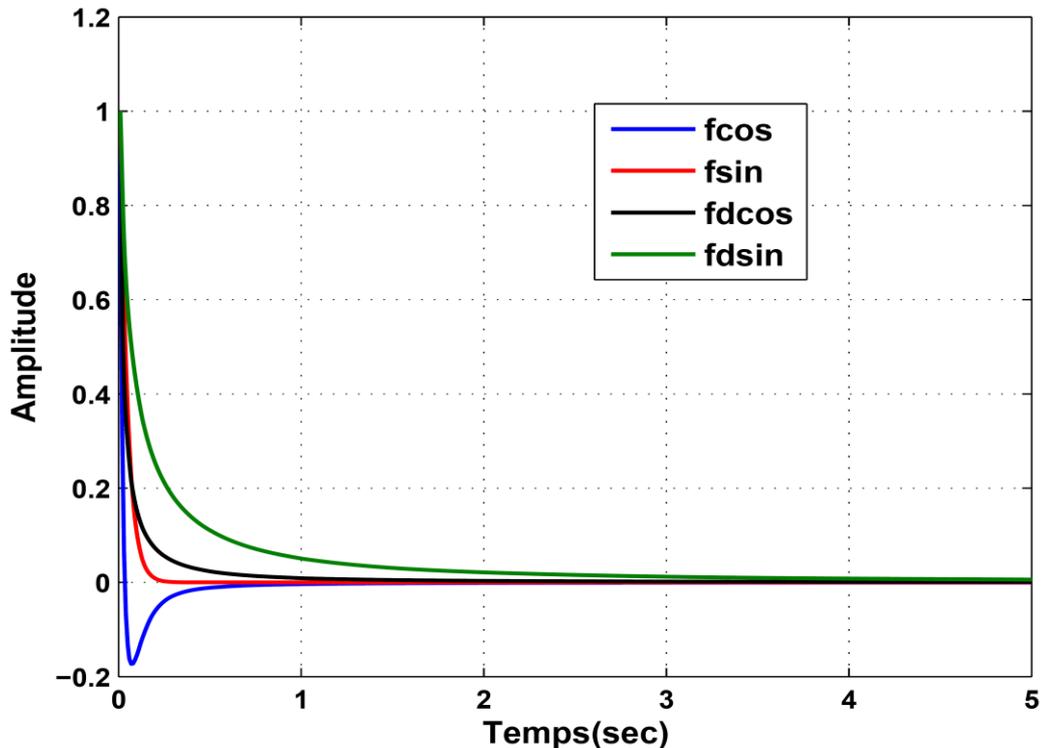


Figure (II.7) : Tracés des fonctions $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$

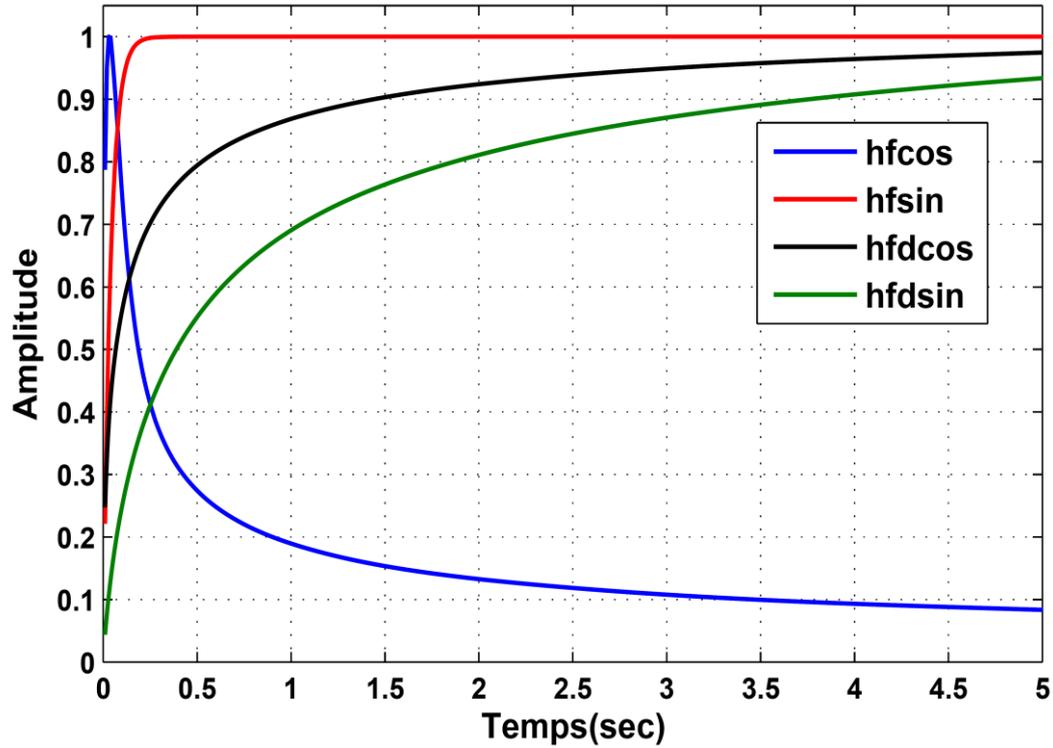


Figure (II.8) : Tracés des fonctions $hfcos(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $hfsin(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $hfdcos(t, \lambda_3, 0.5)$ et $hfdsin(t, \lambda_3, 0.5)$

II.3.3.3. Cas 3 : $m = 0.92$ ($0.5 < m < 1$)

Pour $m = 0.92$, à partir des équations (II.56), (II.58), (II.77), (II.79), (II.91), (II.92), (II.94) et (II.95), les fonctions fondamentales $fsin(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $hfsin(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $fcos(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $hfcos(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $fdsin(t, \lambda_3, 0.92)$, $hfdsin(t, \lambda_3, 0.92)$, $fdcos(t, \lambda_3, 0.92)$ et $hfdcos(t, \lambda_3, 0.92)$ peuvent être facilement obtenues par les expressions suivantes:

❖ $fsin(t, \lambda_{01}, 0.92)$ et $hfsin(t, \lambda_{01}, 0.92)$

$$\begin{aligned}
 fsin(t, \lambda_{01}, 0.92) &= L^{-1} \left\{ \frac{25}{[s^{1.84} + 25]} \right\} = L^{-1} \left\{ \left[\frac{A_1 s + B_1}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda\|^{\frac{1}{m}} \right\} s + \left\{ \|\lambda\|^{\frac{2}{m}} \right\}} \right] + \left[\sum_{i=1}^{N_1} \frac{k_{li}}{s + p_{li}} \right] \right\} \\
 &= C_1 \exp \left(-\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{\frac{1}{0.92}} \right\} t \right) \sin \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \left\{ \|\lambda_{01}\|^{\frac{1}{0.92}} \right\} t + \Phi_1 \right) + \sum_{i=1}^{N_1} k_{li} \exp(-p_{li} t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.92) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{25}{[s^{1.84} + 25]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\
&\cong L^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{A_1 s + B_1}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{1/0.92} \right\} s + \left\{ \|\lambda_{01}\|^{2/0.92} \right\}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right] + \left[\sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{k_{1i}}{s + p_{1i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right] \right\} \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{N_1} k_{1i} \exp(-p_{1i} t) + C_{11} \exp\left(-\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{1/0.92} \right\} t\right) \sin\left(\sqrt{1-\alpha^2} \left\{ \|\lambda_{01}\|^{1/0.92} \right\} t + \Phi_{11}\right)
\end{aligned}$$

avec $\|\lambda_{01}\| = 5$, $C_1 = 6$, $\alpha = 0.14$, $\Phi_1 = 0.14$, $C_{11} = 1.04$, $\Phi_{11} = 1.57$, $N_1 = 10$ et pour $1 \leq i \leq 10$, les pôles p_{1i} et les résidus k_{1i} sont donnés comme :

$$\begin{aligned}
p_{1i} &= (14.04) * ((4.66)^{(i-1)}) \\
k_{1i} &= \left[\frac{(14.04) * ((4.66)^{(i-1)})}{(5.96) * ((4.66)^{(i-1)})^2 - ((0.68) * (4.66)^{(i-1)}) + 1} \right] \frac{\prod_{j=1}^{10} (1 - (1.28)(4.66)^{(i-j)})}{\prod_{j=1, i \neq j}^{10} (1 - (4.66)^{(i-j)})}
\end{aligned}$$

❖ $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.92)$ et $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.92)$

$$\begin{aligned}
\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.92) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{0.92}}{[s^{1.84} + 25]} \right\} = L^{-1} \left\{ \left[\frac{A_2 s + B_2}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{1/0.92} \right\} s + \left\{ \|\lambda_{01}\|^{2/0.92} \right\}} \right] + \left[\sum_{i=1}^{N_2} \frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right] \right\} \\
&= C_2 \exp\left(-\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{1/0.92} \right\} t\right) \cos\left(\sqrt{1-\alpha^2} \left\{ \|\lambda_{01}\|^{1/0.92} \right\} t + \Phi_2\right) + \sum_{i=1}^{N_2} k_{2i} \exp(-p_{2i} t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.92) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^{0.92}}{[s^{1.84} + 25]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{A_2 s + B_2}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{1/0.92} \right\} s + \left\{ \|\lambda_{01}\|^{2/0.92} \right\}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right] + \left[\sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{K_D}{\|\lambda_{01}\|^2} - \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{p_{2i}} \right) \exp(-p_{2i} t) + C_{21} \exp\left(-\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{1/0.92} \right\} t\right) \sin\left(\sqrt{1-\alpha^2} \left\{ \|\lambda_{01}\|^{1/0.92} \right\} t + \Phi_{21}\right)
\end{aligned}$$

avec $\|\lambda_{01}\| = 5$, $K_D = 1.05 * 10^{-6}$, $C_2 = 6.5$, $\Phi_2 = 0.16$, $\alpha = 0.14$, $C_{21} = -0.23$, $\Phi_{21} = 0.015$, $N_2 = 10$ et, pour $1 \leq i \leq 10$, les pôles p_{2i} et les résidus k_{2i} sont donnés comme :

$$p_{2i} = 4.69 * 10^{-6} * (16.6)^{(i-1)}$$

$$k_{2i} = \left[\frac{(9.8 * 10^{-13}) * (16.6)^{(i-1)} * (1 - ((8.16 * 10^{-7}) * (16.6)^{(i-1)}))}{((8.16 * 10^{-7}) * (16.6)^{(i-1)})^2 - (2.28 * 10^{-7}) * (16.6)^{(i-1)} + 1} \right] \times \left[\frac{\prod_{i1=1}^6 (1 - 13.26 * (16.6)^{(i-i1)}) \prod_{i2=1}^3 (1 - 1.25 * (16.6)^{(i-i2-7)})}{\prod_{j=1, j \neq i}^{10} (1 - (16.6)^{(i-j)})} \right]$$

❖ $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.92)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.92)$

$$\begin{aligned} \text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.92) &= L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda_3\|^2}{[s^{1.84} + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.92} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{a_{3i}s + \sqrt{1-\zeta^2}}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_3} \omega_i k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin \left(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2}) t + \left(\frac{m-1}{m} \right) \varphi_3 \right) \\ \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.92) &= L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda_3\|^2}{s[s^{1.84} + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.92} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + a_{3i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[1 - C_3 \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin \left(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2}) t + \varphi_3 \right) \right] \end{aligned}$$

❖ $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.92)$ et $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.92)$

$$\begin{aligned} \text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.92) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{0.92} + \|\lambda_3\|\zeta}{[s^{1.84} + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.92} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{a_{4i}s + \zeta}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_4} \omega_i k_{4i} \exp(-\beta\omega_i t) \cos \left(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2}) t + \left(\frac{m-1}{m} \right) \varphi_4 \right) \\ \text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.92) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{0.92} + \|\lambda_3\|\zeta}{s[s^{1.84} + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.92} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{\zeta + a_{4i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[\frac{\zeta}{\|\lambda_3\|} - C_4 \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \exp(-\beta\omega_i t) \cos \left(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2}) t + \varphi_4 \right) \right] \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_3\| = 2.24$, $\zeta = 0.3$, $\beta = 0.19$, $C_3 = 1.05$, $C_4 = 0.45$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 1.27$, $N_3 = N_4 = 417$ et, pour $1 \leq i \leq 417$, les paramètres ω_i , a_{3i} , a_{4i} et $k_{3i} = k_{4i}$ sont donnés comme :

$$\omega_i = (2.40) * (1.10)^{(i-209)} \quad , \quad a_{3i} = (-0.05) * (1.10)^{(209-i)} \quad , \quad a_{4i} = (0.42) * (1.10)^{(209-i)}$$

$$k_{3i} = k_{4i} = (80.93) * (1.10)^{2(209-i)} \left[\frac{\sin[0.08\pi]}{\cosh[0.92 \log((1.10)^{(209-i)})] - \cos[0.08\pi]} \right]$$

Figure (II.9) et (II.10) montrent les tracés des fonctions $\text{fcos}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $\text{fsin}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $\text{fdcos}(t, \lambda_3, 0.92)$, $\text{fdsin}(t, \lambda_3, 0.92)$, $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.92)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.92)$.

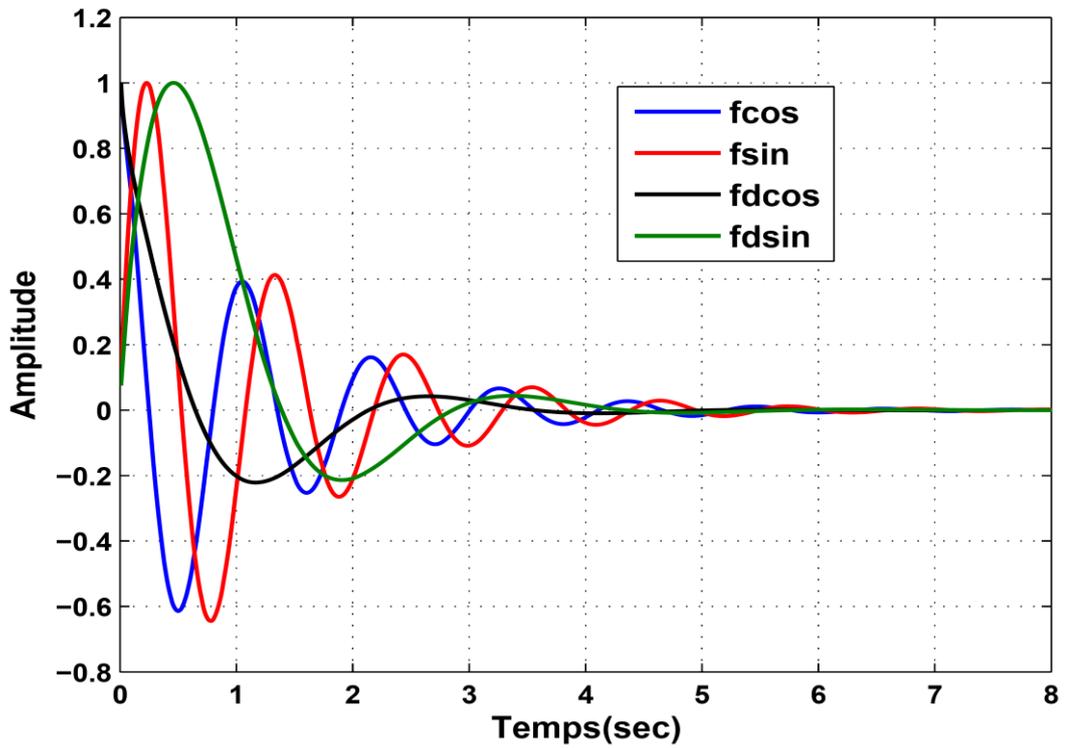


Figure (II.9) : Tracés des fonctions $f_{\cos}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $f_{\sin}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $f_{dcos}(t, \lambda_3, 0.92)$ et $f_{dsin}(t, \lambda_3, 0.92)$.

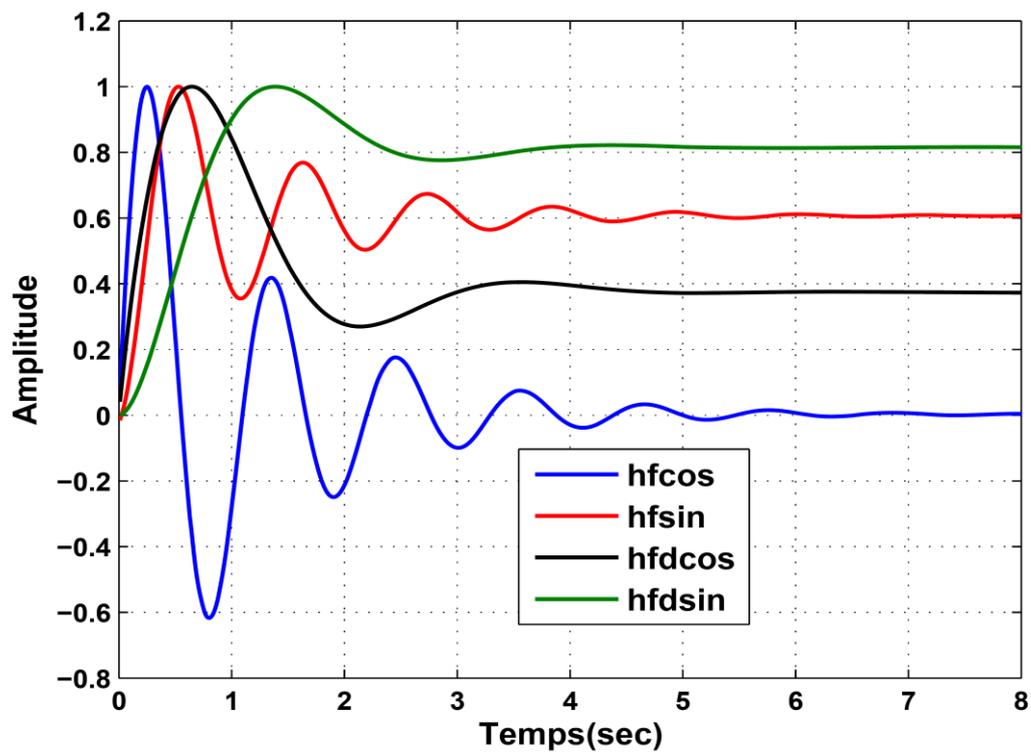


Figure (II.10) : Tracés des fonctions $h_{f_{\cos}}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $h_{f_{\sin}}(t, \lambda_{01}, 0.92)$, $h_{f_{dcos}}(t, \lambda_3, 0.92)$ et $h_{f_{dsin}}(t, \lambda_3, 0.92)$.

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre, on a introduit des fonctions fondamentales fractionnaires qui sont des fonctions irrationnelles et qui seront utilisées dans la résolution de l'équation d'état d'ordre fractionnaire. Puis on a présenté des méthodes d'approximation par des fonctions rationnelles de ces fonctions irrationnelles obtenues à partir d'une fonction de transfert d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable pour différents pôles réels ou complexes et l'ordre commensurable.

Ensuite, les réponses impulsionnelles et indicielles de ce type de fonctions fondamentales fractionnaires ont été obtenues à partir de fonctions rationnelles les approximant. Finalement, des exemples illustratifs ont été présentés pour montrer l'exactitude et l'utilité des fonctions fondamentales et des méthodes d'approximation.

Chapitre

3

*Résolution de l'Equation
d'Etat Linéaire
Fractionnaire d'Ordre
Commensurable avec
Valeurs Propres Réelles*

Chapitre III

Résolution de l'équation d'état linéaire fractionnaire d'ordre commensurable avec valeurs propres réelles

III.1 Introduction

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont représentés par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaires. La résolution de ces équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire a fait l'objet de nombreux travaux [15, 24, 42, 46, 48-49, 50-53]. En dépit de la recherche de leur solutions était beaucoup impliqué au cours des dernières décennies, les solutions exactes ne peuvent être trouvées. Ainsi, l'approximation et les techniques numériques ont été utilisées intensivement. En plus, certaines tentatives ont été faites pour créer un cadre formel pour leur étude, mais sans la généralité, la cohérence et l'utilité recherchées des résultats finaux.

Une représentation utile des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire est la représentation par l'équation d'état linéaire d'ordre fractionnaire [10]. Pour les systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable, la représentation d'état est définie comme suit [10] :

$$D^m x(t) = A x(t) + B e(t) \quad (\text{III.1})$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état d'ordre N , $D^m x(t)$ est la dérivée d'ordre fractionnaire m de Caputo tel que $0 < m < 1$, $e(t)$ est la variable d'entrée, la matrice A de dimension $(N \times N)$ est la matrice d'état et la matrice B de dimension $(N \times 1)$ est la matrice d'entrée

Dans ce chapitre, nous présentons la solution analytique de l'équation d'état linéaire fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (III.1) pour le cas où les valeurs propres de la matrice d'état A sont tous réelles simples et/ou multiples. La solution des cas homogène et non homogène est obtenue en utilisant une technique basée sur le théorème de Cayley-Hamilton. Les idées de base et les formulations mathématiques de la technique de résolution sont présentées où la solution générale est exprimée par la combinaison linéaire des fonctions fondamentales présentées dans le chapitre II. Les résultats présentés sont illustrés par quelques exemples pour démontrer l'efficacité de la technique de résolution présentée.

III.2 Solution de l'équation d'état linéaire fractionnaire d'ordre commensurable

III.2.1 Théorème de Cayley-Hamilton [54]

Soit A une matrice de dimension $(N \times N)$ dont le polynôme caractéristique est donné comme suit:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (\text{III. 2})$$

Théorème :

Chaque matrice satisfait sa propre équation caractéristique, c'est à dire que:

$$\Delta(A) = A^N + a_{N-1}A^{N-1} + \dots + a_1A + a_0I = [0] \quad (\text{III. 3})$$

III.2.2 Calcul de fonctions de matrices carrées [54]

Soit $P(\lambda)$ une fonction et soit A une matrice de dimension $(N \times N)$ dont les valeurs propres λ_i ($i=1, 2, \dots, N$) sont des nombres réelles distinctes ou multiples. La représentation en série de puissance de $P(\lambda)$ est donnée par l'expression :

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k \lambda^k \quad (\text{III. 4})$$

Si on divise la fonction $P(\lambda)$ par le polynôme caractéristiques $\Delta(\lambda)$ on aura :

$$P(\lambda) = \Delta(\lambda) \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \lambda^k \right] + R(\lambda) \quad (\text{III. 5})$$

Comme le degré de $\Delta(\lambda)$ est N , la fonction reste $R(\lambda)$ a un degré $\leq (N-1)$, alors on aura:

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \dots + \alpha_{N-1}\lambda^{N-1} \quad (\text{III. 6})$$

Pour $\lambda = \lambda_i$ ($i=1, 2, \dots, N$), on a $\Delta(\lambda_i) = 0$. Donc, à partir des équations (III. 5) et (III. 6), on aura :

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + \alpha_2\lambda_i^2 + \dots + \alpha_{N-1}\lambda_i^{N-1} \quad (\text{III. 7})$$

Du théorème de Cayley-Hamilton on a $\Delta(A) = 0$, alors la fonction matricielle $P(A)$ sera donnée à partir de l'équation (III.7) comme suit :

$$P(A) = R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{N-1} A^{N-1} \quad (\text{III.8})$$

Alors, pour calculer $P(A)$ il faut avoir les coefficients $\alpha_j(s)$ ($j=0, 1, \dots, (N-1)$).

Si les N valeurs propres λ_i ($i=1, 2, \dots, N$) de la matrice A sont distincts, les N coefficients $\alpha_j(s)$ ($j=0, 1, \dots, (N-1)$) peuvent être calculés en utilisant les N équations suivants:

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + \alpha_2\lambda_i^2 + \dots + \alpha_{N-1}\lambda_i^{N-1}, \quad (\text{pour } i = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{III. 9})$$

Quand une valeur propre λ_i est multiple, les équations $R(\lambda_i)$ seront répétées, ainsi elles ne forment pas un ensemble de N équations linéairement indépendantes. Donc, pour une valeur propre λ_i avec une multiplicité algébrique m_i , les premiers (m_i-1) dérivés de $P(\lambda)=R(\lambda)$ de l'équation (III. 7) au point λ_i données comme suit :

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i), \quad \left. \frac{dP(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{dR(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i}, \dots, \left. \frac{d^{(m_i-1)}P(\lambda)}{d\lambda^{(m_i-1)}} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^{(m_i-1)}R(\lambda)}{d\lambda^{(m_i-1)}} \right|_{\lambda=\lambda_i} \quad (\text{III. 10})$$

peuvent être utilisées pour former un ensemble de m_i équations linéairement indépendantes.

Donc, un ensemble complet de N équations est toujours disponible pour trouver les N coefficients $\alpha_j(s)$ ($j=0, 1, \dots, (N-1)$) qui seront utilisés pour le calcul de la fonction $P(A)=R(A)$.

III.2.3 Solution

Les systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable sont représentés par l'équation d'état suivante [10] :

$$D^m x(t) = A x(t) + B e(t) \quad (\text{III. 11})$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état d'ordre N , $D^m x(t)$ est la dérivée d'ordre fractionnaire m de Caputo tel que $0 < m < 1$, $x(t)$, $e(t)$ est la variable d'entrée, la matrice A de dimension $(N \times N)$ est la matrice d'état dont les valeurs propres λ_i ($i=1, 2, \dots, N$) sont réels distincts et/ou multiple et la matrice B de dimension $(N \times 1)$ est la matrice d'entrée. En prenant la transformée de Laplace de l'équation (III. 11), on obtient :

$$X(s) = (s^m I - A)^{-1} [s^{(m-1)} x(0)] + (s^m I - A)^{-1} B E(s) \quad (\text{III. 12})$$

où $x(0)$ est l'état initial. L'expression du vecteur d'état $x(t)$ est déterminée en prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation (III. 12) comme suit:

$$x(t) = L^{-1} \{X(s)\} = L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m I - A)^{-1} \right\} x(0) + L^{-1} \left\{ (s^m I - A)^{-1} \right\} * B e(t) \quad (\text{III. 13})$$

On peut facilement voir que trouver la fonction de matrice $(s^m I - A)^{-1}$ de dimension $(N \times N)$ mène à la solution de l'équation d'état d'ordre fractionnaire de l'équation (III. 11).

Dans ce cas, les valeurs propres λ_i ($i=1, 2, \dots, N$) de la matrice d'état A sont considérés comme réelles distinctes et/ou multiples. De la section III.2.2, la fonction $P(A) = (s^m I - A)^{-1}$ de la matrice carrée A est donnée comme suit:

$$P(A) = (s^m I - A)^{-1} = \alpha_0(s)I + \alpha_1(s)A + \dots + \alpha_{N-1}(s)A^{N-1} = \sum_{p=0}^{N-1} \alpha_p(s)A^p \quad (\text{III. 14})$$

Les N coefficients $\alpha_j(s)$ ($j=0, 1 \dots N-1$) peuvent être facilement calculés selon les valeurs propres de la matrice A .

III.2.3.1 Cas des valeurs propres réelles et distinctes

Si les valeurs propres λ_i ($i=1, 2, \dots, N$) de la matrice A sont tous réelles et distinctes, les fonctions $\alpha_j(s)$ ($j=0, 1, \dots, (N-1)$) peuvent être calculées en utilisant l'équation (III.7) comme suit :

$$P(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_i} = (s^m - \lambda)^{-1} \Big|_{\lambda=\lambda_i} = \left\{ \sum_{j=0}^{(N-1)} \alpha_j(s) \lambda^j \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_i}, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{III. 15})$$

L'équation ci-dessus peut être réécrite sous forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} (s^m - \lambda_1)^{-1} \\ (s^m - \lambda_2)^{-1} \\ \vdots \\ (s^m - \lambda_N)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \lambda_N^2 & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{(N-1)}(s) \end{bmatrix} = V_1 \begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{(N-1)}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 16})$$

La matrice V_1 est non singulière, par conséquent les N coefficients $\alpha_j(s)$ ($j=0, 1, \dots, (N-1)$) sont obtenus à partir de l'équation (III. 16) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{(N-1)}(s) \end{bmatrix} = V_1^{-1} \begin{bmatrix} (s^m - \lambda_1)^{-1} \\ (s^m - \lambda_2)^{-1} \\ \vdots \\ (s^m - \lambda_N)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \cdots & \gamma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s^m - \lambda_1)^{-1} \\ (s^m - \lambda_2)^{-1} \\ \vdots \\ (s^m - \lambda_N)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 17})$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{(N-1)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \gamma_{1i} (s^m - \lambda_i)^{-1} \\ \sum_{i=1}^N \gamma_{2i} (s^m - \lambda_i)^{-1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \gamma_{Ni} (s^m - \lambda_i)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 18})$$

La fonction matricielle $P(A) = (s^m I - A)^{-1}$ de dimension $(N \times N)$ de l'équation (III.14) est alors obtenue comme suit :

$$(s^m I - A)^{-1} = \sum_{p=0}^{N-1} \alpha_p(s) A^p = \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \gamma_{(p+1)i} (s^m - \lambda_i)^{-1} \right\} A^p \quad (\text{III. 19})$$

Alors, la solution $x(t)$ de l'équation d'état d'ordre fractionnaire de l'équation (III.13) est donnée par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} x(t) = L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \gamma_{(p+1)i} (s^m - \lambda_i)^{-1} \right\} A^p \right\} x(0) + \\ L^{-1} \left\{ \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \gamma_{(p+1)i} (s^m - \lambda_i)^{-1} \right\} A^p \right\} * Be(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 20})$$

$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \gamma_{(p+1)i} L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m - \lambda_i)^{-1} \right\} \right\} A^p x(0) + \\ \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \gamma_{(p+1)i} L^{-1} \left\{ (s^m - \lambda_i)^{-1} \right\} \right\} A^p * Be(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 21})$$

La fonction $L^{-1}\left\{(s^m - \lambda_i)^{-1}\right\}$ est la fonction exponentielle généralisée $\text{gexp}_1(t, \lambda_i, m)$ de l'équation (II.13). La fonction $s^{(m-1)}(s^m - \lambda_i)^{-1}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{s^{(m-1)}}{(s^m - \lambda_i)} = \frac{s^m}{s(s^m - \lambda_i)} = \frac{1}{s} \left[\frac{s^m - \lambda_i + \lambda_i}{(s^m - \lambda_i)} \right] = \frac{1}{s} \left[1 + \frac{\lambda_i}{(s^m - \lambda_i)} \right] = \frac{1}{s} + \frac{\lambda_i}{s(s^m - \lambda_i)} \quad (\text{III. 22})$$

Alors, la fonction $L^{-1}\left\{s^{(m-1)}(s^m - \lambda_i)^{-1}\right\}$ est obtenue comme suit :

$$L^{-1}\left\{s^{(m-1)}(s^m - \lambda_i)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{\lambda_i}{s(s^m - \lambda_i)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \lambda_i L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^m - \lambda_i)}\right\} \quad (\text{III. 23})$$

La fonction $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^m - \lambda_i)}\right\}$ est la fonction $\text{hexp}_1(t, \lambda_i, m)$ de l'équation (II.22). Alors, on peut écrire que :

$$L^{-1}\left\{s^{(m-1)}(s^m - \lambda_i)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \lambda_i L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^m - \lambda_i)}\right\} = u(t) + \lambda_i \left\{ \text{hexp}_1(t, \lambda_i, m) \right\} \quad (\text{III. 24})$$

Donc, de l'équation (III. 21), la solution $x(t)$ est donnée par l'expression suivante :

$$x(t) = \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \gamma_{(p+1)i} \left\{ u(t) + \lambda_i \left[\text{hexp}_1(t, \lambda_i, m) \right] \right\} \right\} A^p x(0) + \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \gamma_{(p+1)i} \left\{ \text{gexp}_1(t, \lambda_i, m) \right\} \right\} A^p * B e(t) \quad (\text{III. 25})$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \left[u(t) + \lambda_i \left\{ \text{hexp}_1(t, \lambda_i, m) \right\} \right] \left\{ \sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p+1)i} A^p \right\} x(0) + \sum_{i=1}^N \left[\left\{ \text{gexp}_1(t, \lambda_i, m) \right\} * e(t) \right] \left\{ \sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p+1)i} A^p \right\} B \quad (\text{III. 26})$$

Soit, pour $i = 1, \dots, N$, $W_i = \left\{ \sum_{p=0}^{N-1} \gamma_{(p+1)i} A^p \right\}$ une matrice constante de dimension $(N \times N)$ dont les éléments w_{ijq} ($1 \leq j, q \leq N$) sont obtenus à partir des coefficients constants $\gamma_{(p+1)i}$ ($1 \leq (p+1) \leq N$) et des éléments des matrices A^p de dimension $(N \times N)$ ($p = 0, 1, \dots, (N-1)$). Donc, on aura :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \left[u(t) + \lambda_i \left\{ \text{hexp}_1(t, \lambda_i, m) \right\} \right] W_i x(0) + \sum_{i=1}^N \left[\left\{ \text{gexp}_1(t, \lambda_i, m) \right\} * e(t) \right] W_i B \quad (\text{III. 27})$$

Les composantes $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) du vecteur $x(t)$ sont alors données par:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \left\{ [u(t) + \lambda_i \{ \text{hexp}_1(t, \lambda_i, m) \}] \left[\sum_{q=1}^N x_q(0) w_{i1q} \right] \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ [\{ \text{gexp}_1(t, \lambda_i, m) \} * e(t)] \left[\sum_{q=1}^N b_q w_{i1q} \right] \right\} \\ \sum_{i=1}^N \left\{ [u(t) + \lambda_i \{ \text{hexp}_1(t, \lambda_i, m) \}] \left[\sum_{q=1}^N x_q(0) w_{i2q} \right] \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ [\{ \text{gexp}_1(t, \lambda_i, m) \} * e(t)] \left[\sum_{q=1}^N b_q w_{i2q} \right] \right\} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \left\{ [u(t) + \lambda_i \{ \text{hexp}_1(t, \lambda_i, m) \}] \left[\sum_{q=1}^N x_q(0) w_{iNq} \right] \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ [\{ \text{gexp}_1(t, \lambda_i, m) \} * e(t)] \left[\sum_{q=1}^N b_q w_{iNq} \right] \right\} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 28})$$

III.2.3.2 Cas des valeurs propres réelles et multiples

Si les valeurs propres λ_i ($i=1, 2, \dots, r$) de la matrice A sont réelles et multiples chacune avec une multiplicité m_i , respectivement, les coefficients $\alpha_j(s)$ ($j=0, 1, \dots, (N-1)$) peuvent être calculés en utilisant les N équations obtenues à partir de l'équation (III. 15) comme suit :

$$\left. \frac{d^k P(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^k (s^m - \lambda)^{-1}}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^k \left\{ \sum_{j=0}^{(N-1)} \alpha_j(s) \lambda^j \right\}}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i} \quad (\text{III.29})$$

pour $i = 1, 2, \dots, r$ et $k = 0, 1, \dots, (m_i-1)$ tel que $N = \sum_{i=1}^r m_i$. Donc, on obtient :

$$\left. \frac{d^k P(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left\{ k! (s^m - \lambda)^{-(k+1)} \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_i} = \left\{ \sum_{j=k}^{(N-1)} \frac{(j)!}{(j-k)!} \alpha_j(s) \lambda^{(j-k)} \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_i} \quad (\text{III.30})$$

L'équation ci-dessus peut être réécrite sous la forme matricielle par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} (s^m - \lambda_1)^{-1} \\ (s^m - \lambda_1)^{-2} \\ \vdots \\ (s^m - \lambda_1)^{-m_1} \\ \vdots \\ (s^m - \lambda_r)^{-1} \\ (s^m - \lambda_r)^{-2} \\ \vdots \\ (s^m - \lambda_r)^{-m_r} \end{array} \right\} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = V_2 \begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{(N-1)}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 31})$$

où la matrice V_2 est donnée comme suit :

$$V_2 = \left[\begin{array}{cccc}
\left. \begin{array}{l}
1 \quad \lambda_1 \quad \lambda_1^2 \quad \dots \quad \lambda_1^{(N-2)} \quad \lambda_1^{(N-1)} \\
0 \quad 1 \quad 2\lambda_1 \quad \dots \quad (N-2)\lambda_1^{(N-3)} \quad (N-1)\lambda_1^{(N-2)} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \frac{(N-2)!}{(m_1-2)!(N-m_1)!} \lambda_1^{(N-m_1)} \quad \frac{(N-1)!}{(m_1-2)!(N-m_1+1)!} \lambda_1^{(N-m_1+1)} \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \frac{(N-2)!}{(m_1-1)!(N-m_1-1)!} \lambda_1^{(N-m_1-1)} \quad \frac{(N-1)!}{(m_1-1)!(N-m_1)!} \lambda_1^{(N-m_1)}
\end{array} \right\} & & & \\
\vdots & & & \\
\left. \begin{array}{l}
1 \quad \lambda_r \quad \lambda_r^2 \quad \dots \quad \lambda_r^{(N-2)} \quad \lambda_r^{(N-1)} \\
0 \quad 1 \quad 2\lambda_r \quad \dots \quad (N-2)\lambda_r^{(N-3)} \quad (N-1)\lambda_r^{(N-2)} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \frac{(N-2)!}{(m_r-2)!(N-m_r)!} \lambda_r^{(N-m_r)} \quad \frac{(N-1)!}{(m_r-2)!(N-m_r+1)!} \lambda_r^{(N-m_r+1)} \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \frac{(N-2)!}{(m_r-1)!(N-m_r-1)!} \lambda_r^{(N-m_r-1)} \quad \frac{(N-1)!}{(m_r-1)!(N-m_r)!} \lambda_r^{(N-m_r)}
\end{array} \right\} & & & \\
& & & \end{array} \right]_{(m_1 \times N)} \quad (III.32)$$

La matrice V_2 est non singulière, par conséquent les N coefficients $\alpha_j(s)$ ($j=0, 1, \dots, (N-1)$) sont obtenus à partir de l'équation (III. 31) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{(N-1)}(s) \end{bmatrix} = V_2^{-1} \begin{bmatrix} \left((s^m - \lambda_1)^{-1} \right) \\ \left((s^m - \lambda_1)^{-2} \right) \\ \vdots \\ \left((s^m - \lambda_1)^{-m_1} \right) \\ \vdots \\ \left((s^m - \lambda_r)^{-1} \right) \\ \left((s^m - \lambda_r)^{-2} \right) \\ \vdots \\ \left((s^m - \lambda_r)^{-m_r} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & \dots & \delta_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left((s^m - \lambda_1)^{-1} \right) \\ \left((s^m - \lambda_1)^{-2} \right) \\ \vdots \\ \left((s^m - \lambda_1)^{-m_1} \right) \\ \vdots \\ \left((s^m - \lambda_r)^{-1} \right) \\ \left((s^m - \lambda_r)^{-2} \right) \\ \vdots \\ \left((s^m - \lambda_r)^{-m_r} \right) \end{bmatrix} \quad (III. 33)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(s) \\ \alpha_1(s) \\ \vdots \\ \alpha_{(N-1)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{1k} (s^m - \lambda_1)^{-k} + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{1(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} (s^m - \lambda_r)^{-k} \right\} \\ \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{2k} (s^m - \lambda_1)^{-k} + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{2(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} (s^m - \lambda_r)^{-k} \right\} \\ \vdots \\ \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{Nk} (s^m - \lambda_1)^{-k} + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{N(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} (s^m - \lambda_r)^{-k} \right\} \end{bmatrix} \quad (III. 34)$$

Alors, la fonction matricielle $P(A) = (s^m I - A)^{-1}$ de dimension $(N \times N)$ de l'équation (III.14) est obtenue comme suit :

$$(s^m I - A)^{-1} = \sum_{p=1}^N \alpha_{(p-1)}(s) A^{(p-1)} = \sum_{p=1}^N \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{pk} (s^m - \lambda_1)^{-k} + \dots \\ + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{p(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} (s^m - \lambda_r)^{-k} \end{array} \right\} A^{(p-1)} \quad (\text{III. 35})$$

Alors, dans ce cas aussi, la solution $x(t)$ de l'équation d'état d'ordre fractionnaire de l'équation (III. 13) est donnée par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} x(t) = & L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} \sum_{p=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{pk} (s^m - \lambda_1)^{-k} + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{p(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} (s^m - \lambda_r)^{-k} \right\} A^{(p-1)} \right\} x(0) \\ & + L^{-1} \left\{ \sum_{p=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{pk} (s^m - \lambda_1)^{-k} + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{p(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} (s^m - \lambda_r)^{-k} \right\} A^{(p-1)} \right\} * Be(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 36})$$

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{p=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{pk} L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m - \lambda_1)^{-k} \right\} + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{p(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m - \lambda_r)^{-k} \right\} \right\} A^{(p-1)} x(0) \\ & + \sum_{p=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{pk} L^{-1} \left\{ (s^m - \lambda_1)^{-k} \right\} + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{p(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} L^{-1} \left\{ (s^m - \lambda_r)^{-k} \right\} \right\} A^{(p-1)} * Be(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 37})$$

La fonction $L^{-1} \left\{ (s^m - \lambda_i)^{-k} \right\}$ est la fonction exponentielle généralisée $\text{gexp}_k(t, \lambda_i, m)$ de l'équation (II.17). La fonction $s^{(m-1)} (s^m - \lambda_i)^{-k}$ peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{s^{(m-1)}}{(s^m - \lambda_i)^k} &= \frac{s^m}{s(s^m - \lambda_i)^k} = \frac{1}{s} \left[\frac{s^m - \lambda_i + \lambda_i}{(s^m - \lambda_i)^k} \right] = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{(s^m - \lambda_i)^{(k-1)}} + \frac{\lambda_i}{(s^m - \lambda_i)^k} \right] \\ &= \frac{1}{s(s^m - \lambda_i)^{(k-1)}} + \frac{\lambda_i}{s(s^m - \lambda_i)^k} \end{aligned} \quad (\text{III. 38})$$

Alors, la fonction $L^{-1} \left\{ s^{(m-1)} (s^m - \lambda_i)^{-k} \right\}$ est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{s^{(m-1)}}{(s^m - \lambda_i)^k} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^m - \lambda_i)^{(k-1)}} + \frac{\lambda_i}{s(s^m - \lambda_i)^k} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^m - \lambda_i)^{(k-1)}} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{\lambda_i}{s(s^m - \lambda_i)^k} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III. 39})$$

La fonction $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^m - \lambda_i)^k} \right\}$ est la fonction $\text{hexp}_k(t, \lambda_i, m)$ de l'équation (II.22). Alors, on peut écrire que :

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^{(m-1)}}{(s^m - \lambda_i)^k} \right\} = \text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_i, m) + \lambda_i \{ \text{hexp}_k(t, \lambda_i, m) \} \quad (\text{III.40})$$

où $\text{hexp}_0(t, \lambda_i, m) = u(t) =$ l'échelon unité. Donc, de l'équation (III.37), la solution $x(t)$ est donnée par l'expression suivante :

$$x(t) = \sum_{p=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{pk} \{ \text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_1, m) + \lambda_1 \{ \text{hexp}_k(t, \lambda_1, m) \} \} + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{p(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} \{ \text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_r, m) + \lambda_r \{ \text{hexp}_k(t, \lambda_r, m) \} \} \right\} A^{(p-1)} x(0) + \sum_{p=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{pk} \{ \text{gexp}_k(t, \lambda_1, m) \} + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \delta_{p(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} \{ \text{gexp}_k(t, \lambda_r, m) \} \right\} A^{(p-1)} * Be(t) \quad (\text{III. 41})$$

$$x(t) = \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \{ \text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_1, m) + \lambda_1 \{ \text{hexp}_k(t, \lambda_1, m) \} \} \left[\sum_{p=1}^N \delta_{pk} A^{(p-1)} \right] x(0) + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \{ \text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_r, m) + \lambda_r \{ \text{hexp}_k(t, \lambda_r, m) \} \} \left[\sum_{p=1}^N \delta_{p(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} A^{(p-1)} \right] x(0) \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} [\{ \text{gexp}_k(t, \lambda_1, m) \} * e(t)] \left[\sum_{p=1}^N \delta_{pk} A^{(p-1)} \right] B + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} [\{ \text{gexp}_k(t, \lambda_r, m) \} * e(t)] \left[\sum_{p=1}^N \delta_{p(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} A^{(p-1)} \right] B \right\} \quad (\text{III. 42})$$

Soit, pour $k = [1, \dots, m_1, (m_1+1), \dots, (m_1+m_2), \dots, (m_1+m_2+\dots+m_r) = N]$, $W_k = \left\{ \sum_{p=1}^N \gamma_{pk} A^{(p-1)} \right\}$ une matrice constante de dimension $(N \times N)$ dont les éléments w_{kij} ($1 \leq i, j \leq N$) sont obtenus à partir des coefficients constants γ_{pk} ($1 \leq p \leq N$) et des éléments des matrices A^p de dimension $(N \times N)$ ($p = 0, 1, \dots, (N-1)$). Donc, l'équation (III.42) sera :

$$x(t) = \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \{ \text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_1, m) + \lambda_1 \{ \text{hexp}_k(t, \lambda_1, m) \} \} W_k x(0) + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} \{ \text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_r, m) + \lambda_r \{ \text{hexp}_k(t, \lambda_r, m) \} \} W_{(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} x(0) \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} [\{ \text{gexp}_k(t, \lambda_1, m) \} * e(t)] W_k B + \dots + \sum_{k=1}^{m_r} [\{ \text{gexp}_k(t, \lambda_r, m) \} * e(t)] W_{(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)} B \right\} \quad (\text{III. 43})$$

Les composantes $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) du vecteur $x(t)$ de l'équation (III.43) sont alors données par :

$$\begin{aligned}
x_i(t) = & \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \left\{ \left[\text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_1, m) + \lambda_1 \{ \text{hexp}_k(t, \lambda_1, m) \} \right] \left[\sum_{q=1}^N x_q(0) w_{kiq} \right] \right\} + \dots + \right. \\
& \left. \sum_{k=1}^{m_r} \left\{ \left[\text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_r, m) + \lambda_r \{ \text{hexp}_k(t, \lambda_r, m) \} \right] \left[\sum_{q=1}^N x_q(0) w_{(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)iq} \right] \right\} \right\} + \\
& \left\{ \sum_{k=1}^{m_1} \left\{ \left[\{ \text{gexp}_k(t, \lambda_1, m) \} * e(t) \right] \left[\sum_{q=1}^N b_q w_{kiq} \right] \right\} + \dots + \right. \\
& \left. \sum_{k=1}^{m_r} \left\{ \left[\{ \text{gexp}_k(t, \lambda_r, m) \} * e(t) \right] \left[\sum_{q=1}^N b_q w_{(m_1+\dots+m_{(r-1)}+k)iq} \right] \right\} \right\} \quad (\text{III.44})
\end{aligned}$$

III.3. Exemples illustratifs

Dans cette section, nous allons présenter deux exemples simulés sur un PC en utilisant MATLAB pour démontrer l'efficacité et l'utilité de l'approche proposée pour la solution de l'équation d'état linéaire fractionnaire d'ordre commensurable.

III.3.1. Exemple 1 : Cas des valeurs propres réelles et distinctes

On considère l'équation d'état linéaire fractionnaire d'ordre commensurable suivante :

$$\frac{d^{0.83} x(t)}{dt^{0.83}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -28 & -39 & -12 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

où $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ est le vecteur d'état, $e(t)$ est l'entrée. Les valeurs propres de la matrice A sont

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$ et $\lambda_3 = -7$ et l'état initial est $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Les composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$

et $x_3(t)$ de la solution $x(t)$ de ce système sont obtenues de l'équation (III. 28) comme suit :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[u(t) + \lambda_i \{ \text{hexp}_1(t, \lambda_i, 0.83) \} \right] \left[\sum_{q=1}^3 x_q(0) w_{i1q} \right] \right\} + \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[\{ \text{gexp}_1(t, \lambda_i, 0.83) \} * e(t) \right] \left[\sum_{q=1}^3 b_q w_{i1q} \right] \right\} \\ \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[u(t) + \lambda_i \{ \text{hexp}_1(t, \lambda_i, 0.83) \} \right] \left[\sum_{q=1}^3 x_q(0) w_{i2q} \right] \right\} + \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[\{ \text{gexp}_1(t, \lambda_i, 0.83) \} * e(t) \right] \left[\sum_{q=1}^3 b_q w_{i2q} \right] \right\} \\ \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[u(t) + \lambda_i \{ \text{hexp}_1(t, \lambda_i, 0.83) \} \right] \left[\sum_{q=1}^3 x_q(0) w_{i3q} \right] \right\} + \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[\{ \text{gexp}_1(t, \lambda_i, 0.83) \} * e(t) \right] \left[\sum_{q=1}^3 b_q w_{i3q} \right] \right\} \end{bmatrix}$$

Pour $e(t) = u(t) =$ l'échelon unité, de l'équation (II.18) on a $[\text{gexp}_1(t, \lambda, m)] * u(t) = \text{hexp}_1(t, \lambda, m)$;

alors, les équations ci-dessus seront :

$$x_1(t) = \{[1 - \{\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)\}] [-w_{111} + w_{112}]\} + \{[1 - 4\{\text{hexp}_1(t, -4, 0.83)\}] [-w_{211} + w_{212}]\} + \\ \{[1 - 7\{\text{hexp}_1(t, -7, 0.83)\}] [-w_{311} + w_{312}]\} + \{\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)\} [w_{111} + w_{113}] + \\ \{\text{hexp}_1(t, -4, 0.83)\} [w_{211} + w_{213}] + \{\text{hexp}_1(t, -7, 0.83)\} [w_{311} + w_{313}]$$

$$x_2(t) = \{[1 - \{\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)\}] [-w_{121} + w_{122}]\} + \{[1 - 4\{\text{hexp}_1(t, -4, 0.83)\}] [-w_{221} + w_{222}]\} + \\ \{[1 - 7\{\text{hexp}_1(t, -7, 0.83)\}] [-w_{321} + w_{322}]\} + \{\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)\} [w_{121} + w_{123}] + \\ \{\text{hexp}_1(t, -4, 0.83)\} [w_{221} + w_{223}] + \{\text{hexp}_1(t, -7, 0.83)\} [w_{321} + w_{323}]$$

$$x_3(t) = \{[1 - \{\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)\}] [-w_{131} + w_{132}]\} + \{[1 - 4\{\text{hexp}_1(t, -4, 0.83)\}] [-w_{231} + w_{232}]\} + \\ \{[1 - 7\{\text{hexp}_1(t, -7, 0.83)\}] [-w_{331} + w_{332}]\} + \{\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)\} [w_{131} + w_{133}] + \\ \{\text{hexp}_1(t, -4, 0.83)\} [w_{231} + w_{233}] + \{\text{hexp}_1(t, -7, 0.83)\} [w_{331} + w_{333}]$$

Réarrangeant les équations ci-dessus et en utilisant les valeurs numériques des différents paramètres on obtient :

$$x_1(t) = -1 + 2.5557 * \text{hexp}_1(t, -1, 0.83) - 0.4445 * \text{hexp}_1(t, -4, 0.83) - 0.1114 * \text{hexp}_1(t, -7, 0.83)$$

$$x_2(t) = 0.9961 - 18.1109 * \text{hexp}_1(t, -1, 0.83) + 88.8915 * \text{hexp}_1(t, -4, 0.83) - 42.7716 * \text{hexp}_1(t, -7, 0.83)$$

$$x_3(t) = 0.0104 + 12.9596 * \text{hexp}_1(t, -1, 0.83) - 67.5561 * \text{hexp}_1(t, -4, 0.83) + 27.6018 * \text{hexp}_1(t, -7, 0.83)$$

A partir de l'équation (II.23), les fonctions $\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)$, $\text{hexp}_1(t, -4, 0.83)$ et $\text{hexp}_1(t, -7, 0.83)$ peuvent être obtenues en utilisant les paramètres d'approximation $\beta = 2.0$, $\omega_h = 100$ rad/s et $\omega_{\max} = 1000\omega_h = 10^5$ rad/s comme suit :

Pour $\lambda = -1$:

$$\text{hexp}_1(t, -1, 0.83) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{0.83} + 1)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_1-1} \frac{k1_i}{p1_i} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + p1_i)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_1-1} \frac{k1_i}{p1_i} [1 - \exp(-p1_i t)]$$

$$\tau_{10} = \left(\frac{-1}{-1} \right)^{\left(\frac{1}{0.83} \right)} = 1, \quad N1 = \text{Integer} \left[\frac{\log(100000)}{\log(2)} \right] + 1 = 17$$

où, pour $0 \leq i \leq 33$, les pôles $p1_i$ et les résidus $k1_i$ de l'approximation sont donnés par:

$$p1_i = 2^{(i-17)}, \quad k1_i = \left(\frac{2^{(i-17)}}{2\pi} \right) \left[\frac{\sin[(0.17)\pi]}{\cosh[0.83 \log(2^{(17-i)})] - \cos[(0.17)\pi]} \right]$$

Pour $\lambda = -4$:

$$\text{hexp}_1(t, -4, 0.83) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{0.83} + 4)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_2-1} \frac{k2_i}{p2_i} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + p2_i)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_2-1} \frac{k2_i}{p2_i} [1 - \exp(-p2_i t)]$$

$$\tau_{20} = \left(\frac{-1}{-4} \right)^{\left(\frac{1}{0.83} \right)} = 0.1882, \quad N2 = \text{Integer} \left[\frac{\log(18820)}{\log(2)} \right] + 1 = 15$$

où, pour $0 \leq i \leq 29$, les pôles $p2_i$ et les résidus $k2_i$ de l'approximation sont donnés par:

$$p2_i = 5.3134(2)^{(i-15)} \quad , \quad k2_i = \left(\frac{5.3134(2)^{(i-15)}}{2\pi} \right) \left[\frac{\sin[(0.17)\pi]}{\cosh[0.83 \log((2)^{(15i)})] - \cos[(0.17)\pi]} \right]$$

Pour $\lambda = -7$:

$$\text{hexp}_1(t, -7, 0.83) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{0.83} + 7)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_3-1} \frac{k3_i}{p3_i} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + p3_i)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_3-1} \frac{k3_i}{p3_i} [1 - \exp(-p3_i t)]$$

$$\tau3_0 = \left(\frac{-1}{-7} \right)^{\left(\frac{1}{0.83} \right)} = 0.0959 \quad , \quad N3 = \text{Integer} \left[\frac{\log(9590)}{\log(2)} \right] + 1 = 14$$

où, pour $0 \leq i \leq 27$, les pôles $p3_i$ et les résidus $k3_i$ de l'approximation sont donnés par:

$$p3_i = 10.4275(2)^{(i-14)} \quad , \quad k3_i = \left(\frac{10.4275(2)^{(i-14)}}{2\pi} \right) \left[\frac{\sin[(0.17)\pi]}{\cosh[0.83 \log((2)^{(14i)})] - \cos[(0.17)\pi]} \right]$$

Figure (III.1) montre les tracés des fonctions $\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)$, $5*\text{hexp}_1(t, -4, 0.83)$ et $5*\text{hexp}_1(t, -7, 0.83)$. Figure (III. 2) montre aussi les tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ de la solution $x(t)$ du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable.

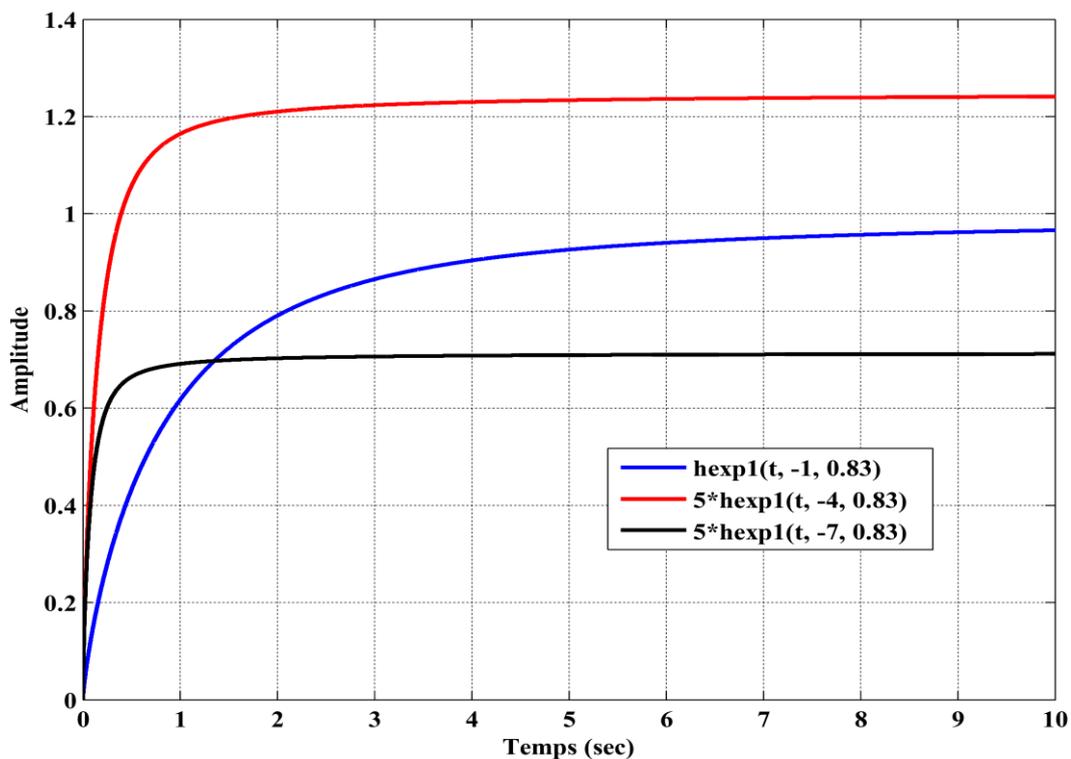


Figure (III.1) : Tracés des fonctions $\text{hexp}_1(t, -1, 0.83)$, $5*\text{hexp}_1(t, -4, 0.83)$ et $5*\text{hexp}_1(t, -7, 0.83)$

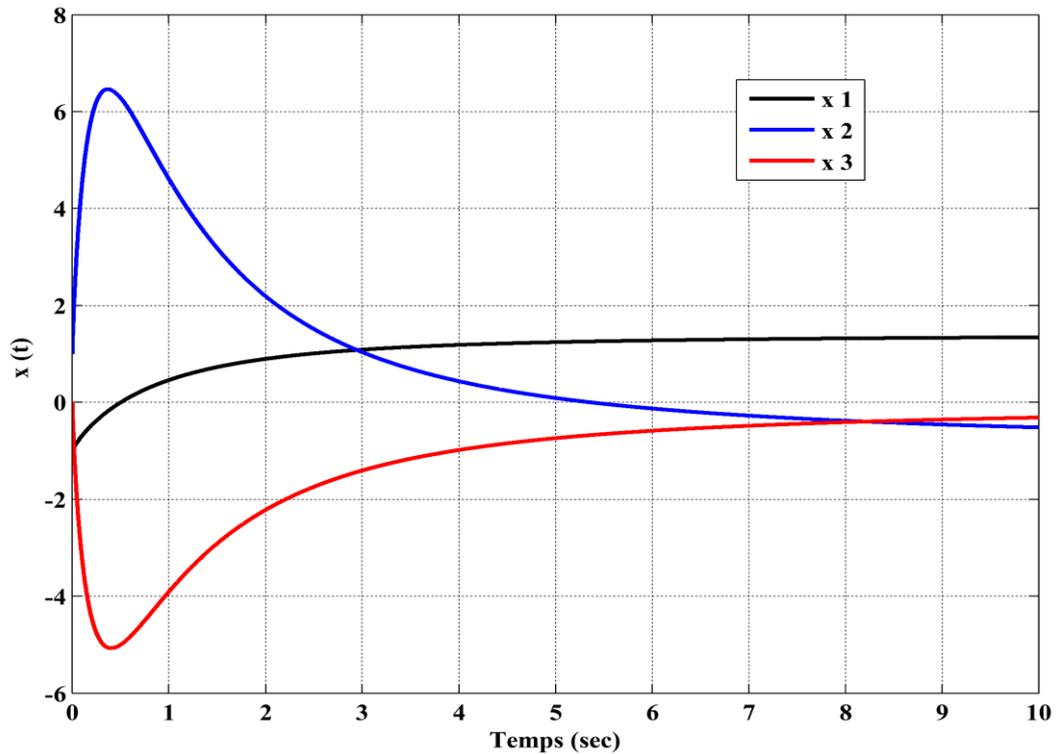


Figure (III.2) : Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ de la solution $x(t)$

III.3.2. Exemple 2 : Cas des valeurs propres réelles et multiples

Comme seconde exemple, on considère un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable représenté par l'équation d'état suivante :

$$\frac{d^{0.36}x(t)}{dt^{0.36}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -7 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e(t)$$

où $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ est le vecteur d'état, $e(t)$ est l'entrée. Les valeurs propres de la matrice A sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ et } \lambda_3 = -5 \text{ et l'état initial est } x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Les composantes } x_1(t), x_2(t) \text{ et}$$

$x_3(t)$ de la solution $x(t)$ de ce système sont obtenues de l'équation (III. 44) comme suit :

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \left\{ \sum_{k=1}^{m_1=2} \left\{ [\text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_1, 0.36) + \lambda_1 \{\text{hexp}_k(t, \lambda_1, 0.36)\}] \left[\sum_{q=1}^{N=3} x_q(0) w_{k1q} \right] \right\} \right\} \\
&\quad + \left\{ [\text{hexp}_0(t, \lambda_3, 0.36) + \lambda_3 \{\text{hexp}_1(t, \lambda_3, 0.36)\}] \left[\sum_{q=1}^{N=3} x_q(0) w_{31q} \right] \right\} \\
&\quad + \left\{ \sum_{k=1}^{m_1=2} \left\{ [\{\text{gexp}_k(t, \lambda_1, 0.36)\} * e(t)] \left[\sum_{q=1}^{N=3} b_q w_{k1q} \right] \right\} \right\} \\
&\quad + \left\{ [\{\text{gexp}_1(t, \lambda_3, 0.36)\} * e(t)] \left[\sum_{q=1}^{N=3} b_q w_{31q} \right] \right\} \\
x_2(t) &= \left\{ \sum_{k=1}^{m_1=2} \left\{ [\text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_1, 0.36) + \lambda_1 \{\text{hexp}_k(t, \lambda_1, 0.36)\}] \left[\sum_{q=1}^{N=3} x_q(0) w_{k2q} \right] \right\} \right\} \\
&\quad + \left\{ [\text{hexp}_0(t, \lambda_3, 0.36) + \lambda_3 \{\text{hexp}_1(t, \lambda_3, 0.36)\}] \left[\sum_{q=1}^{N=3} x_q(0) w_{32q} \right] \right\} \\
&\quad + \left\{ \sum_{k=1}^{m_1=2} \left\{ [\{\text{gexp}_k(t, \lambda_1, 0.36)\} * e(t)] \left[\sum_{q=1}^{N=3} b_q w_{k2q} \right] \right\} \right\} \\
&\quad + \left\{ [\{\text{gexp}_1(t, \lambda_3, 0.36)\} * e(t)] \left[\sum_{q=1}^{N=3} b_q w_{32q} \right] \right\} \\
x_3(t) &= \left\{ \sum_{k=1}^{m_1=2} \left\{ [\text{hexp}_{(k-1)}(t, \lambda_1, 0.36) + \lambda_1 \{\text{hexp}_k(t, \lambda_1, 0.36)\}] \left[\sum_{q=1}^{N=3} x_q(0) w_{k3q} \right] \right\} \right\} \\
&\quad + \left\{ [\text{hexp}_0(t, \lambda_3, 0.36) + \lambda_3 \{\text{hexp}_1(t, \lambda_3, 0.36)\}] \left[\sum_{q=1}^{N=3} x_q(0) w_{33q} \right] \right\} \\
&\quad + \left\{ \sum_{k=1}^{m_1=2} \left\{ [\{\text{gexp}_k(t, \lambda_1, 0.36)\} * e(t)] \left[\sum_{q=1}^{N=3} b_q w_{k3q} \right] \right\} \right\} \\
&\quad + \left\{ [\{\text{gexp}_1(t, \lambda_3, 0.36)\} * e(t)] \left[\sum_{q=1}^{N=3} b_q w_{33q} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Pour $e(t) = u(t) =$ l'échelon unité, de l'équation (II.18) on a $[\text{gexp}_1(t, \lambda, m)] * u(t) = \text{hexp}_1(t, \lambda, m)$ et $[\text{gexp}_2(t, \lambda, m)] * u(t) = \text{hexp}_2(t, \lambda, m)$; alors, les équations ci-dessus seront :

$$x_1(t) = \left\{ \left\{ [1 - \{\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)\}] [-2w_{111} + w_{112}] \right\} + \left\{ [1 - 5\{\text{hexp}_1(t, -5, 0.36)\}] [-2w_{311} + w_{312}] \right\} \right\} \\
+ \left\{ [\text{hexp}_1(t, -1, 0.36) - \{\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)\}] [-2w_{211} + w_{212}] \right\} \\
+ \left\{ [\{\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)\}] [w_{111} + 2w_{113}] \right\} + \left\{ [\{\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)\}] [w_{211} + 2w_{213}] \right\} \\
+ \left\{ [\{\text{hexp}_1(t, -5, 0.36)\}] [w_{311} + 2w_{313}] \right\}$$

$$x_2(t) = \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \left[1 - \{\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)\} \right] [-2w_{121} + w_{122}] + \left[1 - 5\{\text{hexp}_1(t, -5, 0.36)\} \right] [-2w_{321} + w_{322}] \right\} \\ & + \left\{ \left[\{\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)\} - \{\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)\} \right] [-2w_{221} + w_{222}] \right\} \\ & + \left\{ \left[\{\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)\} w_{121} + 2w_{123} \right] + \left[\{\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)\} w_{221} + 2w_{223} \right] \right\} \\ & + \left\{ \left[\{\text{hexp}_1(t, -5, 0.36)\} w_{321} + 2w_{323} \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$x_3(t) = \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \left[1 - \{\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)\} \right] [-2w_{131} + w_{132}] + \left[1 - 5\{\text{hexp}_1(t, -5, 0.36)\} \right] [-2w_{331} + w_{332}] \right\} \\ & + \left\{ \left[\{\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)\} - \{\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)\} \right] [-2w_{231} + w_{232}] \right\} \\ & + \left\{ \left[\{\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)\} w_{131} + 2w_{133} \right] + \left[\{\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)\} w_{231} + 2w_{233} \right] \right\} \\ & + \left\{ \left[\{\text{hexp}_1(t, -5, 0.36)\} w_{331} + 2w_{333} \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

Réarrangeant les équations ci-dessus et en utilisant les valeurs numériques des différents paramètres on obtient :

$$x_1(t) = -2 + 2.0625 * \text{hexp}_1(t, -1, 0.36) + 2.75 * \text{hexp}_2(t, -1, 0.36) + 0.1875 * \text{hexp}_1(t, -5, 0.36)$$

$$x_2(t) = 1 + 0.9375 * \text{hexp}_1(t, -1, 0.36) - 2.75 * \text{hexp}_2(t, -1, 0.36) - 0.3125 * \text{hexp}_1(t, -5, 0.36)$$

$$x_3(t) = -3.6875 * \text{hexp}_1(t, -1, 0.36) + 2.75 * \text{hexp}_2(t, -1, 0.36) + 4.6875 * \text{hexp}_1(t, -5, 0.36)$$

A partir de l'équation (II.23), les fonctions $\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)$, $\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)$ et $\text{hexp}_1(t, -5, 0.36)$ peuvent être obtenues en utilisant les paramètres d'approximation $\beta = 3.0$, $\omega_h = 100$ rad/s et $\omega_{\max} = 10^6 \omega_h = 10^8$ rad/s comme suit :

Pour $\lambda_1 = -1$ et $m_1 = 2$:

$$\text{hexp}_1(t, -1, 0.36) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{0.36} + 1)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_1-1} \frac{k_{1i}}{p_{1i}} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + p_{1i})} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_1-1} \frac{k_{1i}}{p_{1i}} [1 - \exp(-p_{1i} t)]$$

$$\text{hexp}_2(t, -1, 0.36) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{0.36} + 1)^2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{2N_1-1} \left\{ \left[\frac{k_{1i}}{p_{1i}} (1 - \exp(-p_{1i} t)) \right] + \left[-\frac{k_{1i}}{p_{1i}} \left\{ t \exp(-p_{1i} t) - \frac{1}{p_{1i}} [1 - \exp(-p_{1i} t)] \right\} \right] \right\}$$

$$\tau_{10} = \left(\frac{-1}{-1} \right)^{\left(\frac{1}{0.36} \right)} = 1, \quad N_1 = \text{Integer} \left[\frac{\log(10^8)}{\log(3)} \right] + 1 = 17$$

où, pour $0 \leq i \leq 33$, les pôles p_{1i} et les résidus k_{1i} de l'approximation sont donnés par:

$$p1_i = 3^{(i-17)} \quad , \quad k1_i = \left(\frac{3^{(i-17)}}{2\pi} \right) \left[\frac{\sin[(0.64)\pi]}{\cosh[0.36 \log(3^{(17-i)})] - \cos[(0.64)\pi]} \right]$$

Pour $\lambda_3 = -5$ et $m_2 = 1$

$$\text{hexp}_1(t, -1, 0.36) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{0.36} + 5)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_2-1} \frac{k2_i}{p2_i} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + p2_i)} \right\} = \sum_{i=1}^{2N_2-1} \frac{k2_i}{p2_i} [1 - \exp(-p2_i t)]$$

$$\tau_{2_0} = \left(\frac{-1}{-5} \right)^{\left(\frac{1}{0.36} \right)} = 0.0114 \quad , \quad N1 = \text{Integer} \left[\frac{\log(1143975)}{\log(3)} \right] + 1 = 13$$

où, pour $0 \leq i \leq 25$, les pôles $p2_i$ et les résidus $k2_i$ de l'approximation sont donnés par:

$$p2_i = (87.41)(3)^{(i-13)} \quad , \quad k2_i = \left(\frac{(17.48)(3)^{(i-13)}}{2\pi} \right) \left[\frac{\sin[(0.64)\pi]}{\cosh[0.36 \log((3)^{(13-i)})] - \cos[(0.64)\pi]} \right]$$

Figure (III.3) montre les tracés des fonctions $\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)$, $\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)$ et $5 \cdot \text{hexp}_1(t, -5, 0.36)$. Figure (III. 4) montre aussi les tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ de la solution $x(t)$ du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable.

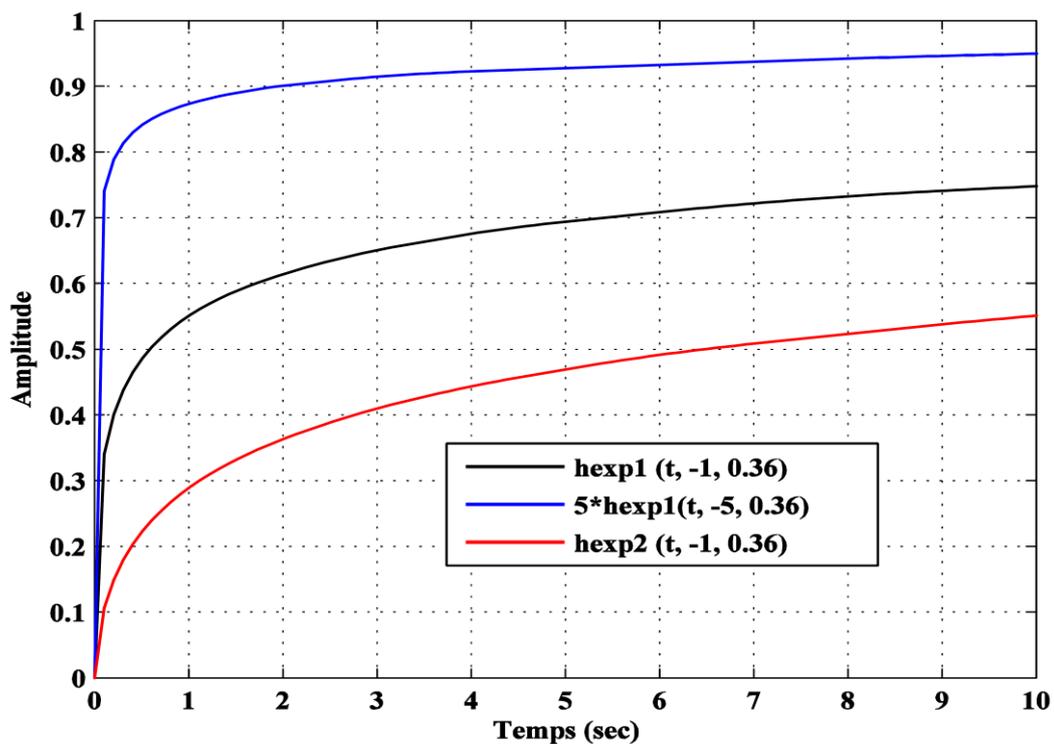


Figure (III.3) : Tracés des fonctions $\text{hexp}_1(t, -1, 0.36)$, $\text{hexp}_2(t, -1, 0.36)$ et $5\text{hexp}_1(t, -5, 0.36)$

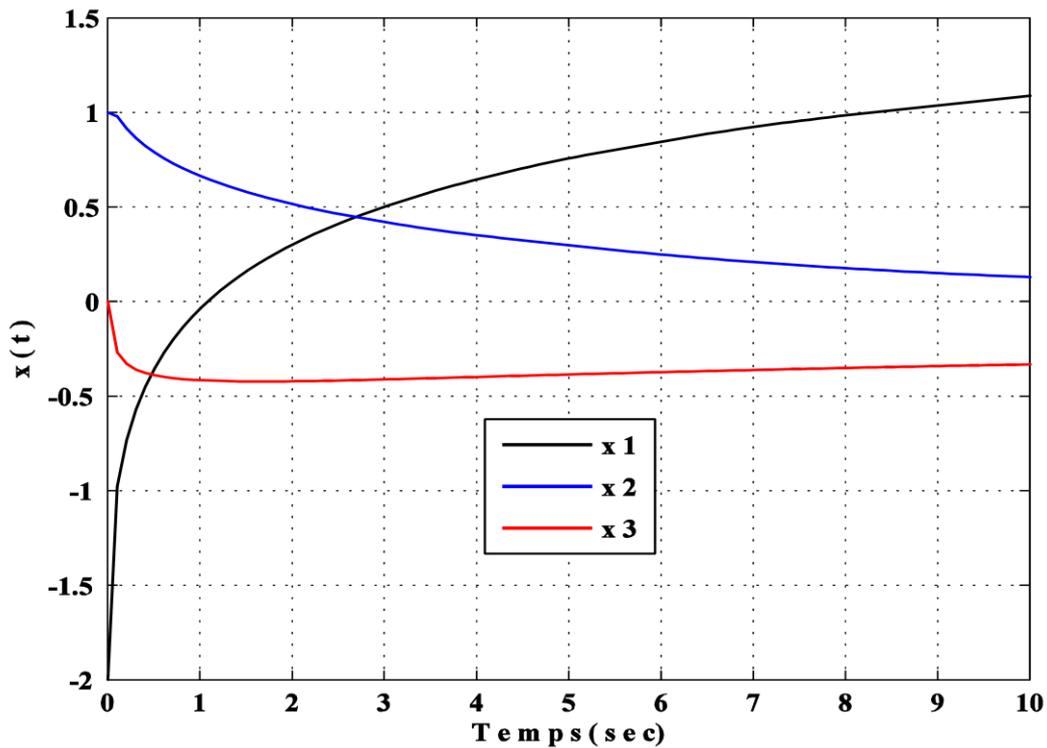


Figure (III.4) : Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ de la solution $x(t)$

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé une méthode pour résoudre l'équation d'état du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable comme il est fait avec les systèmes réguliers pour le cas où les valeurs propres de la matrice d'état sont tous réelles simples et/ou multiples. La méthode de la solution est basée sur les fonctions de matrices carrées et le théorème de Cayley-Hamilton. Les solutions des cas homogènes et non-homogènes ont été dérivés, en utilisant la définition de dérivée du Caputo, en termes de fonctions fondamentales introduites, appelées fonctions exponentielles généralisées. La solution générale est exprimée sous forme d'une combinaison linéaire de ces fonctions fondamentales qui jouent le même rôle des fonctions exponentielles classiques. Des exemples illustratifs ont été présentés pour montrer l'efficacité et l'utilité de la technique de résolution proposée.

Chapitre **4**

*Solution de l'Equation d'Etat
du Système Linéaire
Fractionnaire d'Ordre
Commensurable avec les
Valeurs Propres Complexes en
Utilisant les Fonctions
Exponentielles et
Trigonométriques Régulières*

Chapitre IV : Solution de l'équation d'état d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable avec valeurs propres complexes en utilisant les fonctions exponentielles et trigonométriques régulières

IV.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, on a obtenu la solution générale de l'équation d'état d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable donné comme suit :

$$D^m x(t) = A x(t) + B e(t) \quad , \quad 0 < m < 1 \quad (IV.1)$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état de dimension N , $D^m x(t)$ est la dérivée de Caputo d'ordre fractionnaire m , $e(t)$ est la variable d'entrée, A est la matrice d'état de dimension $(N \times N)$ et B est la matrice d'entrée de dimension $(N \times 1)$. Pour les valeurs propres réelles simples et multiples de la matrice d'état A , les solutions homogènes et non homogènes obtenues sont sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions fondamentales appropriées. Dans ce chapitre, on va aussi considérer la résolution de l'équation d'état fractionnaire de l'équation (IV.1) pour des valeurs propres complexes de la matrice d'état A . Dans ce cas aussi, les expressions explicites des solutions homogènes et non homogènes vont être établies en termes de fonctions fondamentales appropriées correspondant aux différents types de valeurs propres complexes de la matrice d'état A et de la plage du paramètre m en utilisant la technique de la décomposition modale [55]. Vu que ces fonctions fondamentales appropriées sont des fonctions irrationnelles, alors elles doivent être approximées par des fonctions rationnelles pour que la solution générale soit sous la forme des fonctions exponentielle, sinus, cosinus, sinus amorti et cosinus amorti régulières. Des exemples illustratifs seront présentés pour démontrer la validité, l'applicabilité et l'efficacité de l'outil analytique proposé pour la solution de l'équation d'état du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable.

IV.2. Solution de l'équation d'état du système linéaire d'ordre fractionnaire

IV.2.1. Décomposition modale

Considérons l'équation d'état du système linéaire régulier suivant [55]:

$$Dx(t) = A x(t) + B e(t) \quad (IV.2)$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état de dimension N , $Dx(t)$ est la dérivée d'ordre 1, $e(t)$ est l'entrée, A est la matrice d'état de dimension $(N \times N)$ et B est la matrice d'entrée de dimension $(N \times 1)$.

Il est bien connu que les modes d'un système donnent une description utile de son comportement. Ces modes sont déterminées à partir de ses valeurs propres λ_i ($i=1, 2, \dots, N$) qui sont les racines de l'équation caractéristique $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$. Pour simplicité de la décomposition modale, on suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes [55].

Considérons maintenant l'équation d'état homogène du système linéaire de l'équation (IV.2) :

$$Dx(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (IV.3)$$

Prenant la transformée de Laplace de l'équation (IV.3), on obtient l'équation suivante :

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 \quad (IV.4)$$

Faisant la décomposition en éléments simples de l'équation (IV.4), on peut écrire :

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 = \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{s - \lambda_i} x_0 \quad (IV.5)$$

où les résidus matrices R_i ($i=1, 2, \dots, N$) sont donnés par :

$$R_i = p_i q_i \quad (IV.6)$$

avec les vecteurs p_i et q_i ($i=1, 2, \dots, N$) sont, respectivement, les vecteurs propres à droite (vecteurs colonnes) et les vecteurs propres à gauche (vecteurs lignes) de la matrice d'état A associés aux valeurs propres λ_i ($i=1, 2, \dots, N$). Ils sont obtenus comme suit :

$$A p_i = \lambda_i p_i, \quad \text{et} \quad q_i A = \lambda_i q_i, \quad \text{avec le produit scalaire} \quad q_i p_i = 1 \quad (IV.7)$$

Alors, on a la décomposition suivante:

$$X(s) = \sum_{i=1}^N \frac{(q_i x_0)}{s - \lambda_i} p_i = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} p_i \quad (IV.8)$$

où le produit scalaire $q_i x_0 = \alpha_i$. En prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation (IV.8), la réponse temporelle de l'équation d'état homogène du système linéaire de l'équation (IV.3) est donnée par :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{\lambda_i t} p_i \quad (IV.9)$$

où $e^{\lambda_i t}$ ($i=1, 2, \dots, N$) sont les modes du système.

IV.2.2. Solution

Considérons l'équation d'état du système linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.1) :

$$D^m x(t) = Ax(t) + Be(t) \quad (IV.10)$$

Dans ce travail, toutes les valeurs propres de la matrice d'état A ne sont que des nombres complexes avec une partie réelle nulle et/ou avec une partie réelle négative, d'où N est un nombre pair. Prenant la transformée de Laplace de l'équation (IV.10), on obtient [10]:

$$\mathbf{X}(s) = s^{(m-1)}(s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{E}(s) \quad (\text{IV.11})$$

où $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ est l'état initial. Ainsi, l'expression du vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$ est déterminée en prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation (IV.11) comme suit :

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{X}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{(m-1)}(s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} \mathbf{x}_0 + \mathcal{L}^{-1}\left\{(s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} * \mathbf{B} \mathbf{e}(t) \quad (\text{IV.12})$$

Soient $\lambda_{0k} = j b_{0k}$ ($b_{0k} > 0$) et $\lambda_{0(k+1)} = \lambda_{0k}^*$, pour $k = 1, 3, k \text{ impair}, \dots, (N_1 - 1)$ et N_1 un nombre pair, les valeurs propres complexes de la matrice \mathbf{A} avec une partie réelle nulle et soient $\lambda_k = a_k + j b_k$ ($a_k < 0$ et $b_k > 0$) et $\lambda_{(k+1)} = \lambda_k^*$, pour $k = (N_1 + 1), (N_1 + 3), k \text{ impair}, \dots, (N - 1)$, les valeurs propres complexes de la matrice \mathbf{A} avec une partie réelle négatif.

Pour $\mathbf{X}_1(s) = \left\{s^{(m-1)}(s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} \mathbf{x}_0$, on peut donc écrire, à partir de l'équation (IV.5), que [43]:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(s) = s^{(m-1)}(s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 = & \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{N_1-1} s^{(m-1)} \left\{ \frac{\mathbf{R}_k}{s^m - \lambda_{0k}} + \frac{\mathbf{R}_k^*}{s^m - \lambda_{0k}^*} \right\} \mathbf{x}_0 \\ & + \sum_{k=N_1+1, k \text{ impair}}^{N-1} s^{(m-1)} \left\{ \frac{\mathbf{R}_k}{s^m - \lambda_k} + \frac{\mathbf{R}_k^*}{s^m - \lambda_k^*} \right\} \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

De l'équation (IV.6), on a $\mathbf{R}_k = \mathbf{p}_k \mathbf{q}_k$ et de l'équation (IV.8) on a $\alpha_k = \mathbf{q}_k \mathbf{x}_0$. Alors, on aura :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(s) = s^{(m-1)}(s^m \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 = & \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{N_1-1} s^{(m-1)} \left\{ \frac{\alpha_k}{s^m - \lambda_{0k}} \mathbf{p}_k + \frac{\alpha_k^*}{s^m - \lambda_{0k}^*} \mathbf{p}_k^* \right\} \\ & + \sum_{k=N_1+1, k \text{ impair}}^{N-1} s^{(m-1)} \left\{ \frac{\alpha_k}{s^m - \lambda_k} \mathbf{p}_k + \frac{\alpha_k^*}{s^m - \lambda_k^*} \mathbf{p}_k^* \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Donc, le $i^{\text{ème}}$ élément $\mathbf{X}_{li}(s)$, $1 \leq i \leq N$, du vecteur $\mathbf{X}_1(s)$ de l'équation (IV.14) est donnée par :

$$\mathbf{X}_{li}(s) = \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{N_1-1} s^{(m-1)} \left\{ \frac{\alpha_k \mathbf{p}_{ki}}{s^m - \lambda_{0k}} + \frac{\alpha_k^* \mathbf{p}_{ki}^*}{s^m - \lambda_{0k}^*} \right\} + \sum_{k=N_1+1, k \text{ impair}}^{N-1} s^{(m-1)} \left\{ \frac{\alpha_k \mathbf{p}_{ki}}{s^m - \lambda_k} + \frac{\alpha_k^* \mathbf{p}_{ki}^*}{s^m - \lambda_k^*} \right\} \quad (\text{IV.15})$$

L'équation (IV.15) peut être réécrite comme suit:

$$\mathbf{X}_{li}(s) = \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{N_1-1} s^{(m-1)} \frac{(A_{ki} s^m + B1_{ki})}{s^{2m} + b_{0k}^2} + \sum_{k=N_1+1, k \text{ impair}}^{N-1} s^{(m-1)} \frac{(A_{ki} s^m + B2_{ki})}{(s^m - a_k)^2 + b_k^2} \quad (\text{IV.16})$$

où les coefficients A_{ki} , $B1_{ki}$ et $B2_{ki}$ sont donnés par les expressions suivantes [43]:

$$A_{ki} = 2 \operatorname{Re}[\alpha_k \mathbf{p}_{ik}] \quad , \quad B1_{ki} = -2 \operatorname{Re}[\lambda_{0k}^* \alpha_k \mathbf{p}_{ik}] \quad \text{et} \quad B2_{ki} = -2 \operatorname{Re}[\lambda_k^* \alpha_k \mathbf{p}_{ik}] \quad (\text{IV.17})$$

En réarrangeant l'équation (IV.16), on aura:

$$\mathbf{X}_{li}(s) = \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{N_1-1} s^{-1} \frac{(A_{ki} s^{2m} + B1_{ki} s^m)}{s^{2m} + b_{0k}^2} + \sum_{k=N_1+1, k \text{ impair}}^{N-1} s^{-1} \frac{(A_{ki} s^{2m} + B2_{ki} s^m)}{(s^m - a_k)^2 + b_k^2} \quad (\text{IV.18})$$

$$\begin{aligned}
X_{li}(s) = & \sum_{k=1, \text{ k impair}}^{N_1-1} \frac{1}{s} \left\{ A_{ki} + \frac{B_{1ki} s^m}{s^{2m} + b_{0k}^2} + \frac{F_{ki}}{s^{2m} + b_{0k}^2} \right\} \\
& + \sum_{k=N_1+1, \text{ k impair}}^{N-1} \frac{1}{s} \left\{ A_{ki} + \frac{C_{ki} (s^m - a_k)}{(s^m - a_k)^2 + b_k^2} + \frac{D_{ki}}{(s^m - a_k)^2 + b_k^2} \right\}
\end{aligned} \tag{IV.19}$$

où les coefficients F_{ki} , C_{ki} , et D_{ki} sont donnés comme suit :

$$F_{ki} = -b_{0k}^2 A_{ki} \quad C_{ki} = (2a_k A_{ki} + B_{2ki}) \quad D_{ki} = A_{ki} (a_k^2 - b_k^2) + a_k B_{2ki} \tag{IV.20}$$

On a $\|\lambda_{0k}\| = b_{0k}$, $\|\lambda_k\| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et pour $\zeta_k = -\frac{a_k}{\|\lambda_k\|}$, l'équation (IV.19) sera alors :

$$\begin{aligned}
X_{li}(s) = & \sum_{k=1, \text{ k impair}}^{N_1-1} \left\{ \frac{1}{s} A_{ki} + B_{1ki} \frac{1}{s} \left(\frac{s^m}{s^{2m} + \|\lambda_{0k}\|^2} \right) + \frac{F_{ki}}{\|\lambda_{0k}\|^2} \frac{1}{s} \left(\frac{\|\lambda_{0k}\|^2}{s^{2m} + \|\lambda_{0k}\|^2} \right) \right\} \\
& + \sum_{k=N_1+1, \text{ k impair}}^{N-1} \left\{ \frac{1}{s} A_{ki} + C_{ki} \frac{1}{s} \left(\frac{s^m + \|\lambda_k\| \zeta_k}{s^{2m} + 2\zeta_k \|\lambda_k\| s^m + \|\lambda_k\|^2} \right) + \frac{D_{ki}}{\|\lambda_k\|^2} \frac{1}{s} \left(\frac{\|\lambda_k\|^2}{s^{2m} + 2\zeta_k \|\lambda_k\| s^m + \|\lambda_k\|^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{IV.21}$$

De la section (II.3), les transformées de Laplace inverse des quatre fonctions $\frac{1}{s} \left(\frac{s^m}{s^{2m} + \|\lambda_{0k}\|^2} \right)$,

$\frac{1}{s} \left(\frac{\|\lambda_{0k}\|^2}{s^{2m} + \|\lambda_{0k}\|^2} \right)$, $\frac{1}{s} \left(\frac{s^m + \|\lambda_k\| \zeta_k}{s^{2m} + 2\zeta_k \|\lambda_k\| s^m + \|\lambda_k\|^2} \right)$ et $\frac{1}{s} \left(\frac{\|\lambda_k\|^2}{s^{2m} + 2\zeta_k \|\lambda_k\| s^m + \|\lambda_k\|^2} \right)$ sont données,

respectivement, par les quatre expressions $hfcos(t, \lambda_{0k}, m)$, $hfsin(t, \lambda_{0k}, m)$, $hfdc(t, \lambda_k, m)$ et $hfdsin(t, \lambda_k, m)$. Donc, $x_{li}(t)$, pour $1 \leq i \leq N$, la transformée de Laplace inverse de $X_{li}(s)$ est donné par [43]:

$$\begin{aligned}
x_{li}(t) = & \sum_{k=1, \text{ k impair}}^{N_1-1} \left\{ A_{ki} u(t) + B_{1ki} hfcos(t, \lambda_{0k}, m) + \frac{F_{ki}}{\|\lambda_{0k}\|^2} hfsin(t, \lambda_{0k}, m) \right\} \\
& + \sum_{k=N_1+1, \text{ k impair}}^{N-1} \left\{ A_{ki} u(t) + C_{ki} hfdc(t, \lambda_k, m) + \frac{D_{ki}}{\|\lambda_k\|^2} hfdsin(t, \lambda_k, m) \right\}
\end{aligned} \tag{IV.22}$$

Maintenant, soit $X_2(s) = \left\{ (s^m I - A)^{-1} \right\} BE(s)$. De l'équation (IV.5), on peut écrire que [43]:

$$\begin{aligned}
X_2(s) = & (s^m I - A)^{-1} BE(s) = \sum_{k=1, \text{ k impair}}^{N_1-1} \left\{ \frac{R_k}{s^m - \lambda_{0k}} + \frac{R_k^*}{s^m - \lambda_{0k}^*} \right\} BE(s) \\
& + \sum_{k=N_1+1, \text{ k impair}}^{N-1} \left\{ \frac{R_k}{s^m - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{s^m - \lambda_k^*} \right\} BE(s)
\end{aligned} \tag{IV.23}$$

de l'équation (IV.6), on a $R_k = p_k q_k$ et de l'équation (IV.8) on a $\bar{\alpha}_k = q_k B$. Alors, on aura :

$$\begin{aligned} X_2(s) = (s^m I - A)^{-1} B E(s) &= \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{N_1-1} \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{s^m - \lambda_{0k}} p_k + \frac{\bar{\alpha}_k^*}{s^m - \lambda_{0k}^*} p_k^* \right\} E(s) \\ &+ \sum_{k=N_1+1, k \text{ impair}}^{N-1} \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{s^m - \lambda_k} p_k + \frac{\bar{\alpha}_k^*}{s^m - \lambda_k^*} p_k^* \right\} E(s) \end{aligned} \quad (IV.24)$$

Donc, pour $1 \leq i \leq N$, le $i^{\text{ème}}$ élément $X_{2i}(s)$ du vecteur $X_2(s)$ est donnée par :

$$X_{2i}(s) = \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{N_1-1} \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k p_{ki}}{s^m - \lambda_{0k}} + \frac{\bar{\alpha}_k^* p_{ki}^*}{s^m - \lambda_{0k}^*} \right\} E(s) + \sum_{k=N_1+1, k \text{ impair}}^{N-1} \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k p_{ki}}{s^m - \lambda_k} + \frac{\bar{\alpha}_k^* p_{ki}^*}{s^m - \lambda_k^*} \right\} E(s) \quad (IV.25)$$

L'équation (IV.25) peut être réécrite comme suit:

$$X_{2i}(s) = \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{N_1-1} \frac{(\bar{A}_{ki} s^m + \bar{B}1_{ki})}{s^{2m} + \|\lambda_{0k}\|^2} E(s) + \sum_{k=N_1+1, k \text{ impair}}^{N-1} \frac{(\bar{A}_{ki} s^m + \bar{B}2_{ki})}{s^{2m} + 2\zeta_k \|\lambda_k\| s^m + \|\lambda_k\|^2} E(s) \quad (IV.26)$$

où les coefficients \bar{A}_{ki} , $\bar{B}1_{ki}$ et $\bar{B}2_{ki}$ sont donnés par les expression suivantes [43]:

$$\bar{A}_{ki} = 2 \operatorname{Re}[\bar{\alpha}_k p_{ik}] , \bar{B}1_{ki} = -2 \operatorname{Re}[\lambda_{0k}^* \bar{\alpha}_k p_{ik}] \text{ et } \bar{B}2_{ki} = -2 \operatorname{Re}[\lambda_k^* \bar{\alpha}_k p_{ik}] \quad (IV.27)$$

Réarranger l'équation (IV.26) on aura:

$$\begin{aligned} X_{2i}(s) &= \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{N_1-1} \left\{ \bar{A}_{ki} \frac{s^m}{s^{2m} + \|\lambda_{0k}\|^2} E(s) + \frac{\bar{B}1_{ki}}{\|\lambda_{0k}\|^2} \frac{\|\lambda_{0k}\|^2}{s^{2m} + \|\lambda_{0k}\|^2} E(s) \right\} \\ &+ \sum_{k=N_1+1, k \text{ impair}}^{N-1} \left\{ \bar{A}_{ki} \frac{(s^m + \|\lambda_k\| \zeta_k)}{s^{2m} + 2\zeta_k \|\lambda_k\| s^m + \|\lambda_k\|^2} E(s) + \frac{\bar{D}_{ki}}{\|\lambda_{0k}\|^2} \frac{\|\lambda_{0k}\|^2}{s^{2m} + 2\zeta_k \|\lambda_k\| s^m + \|\lambda_k\|^2} E(s) \right\} \end{aligned} \quad (IV.28)$$

où le coefficient \bar{D}_{ki} est donné comme suit :

$$\bar{D}_{ki} = \bar{B}2_{ki} - \bar{A}_{ki} \|\lambda_k\| \zeta_k \quad (IV.29)$$

De la section (II.3), les transformées de Laplace inverse des quatre fonctions $\left(\frac{s^m}{s^{2m} + \|\lambda_{0k}\|^2} \right)$,

$\left(\frac{\|\lambda_{0k}\|^2}{s^{2m} + \|\lambda_{0k}\|^2} \right)$, $\left(\frac{s^m + \|\lambda_k\| \zeta_k}{s^{2m} + 2\zeta_k \|\lambda_k\| s^m + \|\lambda_k\|^2} \right)$ et $\left(\frac{\|\lambda_k\|^2}{s^{2m} + 2\zeta_k \|\lambda_k\| s^m + \|\lambda_k\|^2} \right)$ sont, respectivement,

données par les quatre expressions $f_{\cos}(t, \lambda_{0k}, m)$, $f_{\sin}(t, \lambda_{0k}, m)$, $f_{d\cos}(t, \lambda_k, m)$ et $f_{d\sin}(t, \lambda_k, m)$. Donc, $x_{2i}(t)$, pour $1 \leq i \leq N$, la transformée de Laplace inverse de $X_{2i}(s)$ est donné par [43]:

$$\begin{aligned}
x_{2i}(t) = & \sum_{k=1, \text{kimpair}}^{N_1-1} \left\{ \bar{A}_{ki} \text{fcos}(t, \lambda_{0k}, m) * e(t) + \frac{\bar{B}1_{ki}}{\|\lambda_{0k}\|^2} \text{fsin}(t, \lambda_{0k}, m) * e(t) \right\} \\
& + \sum_{k=N_1+1, \text{kimpair}}^{N-1} \left\{ \bar{A}_{ki} \text{fdcos}(t, \lambda_k, m) * e(t) + \frac{\bar{D}_{ki}}{\|\lambda_k\|^2} \text{fdsin}(t, \lambda_k, m) * e(t) \right\}
\end{aligned} \tag{IV.30}$$

De l'équation (IV.12) on a $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$; alors des équations (IV.22) et (IV.30) l'élément $x_i(t) = x_{1i}(t) + x_{2i}(t)$, pour $1 \leq i \leq N$, est donné comme suit [43]:

$$\begin{aligned}
x_i(t) = & \sum_{k=1, \text{kimpair}}^{N_1-1} \left\{ \left\{ A_{ki} u(t) + B1_{ki} \text{hfcos}(t, \lambda_{0k}, m) + \frac{F_{ki}}{\|\lambda_{0k}\|^2} \text{hfsin}(t, \lambda_{0k}, m) \right\} + \right. \\
& \left. \left\{ \bar{A}_{ki} \text{fcos}(t, \lambda_{0k}, m) * e(t) + \frac{\bar{B}1_{ki}}{\|\lambda_{0k}\|^2} \text{fsin}(t, \lambda_{0k}, m) * e(t) \right\} \right\} \\
& + \sum_{k=N_1+1, \text{kimpair}}^{N-1} \left\{ \left\{ A_{ki} u(t) + C_{ki} \text{hfdcos}(t, \lambda_k, m) + \frac{D_{ki}}{\|\lambda_k\|^2} \text{hfdsin}(t, \lambda_k, m) \right\} + \right. \\
& \left. \left\{ \bar{A}_{ki} \text{fdcos}(t, \lambda_k, m) * e(t) + \frac{\bar{D}_{ki}}{\|\lambda_k\|^2} \text{fdsin}(t, \lambda_k, m) * e(t) \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{IV.31}$$

IV.3. Exemple illustratif

Dans cette section, on va présenter un exemple avec trois domaines différents de l'ordre commensurable pour démontrer l'efficacité et l'utilité de l'approche proposée pour la solution de l'équation d'état du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable avec les valeurs propres complexes de la matrice d'état.

Considérons l'équation d'état du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable suivant :

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \tag{IV.32}$$

où $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ est le vecteur d'état, $e(t)$ est l'entrée. Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_{01} = (2j)$, $\lambda_{02} = (-2j)$, $\lambda_3 = (-1+j)$ et $\lambda_4 = (-1-j)$. le vecteur d'état initiale est

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Les variables d'état } x_i(t), \text{ pour } 1 \leq i \leq 4, \text{ de la solution du système}$$

linéaire fractionnaire d'ordre commensurable de vecteur d'état $x(t)$ ci-dessus sont obtenus à partir de l'équation (IV.31) comme suit:

$$x_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ A_{1i}u(t) + B_{1i} \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, m) + \frac{F_{1i}}{\|\lambda_{01}\|^2} \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, m) \right\} + \\ \left\{ \bar{A}_{1i} \text{fcos}(t, \lambda_{01}, m) * e(t) + \frac{\bar{B}_{1i}}{\|\lambda_{01}\|^2} \text{fsin}(t, \lambda_{01}, m) * e(t) \right\} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \left\{ A_{3i}u(t) + C_{3i} \text{hfdc}(t, \lambda_3, m) + \frac{D_{3i}}{\|\lambda_3\|^2} \text{hfdsin}(t, \lambda_3, m) \right\} + \\ \left\{ A_{3i} \text{fdcos}(t, \lambda_3, m) * e(t) + \frac{\bar{D}_{3i}}{\|\lambda_3\|^2} \text{fdsin}(t, \lambda_3, m) * e(t) \right\} \end{array} \right\} \quad (IV.33)$$

Pour $e(t) = u(t)$ l'échelon unité et à partir des équations (II.28) et (II.93), on a :

$$\begin{cases} \text{fcos}(t, \lambda_{01}, m) * u(t) = \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, m) \\ \text{fsin}(t, \lambda_{01}, m) * u(t) = \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, m) \\ \text{fdcos}(t, \lambda_3, m) * u(t) = \text{hfdc}(t, \lambda_3, m) \\ \text{fdsin}(t, \lambda_3, m) * u(t) = \text{hfdsin}(t, \lambda_3, m) \end{cases}$$

Alors, les variables d'état $x_i(t)$, pour $1 \leq i \leq 4$, de l'équation (IV.33) sont données par :

$$x_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ A_{1i}u(t) + B_{1i} \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, m) + \frac{F_{1i}}{\|\lambda_{01}\|^2} \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, m) \right\} + \\ \left\{ \bar{A}_{1i} \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, m) + \frac{\bar{B}_{1i}}{\|\lambda_{01}\|^2} \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, m) \right\} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \left\{ A_{3i}u(t) + C_{3i} \text{hfdc}(t, \lambda_3, m) + \frac{D_{3i}}{\|\lambda_3\|^2} \text{hfdsin}(t, \lambda_3, m) \right\} + \\ \left\{ \bar{A}_{3i} \text{hfdc}(t, \lambda_3, m) + \frac{\bar{D}_{3i}}{\|\lambda_3\|^2} \text{hfdsin}(t, \lambda_3, m) \right\} \end{array} \right\} \quad (IV.34)$$

L'équation (IV.34) est réécrite comme suit:

$$x_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} \left(A_{1i} + A_{3i} \right) u(t) + \left(B_{1i} + \bar{A}_{1i} \right) \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, m) + \left(\frac{F_{1i}}{\|\lambda_{01}\|^2} + \frac{\bar{B}_{1i}}{\|\lambda_{01}\|^2} \right) \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, m) \\ + \left(C_{3i} + \bar{A}_{3i} \right) \text{hfdc}(t, \lambda_{01}, m) + \left(\frac{D_{3i}}{\|\lambda_3\|^2} + \frac{\bar{D}_{3i}}{\|\lambda_3\|^2} \right) \text{hfdsin}(t, \lambda_{01}, m) \end{array} \right\} \quad (IV.35)$$

Une fois que toutes les valeurs numériques des coefficients seront été calculés, la solution de vecteur d'état $x(t)$ du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (IV.32) est donnée par :

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 + 2.2 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, m) - 0.2 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, m) + 1.8 \text{hfdc}(t, \lambda_3, m) + 0.3 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, m) \\ 1 + 3.6 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, m) - 2.6 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, m) + 2.4 \text{hfdc}(t, \lambda_3, m) - 0.6 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, m) \\ 2.8 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, m) - 4.8 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, m) + 7.2 \text{hfdc}(t, \lambda_3, m) + 1.2 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, m) \\ 1 - 1.6 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, m) - 4.4 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, m) + 9.6 \text{hfdc}(t, \lambda_3, m) - 2.4 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, m) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

IV.3.1. Cas 1 : $0 < m < 0.5$

Pour $m = 0.3$, la solution de vecteur d'état $x(t)$ du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (IV.32) est donnée à partir de l'équation (IV.36) comme suit :

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 + 2.2 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.3) - 0.2 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.3) + 1.8 \text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.3) + 0.3 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.3) \\ 1 + 3.6 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.3) - 2.6 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.3) + 2.4 \text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.3) - 0.6 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.3) \\ 2.8 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.3) - 4.8 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.3) + 7.2 \text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.3) + 1.2 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.3) \\ 1 - 1.6 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.3) - 4.4 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.3) + 9.6 \text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.3) - 2.4 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.3) \end{pmatrix}$$

Des équations (II.43), (II.44), (II.94) et (II.95), les fonctions $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.3)$, $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.3)$, $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.3)$ et $\text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.3)$ peuvent être facilement obtenues de la manière suivante :

❖ $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.3)$

$$\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.3) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{4}{[s^{0.6} + 4]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \cong L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{k_{1i}}{(s + p_{1i})} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{k_{1i}}{p_{1i}} [1 - \exp(-p_{1i}t)]$$

avec $N_1 = 23$, pour $1 \leq i \leq 23$ les pôles p_{2i} et leurs résidus correspondants k_{2i} sont donnés comme :

$$p_{1i} = 10.08 * (4)^{(i-12)} \quad , \quad k_{1i} = \frac{5.04(4)^{(i-12)}}{\pi} \left[\frac{\sin[0.4\pi]}{\cosh[0.6 \log((4)^{(12-i)})] - \cos[0.4\pi]} \right]$$

❖ $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.3)$

$$\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.3) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^{0.3}}{[s^{0.6} + \|\lambda_{01}\|^2]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{(s + p_{2i})} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{p_{2i}} \right) [1 - \exp(-p_{2i}t)]$$

avec $\|\lambda_{01}\| = 2$ et $N_2 = 58$, les pôles p_{2i} et leurs résidus correspondants k_{2i} sont donnés comme :

- pour $1 \leq i \leq 35$

$$p_{2i} = 2.04 * 10^{-8} * (2.99)^{(i-1)}$$

$$k_{2i} = \frac{10^{-9}}{8\pi} \sum_{\ell=1}^{23} \left\{ \left(\frac{(4)^{(\ell-12)} (2.99)^{(i-1)} \prod_{j=1}^{35} (1-1.39(2.99)^{(i-j)})}{\left[2.04 * 10^{-8} (2.99)^{(i-1)} - 10 * (4)^{(\ell-12)} \right] \prod_{j=1, i \neq j}^{35} (1-(2.99)^{(i-j)})} \right) \times \left(\frac{\sin[(0.4)\pi]}{\cosh[0.6 \log(4^{(12-\ell)})] - \cos[(0.4)\pi]} \right) \right\}$$

- pour $36 \leq i \leq 58$

$$p_{2i} = 10 * (4)^{(i-47)}$$

$$k_{2i} = \left[\left(0.16 * 10^{-2} * (4)^{(i-47)} \left[\frac{\sin[(0.4)\pi]}{\cosh[0.6 \log((4)^{(47-i)})] - \cos[(0.4)\pi]} \right] \right) \right] + \sum_{\ell=1}^{35} \left\{ \left(\frac{-(1.5) * 10^{-2} * (4)^{2(i-47)} \prod_{j=1}^{35} (1-1.39(2.99)^{(\ell-j)})}{\left[10 * (4)^{(i-47)} - 2.04 * 10^{-8} (2.99)^{(\ell-1)} \right] \prod_{j=1, \ell \neq j}^{35} (1-(2.99)^{(\ell-j)})} \right) \times \left[\frac{\sin[(0.4)\pi]}{\cosh[0.6 \log((4)^{(47-i)})] - \cos[(0.4)\pi]} \right] \right\}$$

❖ hfdsin(t, $\lambda_3, 0.3$)

$$\begin{aligned} \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.3) &= L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda_3\|^2}{s[s^{0.6} + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.3} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + a_{3i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[1 - C_3 \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2})t + \varphi_3) \right] \end{aligned}$$

❖ hfdcos(t, $\lambda_3, 0.3$)

$$\begin{aligned} \text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.3) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{0.3} + \|\lambda_3\|\zeta}{s[s^{0.6} + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.3} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{\zeta + a_{4i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[\frac{\zeta}{\|\lambda_3\|} - C_4 \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \exp(-\beta\omega_i t) \cos(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2})t + \varphi_4) \right] \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_3\| = 1.41$, $\zeta = 0.91$, $\beta = 0.14$, $C_3 = 2.41$, $C_4 = 0.71$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0.43$ et $N_3 = N_4 = 725$ et les paramètres ω_i , a_{3i} , a_{4i} et $k_{3i} = k_{4i}$ sont donnés, pour $1 \leq i \leq 725$, comme :

$$\omega_i = \frac{1}{(0.31) * (1.10)^{(363-i)}}, \quad a_{3i} = (-0.26) * (1.10)^{(363-i)}, \quad a_{4i} = 0.17 * (1.10)^{(363-i)}$$

$$k_{3i} = k_{4i} = \frac{1}{(0.60) * (1.10)^{2(363-i)}} \left[\frac{\sin[0.7\pi]}{\cosh[0.3 \log((1.10)^{(363-i)})] - \cos[0.7\pi]} \right]$$

Figure (IV.1) montre les tracés des fonctions $hfcos(t, \lambda_{01}, 0.3)$, $hfsin(t, \lambda_{01}, 0.3)$, $hfdcoss(t, \lambda_3, 0.3)$ et $hfdssin(t, \lambda_3, 0.3)$. Figure (IV.2) montre aussi les tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de la solution $x(t)$ du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable considéré.

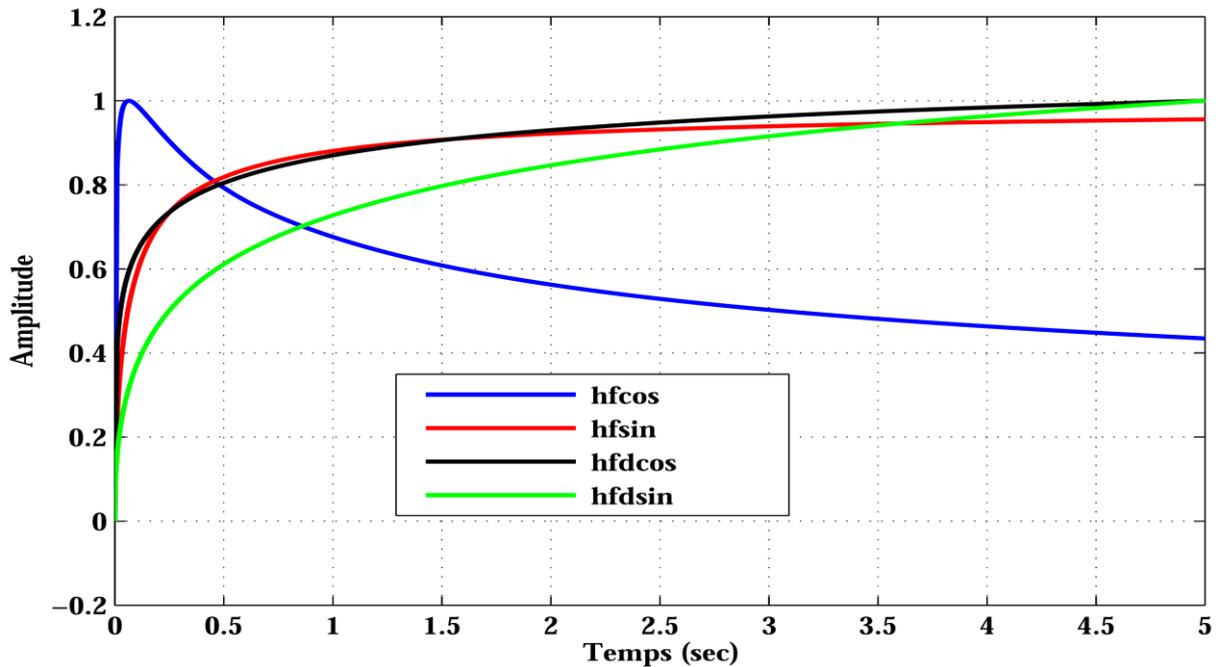


Figure (IV.1) : Tracés des fonctions $hfcos(t, \lambda_{01}, 0.3)$, $hfsin(t, \lambda_{01}, 0.3)$, $hfdcoss(t, \lambda_3, 0.3)$ et $hfdssin(t, \lambda_3, 0.3)$

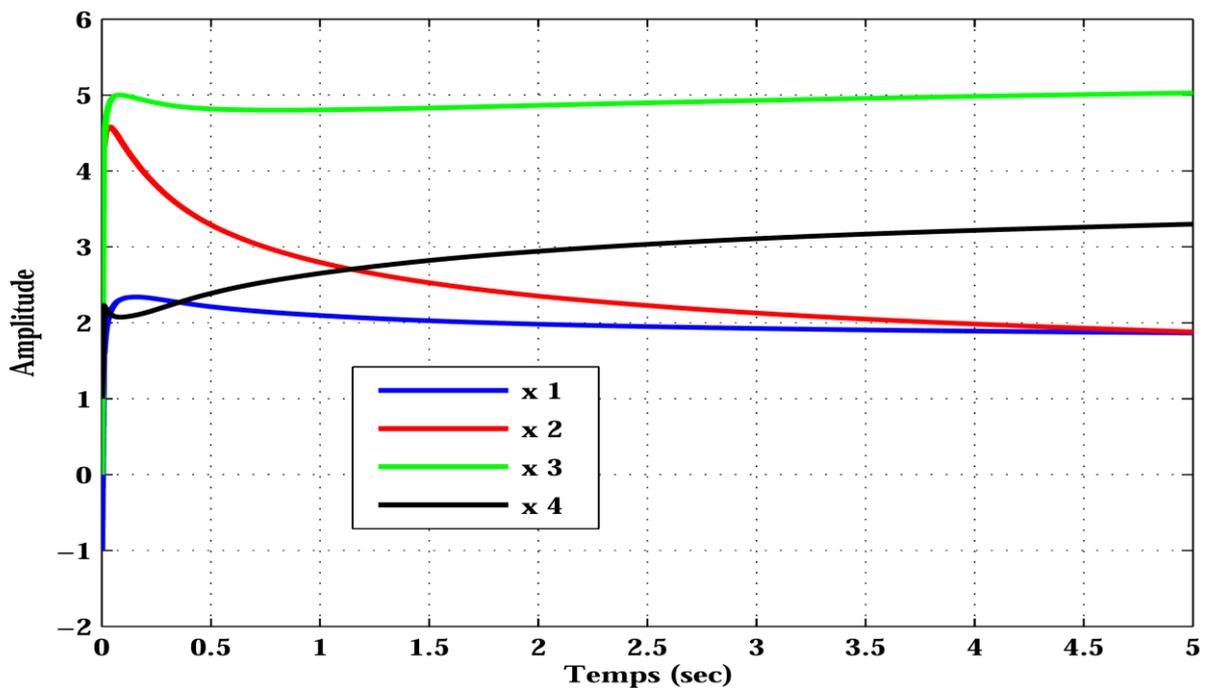


Figure (IV.2) : Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de la solution $x(t)$

IV.3.2. Cas 2 : m = 0.5

Comme seconde cas, la solution $x(t)$ est donnée aussi à partir de l'équation (IV.36) comme suit :

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 + 2.2 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5) - 0.2 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5) + 1.8 \text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5) + 0.3 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5) \\ 1 + 3.6 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5) - 2.6 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5) + 2.4 \text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5) - 0.6 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5) \\ 2.8 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5) - 4.8 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5) + 7.2 \text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5) + 1.2 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5) \\ 1 - 1.6 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5) - 4.4 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5) + 9.6 \text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5) - 2.4 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5) \end{pmatrix}$$

Des équations (II.50), (II.51), (II.94) et (II.95), les fonctions $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.5)$ sont données comme suit :

❖ $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$

$$\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{\|\lambda_{01}\|^2}{s + \|\lambda_{01}\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = [1 - \exp(-\|\lambda_{01}\|^2 t)]$$

❖ $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$

$$\begin{aligned} \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^{0.5}}{s + \|\lambda_{01}\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \left(\frac{k_{20}}{s + \|\lambda_{01}\|^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) + \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{k_{20}}{\|\lambda_{01}\|^2} \right) [1 - \exp(-\|\lambda_{01}\|^2 t)] + \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{p_{2i}} \right) [1 - \exp(-p_{2i} t)] \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_{01}\| = 2$, $N_2=35$, $k_{20} = -2.07$ et pour $1 < i < 35$, les pôles p_{2i} et leurs résidus correspondants k_{2i} sont donnés par les expressions suivantes:

$$p_{2i} = (1.99 * 10^{-8}) (2.51)^{(i-1)}, \quad k_{2i} = \left[\frac{-10^{-12} * (6.31)^{(i-1)} \prod_{j=1}^{35} (1 - 1.59(2.51)^{(i-j)})}{(2.51)^{(i-1)} [10^{-8} * (2.51)^{(i-1)} - 2]} \prod_{j=1, j \neq i}^{35} (1 - (2.51)^{(i-j)}) \right]$$

❖ $\text{hfdsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$

$$\begin{aligned} \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.5) &= L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda_3\|^2}{s[s + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.5} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} + a_{3i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[1 - C_3 \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin(\omega_i (\sqrt{1 - \beta^2}) t + \varphi_3) \right] \end{aligned}$$

❖ hfdc₃(t, λ₃, 0.5)

$$\begin{aligned} \text{hfdc}_3(t, \lambda_3, 0.5) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{0.5} + \|\lambda_3\| \zeta}{s[s + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.5} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{\zeta + a_{4i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[\frac{\zeta}{\|\lambda_3\|} - C_4 \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \exp(-\beta\omega_i t) \cos(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2})t + \varphi_4) \right] \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_3\| = 1.41$, $\zeta = 0.91$, $\beta = 0.66$, $C_3 = 2.41$, $C_4 = 0.71$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0.43$ et $N_3 = N_4 = 725$ et pour $1 \leq i \leq 725$, les paramètres ω_i , a_{3i} , a_{4i} et $k_{3i} = k_{4i}$ sont donnés comme :

$$\omega_i = \frac{1}{0.5 * (1.10)^{(363-i)}}, \quad a_{3i} = (-0.21) * (1.10)^{(363-i)}, \quad a_{4i} = 0.46 * (1.10)^{(363-i)}$$

$$k_{3i} = \frac{1}{(1.57) * (1.10)^{2(363-i)}} \left[\frac{\sin[0.5\pi]}{\cosh[0.5 \log((1.10)^{(363-i)})] - \cos[0.5\pi]} \right]$$

Figure (IV.3) montre les tracés des fonctions $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfdc}_3(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{hfd}_3(t, \lambda_3, 0.5)$. Figure (IV.4) montre aussi les tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de la solution $x(t)$ du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable considéré.

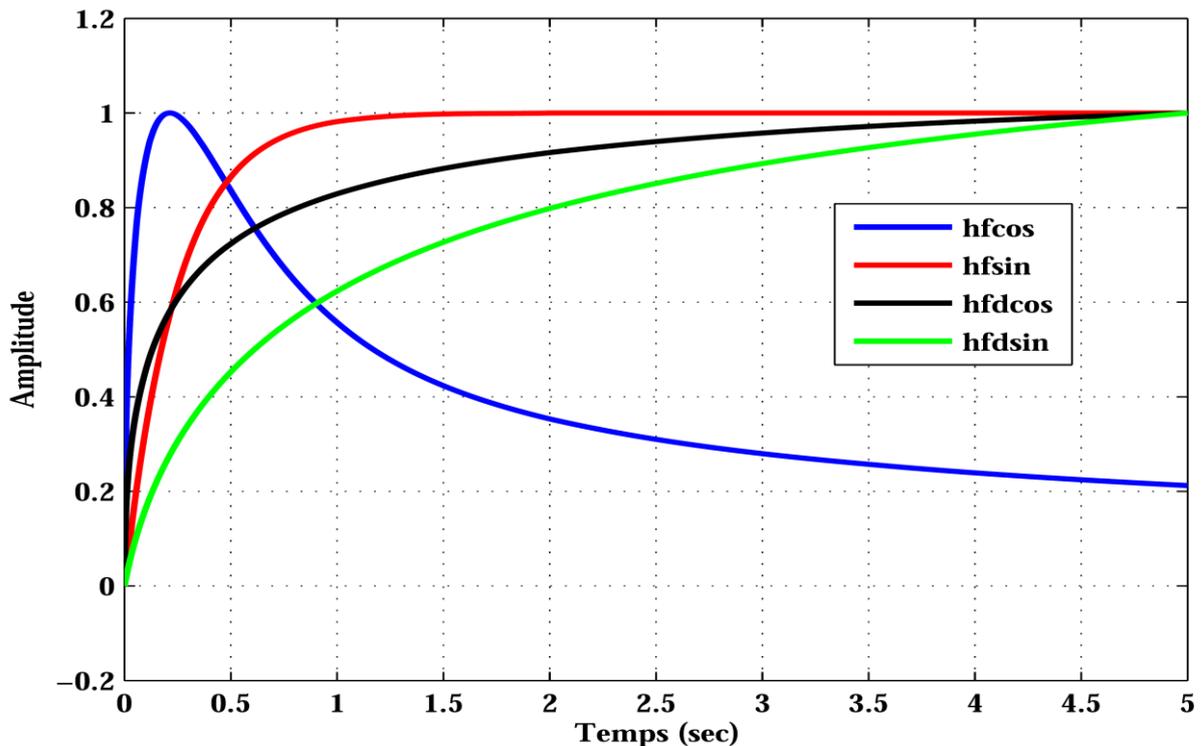


Figure (IV.3) : Tracés des fonctions $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.5)$, $\text{hfdc}_3(t, \lambda_3, 0.5)$ et $\text{hfd}_3(t, \lambda_3, 0.5)$

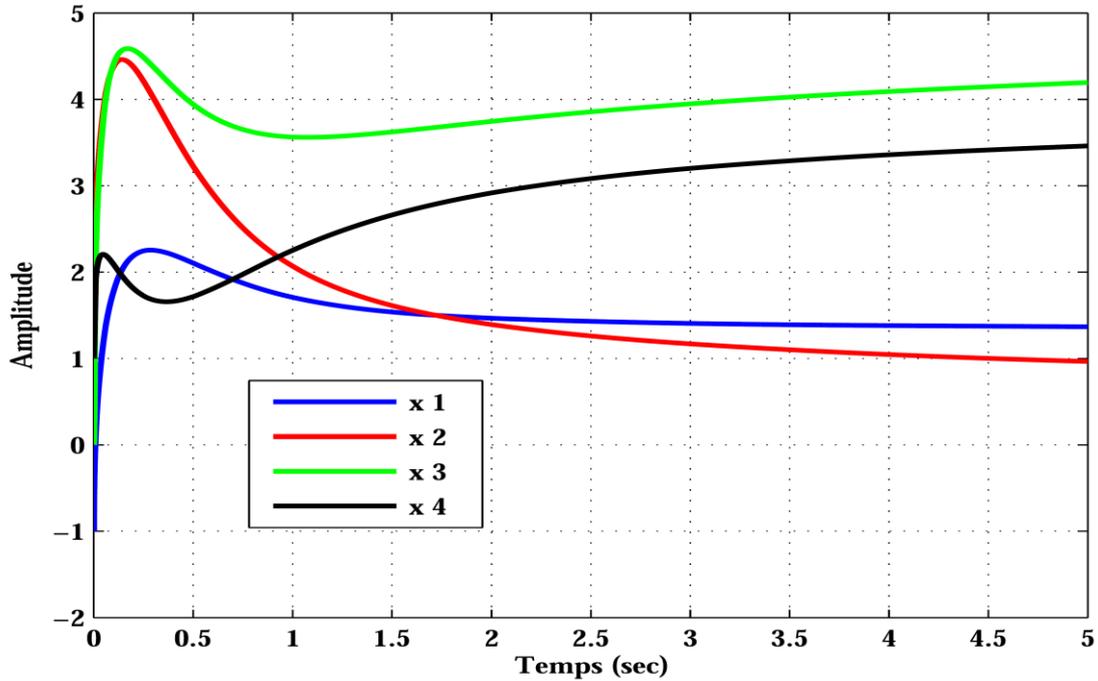


Figure (IV.4) : Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de la solution $x(t)$

IV.3.3. Cas 3 : $0.5 < m < 1$

Pour $m = 0.87$, la solution de vecteur d'état $x(t)$ du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (IV.32) est donnée par :

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 + 2.2 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.87) - 0.2 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.87) + 1.8 \text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.87) + 0.3 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.87) \\ 1 + 3.6 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.87) - 2.6 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.87) + 2.4 \text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.87) - 0.6 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.87) \\ 2.8 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.87) - 4.8 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.87) + 7.2 \text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.87) + 1.2 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.87) \\ 1 - 1.6 \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.87) - 4.4 \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.87) + 9.6 \text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.87) - 2.4 \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.87) \end{pmatrix}$$

Des équations (II.77), (II.79), (II.94) et (II.95), les fonctions $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.87)$, $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.87)$, $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.87)$ et $\text{hfdc}(t, \lambda_3, 0.87)$ peuvent être facilement obtenues comme :

❖ $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.87)$

$$\begin{aligned} \text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.87) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{4}{[s^{1.74} + 4]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\ &\cong L^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{A_1 s + B_1}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{0.87} \right\} s + \left\{ \|\lambda_{01}\|^{0.87} \right\}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) + \left[\sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{k_{1i}}{s + p_{1i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right] \right\} \right. \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{N_1} k_{1i} \exp(-p_{1i}t) + C_{11} \exp\left(-\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{0.87} \right\} t\right) \sin\left(\sqrt{1 - \alpha^2} \left\{ \|\lambda_{01}\|^{0.87} \right\} t + \Phi_{11}\right) \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_{01}\| = 2$, $C_{11} = 1.07$, $\alpha = 0.23$, $\Phi_{11} = 1.57$, $N_1 = 10$ et, pour $1 \leq i \leq 10$, les pôles p_{1i} et leurs résidus correspondants k_{1i} sont donnés comme :

$$p_{1i} = 5.12 * (3.78)^{(i-1)}$$

$$k_{1i} = \left[\frac{5.12 * (3.78)^{(i-1)}}{(5.33) * (3.78)^{(i-1)^2} - ((1.06) * (3.78)^{(i-1)}) + 1} \right] \frac{\prod_{j=1}^{10} (1 - (1.41)(3.78)^{(i-j)})}{\prod_{j=1, j \neq i}^{10} (1 - (3.78)^{(i-j)})}$$

❖ hfcos(t, $\lambda_{01}, 0.87$)

$$\begin{aligned} \text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.87) &= L^{-1} \left\{ \left(\frac{s^{0.87}}{[s^{1.74} + 4]} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{A_2 s + B_2}{s^2 + 2\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{\frac{1}{0.87}} \right\} s + \left\{ \|\lambda_{01}\|^{\frac{2}{0.87}} \right\}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) + \left[\sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{s + p_{2i}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right] \right\} \right\} \\ &= \frac{K_D}{\|\lambda_{01}\|^2} - \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{k_{2i}}{p_{2i}} \right) \exp(-p_{2i}t) + C_{21} \exp\left(-\alpha \left\{ \|\lambda_{01}\|^{\frac{1}{0.87}} \right\} t\right) \sin\left(\sqrt{1-\alpha^2} \left\{ \|\lambda_{01}\|^{\frac{1}{0.87}} \right\} t + \Phi_{21}\right) \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_{01}\| = 2$, $K_D = 1.72 * 10^{-5}$, $C_{21} = -0.58$, $\alpha = 0.23$, $\Phi_{21} = 0.0011$, $N_2 = 11$ et les pôles p_{2i} et leurs résidus correspondants k_{2i} , pour $1 \leq i \leq 11$, sont donnés comme :

$$p_{2i} = 2.75 * 10^{-5} * (9.58)^{(i-1)}$$

$$k_{2i} = \left[\frac{11.80 * 10^{-11} * (9.58)^{(i-1)} * (1 - (1.24 * 10^{-5} * (9.58)^{(i-1)}))}{(1.24 * 10^{-5} * (9.58)^{(i-1)})^2 - (0.57 * 10^{-5} * (9.58)^{(i-1)}) + 1} \right] \times$$

$$\left[\frac{\prod_{i1=1}^6 (1 - 7.14 * (9.58)^{(i-1)}) \prod_{i2=1}^5 (1 - 1.34 * (9.58)^{(i-2+6)})}{\prod_{j=1, j \neq i}^{11} (1 - (9.58)^{(i-j)})} \right]$$

❖ hfdsin(t, $\lambda_3, 0.87$)

$$\begin{aligned} \text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.87) &= L^{-1} \left\{ \frac{\|\lambda_3\|^2}{s[s^{1.74} + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.87} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + a_{3i}s}{s^2 + 2\beta\omega_i s + \omega_i^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[1 - C_3 \sum_{i=1}^{N_3} k_{3i} \exp(-\beta\omega_i t) \sin(\omega_i (\sqrt{1-\beta^2}) t + \varphi_3) \right] \end{aligned}$$

❖ hfdcos(t, $\lambda_3, 0.87$)

$$\begin{aligned} \text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.87) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{0.87} + \|\lambda_3\| \zeta}{s[s^{1.74} + 2\zeta\|\lambda_3\|s^{0.87} + \|\lambda_3\|^2]} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \frac{\zeta + a_{4i}s}{s^2 + 2\beta\omega_1 s + \omega_1^2} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \left[\frac{\zeta}{\|\lambda_3\|} - C_4 \sum_{i=1}^{N_4} k_{4i} \exp(-\beta\omega_1 t) \cos(\omega_1 (\sqrt{1-\beta^2})t + \varphi_4) \right] \end{aligned}$$

avec $\|\lambda_3\| = 1.41$, $\zeta = 0.71$, $\beta = 0.62$, $C_3 = 1.41$, $C_4 = 0.71$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0.79$, $N_3 = N_4 = 427$ et, pour $1 \leq i \leq 427$, les paramètres ω_i , a_{3i} , a_{4i} et $k_{3i} = k_{4i}$ sont donnés comme :

$$\omega_i = \frac{1}{(0.67) * (1.10)^{(214-i)}} \quad , \quad a_{3i} = (-0.08) * (1.10)^{(214-i)} \quad , \quad a_{4i} = (0.67) * (1.10)^{(214-i)}$$

$$k_{3i} = k_{4i} = \frac{1}{2.83 * (1.10)^{2(214-i)}} \left[\frac{\sin[0.13\pi]}{\cosh[0.87 \log((1.10)^{(214-i)})] - \cos[0.13\pi]} \right]$$

Figure (IV.5) montre les tracés des fonctions $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.87)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.87)$, $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.87)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.87)$. Figure (IV.6) montre aussi les tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de la solution $x(t)$ du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable du système fractionnaire considéré.

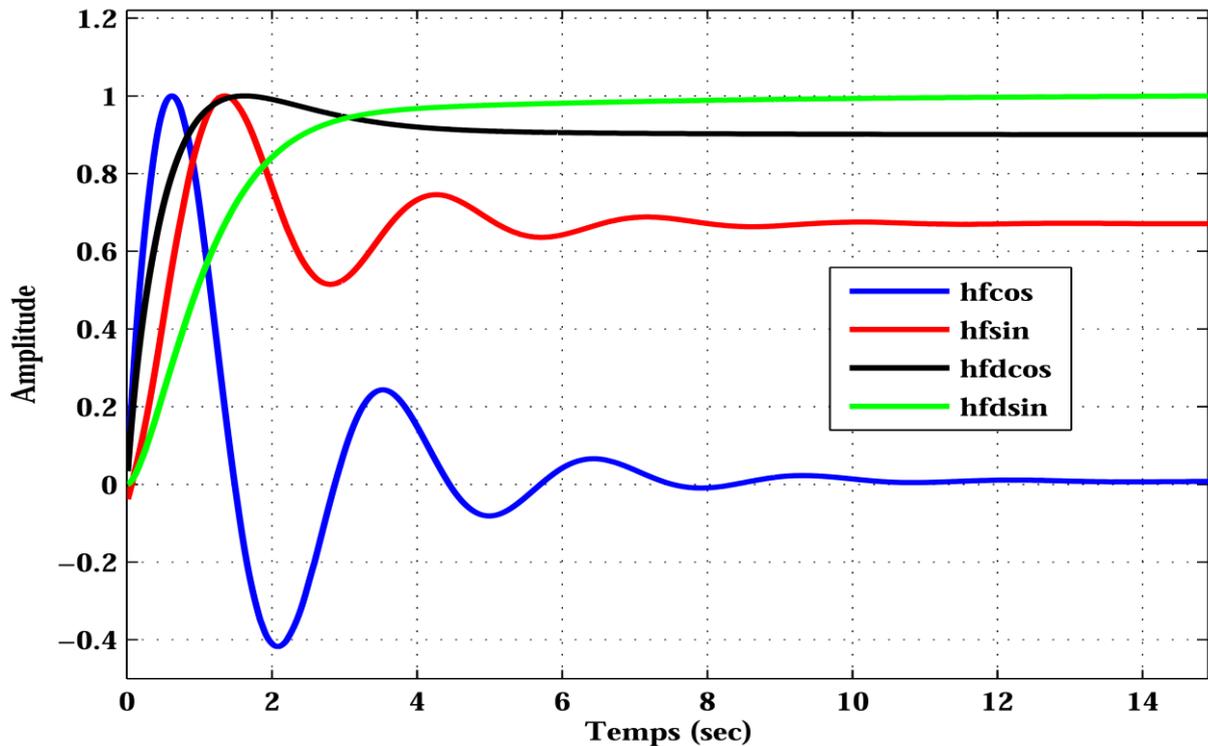


Figure (IV.5) : Tracés des fonctions $\text{hfcos}(t, \lambda_{01}, 0.87)$, $\text{hfsin}(t, \lambda_{01}, 0.87)$, $\text{hfdcos}(t, \lambda_3, 0.87)$ et $\text{hfdsin}(t, \lambda_3, 0.87)$

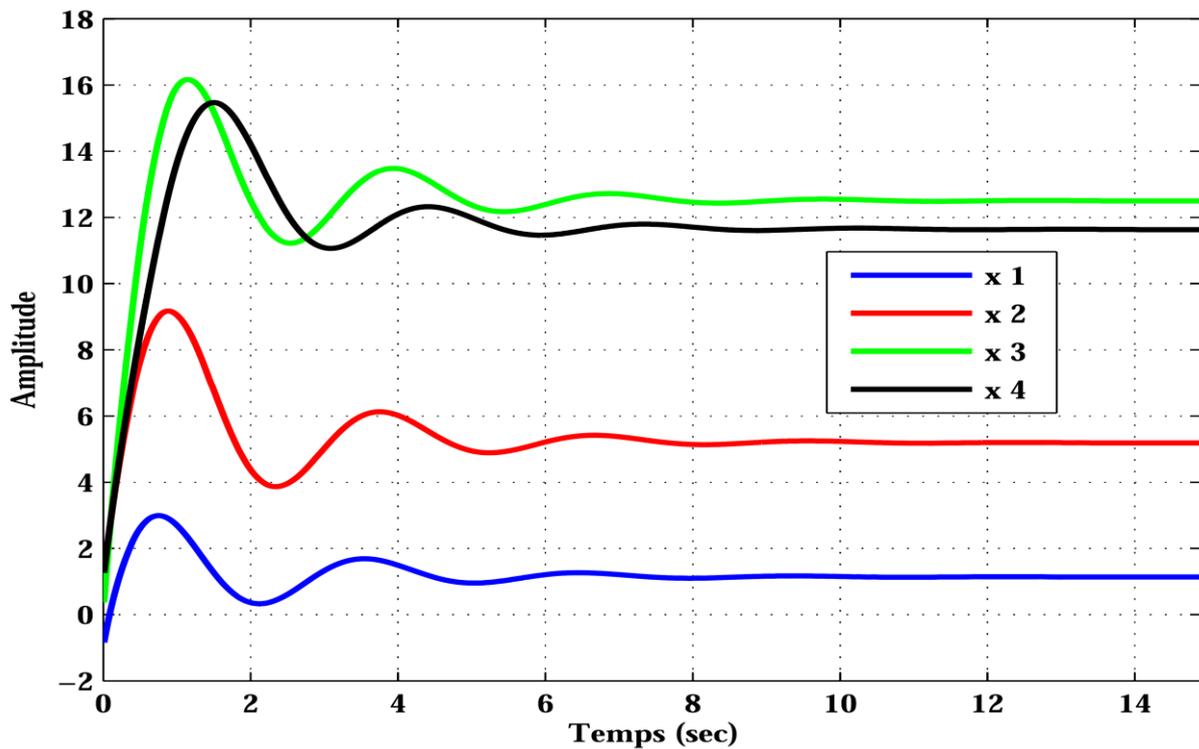


Figure (IV.6) : Tracés des composantes $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de la solution $x(t)$

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, on a obtenu, par l'utilisation de la définition dérivée du Caputo, la solution de l'équation d'état du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable pour des valeurs propres complexes de la matrice d'état. Les solutions obtenues des cas homogènes et non homogènes ont été exprimées comme une combinaison linéaire de fonctions fondamentales appropriées introduites comme cela se fait avec l'équation d'état régulière des systèmes linéaires classiques en utilisant la technique de la décomposition modale. Des approximations en fonctions rationnelles des fondamentales appropriées irrationnelles sont faites pour que les solutions analytiques seront exprimées par les fonctions exponentielles, cosinus, sinus, cosinus amorties et sinus amorties selon l'ordre fractionnaire commensurable. Une utilisation importante des fonctions exponentielles et trigonométriques est la synthèse des systèmes linéaires fractionnaire d'ordre commensurables par des circuits RLC. Donc, la méthode présente un outil très prometteur pour la résolution, l'analyse et la synthèse des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable. Des exemples illustratifs ont été présentés pour montrer la validité, l'applicabilité et l'efficacité de l'outil proposé pour la solution de l'équation d'état du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable dans le cas où les valeurs propres de la matrice d'équation d'état sont complexes.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Dans les dernières décennies, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été utilisés dans la modélisation des processus de diverses applications dans différents domaines de la science et de l'ingénierie. Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques linéaires représentés par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire, ou par une représentation d'état d'ordre fractionnaire dont les ordres de leurs dérivées sont des nombres réels. Pour les systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable, la représentation d'état est définie comme la représentation d'état régulière avec la différentiation d'ordre réel du vecteur d'état comme suit :

$$\begin{cases} D^m x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}, \quad 0 < m < 1$$

Une attention considérable a été accordée à ces équations différentielles pour établir des techniques convenables et efficaces pour leurs solutions et analyses afin qu'ils puissent être accessibles à la communauté de l'ingénierie. Malgré leur résolution était beaucoup impliqué, des solutions exactes ne peuvent pas être trouvées. Donc les approximations et les techniques numériques doivent être utilisées intensivement. Une des approches utilisées dans la littérature pour faciliter la représentation par un système linéaire invariant dans le temps, l'étude, l'analyse et la synthèse par un circuit électrique analogique des systèmes d'ordre fractionnaire est l'approximation de leurs fonctions de transfert irrationnelles par des fonctions rationnelles. Alors, dans cette thèse, nous avons abordé le problème de la résolution de l'équation d'état

fractionnaire $\frac{d^m x(t)}{dt^m} = A x(t) + B u(t)$, $0 < m < 1$, pour tous les cas de figure des valeurs propres

de la matrice d'état A en traitant les systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable comme les systèmes linéaires classiques afin d'établir les expressions explicites des solutions homogènes et non homogènes de l'équation d'état fractionnaire.

La première contribution consiste à définir des fonctions fondamentales fractionnaires appropriées obtenues pour différentes valeurs propres de la matrice d'état A et l'ordre m . Ces fonctions fondamentales fractionnaires vont être utilisées dans l'élaboration des solutions de l'équation d'état fractionnaire. Comme leurs transformées de Laplace de ces fonctions fondamentales fractionnaires sont des fonctions irrationnelles, alors leurs approximations par des fonctions rationnelles ont été faites pour que ces fonctions deviennent des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles, cosinus, sinus, cosinus amorti et sinus amorti classiques.

La seconde contribution de cette thèse consiste à résoudre l'équation d'état du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable $\frac{d^m x(t)}{dt^m} = Ax(t) + Be(t)$, $0 < m < 1$, pour le cas où les valeurs propres de la matrice d'état sont tous réelles simples et/ou multiples. La méthode développée pour obtenir la solution est basée sur les fonctions de matrices carrées et le théorème de Cayley-Hamilton. Les solutions des cas homogènes et non-homogènes ont été dérivées, en utilisant la définition de la dérivée du Caputo, en termes des fonctions fondamentales introduites, appelées fonctions exponentielles généralisées. La solution générale est exprimée sous forme d'une combinaison linéaire de ces fonctions exponentielles généralisées. En utilisant leurs approximations, la solution générale est donc exprimée sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions exponentielles classiques.

La troisième contribution est une extension de la seconde contribution aux valeurs propres complexes de la matrice d'état A . Dans ce cas, la méthode développée pour obtenir la solution est basée sur la technique de la décomposition modale. Les solutions obtenues sont aussi une combinaison linéaire de fonctions fondamentales fractionnaires appropriées correspondant aux différents types de valeurs propres complexes de la matrice d'état A et de la plage de l'ordre m . Ces fonctions sont définies comme des fonctions cosinus fractionnaire, sinus fractionnaire, cosinus amorti fractionnaire et sinus amorti fractionnaire dont les approximations sont des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles, cosinus, sinus, cosinus amorti et sinus amorti classiques. Dans ce cas aussi, la solution générale est donc exprimée sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions exponentielles, cosinus, sinus, cosinus amorti et sinus amorti classiques.

Perspectives et suggestions :

Dans ce travail on a considéré que les systèmes fractionnaires d'ordre commensurable ; alors comme perspectives, on peut envisager l'extension des travaux de recherche réalisés aux :

- systèmes fractionnaires d'ordre non commensurable.
- systèmes fractionnaires d'ordre complexe.
- systèmes fractionnaires non linéaire.

Référence

Références

1. R. Magin, Fractional calculus in bioengineering. Redding, USA: Begell House Publishers, 2006.
2. J. Sabatier, O. Agrawal and J. Machado, Advances in Fractional Calculus. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2007.
3. M. Dalir and M. Bashour, "Applications of fractional calculus", Applied Mathematical Sciences, vol. 4, no. 21, pp. 1021-1032, 2010.
4. A. Dzieliński, D. Sierociuk and G. Sarwas, "Some applications of fractional order calculus", Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, vol. 58, no. 4, 2010.
5. D. Baleanu, Z. Guevencü and J. Machado, New trends in nanotechnology and fractional calculus applications. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2010.
6. Y. Luo and Y. Chen, Fractional order motion controls, Chichester, UK: Wiley, 2013.
7. A. Babiarz, A. Czornik, J. Klamka and M. Niezabitowski, Theory and Applications of Non-integer Order Systems, Cham, Switzerland: Springer, 2017.
8. I. Podlubny, Fractional differential equations. San Diego, USA: Academic Press, 1999.
9. A. Kilbas, H. Srivastava and J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2006.
10. C.A. Monje, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D.Xue, V.Feliu, Fractional-Order Systems and Controls Fundamentals and Applications. London, UK: Springer-Verlag, 2010.
11. R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petras, Fractional Order Systems. Singapore, Singapore: World Scientific, 2010.
12. K. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York, USA: Wiley, 1993.
13. K. Diethelm, "An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order", Electronic transactions on numerical analysis, vol. 5, pp. 1–6, 1997.
14. Y. Hu, Y. Luo and Z. Lu, "Analytical solution of the linear fractional differential equation by Adomian decomposition method", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 215, no. 1, pp. 220-229, 2008.
15. G. Oturanç, A. Kurnaz and Y. Keskin, "A new analytical approximate method for the solution of fractional differential equations", International Journal of Computer Mathematics, vol. 85, no. 1, pp. 131-142, 2008.

16. Z. Odibat, "Analytic study on linear systems of fractional differential equations", *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 3, pp. 1171-1183, 2010.
17. A. Charef and D. Boucherma, "Analytical solution of the linear fractional system of commensurate order", *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 62, no. 12, pp. 4415-4428, 2011.
18. R. Garra and F. Polito, "Analytic solutions of fractional differential equations by operational methods", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 21, pp. 10642-10646, 2012.
19. X. Shi, L. Huang, Z. Deng and D. Liu, "Analytical Solutions of Fractional Differential Equations Using the Convenient Adomian Series", *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, pp. 1-4, 2014.
20. Uttam Ghosh, Srijan Sengupta, Susmita Sarkar, Shantanu Das, "Analytic Solution of Linear Fractional Differential Equation with Jumarie Derivative in Term of Mittag-Leffler Function", *American Journal of Mathematical Analysis*, vol. 3, no. 2, pp 32-38, 2015.
21. P. Kumar and O. Agrawal, "An approximate method for numerical solution of fractional differential equations", *Signal Processing*, vol. 86, no. 10, pp. 2602-2610, 2006.
22. Z. Odibat and S. Momani, "An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order", *Journal of Applied Mathematics & Informatics*, vol. 26, no. 1-2, pp. 15-27, 2008.
23. S. Esmaeili, M. Shamsi and Y. Luchko, "Numerical solution of fractional differential equations with a collocation method based on Müntz polynomials", *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 62, no. 3, pp. 918-929, 2011.
24. X. Li, "Numerical solution of fractional differential equations using cubic B-spline wavelet collocation method", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 10, pp. 3934-3946, 2012.
25. J. Rad, S. Kazem, M. Shaban, K. Parand and A. Yildirim, "Numerical solution of fractional differential equations with a Tau method based on Legendre and Bernstein polynomials", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 37, no. 3, pp. 329-342, 2013.
26. R. Garrappa, "Trapezoidal methods for fractional differential equations: Theoretical and computational aspects", *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 110, pp. 96-112, 2015.
27. F. Shah, R. Abass and L. Debnath, "Numerical Solution of Fractional Differential Equations Using Haar Wavelet Operational Matrix Method", *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, pp. 1-23, 2016.

28. K. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus*. New York, USA: Academic Press, 1974.
29. I. Podlubny, "Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 5, no. 4, pp. 367–386, 2002.
30. I. Pan and S. Das, *Intelligent Fractional Order Systems and Control*. Berlin, Germany: Springer, 2013.
31. A. Charef, H. Sun, Y. Tsao and B. Onaral, "Fractal system as represented by singularity function", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 9, pp. 1465-1470, 1992.
32. A. Charef, "Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller", *IEE Proceedings of Control Theory and Applications*, vol. 153, no. 6, pp. 714-720, 2006.
33. B. West, "Fractal physiology and the fractional calculus: a perspective", *Frontiers in Physiology*, vol. 1, no. 12, 2010.
34. V. Tarasov, *Fractional dynamics*, Berlin, Germany: Springer, 2010.
35. F. Mainardi, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*, London, UK: Imperial College Press, 2010.
36. D. Matignon and B. d'Andréa-Novel, "Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems", In *Computational engineering in systems applications*, vol. 2, pp. 952-956, 1996.
37. D. Matignon, "Stability properties for generalized fractional differential systems", *ESAIM: Proceedings*, vol. 5, pp.145-158, 1998.
38. I. Petras, *Fractional-order nonlinear systems*, Beijing, China: Higher Education Press, 2011.
39. W. Rugh, *Linear system theory*, Upper Saddle River, USA: prentice hall, vol. 2, 1996.
40. E. Ahmed, A. El-Sayed and H. El-Saka, "On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems", *Physics Letters A*, vol. 358, no. 1, pp. 1-4, 2006.
41. T. Kaczorek and K. Rogowski, *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*. Białystok, Poland: Springer, 2014.
42. A. Charef, "Modeling and analog realization of the fundamental linear fractional order differential equation", *Nonlinear Dynamics*, vol. 46, no. 1-2, pp. 195-210, 2006.
43. D. Boucherma, A. Charef and H. Nezzari, "The solution of state space linear fractional system of commensurate order with complex eigenvalues using regular exponential and

- trigonometric functions", *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 5, no. 1, pp. 79-94, 2015.
44. D. Boucherma, A. Charef, and H. Nezzari, "Rational Function Approximation of a Fundamental Fractional Order Transfer Function", M. Chadli et al. (eds.), *Recent Advances in Electrical Engineering and Control Applications, Lecture Notes in Electrical Engineering 411*, Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG, 2017.
 45. D. Boucherma and A. Charef, "Approximation d'une fonction fondamentale d'ordre fractionnaire", *Proceedings de la seconde conférence sur les systèmes d'ordre fractionnaire et leur applications, SOFA'11*, 24-26 octobre, Tizi-Ouzou, Algérie, 2011.
 46. A. Charef and H. Nezzari, "On the fundamental linear fractional order differential equation", *Nonlinear Dynamics*, vol. 65, no. 3, pp. 335-348, 2010.
 47. H. Nezzari, A. Charef and D. Boucherma, "Analog Circuit Implementation of Fractional Order Damped Sine and Cosine Functions", *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, vol. 3, no. 3, pp.386-393, 2013.
 48. B. Bonilla, M. Rivero and J. Trujillo, "On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 187, no. 1, pp.68-78, 2007.
 49. A. Saadatmandi and M. Dehghan, "A new operational matrix for solving fractional-order differential equations", *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 3, pp. 1326-1336, 2010.
 50. C. Li, A. Chen and J. Ye, "Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation", *Journal of Computational Physics*, vol. 230, no. 9, pp. 3352-3368, 2011.
 51. S. Kumar, K. Singh and R. Saxena, "Closed-Form Analytical Expression of Fractional Order Differentiation in Fractional Fourier Transform Domain", *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 32, no. 4, pp. 1875-1889, 2013.
 52. S. Butera and M. Di Paola, "Corrigendum to Fractional differential equations solved by using Mellin transform [Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 19(7) (2014) 2220–2227]", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 22, no. 1-3, p. 1382, 2015.
 53. S. Damarla and M. Kundu, "Numerical solution of multi-order fractional differential equations using generalized triangular function operational matrices", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 263, pp. 189-203, 2015.
 54. W. Brogan, *Modern control theory*, Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall, 1991.
 55. T. Kailath, *Linear systems*, Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall, 1980.

Abstract

In this work, the resolution of the fractional state space equation $\frac{d^m x(t)}{dt^m} = Ax(t) + Be(t)$, $0 < m < 1$, representing the linear fractional systems of commensurate order, for all the eigenvalues types of the state matrix A and the order of differentiation m was proposed. The explicit expressions of the homogeneous and non-homogeneous solutions of this fractional state space equation were developed. For different values of the state-space matrix A eigenvalues and the order m , the obtained solutions are linear combinations of suitable fractional fundamental functions whose Laplace transforms are irrational functions. The approximations of these irrational functions by rational functions were obtained so that the solutions of the fractional state space equation are linear combinations of classical exponential, cosine, sine, damped cosine and damped sine functions. Illustrative examples for all the eigenvalues types of the state matrix A and the order m were presented and the results obtained were very satisfactory.

Key words:

Cayley-Hamilton theorem; Eigenvalues; Fractional state space equation of commensurate order representation; Fractional system of commensurate order; Irrational function; Modal decomposition; Rational function;

ملخص

في هذا العمل، نقترح حل لمعادلة فضاء الحالة ذات الأس الجزئي $\frac{d^m x(t)}{dt^m} = Ax(t) + Be(t)$ ، $0 < m < 1$ ، والتي تمثل الأنظمة الخطية ذات الأس الجزئي المتعادل، من أجل جميع حالات القيم الذاتية لمصفوفة فضاء الحالة A و درجة التفاضل الجزئي m . وقد تم عرض الصيغ المحددة للحلول المتجانسة وغير المتجانسة لمعادلة فضاء الحالة ذات الأس الجزئي هذه. لأجل القيم الذاتية المختلفة لمصفوفة فضاء الحالة A و درجة التفاضل الجزئي m ، الحلول التي تم الحصول عليها هي تركيبة خطية من دوال أساسية مناسبة ذات الأس الجزئي حيث تحويل لابلاس لها هي دوال غير كسرية. وقد تم الحصول على دوال كسرية تقريبية لهذه الدوال غير كسرية لكي تكون حلول معادلة فضاء الحالة ذات الأس الجزئي عبارة على تركيبة خطية من الدوال التقليدية كالأسية، التجيبية، الجيبية، التجيبية المخمدة والجيبية المخمدة. وقد تم كذلك تقديم أمثلة توضيحية لجميع الحالات للقيم الذاتية لمصفوفة فضاء الحالة A و درجة التفاضل الجزئي m ولقد كانت النتائج التحصل عليها مرضية للغاية.

كلمات المفاتيح

الأنظمة الخطية ذات الأس الجزئي المتعادل، التحلل الشكلي، تمثيل حل لمعادلة فضاء الحالة ذات الأس الجزئي، دالة غير كسرية، دالة كسرية، القيم الذاتية، نظرية Cayley Hamilton