

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : TRAITEMENT DE SIGNAL

Par :

IDIOU Daoud

THEME

Modélisation et Identification des Systèmes d'Ordre Fractionnaire

Soutenue le 11/01/ 2017

Devant le Jury :

| | | |
|------------|---------------|--|
| Président | A. Bennia | <i>Professeur, Université de Constantine</i> |
| Rapporteur | A. Charef | <i>Professeur, Université de Constantine</i> |
| Examineurs | M. Chemachema | <i>Professeur, Université de Constantine</i> |
| | Y. Ferdi | <i>Professeur, ENSB de Constantine</i> |
| | A. Boukabou | <i>Professeur, Université de Jijel</i> |

Année : 2016

DÉDICACES

Je dédie ce travail

A mes chers parents pour tout les sacrifices consentis, pour leur soutien durant toute mes années d'études. Pour leur bonté et leur amour.

A toute ma famille qui m'a aidé dans mes études.

A mes collègues et mes amis.

A tous les membres du laboratoire de Traitement du Signal

Idiou Daoud

REMERCIEMENTS

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce travail de doctorat

Ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire de traitement du signal de l'Université de Constantine, sous la direction scientifique de Monsieur le professeur **Abdelfatah Charef**, que je tiens à remercier profondément de son enthousiasme envers mon travail, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Je le remercie également, pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements et ses précieux conseils.

J'exprime ma gratitude envers Mr. **Abdelhak Bennis** professeur à l'Université de Constantine de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury

Je remercie également Messieurs **Mohamed Chemachema**, Professeur à l'Université de Constantine, **Youcef Ferdi**, Professeur à ENSB de Constantine et **Abdelkrime Boukabou**, Professeur à l'Université de Jijel, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Table des Matières

| | |
|---|-------------|
| Liste des tableaux..... | vii |
| Liste des figures | viii |
| Résumé | x |
| Introduction Générale | 1 |
| <i>Chapitre I. Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaire</i> | |
| I.1 Introduction | 5 |
| I.2 Les Opérateurs d'Ordre Fractionnaire | 5 |
| I.2.1 Définition de <i>Riemann-Liouville (R-L)</i> | 6 |
| I.2.2 Définition de <i>Gründwald-Leitnikov (G-L)</i> ... | 6 |
| I.2.3 Définition de <i>Caputo</i> | 7 |
| I.3 Quelques Propriétés de la Dérivée d'Ordre Fractionnaire | 7 |
| I.4 Transformée de Laplace des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire | 7 |
| I.4.1 Transformée de Laplace de l'Intégrale d'Ordre Fractionnaire | 7 |
| I.4.2 Transformée de Laplace de la Dérivée d'Ordre Fractionnaire | 8 |
| I.4.2.1 Définition de <i>Riemann-Liouville</i> | 8 |
| I.4.2.2 Définition de <i>Caputo</i> | 8 |
| I.4.2.3 Définition de <i>Gründwald-Leitnikov</i> | 8 |
| I.5 Méthodes d'Approximation des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire..... | 8 |
| I.5.1 Méthode de <i>Carlson</i> | 8 |
| I.5.2 Méthode de <i>Matsuda</i> | 9 |
| I.5.3 Méthode de <i>Oustaloup</i> | 9 |
| I.5.4 Méthode de <i>Charef</i> | 9 |
| I.6 Représentation des Systèmes d'Ordre Fractionnaire | 10 |
| I.6.1 Equation Différentielle Généralisée | 11 |
| I.6.2 Fonction de Transfert d'Ordre Fractionnaire..... | 11 |
| I.7 Représentation d'Etat d'un Système d'Ordre Fractionnaire | 12 |
| I.7.1 Représentations d'Espace d'Etat Canoniques | 12 |
| I.7.1.1 Forme Canonique Contrôlable | 12 |
| I.7.1.2 Forme Canonique Observable | 13 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| I.7.1.3 | Forme Canonique Modal | 13 |
| I.8 | Réponse Temporelle des Systèmes Fractionnaires | 14 |
| I.9 | Propriétés Structurelles des Systèmes d'Ordre Fractionnaire | 15 |
| I.9.1 | Contrôlabilité et Observabilité..... | 15 |
| I.9.2 | Stabilité des Systèmes d'Ordre Fractionnaire | 16 |

Chapitre II. Identification des Systèmes Linéaires d'Ordre Fractionnaire

| | | |
|-------------|---|-----------|
| II.1 | Introduction..... | 17 |
| II.2 | Identification Fréquentielle des Systèmes d'Ordre Fractionnaire..... | 18 |
| II.2.1 | Méthode de <i>Levy</i> pour les Modèles d'Ordres Fractionnaires..... | 18 |
| II.2.2 | Approche de <i>Vinagre</i> | 20 |
| II.2.3 | La Méthode Itérative de <i>Sanathanan</i> et <i>Korner</i> | 22 |
| II.2.4 | La Méthode Itérative de <i>Lawrence</i> et <i>Rogers</i> | 23 |
| II.2.5 | La Méthode Itérative de <i>Hartley</i> et <i>Lorenzo</i> | 23 |
| II.3 | Identification Temporelle des Systèmes d'Ordre Fractionnaire | 24 |
| II.3.1 | Méthodes à Erreur de Sortie..... | 24 |
| II.3.1.1 | Méthode Basée sur la Forme Développée du Modèle..... | 25 |
| II.3.1.2 | Méthode de la Décomposition Modale d'une Fonction de Transfert..... | 25 |
| II.3.1.3 | Méthode des Fonctions Orthogonales | 26 |
| II.3.2 | Méthodes à Erreur d'Equation | 27 |
| II.3.2.1 | Modèle Discret de Dimension Infini..... | 29 |
| II.3.2.2 | Méthode des Variables Instrumentales Récursives..... | 31 |

Chapitre III. Implémentation Analogique des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire

Ajustable

| | | |
|--------------|---|-----------|
| III.1 | Introduction | 32 |
| III.2 | Approximation de l'Intégrateur et du Différentiateur d'Ordre Fractionnaire | 32 |
| III.3 | Implémentation Numérique en Structure de Farrow | 34 |
| III.4 | Intégrateur et Différentiateur Analogiques d'Ordre Fractionnaire Ajustable..... | 35 |
| III.4.1 | Calcul des Coefficients de l'Interpolation Polynomiale | 36 |
| III.4.2 | Exemples Illustratifs | 41 |

| | |
|--|-----------|
| III.5 Différentiateur Numérique d'Ordre Fractionnaire Ajustable..... | 49 |
| III.5.1 Conception | 49 |
| III.5.2 Exemple Illustratif | 52 |
| III.6 Conclusion | 56 |
| <i>Chapitre IV. Identification des Systèmes Linéaires Fractionnaire Utilisant le Différentiateur d'Ordre Fractionnaire Ajustable</i> | |
| IV.1 Introduction | 57 |
| IV.2 Identification des Paramètres des Systèmes Linéaires d'Ordre Fractionnaire..... | 58 |
| IV.2.1 Formulation de l'Identification..... | 59 |
| IV.2.2 Algorithme d'Estimation des Paramètres | 60 |
| IV.2.3 Exemples Illustratifs | 62 |
| IV.2.3.1 Exemple 1 | 62 |
| IV.2.3.2 Exemple 2 | 68 |
| IV.3 Identification des Paramètres avec Recherche de l'Ordre des Systèmes Linéaires Fractionnaire d'Ordre Commensurable..... | 74 |
| IV.3.1 Formulation de l'Identification..... | 75 |
| IV.3.2 Algorithme d'Estimation des Paramètres | 76 |
| IV.3.3 Recherche de l'Ordre Commensurable..... | 76 |
| IV.3.4 Exemples Illustratifs | 77 |
| IV.3.4.1 Exemple 1 | 77 |
| IV.3.4.2 Exemple 2 | 80 |
| IV.4 Identification des Paramètres et de l'Ordre du Système Linéaires Fractionnaire d'Ordre Commensurable Fondamental | 83 |
| IV.4.1 Formulation de l'Identification..... | 83 |
| IV.4.2 Algorithme d'Estimation des Paramètres | 84 |
| IV.4.3 Algorithme d'Estimation de l'Ordre Commensurable | 84 |
| IV.4.4 Récapitulation de l'Algorithme d'Identification | 86 |
| IV.4.5 Exemple Illustratif | 86 |
| IV.5 Conclusion | 92 |
| Conclusion Générale | 94 |
| Référence..... | 96 |

Liste des tableaux

| <i>Tableau</i> | <i>page</i> |
|---|-------------|
| III.1 Coefficients a_{in} de l'interpolation polynomiale des résidus k_{I0} , k_{I5} , k_{I12} et k_{I15} | 43 |
| III.2 Coefficients b_n et b_{in} de l'interpolation polynomiale des résidus K_D , k_{D0} , k_{D9} et k_{D15} | 47 |
| IV.1 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres | 66 |
| IV.2 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres | 68 |
| IV.3 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres | 72 |
| IV.4 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres | 74 |
| IV.5 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres | 79 |
| IV.6 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres | 82 |
| IV.7 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre | 88 |
| IV.8 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre | 89 |
| IV.9 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre | 91 |
| IV.10 les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre | 92 |

Liste des figures

| <i>Figure</i> | <i>page</i> |
|---|-------------|
| I.1 Classification des systèmes Linéaires Invariants dans le Temps | 10 |
| II.1 Principe de la méthode à erreur de sortie | 24 |
| II.2 Décomposition modale d'une fonction de transfert | 26 |
| II.3 Modèle à erreur d'équation | 28 |
| II.4 Principe de l'identification récursive d'un système fractionnaire | 30 |
| III.1 Implémentation en structure de Farrow du filtre numérique RIF | 35 |
| III.2 Implémentations analogique ajustable de l'intégrateur s^{-m} en structure de Farrow | 40 |
| III.3 Implémentation analogique ajustable du différentiateur s^m en structure de Farrow | 40 |
| III.4 Tracé des coefficients k_{I0} , k_{I5} , k_{I12} et k_{I15} ainsi que leurs interpolations polynomiales .. | 42 |
| III.5 Amplitude et Phase de $s^{-0.3}$ et de son implémentation ajustable | 44 |
| III.6 Amplitude et Phase de $s^{-0.86}$ et de son implémentation ajustable | 44 |
| III.7 Tracé des coefficients K_D , k_{D0} , k_{D9} et k_{D15} ainsi que leurs interpolations polynomiales.. | 46 |
| III.8 Amplitude et Phase de $s^{0.27}$ et de son implémentation ajustable | 48 |
| III.9 Amplitude et Phase de $s^{0.83}$ et de son implémentation ajustable | 48 |
| III.10 Tracé de Bode du différentiateur fractionnaire $s^{0.84}$, analogique d'ordre fractionnaire ajustable et numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable | 54 |
| III.11 Echelon unité et ses dérivées d'ordre fractionnaire $m= 0.27$, $m=0.48$ et $m = 0.82$ en utilisant le différentiateur numérique RIF ajustable et de Grunwald-Letnikov | 54 |
| III.12 Rampe unité et ses dérivées d'ordre fractionnaire $m= 0.27$, $m=0.48$ et $m = 0.82$ en utilisant le différentiateur numérique RIF ajustable et de Grunwald-Letnikov | 55 |
| III.13 Signal $\sin(0.5t)$ et ses dérivées d'ordre fractionnaire $m= 0.27$, $m=0.48$ et $m = 0.82$ en utilisant le différentiateur numérique RIF ajustable et de Grunwald-Letnikov | 55 |
| IV.1 Les entrées-sorties utilisées pour l'identification | 65 |
| IV.2 Evolution des paramètres estimés | 65 |

| | | |
|--------------|--|-----------|
| IV.3 | L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié | 66 |
| IV.4 | Les entrées-sorties utilisées pour l'identification | 67 |
| IV.5 | Evolution des paramètres identifiés | 67 |
| IV.6 | L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié | 68 |
| IV.7 | Les entrées-sorties utilisées pour l'identification | 71 |
| IV.8 | Evolution des paramètres estimés | 71 |
| IV.9 | L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié | 72 |
| IV.10 | Les entrées-sorties utilisées pour l'identification | 73 |
| IV.11 | Evolution des paramètres identifiés | 73 |
| IV.12 | L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié | 74 |
| IV.13 | Les entrées-sorties utilisées pour l'identification | 78 |
| IV.14 | Tracé de l'erreur quadratique E_α en fonction du paramètre α | 79 |
| IV.15 | L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié | 79 |
| IV.16 | Les entrées-sorties utilisées pour l'identification | 81 |
| IV.17 | Tracé de l'erreur quadratique E_α en fonction du paramètre α | 82 |
| IV.18 | L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié | 82 |
| IV.19 | Evolution des paramètres estimés | 88 |
| IV.20 | Evolution de l'ordre commensurable estimé \hat{n} | 88 |
| IV.21 | Evolution des paramètres estimés | 89 |
| IV.22 | Evolution de l'ordre commensurable estimé \hat{n} | 89 |
| IV.23 | Evolution des paramètres estimés | 90 |
| IV.24 | Evolution de l'ordre commensurable estimé \hat{n} | 91 |
| IV.25 | Evolution des paramètres estimés | 91 |
| IV.26 | Evolution de l'ordre commensurable estimé \hat{n} | 92 |

Résumé

Il a été observé que beaucoup de systèmes physiques sont bien caractérisés par des modèles linéaires d'ordre fractionnaire. Donc, leur identification attire de plus en plus l'intérêt de la communauté scientifique. Cependant, ils constituent un problème d'identification plus difficile que les systèmes d'ordre entier parce qu'on n'exige pas uniquement l'estimation des coefficients du modèle mais aussi la détermination des ordres fractionnaires avec l'ennuyeux calcul numérique des dérivées d'ordre fractionnaire. Cette thèse porte sur l'identification dans le domaine temporel des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire décrits par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. La méthode d'identification proposée est basée sur l'algorithme des moindres carrés récursif appliqué à une structure ARX obtenue de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire lorsqu'on utilise un différentiateur numérique fractionnaire d'ordre ajustable. En premier lieu, cette méthode d'identification a été utilisée pour estimer les paramètres avec la connaissance a priori des ordres fractionnaires de différentiation de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire représentant le système linéaire d'ordre fractionnaire étudié. Ensuite, elle a été utilisée pour estimer les paramètres d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable sans connaissance a priori de l'ordre commensurable qui est obtenu parmi plusieurs valeurs comme celui quand l'erreur quadratique entre les données mesurées et le modèle estimé est la plus petite. Finalement, une extension de la méthode d'identification proposée a été faite pour estimer les paramètres et l'ordre en même temps du système linéaire d'ordre fractionnaire fondamental. Des exemples illustratifs ont été présentés pour valider l'utilité de la méthode d'identification proposée.

Mots Clés :

Différentiateur d'ordre ajustable, Equation différentielle linéaire fractionnaire, Identification
Méthodes des moindres carrés récursif.

Introduction Générale

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement technologique, sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performances. Ce progrès technologique et industriel est dû pour beaucoup au grand saut qualitatif qu'a connu l'outil informatique logiciel et matériel, notamment depuis l'apparition des microprocesseurs, ce qui a permis de rendre possible l'application de méthodes et de techniques considérées jusqu'à présent comme purement théoriques ; ainsi qu'au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour l'analyse, l'identification et la commande des systèmes.

L'une de ces théories, pouvant être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs est le calcul fractionnaire. Dans les dernières décennies, un nombre très important de travaux de recherche a été associé à l'application de la théorie du calcul d'ordre fractionnaire dans différents domaines de la science et de l'ingénierie [1-4]. Beaucoup de systèmes physiques ont affiché un comportement dynamique utilisant des dérivées et des intégrales d'ordre fractionnaire dans leur modélisation tels que les systèmes viscoélastiques, la polarisation d'électrode électrolyte, la polarisation d'interfaces, le comportement cardiaque [5]. Ces systèmes fractionnaires sont généralement régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Récemment, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance de ces systèmes d'ordre fractionnaire dans différents domaines scientifiques [6-14]. En plus, le développement récent des moyens informatiques a considérablement amplifié l'application de ces systèmes fractionnaires dans tous les domaines de la recherche scientifique.

L'identification de systèmes consiste à rechercher un modèle mathématique d'un système dynamique à partir de données expérimentales et de connaissances disponibles a priori. Ce modèle est caractérisé par une structure et par des paramètres qu'il convient de choisir et d'ajuster, afin de reproduire au mieux le comportement entrée-sortie du système, pour cela le choix de la structure et des paramètres de ce modèle est évidemment primordial. L'identification peut se faire soit dans le domaine temporel ou soit dans le domaine fréquentielle.

L'une des applications de la théorie du calcul fractionnaire qui a connu un grand intérêt au cours de ces deux dernières décennies est l'identification des systèmes dynamiques par modèles d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Bien que ce type de modèles pose un problème

d'identification difficile exigeant non seulement l'estimation des paramètres du modèle mais également la détermination des ordres fractionnaires avec le calcul numérique fastidieux des dérivés d'ordre fractionnaire, l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire est devenue un thème de recherche très actif. A partir des années 1990, des travaux sur l'identification par modèles fractionnaires, tant dans le domaine temporel que fréquentiel, ont été proposés [15-23]. Beaucoup de ces techniques d'identification ont été des extensions de méthodes d'identification classiques des systèmes d'ordre entier ; mais quelques méthodes ont été développées pour l'identifier directement les systèmes d'ordre fractionnaire. La majorité des techniques proposées exigent la connaissance a priori des ordres fractionnaires des dérivées et estiment seulement les paramètres du modèle à identifier. Cependant quelques techniques estiment, en même temps, les paramètres ainsi que les ordres fractionnaires des dérivées du modèle à identifier.

Malgré toutes les méthodes introduites pour l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire, un travail de recherche continu et intensif pour le développement de nouvelles techniques d'identification pour ce type de systèmes est toujours en cours pour améliorer les performances de l'identification.

Objectif de la thèse

Il a été observé que beaucoup de systèmes physiques sont bien caractérisés par des modèles linéaires d'ordre fractionnaire. Donc, leur identification attire de plus en plus l'intérêt de la communauté scientifique. Cependant, ils constituent un problème d'identification plus difficile que les systèmes d'ordre entier parce qu'on n'exige pas l'estimation des coefficients du modèle mais aussi la détermination des ordres fractionnaires avec l'ennuyeux calcul numériques des dérivées d'ordre fractionnaire. Ce travail porte essentiellement sur le développement de techniques d'identification dans le domaine temporel des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire décrits par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire en exploitant le concept de la différentiation numérique fractionnaire d'ordre ajustable dans les algorithmes d'identification. La première technique d'identification proposée est basée sur l'algorithme des moindres carrés récursif appliqué à une structure ARX obtenue de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire lorsqu'on utilise le différentiateur numérique fractionnaire d'ordre ajustable pour estimer les paramètres avec la connaissance a priori des ordres fractionnaires de différentiation de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire représentant le système linéaire d'ordre fractionnaire étudié. Une seconde technique d'identification proposée est une extension de la première méthode d'identification proposée

pour estimer les paramètres et l'ordre en même temps de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire représentant le système linéaire d'ordre fractionnaire fondamental étudié.

Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée de la manière suivante :

Le 1^{er} Chapitre fournit quelques définitions de base et quelques propriétés potentiellement utiles de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaires. Puis l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des modèles rationnels de dimension finie présentant les mêmes caractéristiques fréquentielles dans une bande de fréquence limitée. Ce chapitre contient également les diverses méthodes de représentation des systèmes fractionnaires. On y présente la définition de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire, qui modélise les systèmes fractionnaire aussi bien dans l'approche transfert que dans l'approche d'état. Enfin la stabilité des systèmes commensurables est abordée avec la présentation des propriétés structurelles des systèmes d'ordre fractionnaire. Ce chapitre, est destiné à préparer le lecteur à la compréhension des différents outils mathématiques et des techniques qui sont nécessaires à la compréhension des notions présentées dans les autres chapitres.

Le Chapitre 2 vise à présenter l'état de l'art de l'identification par modèle linéaire d'ordre fractionnaire. Ce chapitre se décompose en deux parties ; la première présente les diverses méthodes d'identification fréquentielle des systèmes d'ordre fractionnaire. La seconde partie présente l'identification temporelle où les méthodes d'identification développées jusqu'à présent peuvent être classifiées en deux catégories selon qu'elles soient basées sur la minimisation de l'erreur de sortie ou de l'erreur d'équation.

Le Chapitre 3 est consacré à l'implémentation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire ajustable on y présente une nouvelle méthode de simulation et d'implémentation de l'intégrateur s^{-m} et du différentiateur s^m ($0 < m < 1$) d'ordre fractionnaire par une structure ajustable, en utilisant une structure dite structure de *Farrow* en se basant sur la fonction rationnelle d'approximation de la méthode de *Charef*. Puis on y développe un différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable équivalent au différentiateur analogique s^m ($0 < m < 1$) en se basant sur la méthode d'implémentation analogique de l'intégrateur s^{-m} et du différentiateur s^m ($0 < m < 1$) d'ordre fractionnaire par une structure ajustable. Cette implémentation va être utilisée dans le développement de l'algorithme d'identification des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire.

Le Chapitre 4 présente les techniques d'identification proposées pour les systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaires en utilisant des données

temporelles. On y montre que le problème d'identification peut être résolu par l'algorithme des moindres carrés récursif appliqué à une structure ARX obtenue de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire à l'aide d'un différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable. Un premier algorithme est élaboré où la connaissance a priori des ordres de différenciation de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire est nécessaire pour l'identification des paramètres du modèle fractionnaire. Ce même algorithme est utilisé pour l'identification des systèmes fractionnaires linéaires d'ordre commensurable sans connaissance préalable de l'ordre fractionnaire commensurable de l'équation différentielle linéaire. Dans cette partie on a essayé plusieurs valeurs de l'ordre commensurable autour de sa valeur la plus probable pour estimer les paramètres du modèle fractionnaire et l'estimée de la valeur de l'ordre fractionnaire commensurable est alors celle dont l'erreur quadratique entre les données mesurées et le modèle estimé est la plus petite. Un second algorithme est élaboré pour l'identification du système linéaire d'ordre fractionnaire fondamental qui est une extension du premier algorithme proposé pour inclure l'estimation directe de l'ordre commensurable en plus de l'estimation des paramètres du modèle. Des exemples illustratifs sont également présentés pour valider l'approche d'identification proposée pour les différents systèmes linéaires d'ordre fractionnaires.

I. Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaire

I.1 Introduction

Bien que le calcul d'ordre fractionnaire soit un sujet ancien qui a apparue il y a trois siècles, le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été développé principalement au 19^{ème} siècle par *Riemann* et *Liouville* dont le but était d'étendre la dérivation et l'intégration classique en employant non seulement des ordres entiers mais également des ordres non entiers.

L'analyse d'une large catégorie de processus physiques tels que le bruit électronique [24], les réseaux de télécommunication [25], l'hydraulique [26], la mécanique des fluides [27], la polarisation électrode-électrolyte [28], a montré que les tracés de Bode du contenu fréquentiel de ces processus sont caractérisés par une pente d'ordre fractionnaire et par un comportement temporel régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Ce type de processus est connu comme système d'ordre fractionnaire. Beaucoup de travaux de recherche scientifique ont montré l'importance de ces systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt dans différents domaines scientifiques. Les applications concernent des domaines très variés des sciences physiques, tels que la mécanique, l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, la modélisation, l'identification aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel et notamment la commande des processus, la mécatronique et la robotique [1], [4], [7], [13], [18], [29].

I.2 Les Opérateurs d'Ordre Fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier ${}_t D_t^\alpha$; où t_0 et t sont des limites de l'opération.

L'opérateur intégro-différentiel continu est défini comme [30]:

$${}_t D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0, \\ 1 & \alpha = 0, \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0, \end{cases} \quad (I.1)$$

où $\alpha \in \mathfrak{R}$ est l'ordre de l'opération. Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions.

I.2.1 Définition de *Riemann-Liouville (R-L)*

Définition 1 : Soient $\alpha \in \mathfrak{R}^+$, $t_0 \in \mathfrak{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$

L'intégrale d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par [30]:

$${}^{RL}I_t^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

avec $t \geq t_0$ et $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \alpha > 0 \quad (I.3)$$

Définition 2 : Soient $\alpha \in \mathfrak{R}^+$, $t_0 \in \mathfrak{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$.

La dérivée d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par [30]:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \cdot \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.4)$$

où le nombre entier n est tel que $(n-1) < \alpha < n$.

Cette définition peut aussi être définie à partir de l'équation (I.2) comme suit [30]:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{ I^{(n-\alpha)} f(t) \} \quad (I.5)$$

I.2.2 Définition de *Gründwald-Leitnikov (G-L)*

La dérivée d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$ de *G-L* est donnée par [30] :

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-k.h) \quad (I.6)$$

où $[\cdot]$ dénote la partie entière d'un nombre réel, h est la période d'échantillonnage et les

coefficients $\binom{\alpha}{k}$ sont donnés par :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (I.7)$$

La définition de *Gründwald-Leitnikov* de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme suit [30] :

$${}^{GL}I_t^\alpha f(t) = {}^{GL}D_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^k \binom{-\alpha}{k} f(t-k.h) \quad (I.8)$$

I.2.3 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par [30]

$${}^c D_t^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (I.9)$$

avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n-1) < \alpha < n$. Cette définition peut être formulée également en fonction de la définition de *Riemann-Liouville* comme suit :

$${}^{RL} D^\alpha f(t) = {}^c D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} f^{(k)}(0^+) \quad (I.10)$$

Ce qui peut être écrit autrement par :

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) \quad (I.11)$$

I.3 Quelques Propriétés de la Dérivée d'Ordre Fractionnaire

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes [30]:

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α .
2. Pour $\alpha = n$, un entier, l'opération $D^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
3. Pour $\alpha = 0$ l'opération $D^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité :

$$D^0 f(z) = f(z) \quad (I.12)$$

4. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires

$$D^m \{a f(z) + b g(z)\} = a D^m \{f(z)\} + b D^m \{g(z)\} \quad (I.13)$$

I.4 Transformée de Laplace des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire

I.4.1 Transformée de Laplace de l'Intégrale d'Ordre Fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de *Laplace* de l'intégrale d'ordre fractionnaire de *Riemann-Liouville* d'ordre $\alpha > 0$ définie par (I.2) qui peut être écrite comme une convolution

des fonctions $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $f(t)$ [30] :

$$I^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \quad (I.14)$$

La transformée de *Laplace* de la fonction $t^{\alpha-1}$ est donnée comme [30]:

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (I.15)$$

donc la transformée de *Laplace* de l'intégrale d'ordre fractionnaire de *Riemann-Liouville* est :

$$L\{I^\alpha(f(t))\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (I.16)$$

De la même façon la transformée de *Laplace* de l'intégrale d'ordre fractionnaire défini par *Gründwald-Leitnikov* ou par *Caputo* est aussi donnée par l'équation (I.16).

I.4.2 Transformée de *Laplace* de la Dérivée d'Ordre Fractionnaire

I.4.2.1 Définition de *Riemann-Liouville*

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (I.17)$$

avec $(n-1) < \alpha < n$; mais l'applicabilité pratique de la transformée de *Laplace* de la dérivée de *Riemann-Liouville* est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$ [30].

I.4.2.2 Définition de *Caputo*

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (I.18)$$

avec $\alpha > 0$ [30]. L'avantage principal de la définition de *Caputo* par rapport à celle de *Riemann-Liouville* est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter. En plus, la dérivée de *Caputo* d'une constante est zéro, alors que la dérivée de *Riemann-Liouville* d'une constante est une fonction non bornée à $t = 0$.

I.4.2.3 Définition de *Gründwald-Leitnikov* [30]

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad \text{avec } \alpha > 0 \quad (I.19)$$

I.5 Méthodes d'Approximation des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire

À cause de sa représentation irrationnelle, l'utilisation des méthodes ordinaires pour la simulation et l'identification d'un système d'ordre fractionnaire est dans la plus part des cas très compliquée. Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes d'approximation par fonction rationnelle de l'opérateur d'ordre fractionnaire ont été développées durant les dernières décennies [31]. En général, une approximation rationnelle de l'opérateur d'ordre fractionnaire $H(s) = s^\alpha$ peut être obtenue en utilisant différentes méthodes [31].

I.5.1 Méthode de *Carlson*

Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\alpha} = s \quad (I.20)$$

La méthode itérative de *Newton* mènera à une séquence d'approximations $H_i(s)$ qui commence par la valeur initiale $H_0(s) = 1$ [31]. La fonction rationnelle approximant $H(s) = s^\alpha$ est obtenue sous la forme suivante:

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)(H_{i-1}(s))^{1/\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)s}{\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)(H_{i-1}(s))^{1/\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)s} \quad (I.21)$$

I.5.2 Méthode de *Matsuda*

La méthode proposée est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle obtenue par la technique de l'Expansion par Fractions Continue (EFC) et l'ajustement de la fonction originale dans un ensemble de points espacés par une échelle logarithmique [31].

En supposant que les points choisis sont s_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) l'approximation prend la forme :

$$H(s) = a_0(s) + \frac{s - s_0}{a_1(s) + a_2(s) + a_3(s) + \dots} \quad (I.22)$$

où $a_i = v_i(s_i)$, $v_0(s) = H(s)$, $v_{i+1} = \frac{s - s_i}{v_i(s) - a_i}$

I.5.3 Méthode d'*Oustaloup*

La méthode d'approximation d'*Oustaloup* est donnée par [31] :

$$H(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + s/\omega_k}{1 + s/\omega'_k} \quad (I.23)$$

avec :

$$\begin{aligned} \omega'_0 &= \gamma^{-0.5} \omega_u & ; & & \omega_0 &= \gamma^{0.5} \omega_u \\ \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} &= \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \gamma > 1; & & & \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_k} &= \eta > 0; & & \frac{\omega_k}{\omega'_k} = \gamma > 0 \\ N &= \frac{\log(\omega_N/\omega_0)}{\log(\gamma)} & ; & & \alpha &= \frac{\log \gamma}{\log(\gamma\eta)} \end{aligned}$$

où ω_u la fréquence du gain unité est tel que, $\omega_u = \sqrt{\omega_h \omega_b}$, ω_h et ω_b ont les fréquences transitoires hautes, et basse respectivement.

I.5.4 Méthode de *Charef*

Cette méthode proposée est basée sur l'approximation d'une fonction de la forme [31] :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \quad (I.24)$$

avec $0 < \alpha < 1$, on peut réécrire la fonction de l'équation (I.24) comme suit:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.25)$$

où $N+1$ est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande fréquentielle d'approximation. L'équation (I.25) peut être tronquée à un nombre fini N , et l'approximation devient :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.26)$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_0 = p_T \sqrt{b} \quad p_i = p_0 (a.b)^i \quad z_i = a.p_0 (a.b)^i$$

Avec

$$a = 10^{\lfloor y/10(1-\alpha) \rfloor}, b = 10^{\lfloor y/10.\alpha \rfloor}, a.b = 10^{\lfloor y/10\alpha(1-\alpha) \rfloor}.$$

$$N = \text{integer} \left[\frac{\log(\omega_{\max}/p_0)}{\log(a.b)} \right] + 1$$

où y est l'erreur d'approximation et ω_{\max} est la bande de fréquence d'approximation.

I.6 Représentation des Systèmes d'Ordre Fractionnaire

Le diagramme de classification des systèmes Linéaires Invariants dans le Temps (LIT) est donné dans la figure (I.1) :

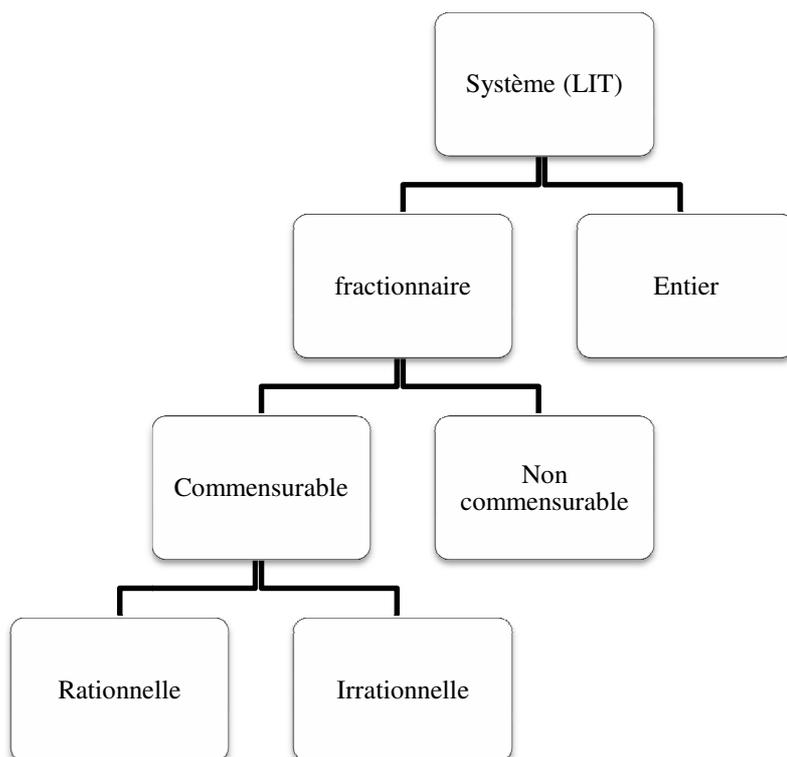


Figure (I.1) : Classification des systèmes Linéaires Invariants dans le Temps

Plusieurs modes de représentation de systèmes fractionnaire existent tels que l'équation différentielle, fonction de transfert, équation récurrente et représentation d'état. Le comportement d'un système d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenant des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Dans cette section, les systèmes sont considérés à temps continus, Linéaires et Invariants dans le Temps (LIT).

I.6.1 Equation Différentielle Généralisée

Dans le cas monovarié, un modèle mathématique est généralement représenté par une équation différentielle d'ordre fractionnaire :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (\text{I.27})$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, les coefficients a_i et b_j sont des réels, les ordres de dérivation sont ordonnés pour des raisons d'identifiabilité : $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ et $0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_m$ et n et m sont des nombres entiers. Comme dans le cas d'une équation différentielle à dérivées entières, les ordres de dérivation doivent vérifier la contrainte $\alpha_n > \beta_m$ pour que le système soit strictement propre [32].

Un système d'ordre fractionnaire est dit d'ordre commensurable lorsque tous les ordres de dérivation $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ sont multiples du même nombre non entier α tel que $0 < \alpha < 1$. Alors l'équation (I.27) peut se mettre sous la forme [4] :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j\alpha} u(t) \quad (\text{I.28})$$

Dans ce cas pour vérifier la contrainte $\alpha_n > \beta_m$ on doit avoir $n > m$.

I.6.2 Fonction de Transfert d'Ordre Fractionnaire

La transformée de Laplace de l'équation différentielle de l'équation (I.27) permet de déterminer la fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire comme suit [4] :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\beta_j}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i}} \quad (\text{I.29})$$

Dans le cas des systèmes fractionnaires d'ordre commensurable α de l'équation (I.28), cette fonction de transfert s'écrit sous la forme :

$$F(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{j\alpha}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{i\alpha}} \quad (\text{I.30})$$

Si l'ordre commensurable α est l'inverse d'un nombre entier Q , $F(s)$ de l'équation (I.30) s'écrit comme suit :

$$F(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{j/Q}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{i/Q}} \quad (\text{I.31})$$

I.7 Représentation d'Etat d'un Système d'Ordre Fractionnaire

La représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire continu invariant dans le temps comporte deux équations [4] :

- * une équation d'état d'ordre fractionnaire dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel
- * une équation d'observation identique à celle du cas entier

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (I.32)$$

où $u(t)$ est le vecteur d'entrée, $y(t)$ est le vecteur de sortie, $x(t)$ est le vecteur d'état et α est l'ordre de dérivation ($0 < \alpha < 1$). Les matrices A , B , C et D sont de dimension appropriée et à coefficients constants appelées respectivement matrice d'évolution, matrice de commande, matrice d'observation et matrice d'action directe.

I.7.1 Représentations d'Espace d'Etat Canoniques

On considère un système fractionnaire d'ordre commensurable monovarié dont la fonction de transfert est représentée sous la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k}, a_0 = 1, m \leq n \text{ et } (0 < \alpha < 1) \quad (I.33)$$

Trois représentations d'espace d'état canoniques peuvent être proposées similaires à celles des cas classiques développés pour les systèmes d'équations différentielles d'ordre entier.

I.7.1.1 Forme Canonique Contrôlable

Dans cette représentation, le premier état est défini comme :

$$X_1(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} U(s) \quad (I.34)$$

et les variables d'état restantes du vecteur d'état sont définies d'une manière récursive comme :

$$x_{i+1} = D^\alpha x_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1,$$

La représentation d'état sous la forme canonique contrôlable est exprimée par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-2} \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (I.35)$$

$$y = [b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (I.36)$$

I.7.1.2 Forme Canonique Observable

De l'équation (I.33), on peut écrire l'expression suivante:

$$\begin{aligned} s^\alpha [((s^\alpha)^{n-1} + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-2} + \dots + a_1)Y(s) - (b_n(s^\alpha)^{n-1} + \dots + b_1)U(s)] \\ = b_0U(s) - a_0Y(s) \\ s^\alpha X_1(s) = b_0U(s) - a_0Y(s) \end{aligned} \quad (I.37)$$

$$X_1(s) = ((s^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1)Y(s) - (b_n(s^\alpha)^{n-1} + \dots + b_1)U(s) \quad (I.38)$$

Dans cette représentation, le premier état est défini comme :

$$\mathfrak{D}^\alpha x_1 = b_0u - a_0y$$

De la seconde partie de équation (I.38) on peut aussi écrire que:

$$\begin{aligned} s^\alpha [((s^\alpha)^{n-2} + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-3} + \dots + a_2)Y(s) - (b_n(s^\alpha)^{n-2} + \dots + b_2)U(s)] \\ = X_1(s) + b_1U(s) - a_1Y(s) \\ s^\alpha X_2(s) = X_1(s) + b_1U(s) - a_1Y(s) \end{aligned} \quad (I.39)$$

$$X_2(s) = ((s^\alpha)^{n-2} + \dots + a_2)Y(s) - (b_n(s^\alpha)^{n-2} + \dots + b_2)U(s) \quad (I.40)$$

Donc, on a: $\mathfrak{D}^\alpha x_2 = x_1 + b_1u - a_1y$

En répétant cette procédure jusqu'à X_n , on obtient:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^\alpha x_n &= x_{n-1} + b_{n-1}u - a_{n-1}y \\ y &= x_n + b_nu \end{aligned} \quad (I.41)$$

La dernière expression de (I.41) est l'équation de sortie.

En substituant y de l'équation de sortie dans les premières expressions des équations de (I.38), (I.40), (I.41), la forme canonique observable est donnée par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{D}^\alpha x_1 \\ \mathfrak{D}^\alpha x_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{D}^\alpha x_{n-2} \\ \mathfrak{D}^\alpha x_{n-1} \\ \mathfrak{D}^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-3} - b_n a_{n-3} \\ b_{n-2} - b_n a_{n-2} \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u \quad (I.42)$$

$$y = [0, 0, \dots, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u, \quad (I.43)$$

I.7.1.3 Forme Canonique Modal

On considère que le premier pôle λ_l de la fonction de transfert $G(s)$ de l'équation (I.33) est de multiplicité r et les $(n - r)$ pôles restant sont de multiplicité 1. On peut donc écrire que :

$$Y(s) = \left[b_n + \frac{\rho_1}{(s^\alpha - \lambda_1)^r} + \dots + \frac{\rho_{r-1}}{(s^\alpha - \lambda_1)^2} + \frac{\rho_r}{s^\alpha - \lambda_1} + \frac{\rho_{r+1}}{s^\alpha - \lambda_{r+1}} + \dots + \frac{\rho_n}{s^\alpha - \lambda_n} \right] U(s) \quad (I.44)$$

Alors, dans cette représentation, les variables d'état sont définies comme :

$$\begin{aligned}
 X_1(s) &= \frac{1}{(s^{\alpha-\lambda_1})^r} U(s) = \frac{1}{s^{\alpha-\lambda_1}} X_2(s) \\
 X_2(s) &= \frac{1}{(s^{\alpha-\lambda_1})^{r-1}} U(s) = \frac{1}{s^{\alpha-\lambda_1}} X_3(s) \\
 &\vdots \\
 X_{r-1}(s) &= \frac{1}{(s^{\alpha-\lambda_1})^2} U(s) = \frac{1}{s^{\alpha-\lambda_1}} X_r(s) \\
 X_r(s) &= \frac{1}{s^{\alpha-\lambda_1}} U(s) \\
 X_{r+1}(s) &= \frac{1}{s^{\alpha-\lambda_{r+1}}} U(s) \\
 &\vdots \\
 X_n(s) &= \frac{1}{s^{\alpha-\lambda_n}} U(s)
 \end{aligned} \tag{I.45}$$

Des $(r-1)$ premières expressions de l'équation (I.45), on peut obtenir les $(r-1)$ premières équations d'états comme : $D^\alpha x_i = \lambda_i x_i + x_{i+1}$, ($1 \leq i < r$) et des $(n-r+1)$ expressions restantes on peut obtenir les autres équations d'états comme : $D^\alpha x_i = \lambda_i x_i + u$, ($r \leq i < n$) (avec $\lambda_r = \lambda_1$). Alors, la représentation canonique modal est donnée par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}^\alpha x_1 \\ \mathcal{D}^\alpha x_2 \\ \vdots \\ \mathcal{D}^\alpha x_{n-2} \\ \mathcal{D}^\alpha x_{n-1} \\ \mathcal{D}^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{r+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{I.46}$$

$$y = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r, \rho_{r+1}, \dots, \rho_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \tag{I.47}$$

I.8 Réponse Temporelle des Systèmes Fractionnaires :

Un système fractionnaire d'ordre commensurable $\alpha < 1$ est représenté par le modèle d'état suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{I.48}$$

En utilisant la transformée de Laplace de cette équation on obtient [4]:

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} x_0 \tag{I.49}$$

où $x(t=0) = x_0$. Donc l'expression temporelle du vecteur d'état $x(t)$ peut être déterminé par :

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[(s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} x_0] \tag{I.50}$$

Comme dans le cas entier, la matrice de transition est représentée par :

$$\psi(t) = L^{-1}[(s^\alpha I - A)^{-1}] \quad \text{pour } t > 0 \tag{I.51}$$

$$\text{Donc } x(t) = \psi(t)x_0 + \psi(t) * [Bu(t)] \quad (\text{I.52})$$

$$x(t) = \psi(t)x_0 + \int_0^t \psi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (\text{I.53})$$

avec $\psi(t)$ est donnée par [4] :

$$\psi(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} \quad (\text{I.54})$$

où E_α étant la fonction de *Mittag-Leffler* qui est la généralisation de la fonction exponentielle ; en effet, lorsque $\alpha = 1$ l'équation (I.54) donne e^{At} [4] .

Une autre technique pour avoir une solution est obtenue en utilisant la définition de *Grünwald-Letnikov* de l'équation (I.6) des dérivés ordre fractionnaire. Donc la réponse temporelle du système d'ordre fractionnaire de l'équation (I.27) est obtenue en utilisant l'équation suivante [4] :

$$y(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} \left[\sum_{j=0}^m \frac{b_j}{h^{\beta_j}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-t_0}{h}\right]} (-1)^k \binom{\beta_j}{k} y(t-k.h)u(t) - \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}} \sum_{k=1}^{\left[\frac{t-t_0}{h}\right]} (-1)^k \binom{\alpha_i}{k} y(t-k.h) \right] \quad (\text{I.55})$$

I.9 Propriétés Structurelles des Systèmes d'Ordre Fractionnaire

I.9.1 Contrôlabilité et Observabilité

Théorème 1:

Le système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (I.48) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité donnée par :

$$M_{cont} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{L-1}B] \quad (\text{I.56})$$

est inversible ; avec L est le nombre de variable d'état [4].

Théorème 2:

Le système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (I.48) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité donnée par :

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{L-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.57})$$

est inversible ; avec L est le nombre de variable d'état [4].

Les conditions d'observabilité et de contrôlabilité des systèmes d'ordre fractionnaires sont alors les mêmes que pour les systèmes entiers.

I.9.2 Stabilité des Systèmes d'Ordre Fractionnaire

On considère un système fractionnaire d'ordre commensurable multi-variable dont la représentation d'état est donnée comme :

$$\mathcal{D}^\alpha x = Ax + Bu \quad (I.58)$$

$$y = Cx + Du \quad (I.59)$$

où α est l'ordre tel que $0 < \alpha < 1$, $u \in R^l$ est le vecteur d'entrée, $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $y \in R^p$ est le vecteur de sortie. $A \in R^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B \in R^{n \times l}$ est la matrice d'entrée, $C \in R^{p \times n}$ est la matrice de sortie, et $D \in R^{p \times l}$ est la matrice de transmission directe.

La transformée de Laplace des équations (I.58) et (I.59) donne :

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (I.60)$$

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1}s^{\alpha-1}x(0)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (I.61)$$

Les conditions initiales expriment directement les valeurs des états à $t = 0$. Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles ($x(0) = 0$), (I.60) devient :

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) \quad (I.62)$$

La combinaison des équations (I.61) et (I.62) nous donne :

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (I.63)$$

$$G(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D$$

où I est la matrice d'identité de dimension ($n \times n$), et la matrice $G(s)$ de dimension ($p \times l$) représente une matrice de transfert dont les polynômes de numérateur et dénominateur sont exprimés en termes de la puissances de s^α . Chaque élément de la matrice $G(s)$ est une fonction de transfert avec un dénominateur commun donnée par :

$$\varphi(s^\alpha) = \det(s^\alpha I - A)^{-1} \quad (I.64)$$

Les racines de $\varphi(s^\alpha) = 0$ de l'équation (I.64) sont définis par les termes p_i et sont données par :

$$p_i = (\lambda_i)^{1/\alpha} \quad (I.65)$$

où λ_i , ($1 \leq i \leq n$) sont les valeurs propres de la matrice A .

En général, pour un système ordre fractionnaire commensurable où l'ordre de dérivation est un nombre réel la condition de stabilité se ramène à une condition sur les valeurs propres sous la forme:[33] :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (I.66)$$

Pour $\alpha = 1$, ceci est le théorème classique de l'emplacement du pôle dans le plan complexe: pas de pôle dans le plan droit de Riemann

II. Identification des Systèmes Linéaires d'Ordre Fractionnaire

II.1 Introduction

Plusieurs processus physiques sont connus pour afficher une dynamique d'ordre fractionnaire ; par conséquent ils ont un comportement temporel régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire [1-2], [7], [18], [34]. Alors, un modèle entier n'est pas convenable pour l'identification de ce type de système. Dans les dernières décennies, l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire a gagné beaucoup d'intérêts de la communauté scientifique. Malgré que ce type de modèle pose un problème d'identification plus difficile exigeant non seulement l'estimation des paramètres du modèle mais également la détermination de ses ordres fractionnaires, l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire est devenue un thème de recherche très actif. En plus, l'évaluation numérique de la dérivation d'ordre fractionnaire est la manipulation des matrices de données de dimension élevée conduit aux problèmes des singularités matricielles et par conséquent au biais d'estimation dû aux erreurs de calcul.

Deux classes d'identification des systèmes d'ordre fractionnaire ont été développées ; la première exige la connaissance a priori des ordres fractionnaires et estime seulement les paramètres du modèle mais la seconde estime les paramètres ainsi que les ordres fractionnaires des dérivés du modèle à identifier en même temps. Les premières techniques proposées étaient des extensions de certaines méthodes classiques d'identification dans le domaine fréquentiel des systèmes d'ordre entier [15],[17],[35-36]. Depuis, de nouvelles méthodes temporelles et fréquentielles ont été développées pour l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire [5], [19-22], [37-38]. Dans [37], la méthode d'identification proposée est basée sur la technique des variables instrumentales pour les systèmes d'ordre fractionnaire continu. Dans [19], en utilisant la technique d'optimisation d'essaim particulière, l'interpolation vectorielle a été proposée comme méthode d'identification des systèmes d'ordre fractionnaire. La méthode de [21] est une prolongation de la technique d'identification basée sur le concept de distribution continue de [17] pour inclure les systèmes d'ordre fractionnaire avec pôles et zéros simultanément. Une technique basée sur l'algorithme des moindres carrés récursive a été proposé dans [22] pour l'estimation des paramètres du model d'ordre fractionnaire avec connaissance a priori des ordres fractionnaires. Ainsi, ce chapitre est consacré à la recherche des méthodes d'identification pour les modèles d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentiel et temporel

II.2 Identification Fréquentielle des Systèmes d'Ordre Fractionnaire

Le principe de base de l'ensemble des algorithmes d'identification fréquentielle consiste à estimer le vecteur des paramètres θ composé par les coefficients des polynômes $A(s)$ et $B(s)$ en minimisant la norme ℓ_2 de l'écart ε entre le modèle \hat{G} et le système à identifier G sur un ensemble de N fréquences de mesure. Plusieurs méthodes d'identification sont établies pour des modèles d'ordre fractionnaire à partir des données de la réponse fréquentielle (fréquence, amplitude et phase) sont résumées ci-dessous.

II.2.1 Méthode de Levy pour les Modèles d'Ordres Fractionnaires [38]

Avec un comportement en fréquences connu, la méthode de *Levy* est bien établie pour trouver les coefficients d'une fonction de transfert d'ordre entier avec la connaissance a priori des ordres m et n . L'extension de cette méthode pour les modèles d'ordre fractionnaires nécessite également la connaissance a priori de l'ordre commensurable α .

Supposons que nous avons un processus G avec un comportement en fréquence connu et nous voulons le modéliser par un modèle fractionnaire d'ordre commensurable dont la fonction de transfert est donnée par l'équation (II.1):

$$\hat{G}(s) = \frac{b_0 + b_1 s^\alpha + b_2 s^{2\alpha} + \dots + b_m s^{m\alpha}}{1 + a_1 s^\alpha + a_2 s^{2\alpha} + \dots + a_n s^{n\alpha}} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{k\alpha}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k s^{k\alpha}} \quad (\text{II. 1})$$

La réponse fréquentielle de l'équation (II.1) est donnée par

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^{k\alpha}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k (j\omega)^{k\alpha}} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{\gamma(\omega) + j\delta(\omega)}{\sigma(\omega) + j\tau(\omega)} \quad (\text{II. 2})$$

où N et D sont des nombres complexes et γ , δ , σ et τ , sont les nombres réelles. L'erreur entre le model et le processus G pour une fréquence ω donnée sera égale à :

$$\varepsilon(\omega) = G(j\omega) - \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (\text{II. 3})$$

Dans cet algorithmme, les paramètres de l'équation (II.1) sont calculés pour minimiser le carré de cette erreur. De l'équation (II.3), on peut écrire que :

$$\varepsilon(\omega)D(\omega) = G(j\omega)D(\omega) - N(\omega) \quad (\text{II. 4})$$

Pour
$$E(\omega) = \varepsilon(\omega)D(\omega) \quad (\text{II. 5})$$

alors,
$$\begin{aligned} E(\omega) &= GD - N \\ &= \{[Re(G) + jIm(G)](\sigma + j\tau)\} - (\gamma + j\delta) \\ &= [Re(G)\sigma - Im(G)\tau - \gamma] + j[Re(G)\tau + Im(G)\sigma - \delta] \end{aligned} \quad (\text{II. 6})$$

Le carré de l'erreur E est donc donné par l'expression suivante :

$$|E|^2 = [Re(G)\sigma - Im(G)\tau - \gamma]^2 + [Re(G)\tau + Im(G)\sigma - \delta]^2 \quad (\text{II. 7})$$

De (II.2), nous avons :

$$\gamma(\omega) = \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Re}[(j\omega)^{k\alpha}] \quad (\text{II. 8})$$

$$\delta(\omega) = \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Im}[(j\omega)^{k\alpha}] \quad (\text{II. 9})$$

$$\sigma(\omega) = 1 + \sum_{k=1}^n a_k \operatorname{Re}[(j\omega)^{k\alpha}] \quad (\text{II. 10})$$

$$\tau(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \operatorname{Im}[(j\omega)^{k\alpha}] \quad (\text{II. 11})$$

Si nous dérivons $|E|^2$ par rapport aux coefficients b_k ($0 \leq k \leq m$) et a_k ($1 \leq k \leq n$), nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\partial |E|^2}{\partial b_k} &= -2[\operatorname{Re}(G)\sigma - \operatorname{Im}(G)\tau - \gamma]\operatorname{Re}[(j\omega)^{k\alpha}] \\ &\quad -2[\operatorname{Re}(G)\tau + \operatorname{Im}(G)\sigma - \delta]\operatorname{Im}[(j\omega)^{k\alpha}] \end{aligned} \quad (\text{II. 12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial |E|^2}{\partial a_k} &= 2[\operatorname{Re}(G)\sigma - \operatorname{Im}(G)\tau - \gamma]\operatorname{Re}(G)\operatorname{Re}[(j\omega)^{k\alpha}] \\ &\quad +2[\operatorname{Re}(G)\tau + \operatorname{Im}(G)\sigma - \delta]\operatorname{Im}(G)\operatorname{Im}[(j\omega)^{k\alpha}] \\ &\quad -2[\operatorname{Re}(G)\sigma - \operatorname{Im}(G)\tau - \gamma]\operatorname{Im}(G)\operatorname{Re}[(j\omega)^{k\alpha}] \\ &\quad +2[\operatorname{Re}(G)\tau + \operatorname{Im}(G)\sigma - \delta]\operatorname{Re}(G)\operatorname{Im}[(j\omega)^{k\alpha}] \end{aligned} \quad (\text{II. 13})$$

Mettons les expressions des équations (II.12) et (II.13) égales à zéro, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |E|^2}{\partial b_k} = 0 &\Leftrightarrow [\operatorname{Re}(G)\sigma - \operatorname{Im}(G)\tau - \gamma]\operatorname{Re}[(j\omega)^{k\alpha}] \\ &\quad +[\operatorname{Re}(G)\tau + \operatorname{Im}(G)\sigma - \delta]\operatorname{Im}[(j\omega)^{k\alpha}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{II. 14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial |E|^2}{\partial a_k} = 0 &\Leftrightarrow \sigma\{[\operatorname{Im}(G)]^2 + [\operatorname{Re}(G)]^2\}\operatorname{Re}[(j\omega)^{k\alpha}] \\ &\quad +\tau\{[\operatorname{Im}(G)]^2 + [\operatorname{Re}(G)]^2\}\operatorname{Im}[(j\omega)^{k\alpha}] \\ &\quad +\gamma\{\operatorname{Im}(G)\operatorname{Im}[(j\omega)^{k\alpha}] - \operatorname{Re}(G)\operatorname{Re}[(j\omega)^{k\alpha}]\} \\ &\quad +\delta\{-\operatorname{Im}(G)\operatorname{Re}[(j\omega)^{k\alpha}] - \operatorname{Re}(G)\operatorname{Im}[(j\omega)^{k\alpha}]\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II. 15})$$

Les $(m + 1)$ équations données par (II.14) et les n équations données par (II.15) forment un système linéaire qui peut être résolu de manière à trouver les coefficients b_k ($0 \leq k \leq m$) et a_k ($1 \leq k \leq n$), de l'équation (II.1). Habituellement, le comportement en fréquence du processus est connu dans plus d'une fréquence. Alors, le système à résoudre des équations (II.14) et (II.15) peut être écrit sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} \quad (\text{II. 16})$$

avec

$$A_{l,c} = \sum_{p=1}^P \left\{ -\operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] - \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \right\} \quad (\text{II. 17})$$

$$l = 0 \dots m \text{ et } c = 0 \dots m$$

$$\begin{aligned} B_{l,c} = & \sum_{p=1}^P \left\{ \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \operatorname{Re} [G(j\omega_p)] \right. \\ & + \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \operatorname{Im} [G(j\omega_p)] \\ & - \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \operatorname{Im} [G(j\omega_p)] \\ & \left. + \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \operatorname{Re} [G(j\omega_p)] \right\} \end{aligned} \quad l = 0, \dots, m \text{ et } c = 0, \dots, n \quad (\text{II. 18})$$

$$\begin{aligned} C_{l,c} = & \sum_{p=1}^P \left\{ -\operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \operatorname{Re} [G(j\omega_p)] \right. \\ & + \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \operatorname{Im} [G(j\omega_p)] \\ & - \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \operatorname{Im} [G(j\omega_p)] \\ & \left. - \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \operatorname{Re} [G(j\omega_p)] \right\} \end{aligned} \quad l = 0 \dots n \text{ et } c = 0 \dots m \quad (\text{II. 19})$$

$$\begin{aligned} D_{l,c} = & \sum_{p=1}^P \left(\left\{ \operatorname{Re} [G(j\omega_p)] \right\}^2 + \left\{ \operatorname{Im} [G(j\omega_p)] \right\}^2 \right) \\ & \left\{ \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] + \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{c\alpha} \right] \right\} \end{aligned} \quad l = 0 \dots n \text{ et } c = 0 \dots n \quad (\text{II. 20})$$

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (\text{II. 21})$$

$$e_{l,1} = \sum_{p=1}^P \left\{ -\operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Re} [G(j\omega_p)] - \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Im} [G(j\omega_p)] \right\} \quad l = 0 \dots m \quad (\text{II. 22})$$

$$g_{l,1} = \sum_{p=1}^P -\operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \left(\left\{ \operatorname{Re} [G(j\omega_p)] \right\}^2 + \left\{ \operatorname{Im} [G(j\omega_p)] \right\}^2 \right) \quad l = 0 \dots n \quad (\text{II. 23})$$

II.2.2 Approche de *Vinagre* [39]

L'approche de l'identification dans le domaine fréquentiel proposée par *Vinagre* est une amélioration de la méthode de *Levy*. La méthode est obtenue en introduisant une fonction poids dans l'erreur de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E = & W \cdot G(j\omega) [a_n(j\omega)^{n\alpha} + \dots + a_2(j\omega)^{2\alpha} + a_1(j\omega)^\alpha + 1] \\ & - [b_m(j\omega)^{m\alpha} + \dots + b_2(j\omega)^{2\alpha} + b_1(j\omega)^\alpha + b_0] \end{aligned} \quad (\text{II. 24})$$

où les poids W sont en fonction de la fréquence ω_p , pour $p = 1 \dots P$. Alors, W sera donnée par :

$$W = \begin{cases} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_1^2}; & p = 1 \\ \frac{\omega_{p+1} - \omega_{p-1}}{2\omega_p^2}; & 1 < p < P \\ \frac{\omega_P - \omega_{P-1}}{2\omega_P^2}; & p = P \end{cases} \quad (\text{II. 25})$$

Tout comme la méthode de *Levy* minimise $\sum_{p=1}^P |E(\omega_p)|^2$ au lieu de $\sum_{p=1}^P |\varepsilon(\omega_p)|^2$

$$J = \sum_{p=1}^P |E(\omega_p)|^2 w_p \quad \text{avec} \quad w_p = \frac{W}{(\omega_p^2)}$$

Les poids sont destinés à améliorer la qualité de l'approximation aux basses fréquences. Étant donné que le poids ne dépend pas de coefficients a_i et b_j , il ne changera pas les valeurs des dérivés (II.12) et (II.13). La seule différence réside dans la méthode et dans le fait que les matrices et les vecteurs (II.16) vont maintenant être donnés par

$$A_{k,l} = \sum_{p=1}^P \left\{ -\text{Re} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] - \text{Im} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \right\} w_p \quad (\text{II. 26})$$

$$k = 0 \dots m, l = 0 \dots m$$

$$B_{k,l} = \sum_{p=1}^P \left\{ \text{Re} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \text{Re}[G(j\omega_p)] \right. \\ \left. + \text{Im} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \text{Im}[G(j\omega_p)] \right. \\ \left. - \text{Re} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \text{Im}[G(j\omega_p)] \right. \\ \left. + \text{Im} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \text{Re}[G(j\omega_p)] \right\} w_p \quad (\text{II. 27})$$

$$k = 0 \dots m, l = 0 \dots n$$

$$C_{k,l} = \sum_{p=1}^P \left(\left\{ \text{Im} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Im}[G(j\omega_p)] - \text{Re} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Re}[G(j\omega_p)] \right\} \text{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \right. \\ \left. + \left\{ -\text{Re} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Im}[G(j\omega_p)] - \text{Im} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Re}[G(j\omega_p)] \right\} \text{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \right) w_p \quad (\text{II. 28})$$

$$k = 0 \dots n, l = 0 \dots m$$

$$D_{k,l} = \sum_{p=1}^P \left(\left\{ \text{Re}[G(j\omega_p)] \right\}^2 + \left\{ \text{Im}[G(j\omega_p)] \right\}^2 \right) \\ \left\{ \text{Re} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] + \text{Im} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \right\} w_p \quad (\text{II. 29})$$

$$k = 0 \dots n, l = 0 \dots n$$

$$e_{k,1} = \sum_{p=1}^P \left\{ -\text{Re} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Re}[G(j\omega_p)] - \text{Im} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \text{Im}[G(j\omega_p)] \right\} w_p \quad k = 0 \dots m \quad (\text{II. 30})$$

$$g_{k,1} = \sum_{p=1}^P \left\{ -\text{Re} \left[(j\omega_p)^{k\alpha} \right] \left(\left\{ \text{Re}[G(j\omega_p)] \right\}^2 + \left\{ \text{Im}[G(j\omega_p)] \right\}^2 \right) \right\} w_p \quad k = 0 \dots n \quad (\text{II. 31})$$

II.2.3 La Méthode Itérative de Sanathanan et Korner [38]:

Une autre méthode d'améliorer la méthode de *Levy* a été proposée par *Sanathanan et Korner*. Dans ce cas la variable E de l'équation (II.6) est remplacée par la variable itérative suivante:

$$E_L(j\omega_k) = w_L(j\omega_k)[G(j\omega_k)D(j\omega_k) - N(j\omega_k)] \quad (\text{II. 32})$$

Où le poids w_L est dépendant de la fréquence et de l'itération :

$$w_L(j\omega_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } L = 1 \\ \frac{1}{|D_{L-1}(j\omega_k)|^2} & \text{si } L > 1 \end{cases} \quad (\text{II. 33})$$

où L est le nombre d'itérations, $D_{(L-1)}$ est le dénominateur trouvé dans l'itération précédente (avec $D_1 = I$) est calculé à partir des paramètres a_i estimés à l'itération $(L-1)$.

$$\begin{aligned} E_L &= w_L \{ [Re(G) + jIm(G)](\sigma + j\tau) - (\gamma + j\delta) \} \\ &= w_L(j\omega_k) \{ [Re(G)\sigma - Im(G)\tau - \gamma] + j[Re(G)\tau + Im(G)\sigma - \delta] \} \end{aligned} \quad (\text{II. 34})$$

Pour ce type d'approches, il convient de définir un critère d'erreur unifié, soit :

$$J_L = \sum_{p=1}^P |E(j\omega_k)|^2 |w_L(j\omega_k)| \quad (\text{II. 35})$$

Cette méthode est similaire à celle de *Levy*, sauf en mettant en œuvre des itérations avec

$$A_{l,c} = \sum_{p=1}^P \left\{ -Re[(j\omega_p)^{l\alpha}] Re[(j\omega_p)^{c\alpha}] - Im[(j\omega_p)^{l\alpha}] Im[(j\omega_p)^{c\alpha}] \right\} w_L(j\omega_k) \quad (\text{II. 36})$$

$l = 0 \dots m \text{ et } c = 0 \dots m$

$$\begin{aligned} B_{l,c} &= \sum_{p=1}^P \left\{ Re[(j\omega_p)^{l\alpha}] Re[(j\omega_p)^{c\alpha}] Re[G(j\omega_p)] \right. \\ &+ Im[(j\omega_p)^{l\alpha}] Im[(j\omega_p)^{c\alpha}] Im[G(j\omega_p)] \\ &- Re[(j\omega_p)^{l\alpha}] Re[(j\omega_p)^{c\alpha}] Im[G(j\omega_p)] \\ &\left. + Im[(j\omega_p)^{l\alpha}] Im[(j\omega_p)^{c\alpha}] Re[G(j\omega_p)] \right\} w_L(j\omega_p) \end{aligned} \quad l = 0, \dots, m \text{ et } c = 0, \dots, n \quad (\text{II. 37})$$

$$\begin{aligned} C_{l,c} &= \sum_{p=1}^P \left\{ -Re[(j\omega_p)^{l\alpha}] Re[(j\omega_p)^{c\alpha}] Re[G(j\omega_p)] \right. \\ &+ Im[(j\omega_p)^{l\alpha}] Re[(j\omega_p)^{c\alpha}] Im[G(j\omega_p)] \\ &- Re[(j\omega_p)^{l\alpha}] Im[(j\omega_p)^{c\alpha}] Im[G(j\omega_p)] \\ &\left. - Im[(j\omega_p)^{l\alpha}] Im[(j\omega_p)^{c\alpha}] Re[G(j\omega_p)] \right\} w_L(j\omega_p) \end{aligned} \quad l = 0 \dots n \text{ et } c = 0 \dots m \quad (\text{II. 38})$$

$$\begin{aligned} D_{l,c} &= \sum_{p=1}^P \left(\{Re[G(j\omega_p)]\}^2 + \{Im[G(j\omega_p)]\}^2 \right) \\ &\left\{ Re[(j\omega_p)^{l\alpha}] Re[(j\omega_p)^{c\alpha}] + Im[(j\omega_p)^{l\alpha}] Im[(j\omega_p)^{c\alpha}] \right\} w_L(j\omega_p) \end{aligned} \quad (\text{II. 39})$$

$l = 0 \dots n \text{ et } c = 0 \dots n$

$$e_{l,1} = \sum_{p=1}^P \left\{ -\operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Re} [G(j\omega_p)] - \operatorname{Im} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \operatorname{Im} [G(j\omega_p)] \right\} w_L(j\omega_k) \quad (\text{II. 40})$$

$$l = 0 \dots m$$

$$g_{l,1} = \sum_{p=1}^P -\operatorname{Re} \left[(j\omega_p)^{l\alpha} \right] \left(\left\{ \operatorname{Re} [G(j\omega_p)] \right\}^2 + \left\{ \operatorname{Im} [G(j\omega_p)] \right\}^2 \right) w_L(j\omega_k) \quad (\text{II. 41})$$

$$l = 0 \dots n$$

Si les itérations convergent, $D_l \approx D_{(l-1)}$ et E converge vers ε . Cette méthode compense également le faible effet des données de basse fréquence dans le modèle final identifié.

II.2.4 La Méthode Itérative de *Lawrence et Rogers* [5]

Pour des nouvelles données, des nouvelles fréquences apparaissent, le système devra alors être résolu à nouveau. *Laurent et Rogers* (1979) [45] ont développé une méthode itérative pour éviter la résolution du système si les nouvelles données sont obtenues. Cette méthode traite chaque fréquence à la fois sous la forme suivante:

$$\begin{cases} w_L(j\omega_k) = 1 \\ E_L(j\omega_k) = \frac{1}{D_L^{k-1}(j\omega_k)} [G(j\omega_k)D_L(j\omega_k) - N_L(j\omega_k)] \end{cases} \quad (\text{II. 42})$$

$w_L(j\omega_k)$ est une fonction de pondération et L un nombre d'itération. Où D_L^{k-1} est calculé à partir des paramètres a_i estimés avec $(k-1)$ à l'itération L . Cette technique consiste à mettre à jour le vecteur des paramètres θ à l'itération L après chaque prise en compte d'une nouvelle donnée fréquentielle. Cependant cette technique nécessite un très grand nombre de données pour assurer la convergence de l'algorithme.

II.2.5 La Méthode Itérative de *Hartley et Lorenzo* [39]

La méthode proposée par *Hartley et Lorenzo* permet d'obtenir un modèle d'ordre fractionnaire sous la forme :

$$G(s) = c_n s^{n\alpha} + \dots + c_2 s^{2\alpha} + c_1 s^\alpha + c_0 \quad (\text{II. 43})$$

ou bien

$$G(s) = \frac{1}{c_n s^{n\alpha} + \dots + c_2 s^{2\alpha} + c_1 s^\alpha + c_0} \quad (\text{II. 44})$$

où n est l'ordre du polynôme et α est l'ordre commensurable et tous deux doivent être choisis par l'utilisateur. Les coefficients c_0, c_1, \dots, c_n du modèle de l'équation (II.43) sont obtenus par la résolution de l'équation suivante:

$$\begin{bmatrix} G(j\omega_1) \\ G(j\omega_2) \\ \vdots \\ G(j\omega_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (j\omega_1)^\alpha & (j\omega_1)^{2\alpha} & \dots & (j\omega_1)^{n\alpha} \\ 1 & (j\omega_2)^\alpha & (j\omega_2)^{2\alpha} & \dots & (j\omega_2)^{n\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (j\omega_{n+1})^\alpha & (j\omega_{n+1})^{2\alpha} & \dots & (j\omega_{n+1})^{n\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (\text{II. 45})$$

$\omega_1 \ \omega_2 \dots \omega_{n+1}$; sont les fréquences d'échantillonnage. Pour le cas du modèle de l'équation (II.44) le côté gauche de l'équation (II.45) sera l'inverse du comportement fréquentielle.

II.3 Identification Temporelle des Systèmes d'Ordre Fractionnaire

L'objectif de l'identification dans le domaine temporel est d'obtenir les paramètres d'un modèle donné à partir des données temporelles. En général, pour l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire le modèle utilisé est de la forme [4] :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{\beta_j} e(t) \quad (\text{II.46})$$

où $e(t)$ est l'entrée, $y(t)$ est la sortie et les ordres de différentiation α_i ($0 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont des nombres réels positives tels que $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_N$; $\beta_0 < \beta_2 < \dots < \beta_M$ et $\beta_M \leq \alpha_N$; et les paramètres du modèle a_i ($0 \leq i \leq n$) and b_i ($0 \leq j \leq m$) sont des nombres réels. La fonction de transfert de ce modèle est donnée comme [4] :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (\text{II.47})$$

Plusieurs méthodes d'identification sont disponibles, notamment les méthodes de l'erreur de sortie et de l'erreur d'équation.

II.3.1 Méthodes à Erreur de Sortie

Dans la littérature, il existe trois approches d'identification par modèle non entier à erreur de sortie dont le principe est illustré dans la figure (II.1). Ces méthodes se différencient par le mode d'utilisation du modèle à identifier. La première approche utilise la forme développée d'une fonction de transfert non entière [35] . La seconde est basée sur une décomposition modale [36] et enfin, la dernière approche repose sur une décomposition en fonctions orthogonales non entières [40]

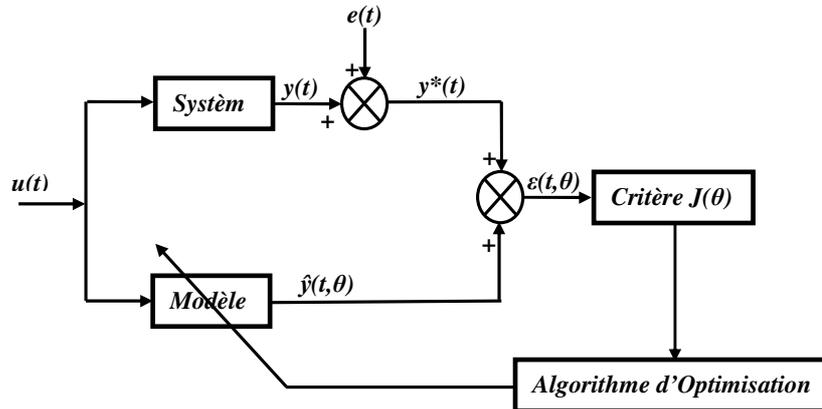


Figure (II.1) : Principe de la méthode à erreur de sortie

Après discrétisation des données d'entrée/sortie, la norme ℓ_2 de l'erreur de sortie à minimiser est donnée par :

$$J(\theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon^2(t_k, \theta) \quad (\text{II.48})$$

avec $\varepsilon(t_k, \theta) = y^*(t_k) - \hat{y}(t_k, \theta)$.

II.3.1.1 Méthode Basée sur la Forme Développée du Modèle

Cette approche consiste à estimer les paramètres du modèle d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est donnée par [41] :

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^n a_j s^{\alpha_j}} \quad (\text{II. 49})$$

Alors, le vecteur des paramètres à estimer est $\theta = [a_1 \cdots a_n, b_0 \cdots b_m, \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta_0 \cdots \beta_m]^T$. Les ordres de dérivation sont ordonnés pour satisfaire la contrainte d'identifiabilité suivante :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_n, 0 < \beta_0 < \beta_1 \cdots < \beta_m \quad (\text{II. 50})$$

Comme la sortie estimée $\hat{y}(t_k, \theta)$ est non linéaire par rapport à θ , la technique d'optimisation de l'erreur de sortie est donc basée sur un algorithme de programmation non linéaire, tel que l'algorithme de *Marquardt* qui est utilisé pour déterminer itérativement $\hat{\theta}_{opt}$, soit :

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left\{ \left[\hat{J} + \xi I \right]^{-1} \hat{J} \right\}_{\theta = \hat{\theta}_i} \quad (\text{II. 51})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{J} = -2 \sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon(t_k) S(t_k, \theta) : \text{gradient} \\ \hat{J} \approx 2 \sum_{k=0}^{K-1} S(t_k, \theta) S^T(t_k, \theta) : \text{Hessien} \\ S(t_k, \theta) = \frac{\partial y(t_k, \theta)}{\partial \theta} : \text{fonction de sensibilité de la sortie} \\ \xi : \text{paramètre de Marquardt} \end{array} \right. \quad (\text{II. 52})$$

où les fonctions de sensibilité de la sortie sont obtenues comme suit :

$$\frac{\partial \hat{y}(t, \theta)}{\partial b_i} = \frac{s^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^{m_A} a_j s^{\alpha_j}} u(t); \quad \frac{\partial \hat{y}(t, \theta)}{\partial a_j} = \frac{-\sum_{i=0}^{m_B} b_i s^{\beta_i + \alpha_j}}{\left(1 + \sum_{j=1}^{m_A} a_j s^{\alpha_j}\right)^2} u(t) \quad (\text{II. 53})$$

$$\frac{\partial \hat{y}(t, \theta)}{\partial \beta_i} = \frac{b_i \ln(s) s^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^{m_A} a_j s^{\alpha_j}} u(t); \quad \frac{\partial \hat{y}(t, \theta)}{\partial \alpha_j} = \frac{-a_j \ln(s) \sum_{i=0}^{m_B} b_i s^{\beta_i + \alpha_j}}{\left(1 + \sum_{j=1}^{m_A} a_j s^{\alpha_j}\right)^2} u(t) \quad (\text{II. 54})$$

Les deux premières fonctions de sensibilité peuvent être calculées facilement. Par contre, les deux autres sont plus problématiques en raison de la présence du terme $\ln(s)$; alors elles sont calculées numériquement plutôt qu'analytiquement.

II.3.1.2 Méthode de la Décomposition Modale d'une Fonction de Transfert [42]

L'idée d'estimer l'ordre commensurable a été introduite dans [36] en se basant sur la décomposition modale de la fonction de transfert du modèle à identifier. Cette décomposition modale de la fonction de transfert est donnée comme suit :

$$G(s) = \sum_{l=1}^L \sum_{q=1}^{\alpha_l} \frac{A_{l,q}}{(s^\alpha - s_l)^q} \quad (\text{II. 55})$$

où s_l (pour $l = 1, \dots, L$) représentent les pôles en s^α de multiplicité α_l . Quand ces pôles en s^α sont distincts la décomposition modale de la fonction de transfert sera :

$$G(s) = \sum_{l=1}^L \frac{A_l}{(s^\alpha - s_l)} \quad (\text{II.56})$$

Dans ce cas, figure (II.2) illustre cette décomposition modale.

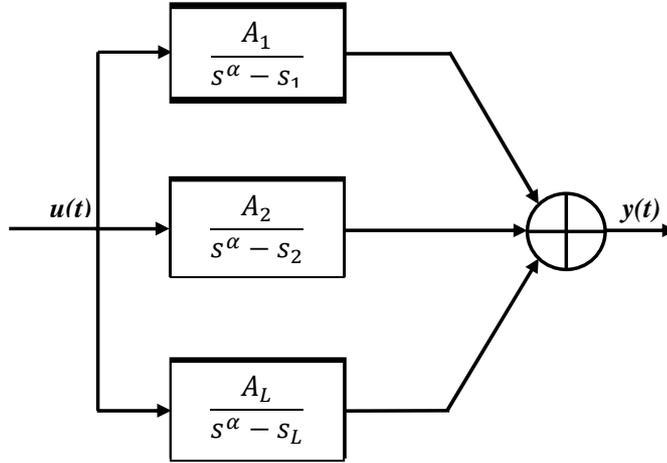


Figure (II.2) : Décomposition modale d'une fonction de transfert

$\theta^T = [A_1, s_1, \dots, A_L, s_L, \alpha]^T$ est le vecteur de paramètres qui sera estimé par minimisation de la norme quadratique de l'erreur de sortie $\varepsilon(t_k, \theta) = y^*(t_k) - \hat{y}(t_k, \theta)$. Dans ce cas, l'approche d'optimisation utilisée est la méthode de *Marquadt*. Alors les fonctions de sensibilité sont données par :

$$\frac{\partial \hat{y}(t, \theta)}{\partial A_l} = \frac{1}{(s^\alpha - s_l)} u(t) \quad (\text{II.57})$$

$$\frac{\partial \hat{y}(t, \theta)}{\partial s_l} = \frac{A_l}{(s^\alpha - s_l)^2} u(t) \quad (\text{II.58})$$

$$\frac{\partial \hat{y}(t, \theta)}{\partial \alpha} = \sum_{l=0}^L -\frac{A_l s^\alpha \ln(s)}{(s^\alpha - s_l)^2} u(t) \quad (\text{II.59})$$

II.3.1.3 Méthode des Fonctions Orthogonales

Dans la littérature, quelques auteurs ont utilisés des fonctions orthogonales pour la représentation des systèmes d'ordre fractionnaire [40] [43-44]. Cette méthode a aussi été utilisée dans l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire. Dans ce cas, le système d'ordre fractionnaire à identifier est représenté par une fonction de transfert formée d'une combinaison linéaire de fonctions orthogonales comme suit [38] :

$$G(s) = \sum_{m=m_0}^M g_m G_m(s) \quad (\text{II.60})$$

où $\theta = [g_{m_0}, \dots, g_M]^T$ est le vecteur de paramètres et les fonctions $G_m(s)$, pour $m = m_0, \dots, M$, désignent les fonctions orthogonales. Il existe trois types de fonctions orthogonales pour la représentation des systèmes d'ordre fractionnaire données comme suit :

- fonctions de *Laguerre* d'ordre fractionnaire caractérisées par la présence d'un pôle en s^α unique et formées à partir des fonctions génératrices suivantes [40] :

$$G_m(s) = \frac{1}{(s^\alpha - \lambda)^m}; \text{ avec } \begin{cases} \alpha \in]0,2[\\ \lambda \in \mathbb{R}^{*+} \\ m \geq m_0 = \left\lceil \frac{1}{2\alpha} \right\rceil + 1 \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

- fonctions de *Kautz* d'ordre fractionnaire caractérisées par la présence de deux pôles en s^α complexes conjugués et formées à partir des fonctions génératrices définies par G'_m et G''_m comme suit [44]

$$\begin{cases} \dot{G}_{m_0}(s) = \frac{1}{(s^\alpha - \lambda)^{m_0}} \\ \ddot{G}_{m_0}(s) = \frac{1}{(s^\alpha - \bar{\lambda})^{m_0}} \end{cases}; \text{ avec } \begin{cases} \alpha \in]0,2[, \quad m_0 = \left\lceil \frac{1}{2\alpha} \right\rceil + 1 \\ \lambda \in \frac{\mathbb{C}}{\arg(-\lambda) > \alpha \frac{\pi}{2}} \\ \bar{\lambda} \text{ est le conjugué de } \lambda \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

- fonctions issues de la Base Orthogonale Généralisée (BOG) d'ordre fractionnaire caractérisées par des pôles en s^α réels ou complexes conjuguées [43]. Cette base est formée de la combinaison des fonctions des équations (II.61) et (II.62).

Pour un système stable représenté par la fonction de transfert de l'équation (II.60), les fonctions orthogonales $G_m(s)$ ($m = m_0, \dots, M$) sont des fonctions connues ; alors seuls les coefficients g_m seront estimés par minimisation de l'erreur quadratique de sortie $\varepsilon(t_k, \theta) = y^*(t_k) - \hat{y}(t_k, \theta)$.

Donc selon l'estimateur des moindres carrés on a les équations d'estimation suivantes:

$$\hat{\theta} = (\Phi^{*T} \Phi^*)^{-1} \Phi^{*T} Y^* \quad (\text{II.63})$$

où Y^* est le vecteur de sortie et Φ^* est la matrice de régression:

$$Y^* = [y^*(t_0) \ y^*(t_1) \ \dots \ y^*(t_{k-1})]^T \quad (\text{II.64})$$

$$\begin{cases} \Phi^* = [\varphi_G(t_0) \ \varphi_G(t_1) \ \dots \ \varphi_G(t_{k-1})]^T \\ \varphi_G(t_k) = [y_{G_{m_0}}(t_k) \ y_{G_{m_0+1}}(t_k) \ \dots \ y_{G_M}(t_k)] \\ y_{G_m}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_m(p)\} * u(t) \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

II.3.2 Méthodes à Erreur d'Equation

Soit un modèle d'ordre fractionnaire défini par l'équation différentielle suivante [5] :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{\beta_j} u(t) + e(t) \quad (\text{II.66})$$

où $u(t)$ est l'entrée, $y(t)$ est la sortie, $e(t)$ représente un bruit stochastique ; les ordres de différentiation α_i ($0 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont des nombres réels positifs tels que $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$; $\beta_0 < \beta_2 < \dots < \beta_m$ et $\beta_m \leq \alpha_n$; le paramètre $a_0 = 1$ et les autres paramètres du

modèle a_i ($1 \leq i \leq n$) et b_j ($0 \leq j \leq m$) sont des nombres réels. L'objectif de l'identification est l'estimation paramétrique des coefficients $a_1 a_2 \dots a_n; b_0 b_1 \dots b_m$ en se basant sur des méthodes à erreur d'équation avec une connaissance a priori des ordres de différentiation α_i ($1 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$).

Une fois les ordres de dérivation fixés, l'objectif principal consiste à estimer le vecteur des paramètres $\theta = [b_0 b_1 \dots b_m, a_1 a_2 \dots a_n]^T$ à temps continu à partir de K couples d'échantillons des signaux d'entrée/sortie

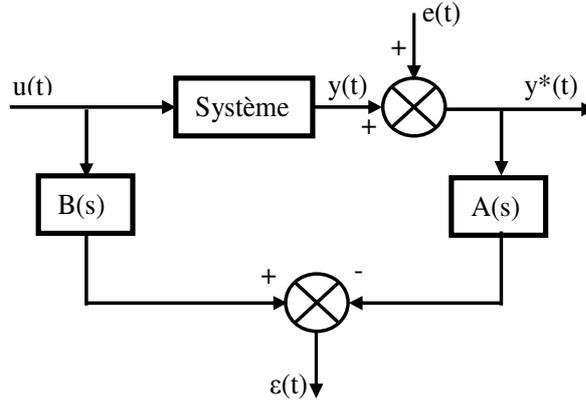


Figure (II.3) : Modèle à erreur d'équation

La minimisation de l'erreur d'équation ε est donnée par:

$$\varepsilon(t, \theta) = y^*(t) - \varphi^*(t)^T \theta \quad (\text{II. 67})$$

avec
$$\varphi^*(t)^T = [u^{(\beta_0)}(t), \dots, u^{(\beta_m)}(t), -y^{*(\alpha_1)}(t), \dots, -y^{*(\alpha_n)}(t)] \quad (\text{II. 68})$$

$$A(s) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i} \quad (\text{II. 69})$$

$$B(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^{\beta_j} \quad (\text{II. 70})$$

Dans ce type de problème d'identification, l'estimation paramétrique des coefficients du modèle se décompose en trois phases bien distinctes. La première consiste à discrétiser le modèle d'ordre fractionnaire puis mettre le modèle discret ainsi obtenu sous une forme linéaire avec de nouveaux paramètres par un changement de variables. La deuxième phase consiste à estimer les nouveaux paramètres (paramètres du modèle discrétisé) par une méthode à erreur de prédiction en utilisant une de deux techniques d'optimisation des moindres carrés linéaires : la technique non récursive ou récursive. Enfin, dans la troisième phase, les paramètres du modèles originales à temps continu (coefficients a_i et b_j) seront calculés à partir des paramètres estimés dans la deuxième phase.

II.3.2.1 Modèle Discret de Dimension Infini

Par la discrétisation de l'équation (II.66) en utilisant l'approximation numérique de *Grünwald* de l'opérateur d'ordre fractionnaire dérivé, on obtient l'expression suivante [5] :

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{\alpha_i}{k} y(K-k) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{h^{\beta_j}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{\beta_j}{k} u(K-k) + e(K) \quad (\text{II.71})$$

où h est le pas d'échantillonnage et $K = \text{entier}(t/h)$.

Pour utiliser la méthode d'estimation à erreur d'équation, on exprime la sortie du modèle à l'instant K en fonction des entrées et sorties passées comme suit :

$$y(K) = - \frac{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}} \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{\alpha_i}{k} y(K-k)}{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} + \frac{\sum_{j=0}^m \frac{b_j}{h^{\beta_j}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{\beta_j}{k} u(K-k)}{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} + \frac{e(K)}{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} \quad (\text{II.72})$$

Cette relation est non linéaire par rapport aux paramètres $(a_0 a_1 \dots a_n; b_0 b_1 \dots b_m)$. Donc l'utilisation de la méthode des moindres carrés linéaires n'est pas convenable. Une technique qui permet alors à exprimer $y(K)$ par une relation linéaire par rapport à un nouveau ensemble de paramètre $(\bar{a}_0 \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n; \bar{b}_0 \bar{b}_1 \dots \bar{b}_m)$ s est donnée comme suit :

$$y(K) = - \sum_{i=0}^n \bar{a}_i Y_i(K) + \sum_{j=0}^m \bar{b}_j U_j(K) + E(K) \quad (\text{II.73})$$

$$\text{avec } \bar{a}_i = \frac{\frac{a_i}{h^{\alpha_i}}}{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}}; \sum_{i=0}^n \bar{a}_i = 1; Y_i(K) = \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{\alpha_i}{k} y(K-k); 0 \leq i \leq n \quad (\text{II.74})$$

$$\bar{b}_j = \frac{\frac{b_j}{h^{\beta_j}}}{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}}; U_j(K) = \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{\beta_j}{k} u(K-k); 0 \leq j \leq m \quad (\text{II.75})$$

$$E(K) = \frac{e(K)}{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} \quad (\text{II.76})$$

Le modèle obtenu est linéaire par rapport aux nouveaux paramètres $(\bar{a}_0 \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n; \bar{b}_0 \bar{b}_1 \dots \bar{b}_m)$, alors la méthode des moindres carrés linéaires peut maintenant être applicable.

L'estimation paramétrique se fait maintenant par la recherche d'un vecteur de paramètres optimale θ_{opt} , minimisant le critère quadratique des moindres carrés $J(\theta)$ basé sur l'erreur de prédiction $\varepsilon(t, \theta) = y^*(t) - \varphi^*(t)^T \theta$. Ce critère est donc donné par :

$$J(\theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon^2(t_k, \theta) \quad (\text{II.77})$$

La solution de ce problème au sens des moindres carrés non récursifs est donnée par [45] :

$$\hat{\theta}_{opt} = (\Phi^{*T} \Phi^*)^{-1} \Phi^{*T} Y^* \quad (\text{II.78})$$

où Y^* est le vecteur colonne de sortie et Φ^* est la matrice de régression dont les colonnes sont les dérivées non entières des signaux d'entrée et de sortie :

$$Y^* = [y^*(t_0) \ y^*(t_1) \ \dots \ y^*(t_{K-1})]^T \quad (\text{II. 79})$$

$$\Phi^* = [\varphi^*(t_0) \ \varphi^*(t_1) \ \dots \ \varphi^*(t_{K-1})]^T \quad (\text{II. 80})$$

Dans le cas de l'estimation paramétrique par la méthode des moindres carrés récurrents, la procédure est présentée dans la figure (II.4) [45]. Le retard classique z^{-1} est remplacé par un élément de retard d'ordre fractionnaire défini par l'approximation de *Grünwald* donné par :

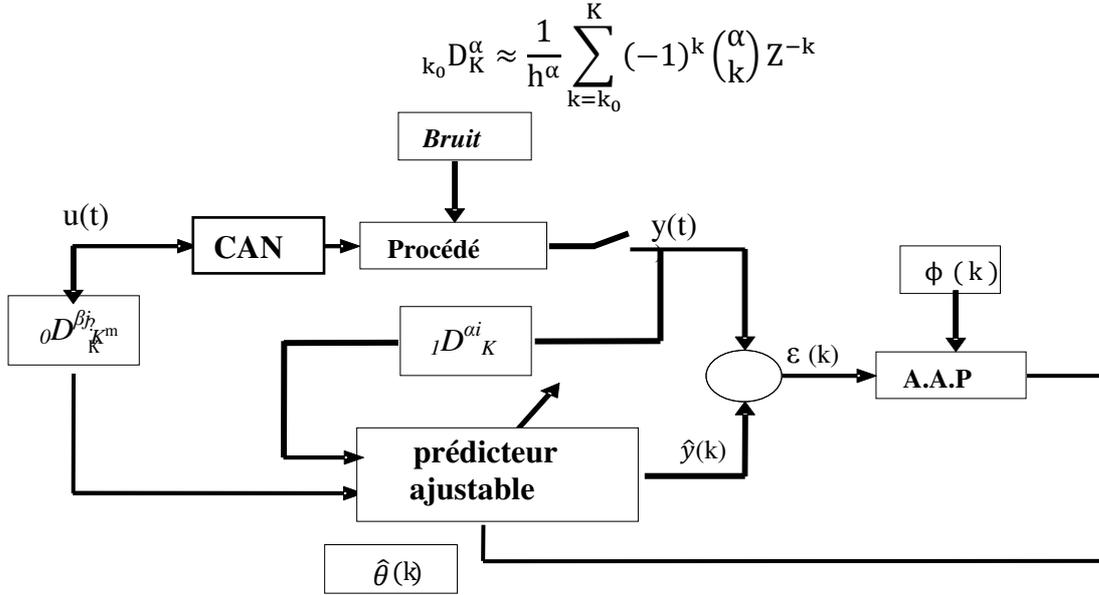


Figure (II.4) : Principe de l'identification récursive d'un système fractionnaire

L'estimation paramétrique se fait par la recherche d'un vecteur de paramètres θ_{opt} qui minimise le critère quadratique donné par l'équation suivante

$$J(\theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} [y^*(t_k) - \hat{y}(t_k, \theta)]^2 \quad (\text{II. 81})$$

Ce vecteur de paramètres s'obtient alors par l'expression suivante [45] :

$$\hat{\theta} = \arg \min \left[\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \varphi^*(t_k) \varphi^*(t_k)^T \right] \theta - \left[\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \varphi^*(t_k) y^*(t_k) \right] \quad (\text{II. 82})$$

La version récursive de l'algorithme des moindres carrés est donnée sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t_k) = \hat{\theta}(t_{k-1}) + \frac{F(t_{k-1})\varphi(t_k)}{1 - \varphi^T(t_k)F(t_{k-1})\varphi(t_k)} (y(t_k) - \hat{\theta}(t_{k-1})\varphi(t_k)) \\ F(t_k) = F(t_{k-1}) - \frac{F(t_{k-1})\varphi(t_k)\varphi^T(t_k)F(t_{k-1})}{1 - \varphi^T(t_k)F(t_{k-1})\varphi(t_k)} \end{cases} \quad (\text{II. 83})$$

où à l'instant initial t_0 , $F = \frac{1}{\delta} I$ avec $0 < \delta \ll 1$. Les paramètres a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) peuvent donc être calculés par la résolution du système linéaire d'équations suivant ($a_0 = I$) :

$$\begin{bmatrix} (\bar{a}_1 - 1)h^{-\alpha_1} & \bar{a}_1 h^{-\alpha_2} & \dots & \bar{a}_1 h^{-\alpha_n} \\ \bar{a}_2 h^{-\alpha_1} & (\bar{a}_2 - 1)h^{-\alpha_2} & \dots & \bar{a}_2 h^{-\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_n h^{-\alpha_1} & \bar{a}_n h^{-\alpha_2} & \dots & (\bar{a}_n - 1)h^{-\alpha_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 h^{-\alpha_0} \\ -\bar{a}_2 h^{-\alpha_0} \\ \vdots \\ -\bar{a}_n h^{-\alpha_0} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 84})$$

Les coefficients b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) peuvent être obtenus par l'expression suivante:

$$b_j = \bar{b}_j \sum_{i=0}^n a_i h^{\beta_j - \alpha_i} \quad (\text{II. 85})$$

II.3.2.2 Méthode des Variables Instrumentales Récursives

Le principe général des variables instrumentales consiste à introduire un nouveau vecteur ψ dont les composantes sont appelées instruments ou variables instrumentales. Les composantes de ψ doivent être suffisamment corrélées avec le vecteur de régression et non corrélées avec la perturbation [5], [42].

$$\begin{cases} E[\psi(t)\varphi^*(t)^T] \text{ est non singulière} \\ E[\psi(t)e(t)] = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 86})$$

où $E[.]$ représentant l'espérance mathématique. Le vecteur des paramètres $\hat{\theta}$ vérifie l'équation suivant :

$$\frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \psi(k)e(k) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \psi(k)[y(k) - \hat{y}(k, \hat{\theta})] = 0 \quad (\text{II. 87})$$

Si $\dim(\psi) = \dim(\hat{\theta})$ alors, l'estimation peut être donnée par :

$$\hat{\theta} = \arg \min \left[\frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \psi(k)\varphi^*(k)^T \right] \theta - \left[\frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \psi(k)y^*(k) \right] \quad (\text{II. 88})$$

Par analogie à la méthode des moindres carrés récursifs, l'algorithme d'optimisation des variables instrumentales s'énonce alors sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{F(k-1)\psi(k)}{1 - \varphi^T(k)F(k-1)\psi(k)} (y(k) - \hat{\theta}(k-1)\varphi(k)) \\ F(k) = F(k-1) - \frac{F(k-1)\psi(k)\varphi^T(k)F(k-1)}{1 - \varphi^T(k)F(k-1)\psi(k)} \end{cases} \quad (\text{II. 89})$$

$\hat{\theta}$ est le vecteur des paramètres estimés à l'instant, k et le vecteur de régression des variables instrumentales est donné comme suit :

$$\psi(k)^T = [-Y_1^{iv}(k) + Y_0^{iv}(k), \dots, -Y_n^{iv}(k) + Y_0^{iv}(k), U_0(k), \dots, U_m(k)]$$

avec

$$Y_i^{iv} = \sum_k^K (-1)^k \binom{\alpha_i}{k} y^{iv}(K-k) \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

De la même façon que la section précédente, les paramètres a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) peuvent aussi être calculés par la résolution du système linéaire d'équations suivant ($a_0 = 1$) :

$$\begin{bmatrix} (\bar{a}_1 - 1)h^{-\alpha_1} & \bar{a}_1 h^{-\alpha_2} & \dots & \bar{a}_1 h^{-\alpha_n} \\ \bar{a}_2 h^{-\alpha_1} & (\bar{a}_2 - 1)h^{-\alpha_2} & \dots & \bar{a}_2 h^{-\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_n h^{-\alpha_1} & \bar{a}_n h^{-\alpha_2} & \dots & (\bar{a}_n - 1)h^{-\alpha_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 h^{-\alpha_0} \\ -\bar{a}_2 h^{-\alpha_0} \\ \vdots \\ -\bar{a}_n h^{-\alpha_0} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 90})$$

Les coefficients b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) peuvent être obtenus par l'expression suivante:

$$b_j = \bar{b}_j \sum_{i=0}^n a_i h^{\beta_j - \alpha_i} \quad (\text{II. 91})$$

III. Implémentation Analogique des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire Ajustable

III.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, les opérateurs d'ordre fractionnaire ont été utilisés dans plusieurs domaines de la physique et de l'ingénierie [1] et particulièrement dans les domaines de la commande et du traitement du signal [46-51]. Leur implémentation analogique et numérique est un thème de recherche très important parce qu'ils ne peuvent être implémentés exactement, seule une implémentation limitée peut être obtenue, dans une bande fréquentielle donnée, par une approximation analogique ou numérique. Dans [31], on trouve la plupart de leurs méthodes d'implémentation analogique. Les méthodes d'implémentation numériques RII et RIF peuvent être trouvées dans [52- 54]. Plus récemment l'idée des opérateurs d'ordre fractionnaire ajustable a été introduite, c'est-à-dire que lorsqu'on varie l'ordre m l'implémentation de l'opérateur reste toujours valide. C'est uniquement dans le domaine numérique que peu de travaux d'implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire ajustable ont été faits [55- 57].

Le problème qui nous intéresse est celui de l'implémentation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire par des implémentations d'ordre ajustable. L'objectif de ce Chapitre est l'implémentation analogique de l'intégrateur s^{-m} et du différentiateur s^m ($0 < m < 1$) d'ordre fractionnaire par une structure ajustable dans une bande fréquentielle donnée. L'approche proposée est basée sur l'interpolation polynomiale en fonction de l'ordre m des coefficients de l'approximation par des fonctions rationnelles analogiques de l'intégrateur et du différentiateur d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode d'approximation de *Charef* [49]. Cette nouvelle implémentation est inspirée de la structure d'implémentation de *Farrow* [58] des filtres numériques.

III.2 Approximation de l'Intégrateur et du Différentiateur d'Ordre Fractionnaire

L'intégrateur et le différentiateur d'ordre fractionnaire analogique sont représentés, respectivement, par les fonctions de transfert irrationnelles suivantes:

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m}, \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (\text{III. 1})$$

$$G_D(s) = s^m, \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (\text{III. 2})$$

avec $s=j\omega$ est la fréquence complexe et m est un nombre positif tel que $0 < m < 1$. Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, les équations (III.1) et (III.2) peuvent être approximées par des fonctions rationnelles comme suit [49] :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong \sum_{i=0}^{N_I} \frac{k_{Ii}}{(1 + s/p_{Ii})} \quad (\text{III. 3})$$

$$G_D(s) = s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{k_{Di}s}{(1 + s/p_{Di})} \quad (\text{III. 4})$$

Les pôles (p_{Ii}, p_{Di}) et les résidus (k_{Ii}, k_{Di}) des fonctions de singularités peuvent être obtenus comme suit [49] :

pour $i = 0, 1, \dots, N_I$

$$p_{Ii} = p_{I0}(ab)^i \quad (\text{III. 5})$$

$$k_{Ii} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N_I-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right)}{\prod_{j=0; j \neq i}^{N_I} (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (\text{III. 6})$$

pour $i = 0, 1, \dots, N_D$

$$p_{Di} = p_{D0}(ab)^i \quad (\text{III. 7})$$

$$k_{Di} = -\frac{K_D}{p_{D0}(ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^{N_D} (1 - a(ab)^{(i-j)})}{\prod_{j=0; j \neq i}^{N_D} (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (\text{III. 8})$$

Pour ω_c et ω_{max} telles que $\omega_c \ll \omega_b$ et $\omega_{max} \gg \omega_h$ et y une erreur d'approximation en dB choisie, les paramètres d'approximation ($a, b, p_{I0}, p_{D0}, N_I, N_D$) peuvent être calculés comme suit [59] :

$$a = 10^{\left\lceil \frac{y}{10(1-m)} \right\rceil}, \quad b = 10^{\left\lceil \frac{y}{10m} \right\rceil}, \quad ab = 10^{\left(\frac{y}{10m(1-m)} \right)} \quad (\text{III. 9})$$

$$p_{I0} = \omega_c 10^{\left\lceil \frac{y}{20m} \right\rceil}, \quad p_{D0} = a\omega_c 10^{\left\lceil \frac{y}{20m} \right\rceil} \quad (\text{III. 10})$$

$$K_I = 1/(\omega_c^m), \quad K_D = (\omega_c^m) \quad (\text{III. 11})$$

$$N_I = \text{Integer} \left[\frac{\log \left(\frac{\omega_{max}}{p_{I0}} \right)}{\log(ab)} \right] + 1, \quad N_D = \text{Integer} \left[\frac{\log \left(\frac{\omega_{max}}{p_{D0}} \right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{III. 12})$$

A partir des équations ci-dessus, nous pouvons facilement voir que les pôles et les résidus de la fonction rationnelle d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire dépendent de l'ordre fractionnaire m ; donc leurs implémentations sont fixées. Cela signifie que lorsque l'ordre

fractionnaire m change d'une valeur m_1 à une autre m_2 les implémentations des opérateurs d'ordre fractionnaire correspondant à m_1 ne sont pas valables pour m_2 .

La question qui nous intéresse est celui de l'implémentation analogique de l'intégrateur et du différentiateur d'ordre fractionnaire par une implémentation d'ordre ajustable, c'est-à-dire lorsqu'on varie l'ordre m l'implémentation analogique reste toujours valide.

III.3 Implémentation Numérique en Structure de *Farrow*

Soit $H(z)$ la fonction de transfert d'un filtre numérique RIF qui est donné par :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \sum_{k=0}^L h_p(k)z^{-k} \quad (\text{III. 13})$$

où $h_p(k)$, $0 \leq k \leq L$, sont les coefficients de la réponse impulsionnelle de $H(z)$ et qui sont tous fonction d'un certain paramètre p . *Farrow* a proposé d'exprimer chaque coefficient $h_p(k)$ du filtre RIF sous la forme d'un polynôme en p d'ordre M comme suit [58] :

$$h_p(k) = \sum_{j=0}^M a_{kj}p^j \quad (\text{III. 14})$$

où tous coefficients a_{kj} du polynôme sont indépendants du paramètre p . La fonction de transfert $H(z)$ peut donc être réécrite comme suit :

$$H(z) = \sum_{k=0}^L \left\{ \sum_{j=0}^M a_{kj}p^j \right\} z^{-k} = \sum_{j=0}^M \left\{ \sum_{k=0}^L a_{kj} z^{-k} \right\} p^j = \sum_{j=0}^M G_j(z) p^j \quad (\text{III. 15})$$

où

$$G_j(z) = \sum_{k=0}^L a_{kj} z^{-k} \quad (\text{III. 16})$$

sont des fonctions de transfert de filtres numériques RIF à coefficients constants et indépendants du paramètre p . A partir de l'équation (III.15), la fonction $H(z)$ est mise sous la forme suivante :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = G_0(z) + p[G_1(z) + p[G_2(z) + \dots + p[G_{M-1}(z) + pG_M(z)]] \dots] \quad (\text{III. 17})$$

La fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique peut maintenant être implémentée par une structure dite structure de *Farrow* de la figure (III.1) comme suit :

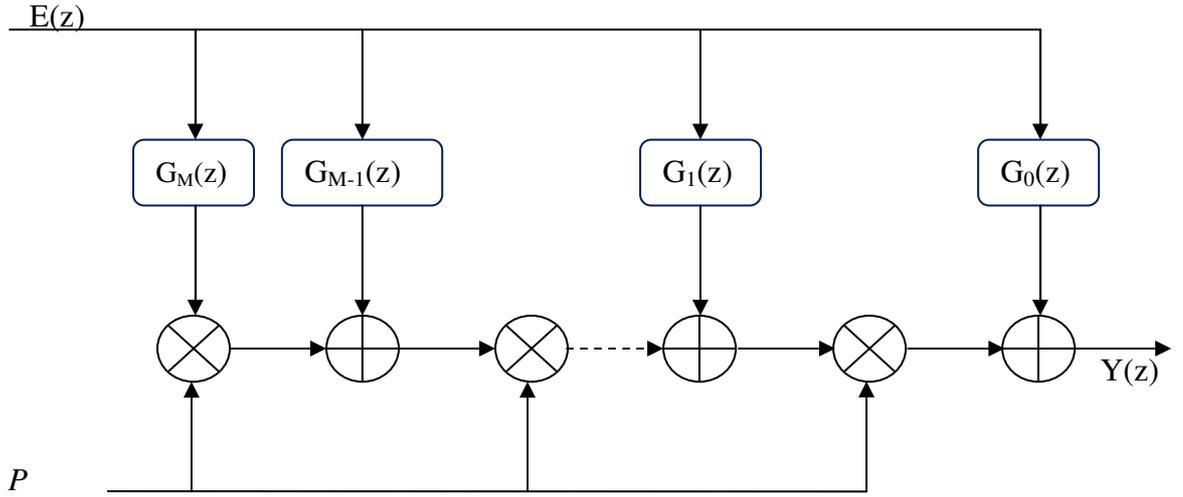


Figure (III.1) : Implémentation en structure de Farrow du filtre numérique RIF

Avec cette structure on peut dire que le filtre $H(z)$ a une implémentation ajustable en paramètre p , c'est-à-dire qu'avec la même implémentation on peut avoir $H(z)$ pour différente valeur du paramètre p . Alors, en s'inspirant de cette structure de *Farrow* dans le domaine numérique nous allons dériver une structure similaire pour les opérateurs d'ordre fractionnaire dans le domaine analogique.

III.4 Intégrateur et Différentiateur Analogiques d'Ordre Fractionnaire Ajustable

Dans cette section, nous allons examiner la conception de l'intégrateur et du différenciateur analogiques d'ordre fractionnaire ajustable qui peuvent être implémentés par des structures analogiques comme la structure numérique de *Farrow* [58]. La principale caractéristique de ces opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire ajustable est que les structures de leurs implémentations sont valables pour toute la gamme de l'ordre fractionnaire m .

Nous avons vu que les pôles p_{Ii} , les résidus de k_{Ii} , pour $i = 0, 1, \dots, N_I$, le coefficient K_D , les pôles p_{Di} , les résidus k_{Di} , pour $i = 0, 1, \dots, N_D$, des fonctions rationnelles des approximations de l'intégrateur et du différenciateur analogiques d'ordre fractionnaire des équations (III.3) et (III.4), respectivement, dépendent de l'ordre fractionnaires m . Donc, on peut écrire que:

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong \sum_{i=0}^{N_I} \frac{k_{Ii}(m)}{\left(1 + s/p_{Ii}(m)\right)} \quad (\text{III. 18})$$

$$G_D(s) = s^m \cong K_D(m) + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{k_{Di}(m)s}{\left(1 + s/p_{Di}(m)\right)} \quad (\text{III. 19})$$

En s'inspirant de la structure de *Farrow* pour les filtres numériques ajustables, on fait une interpolation polynomiale du coefficient K_D et de tous les résidus k_{Ii} ($0 \leq i \leq N_I$) et k_{Di} ($0 \leq i \leq N_D$) avec un polynôme en m d'ordre M comme: suit :

$$k_{Ii}(m) = \sum_{n=0}^M a_{in} m^n \quad (\text{III. 20})$$

$$\begin{cases} K_D(m) = \sum_{n=0}^M b_n m^n \\ k_{Di}(m) = \sum_{n=0}^M b_{in} m^n \end{cases} \quad (\text{III. 21})$$

où a_{in} ($0 \leq i \leq N_I$ et $0 \leq n \leq M$), b_{in} ($0 \leq i \leq N_D$ et $0 \leq n \leq M$) et b_n ($0 \leq n \leq M$) sont les coefficients polynomiaux des résidus k_{Ii} , k_{Di} , et K_D , respectivement ; ils sont indépendants du paramètre m .

III.4.1 Calcul des Coefficients de l'Interpolation Polynomiale

Pour déterminer les coefficients a_{in} , b_n , b_{in} des interpolations polynomiales en m du coefficient $K_D(m)$ et des résidus $k_{Ii}(m)$ et $k_{Di}(m)$ des équations (III.20) et (III.21) on doit résoudre le système d'équations linéaires à $(M+1)$ inconnus obtenu en choisissant $(N+1)$ points différents de l'ordre m ($N=N_I$ ou N_D). On cherche donc l'unique polynôme de degré M passant par les points $\{m_j, k_{Ii}(m_j)\}$, $\{m_j, K_D(m_j)\}$, $\{m_j, k_{Di}(m_j)\}$. Les points m_j ($j=0,1,\dots,N$) étant tous distincts. Donc pour $i=0,1,\dots,N$, on aura :

$$k_{Ii}(m_j) = \sum_{n=0}^M a_{in} m_j^n \quad (\text{III. 22})$$

$$\begin{cases} K_D(m_j) = \sum_{n=0}^M b_n m_j^n \\ k_{Di}(m_j) = \sum_{n=0}^M b_{in} m_j^n \end{cases} \quad (\text{III. 23})$$

Soit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} k_{I0}(m_0) & k_{I1}(m_0) & \cdots & k_{IN}(m_0) \\ k_{I0}(m_1) & k_{I1}(m_1) & \cdots & k_{IN}(m_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{I0}(m_{N_1}) & k_{I1}(m_{N_1}) & \cdots & k_{IN}(m_{N_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_0 & m_0^2 & \cdots & m_0^M \\ 1 & m_1 & m_1^2 & \cdots & m_1^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & m_{N_1} & m_{N_1}^2 & \cdots & m_{N_1}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & \cdots & a_{N0} \\ a_{01} & a_{11} & \cdots & a_{N1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{0M} & a_{1M} & \cdots & a_{NM} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 24})$$

$$\begin{bmatrix} k_{D0}(m_0) & k_{D1}(m_0) & \cdots & k_{DN}(m_0) \\ k_{D0}(m_1) & k_{D1}(m_1) & \cdots & k_{DN}(m_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{D0}(m_{N_1}) & k_{D1}(m_{N_1}) & \cdots & k_{DN}(m_{N_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_0 & m_0^2 & \cdots & m_0^M \\ 1 & m_1 & m_1^2 & \cdots & m_1^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & m_{N_1} & m_{N_1}^2 & \cdots & m_{N_1}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} & b_{10} & \cdots & b_{N0} \\ b_{01} & b_{11} & \cdots & b_{N1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{0M} & b_{1M} & \cdots & b_{NM} \end{bmatrix}$$

On peut écrire le système d'équations sous la forme :

$$\begin{aligned}
 K_{II} &= U A \\
 K_{DI} &= U B
 \end{aligned}
 \tag{III.25}$$

Comme la matrice U n'est pas en général une matrice carrée, alors on a :

$$\begin{aligned}
 A &= (U^T U)^{-1} U^T K_{II} \\
 B &= (U^T U)^{-1} U^T K_{DI}
 \end{aligned}
 \tag{III.26}$$

La matrice U est une matrice de *Vandermonde* alors la matrice carrée $(U^T U)$ est inversible tant que les points m_j ($j = 0, 1, \dots, N_I$) sont distincts. Vu la complexité du calcul des matrices A et B de l'équation (III.26), la méthode utilisée pour résoudre ce problème d'interpolation est la technique d'ajustement de la courbe dans le but d'obtenir un polynôme de degré M qui approxime k_{Ii} , K_D , k_{Di} dans le sens des moindres carrés. Pour ce but, on a utilisé la routine de *Matlab* dénommée '*Polyfit*' pour obtenir le polynôme en m de degré M qui correspond aux données du coefficient K_D et chaque élément des résidus k_{Ii} ($0 \leq i \leq N_I$), k_{Di} ($0 \leq i \leq N_D$). Par conséquent, les fonctions rationnelles $G_I(s)$ et $G_D(s)$ des équations (III.18) et (III.19), respectivement, seront:

$$\begin{aligned}
 G_I(s) &= \frac{1}{s^m} \cong \sum_{i=0}^{N_I} \frac{\sum_{n=0}^M a_{in} m^n}{\left(1 + s/p_{Ii}(m)\right)} \\
 &= \sum_{n=0}^M m^n \left[\sum_{i=0}^{N_I} \frac{a_{in}}{\left(1 + s/p_{Ii}(m)\right)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{III.27}$$

$$\begin{aligned}
 G_D(s) &= s^m \cong \sum_{n=0}^M b_n m^n + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{(\sum_{n=0}^M b_{in} m^n) S}{\left(1 + s/p_{Di}(m)\right)} \\
 &= \sum_{n=0}^M m^n \left[b_n + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{b_{in} S}{\left(1 + s/p_{Di}(m)\right)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{III.28}$$

Donc, on peut réécrire les équations ci-dessus comme suit:

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong \sum_{n=0}^M m^n G_{In}(s)
 \tag{III.29}$$

$$G_D(s) = s^m \cong \sum_{n=0}^M m^n G_{Dn}(s)
 \tag{III.30}$$

où les sous-fonctions $G_{In}(s)$ et $G_{Dn}(s)$, pour $0 \leq n \leq M$, sont données par:

$$G_{In}(s) = \sum_{i=0}^{N_I} \frac{a_{in}}{\left(1 + s/p_{Ii}(m)\right)} \quad (\text{III. 31})$$

$$G_{Dn}(s) = b_n + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{b_{in}s}{\left(1 + s/p_{Di}(m)\right)} \quad (\text{III. 32})$$

Comme on peut le remarquer les fonctions $G_{In}(s)$ et $G_{Dn}(s)$, pour $0 \leq n \leq M$, sont toutes dépendantes de l'ordre fractionnaire m parce que les pôles $p_{Ii}(m)$, $p_{Di}(m)$ dépendent de m . Alors pour que toutes les fonctions $G_{In}(s)$ et $G_{Dn}(s)$ soient indépendantes de l'ordre m il faut que tous les pôles $p_{Ii}(m)$, $p_{Di}(m)$ soient fixes, c'est-à-dire lorsqu'on fait varier l'ordre m on garde toujours les mêmes pôles de l'approximation de l'intégrateur et du différentiateur d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle.

Une fois les pôles d'approximation fixés, les fonctions $G_{In}(s)$ et $G_{Dn}(s)$ deviennent toutes indépendantes de m , donc les équations (III.29) et (III.30) peuvent être implémentées sous la forme de la structure de *Farrow*. Alors, nous dirons que nous avons réalisé un intégrateur et un différentiateur analogique d'ordre fractionnaire ajustable.

Une façon de fixer tous les pôles $p_{Ii}(m)$ ($0 \leq i \leq N_I$) et $p_{Di}(m)$ ($0 \leq i \leq N_D$) pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire m ($0 < m < 1$) est de forcer le premier pôle p_{I0} et le rapport (ab) de l'équation (III.5) et le premier pôle p_{D0} et le rapport (ab) de équation (III.7) d'être des constantes.

Pour un ordre fractionnaire m donné et pour une erreur d'approximation choisie y , les pôles $p_{Ii}(m)$ ($0 \leq i \leq N_I$) et $p_{Di}(m)$ ($0 \leq i \leq N_D$) des approximations de l'intégrateur s^{-m} et du différentiateur s^m d'ordre fractionnaires par des fonctions rationnelles des équations (III.5) et équation (III.7), sont donnés respectivement, comme suit:

$$p_{Ii}(m) = p_{I0}(ab)^i \quad (\text{III. 33})$$

$$p_{Di}(m) = p_{D0}(ab)^i \quad (\text{III. 34})$$

où les premiers pôles p_{I0} et p_{D0} sont calculés et sont fixés pour toute la gamme des valeurs de l'ordre fractionnaires $0 < m < 1$ et le rapport (ab) est également calculé par l'expression

$$ab = 10^{\left(\frac{y}{10m(1-m)}\right)}.$$

Pour un autre ordre fractionnaire donné $m_1 \neq m$ ($0 < m_1 < 1$), et une autre erreur d'approximation choisie $y_1 \neq y$ et les mêmes pôles p_{I0} et p_{D0} comme ci-dessus, les pôles $p_{Ii}(m_1)$ ($0 \leq i \leq N_I$) et $p_{Di}(m_1)$ ($0 \leq i \leq N_D$) sont donnés comme:

$$p_{Ii}(m_1) = p_{I0}(a_1 b_1)^i \quad (\text{III. 35})$$

$$p_{Di}(m_1) = p_{D0}(a_1 b_1)^i \quad (\text{III.36})$$

où le rapport $a_1 b_1$ est aussi donné par l'expression : $a_1 b_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10m_1(1-m_1)}\right)}$.

Maintenant, pour garantir que les pôles $p_{Ii}(m_1) = p_{Ii}(m)$ ($0 \leq i \leq N_I$) et les pôles $p_{Di}(m_1) = p_{Di}(m)$ ($0 \leq i \leq N_D$), pour les fonctions rationnelles d'approximation d'intégrateur s^{-m} et de différentiateur s^m d'ordre fractionnaires, respectivement, sont égaux nous devons avoir:

$$(a_1 b_1)^i = (ab)^i$$

Ce qui mène à :

$$10^{\left(\frac{y_1}{10m_1(1-m_1)}\right)} = 10^{\left(\frac{y}{10m(1-m)}\right)} \quad (\text{III.37})$$

$$\left(\frac{y_1}{10m_1(1-m_1)}\right) = \left(\frac{y}{10m(1-m)}\right) \quad (\text{III.38})$$

Parce que les ordres fractionnaires m et m_1 sont donnés et l'erreur d'approximation y est choisie, l'erreur d'approximation y_1 est le seul paramètre à calculer pour garantir que les pôles $p_{Ii}(m_1) = p_{Ii}(m)$ ($0 \leq i \leq N_I$) et $p_{Di}(m_1) = p_{Di}(m)$ ($0 \leq i \leq N_D$). Donc, y_1 est donnée comme suit:

$$y_1 = y \left(\frac{m_1(1-m_1)}{m(1-m)}\right) \quad (\text{III.39})$$

Comme nous pouvons le voir de l'équation (III.39) l'erreur d'approximation y_1 qui est fonction de l'ordre fractionnaire m est minimum pour $m = 0,5$. Alors, l'ordre fractionnaire m utilisé pour calculer les pôles $p_{Ii}(m)$ ($0 \leq i \leq N_I$) et $p_{Di}(m)$ ($0 \leq i \leq N_D$), est $m = 0,5$. Dans ce cas, l'erreur d'approximation y_1 de l'équation (III.39) sera:

$$y_1 = 4ym_1(1-m_1) \quad (\text{III.40})$$

Une fois que les pôles $p_{Ii}(m)$ ($0 \leq i \leq N_I$) et $p_{Di}(m)$ ($0 \leq i \leq N_D$) sont calculés pour $m = 0,5$ et pour une erreur d'approximation y donnée, les équations (III.27) et (III.28) peuvent être réécrites comme suit :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong \sum_{n=0}^M m^n \left[\sum_{i=0}^{N_I} \frac{a_{in}}{\left(1 + s/p_{Ii}(0.5)\right)} \right] = \sum_{n=0}^M m^n G_{In}(s) \quad (\text{III.41})$$

$$G_D(s) = s^m \cong \sum_{n=0}^M m^n \left[b_n + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{b_{in} s}{\left(1 + s/p_{Di}(0.5)\right)} \right] = \sum_{n=0}^M m^n G_{Dn}(s) \quad (\text{III.42})$$

Les sous-fonctions G_{I_n} et G_{D_n} ($0 \leq n \leq M$) deviennent donc totalement indépendants de l'ordre fractionnaire m . Par conséquent, les implémentations analogiques ajustables de l'intégrateur s^{-m} et du différentiateur s^m des équations (III.41) et (III.42) par des structures de *Farrow* sont données, respectivement, dans les figures (III.2) et (III.3).

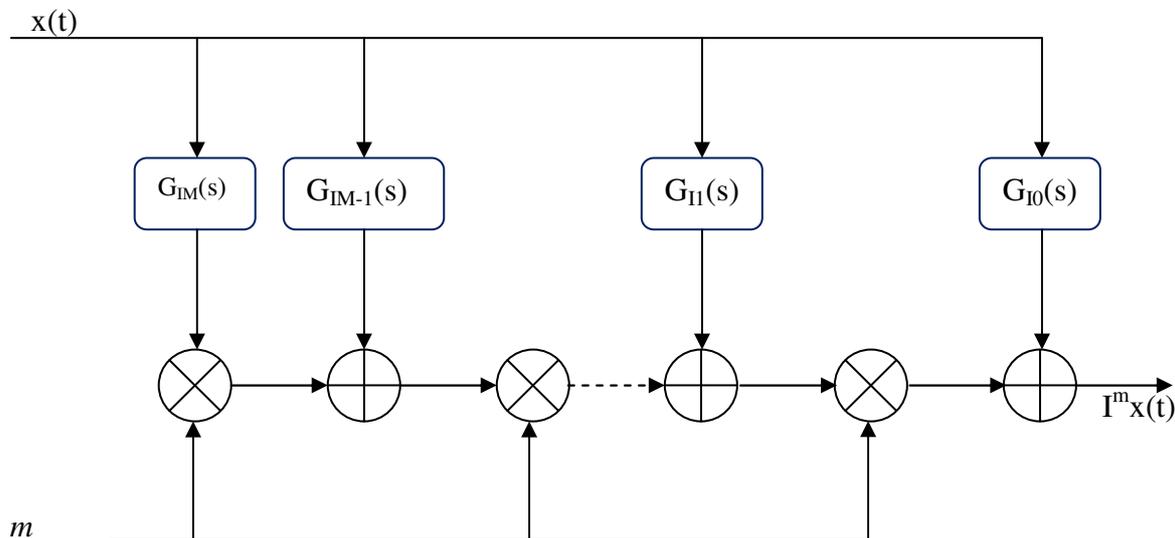


Figure (III.2) : Implémentations analogique ajustable de l'intégrateur s^{-m} en structure de *Farrow*

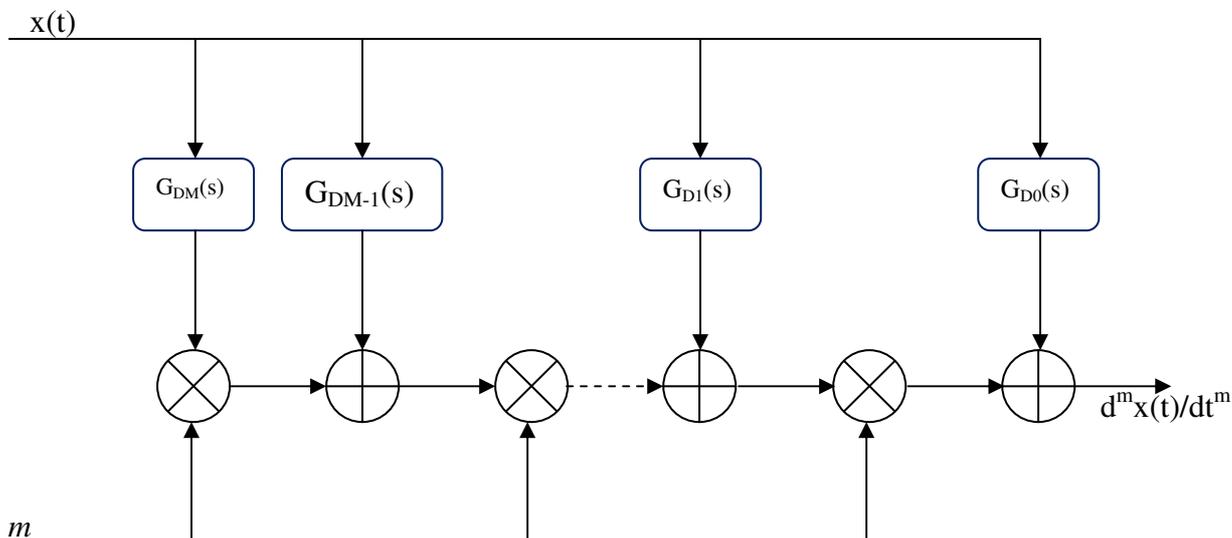


Figure (III.3) : Implémentation analogique ajustable du différentiateur s^m en structure de *Farrow*

III.4.2 Exemples Illustratifs

Pour démontrer l'efficacité de la méthode de conception proposée, on considère l'implémentation d'un intégrateur fractionnaire ajustable dans la bande fréquentielle $[\omega_b, \omega_h] = [0.1 \text{ rad/s}, 100 \text{ rad/s}]$.

L'approximation de l'intégrateur fractionnaire est donnée sous la forme suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong \sum_{i=0}^{N_I} \frac{k_{Ii}(m)}{\left(1 + s/p_{Ii}(m)\right)} \quad (\text{III. 43})$$

Pour réaliser l'intégrateur d'ordre fractionnaire ajustable, il faut en premier lieu calculer les pôles d'approximation $p_{Ii}(m)$ pour $m=0.5$ puis calculer les coefficients a_{in} . Donc, pour une erreur $y = 1 \text{ dB}$, les paramètres d'approximation de la fonction rationnelle ω_c , ω_{max} , a , b , et N_I sont donnés par :

$$\begin{aligned} \omega_c &= 0.0001\omega_L = 10^{-5} \text{ rad/s} \\ \omega_{max} &= 1000\omega_H = 100000 \text{ rad/s} \\ a &= 1.5849, \quad b = 1.5849 \\ p_{I0} &= 1.2589 * 10^{-5} \\ N_I &= 25 \end{aligned}$$

Alors les pôles $p_{Ii} (i=0, 1, \dots, 25)$ de l'approximation sont donnés par :

$$p_{Ii} = (1.2589 * 10^{-5})(2.5119)^i \quad (\text{III. 44})$$

De l'équation (III.6) les résidus $k_{Ii} (0 \leq i \leq 25)$ sont donnés par:

$$k_{Ii}(m = 0.5) = \frac{1}{(10^{-2.5})} \frac{\prod_{j=0}^{24} \left(1 - \frac{(2.5119)^{(i-j)}}{1.5849}\right)}{\prod_{j=0; j \neq i}^{25} (1 - (2.5119)^{(i-j)})} \quad (\text{III. 45})$$

Pour la conception d'un autre intégrateur d'ordre fractionnaire d'ordre donné $m \neq 0.5 (0 < m < 1)$ et une erreur d'approximation $y \neq 1 \text{ dB}$ avec les mêmes pôles d'approximation $p_{Ii} (i=0, 1, \dots, 25)$ quelque soit la valeur de l'ordre m , les paramètres a et ω_c de l'approximation sont donnés par :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]} = 10^{\left[\frac{2m}{5}\right]} = 10^{[0.4m]} = (2.5119)^m \quad (\text{III. 46})$$

$$p_{I0} = \omega_c 10^{\left[\frac{y}{20m}\right]} \Rightarrow \omega_c = p_{I0} 10^{\left[\frac{-y}{20m}\right]} = p_{I0} (1.5849)^{(m-1)} \quad (\text{III. 47})$$

alors, les résidus k_{li} ($0 \leq i \leq 25$) sont donnés par l'expression suivante :

$$k_{li}(m) = \frac{1}{((1.2589 * 10^{-5})^m (1.5849)^{m(m-1)})} \frac{\prod_{j=0}^{24} \left(1 - \frac{(2.5119)^{(i-j)}}{(2.5119)^m}\right)}{\prod_{j=0; j \neq i}^{25} (1 - (2.5119)^{(i-j))}} \quad (\text{III. 48})$$

La figure (III.4) montre les résidus k_{l0} , k_{l5} , k_{l12} et k_{l15} en fonction de m variant de $0,1$ à $0,95$ avec un pas de $0,01$. La routine 'polyfit' de *Matlab* a été utilisée pour obtenir le polynôme en m de degré M qui correspond aux données de chaque résidu k_{li} ($0 \leq i \leq 25$). Le degré M du polynôme d'interpolation a été choisi de telle sorte que, pour tous les résidus, l'erreur d'interpolation est inférieure à une valeur donnée pour une bonne approximation (dans ce cas $M = 10$).

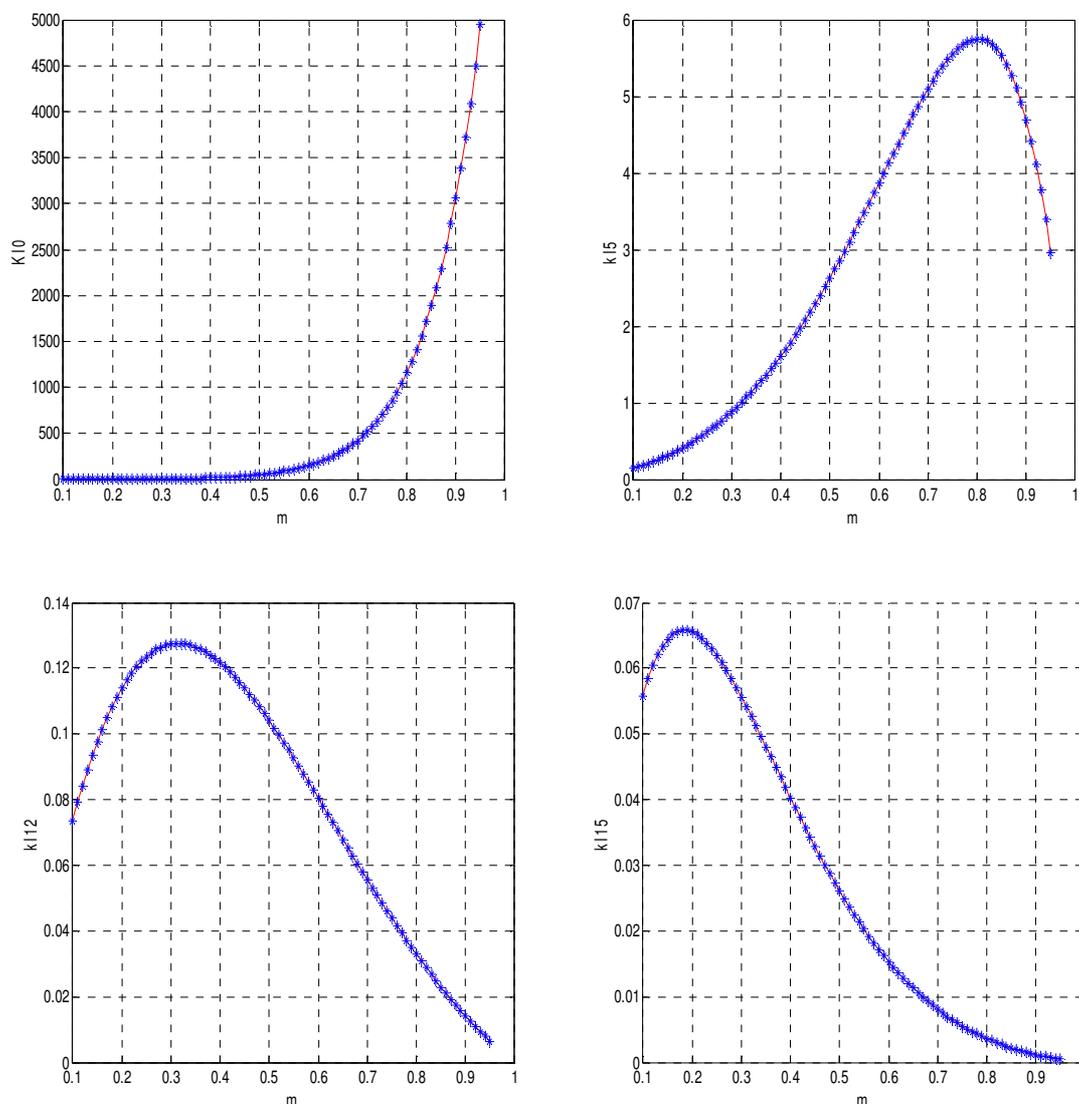


Figure (III.4) : Tracé des coefficients k_{l0} , k_{l5} , k_{l12} et k_{l15} ainsi que leurs interpolations polynomiales

Le tableau (III.1) montre également les coefficients a_{in} de l'interpolation polynomiale des résidus k_{10} , k_{15} , k_{112} et k_{115} .

Tableau (III.1) : Coefficients a_{in} de l'interpolation polynomiale des résidus k_{10} , k_{15} , k_{112} et k_{115}

| | $k_{10}(m)$ | $k_{15}(m)$ | $k_{112}(m)$ | $k_{115}(m)$ |
|-----------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| a_{i0} | 291.9848 | 0.0146 | -0.0000 | 0.0000 |
| a_{i1} | -9971.9 | 0.4334 | 0.9210 | 0.9211 |
| a_{i2} | 143150 | 12.9745 | 0.2120 | -2.3329 |
| a_{i3} | -1141300 | -33.4732 | -1.4901 | 1.4372 |
| a_{i4} | 5632000 | 283.1535 | -0.3499 | 1.3567 |
| a_{i5} | -18080000 | -701.1917 | 0.7179 | -2.5805 |
| a_{i6} | 38519000 | 1476.0 | 0.1445 | 1.5198 |
| a_{i7} | -54148000 | -1743.7 | -0.1163 | -0.2099 |
| a_{i8} | 48471000 | 1165.0 | -0.0823 | -0.2107 |
| a_{i9} | -25168000 | -329.9377 | 0.0498 | 0.1201 |
| a_{i10} | 5861200 | -129.1872 | -0.0067 | -0.0210 |

Une fois que tous les résidus k_{i_i} ($0 \leq i \leq 25$) sont interpolées, on obtient alors tous les coefficients a_{in} ($0 \leq n \leq 10$ et $0 \leq i \leq 25$); donc l'intégrateur analogique d'ordre fractionnaire ajustable s^{-m} ($0 < m < 1$) dans la bande de fréquence $[0.1 \text{ rad/s}, 100 \text{ rad/s}]$ est donné comme suit:

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong \sum_{n=0}^{10} m^n \left[\sum_{i=0}^{25} \frac{a_{in}}{\left(1 + \frac{s}{(1.2589 * 10^{-5})(2.5119)^i}\right)} \right] \quad (\text{III. 49})$$

Figures (III.5) et (III.6) montrent les tracés de Bode (amplitude et phase) des intégrateur fractionnaires analogiques $s^{-0.3}$ et $s^{-0.86}$, respectivement, ainsi que leurs approximations ajustables correspondantes données par l'équation (III.49) comme suit:

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.3}} \cong \sum_{n=0}^{10} (0.3)^n \left[\sum_{i=0}^{25} \frac{a_{in}}{\left(1 + \frac{s}{(1.2589 * 10^{-5})(2.5119)^i}\right)} \right] \quad (\text{III. 50})$$

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.86}} \cong \sum_{n=0}^{10} (0.86)^n \left[\sum_{i=0}^{25} \frac{a_{in}}{\left(1 + \frac{s}{(1.2589 * 10^{-5})(2.5119)^i}\right)} \right] \quad (\text{III. 51})$$

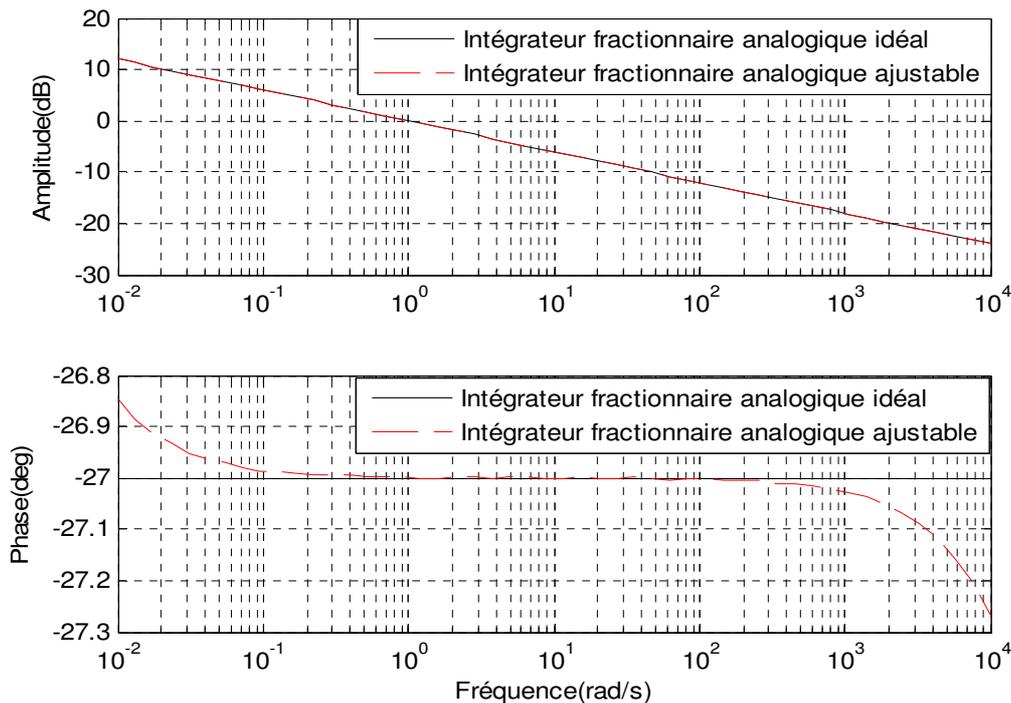


Figure (III.5) : Amplitude et Phase de $s^{-0.3}$ et de son implémentation ajustable

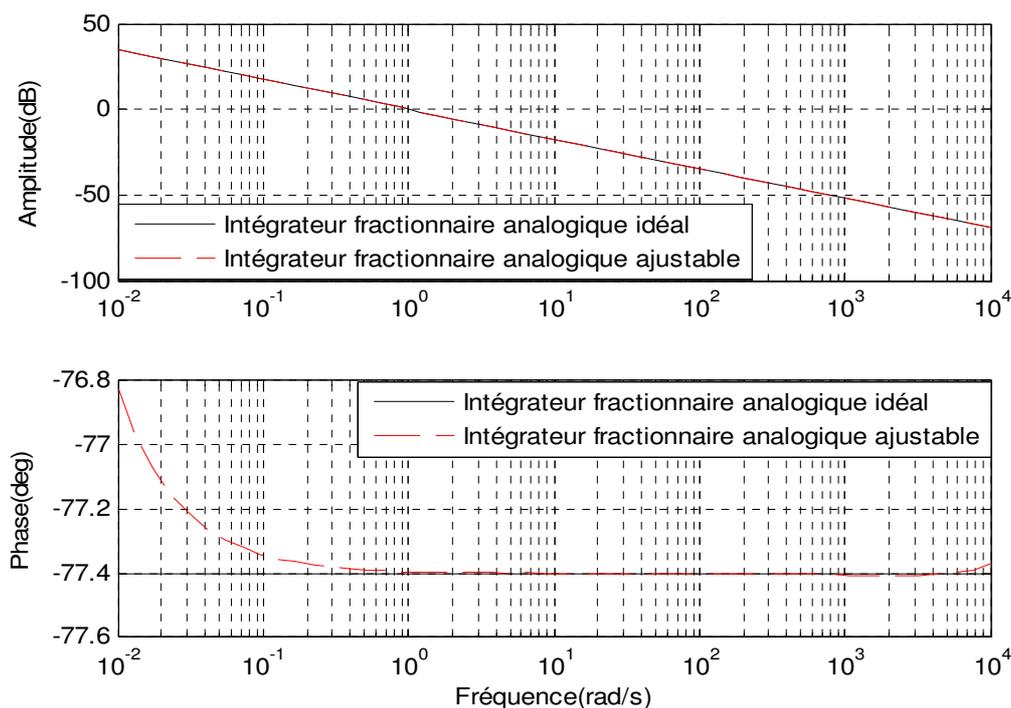


Figure (III.6) : Amplitude et Phase de $s^{-0.86}$ et de son implémentation ajustable

On note que les tracés de *Bode* des fonction de transfert des intégrateurs $s^{-0.3}$ et $s^{-0.86}$ ainsi que leurs approximations ajustables en structure de *Farrow* correspondantes sont superposées dans la plage de fréquence d'intérêt $[\omega_b, \omega_h] = [0.1rad/s, 100rad/s]$.

Dans le second exemple, nous considérons la conception d'un différentiateur analogique d'ordre fractionnaire ajustable dans la bande de fréquence $[\omega_b, \omega_h]=[1 \text{ rad/s}, 1000 \text{ rad/s}]$. De l'équation (III.28), la fonction d'approximation d'un différentiateur analogique d'ordre fractionnaire ajustable est donnée par:

$$G_D(s) = s^m \cong \sum_{n=0}^M m^n \left[b_n + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{b_{in} s}{\left(1 + s/p_{Di}(m)\right)} \right] \quad (\text{III. 52})$$

Les pôles de cette équation sont calculés en choisissant l'ordre fractionnel

$$m = 0.5, \omega_c = 0.01\omega_b = 0.01 \text{ rad/s},$$

$$\omega_{max} = 100\omega_h = 100000 \text{ rad/s et } y = 1 \text{ dB}.$$

Les paramètres a , b , p_{D0} et N_D sont :

$$a = 1.5849, b = 1.5849,$$

$$p_{D0} = 0.0200, \text{ et } N_D = 18.$$

Ainsi, les pôles p_{Di} ($i = 0, 1, \dots, 18$) sont donnés comme:

$$p_{Di} = 0.0200(2.5119)^i \quad (\text{III. 53})$$

De l'équation (III.8) les résidus k_{Di} ($0 \leq i \leq 18$) sont donnés par:

$$k_{Di} = -\frac{(0.01)^{0.5}}{0.0200(2.5119)^i} \frac{\prod_{j=0}^{N_D} (1 - a(2.5119)^{(i-j)})}{\prod_{j=0, j \neq i}^{N_D} (1 - (2.5119)^{(i-j)})} \quad (\text{III. 54})$$

Pour la conception d'un autre différentiateur d'ordre fractionnaire d'ordre donné $m \neq 0.5$ ($0 < m < 1$) et une erreur d'approximation $y \neq 1 \text{ dB}$ avec les mêmes pôles d'approximation p_{Di} ($i=0, 1, \dots, 18$) quelque soit la valeur de l'ordre m , les paramètres a et ω_c de l'approximation sont donnés par :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]} = 10^{\left[\frac{2m}{5}\right]} = 10^{[0.4m]} = (2.5119)^m \quad (\text{III. 55})$$

$$p_{D0} = a\omega_c 10^{\left[\frac{y}{20m}\right]} \Rightarrow \omega_c = \frac{p_{D0}}{a} 10^{\left[\frac{-y}{20m}\right]} = \frac{p_{D0}}{(2.5119)^m} (1.5849)^{(m-1)} \quad (\text{III. 56})$$

$$K_D = (\omega_c)^m = p_{D0}(1.5849)^{m(m-1)} \quad (\text{III. 57})$$

$$k_{Di} = -\frac{p_{D0}(1.5849)^{m(m-1)} \prod_{j=0}^{N_D} (1 - (2.5119)^m (2.5119)^{(i-j)})}{0.0200(2.5119)^i \prod_{j=0, j \neq i}^{N_D} (1 - (2.5119)^{(i-j)})} \quad (\text{III. 58})$$

En faisant varier l'ordre fractionnaire m de 0.1 à 0.95 avec un pas de 0.01 , on obtient K_D et tous les résidus k_{Di} ($0 \leq i \leq 18$) en fonction du m .

Figure (III.7) montre le paramètre K_D et résidus k_{D0} , k_{D9} et k_{D15} en fonction de m variant de $0,1$ à $0,95$ avec un pas de $0,01$. La routine 'polyfit' de Matlab a été utilisée pour obtenir le polynôme en m de degré M qui correspond aux données de chaque résidu k_{Di} ($0 \leq i \leq 18$). Le degré M du polynôme d'interpolation a été choisi de telle sorte que, pour tous les résidus, l'erreur d'interpolation est inférieur à une valeur donnée pour une bonne approximation (dans ce cas $M = 10$).

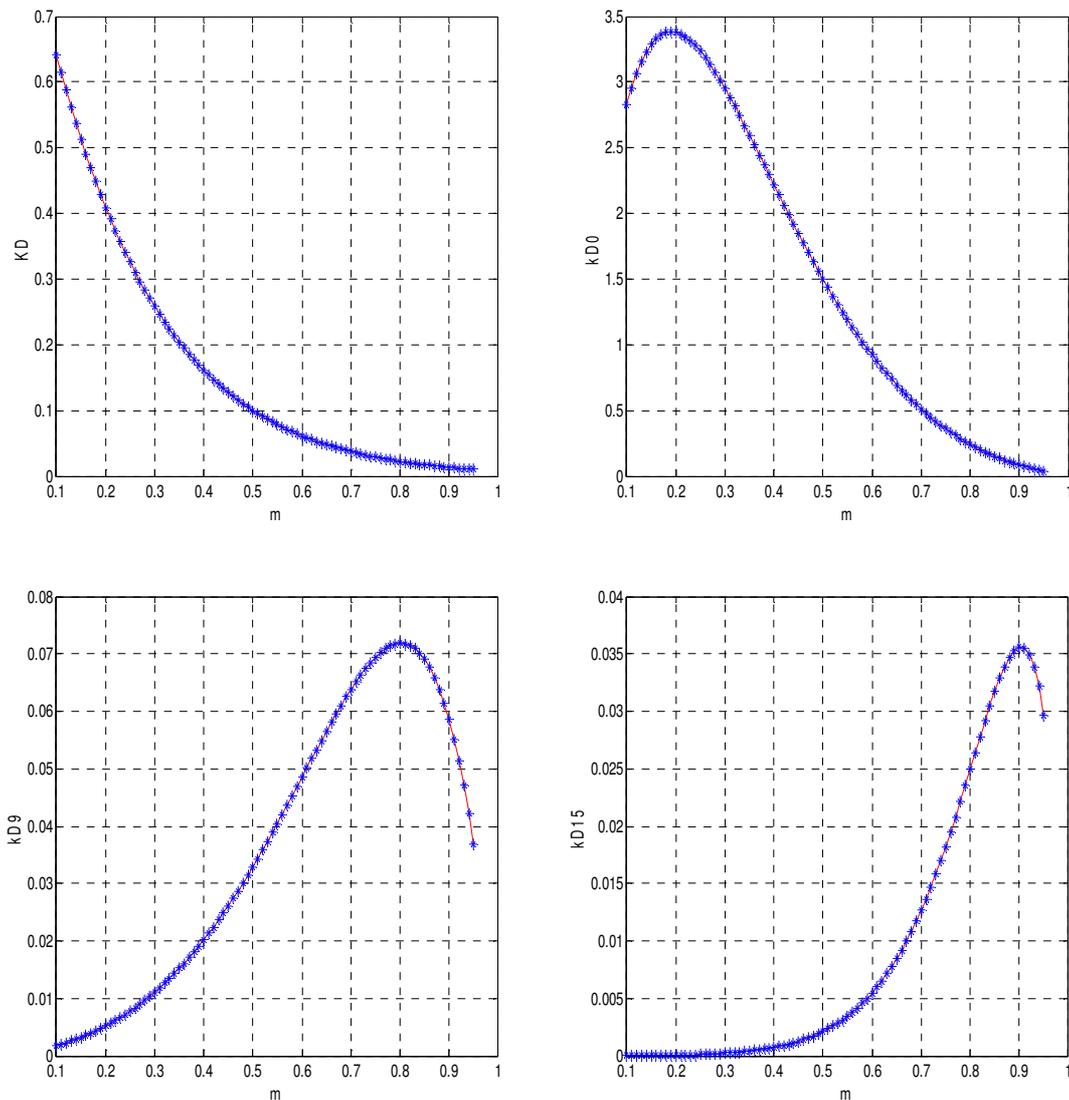


Figure (III.7) : Tracé des coefficients K_D , k_{D0} , k_{D9} et k_{D15} ainsi que leurs interpolations polynomiales

Le tableau (III.2) montre les coefficients b_n et b_{in} de l'interpolation polynomiale des résidus K_D , k_{D0} , k_{D9} et k_{D15} . Les figures (III.8) et (III.9) montrent le diagramme de Bode des différentiateurs analogiques d'ordre fractionnaire $s^{0.27}$ et $s^{0.83}$, respectivement, ainsi que leurs approximations ajustables correspondantes données par les équations (III.59) et (III.60) comme suit:

$$G_D(s) = s^{0.27} \cong \sum_{n=0}^{10} (0.27)^n \left[b_n + \sum_{i=0}^{18} \frac{b_{in}s}{\left(1 + \frac{s}{0.0200(2.5119)^i}\right)} \right] \quad (\text{III. 59})$$

$$G_D(s) = s^{0.83} \cong \sum_{n=0}^{10} (0.83)^n \left[b_n + \sum_{i=0}^{18} \frac{b_{in}s}{\left(1 + \frac{s}{0.0200(2.5119)^i}\right)} \right] \quad (\text{III. 60})$$

Tableau (III.2): Coefficients b_n et b_{in} de l'interpolation polynomiale des résidus K_D, k_{D0}, k_{D9} et k_{D15}

| n | b_n | b_{0n} | b_{9n} | b_{15n} |
|-----|----------|-----------|----------|------------|
| 0 | 1.0000 | -0.0000 | 0.0000 | -0.0008 |
| 1 | -4.3749 | 46.1614 | 0.0114 | 0.0271 |
| 2 | 9.1095 | -221.4960 | 0.0535 | -0.3866 |
| 3 | -11.9416 | 483.6451 | 0.0694 | 3.0817 |
| 4 | 10.9655 | -638.8310 | 0.1922 | -15.1728 |
| 5 | -7.4023 | 568.7528 | -0.3754 | 48.8079 |
| 6 | 3.7318 | -357.3389 | 0.7787 | - 104.3066 |
| 7 | -1.3875 | 159.6562 | -1.3658 | 147.6700 |
| 8 | 0.3622 | -49.1555 | 1.1883 | -133.3581 |
| 9 | -0.0591 | 9.4740 | -0.7660 | 70.1908 |
| 10 | 0.0045 | -0.8681 | 0.2137 | -16.5523 |

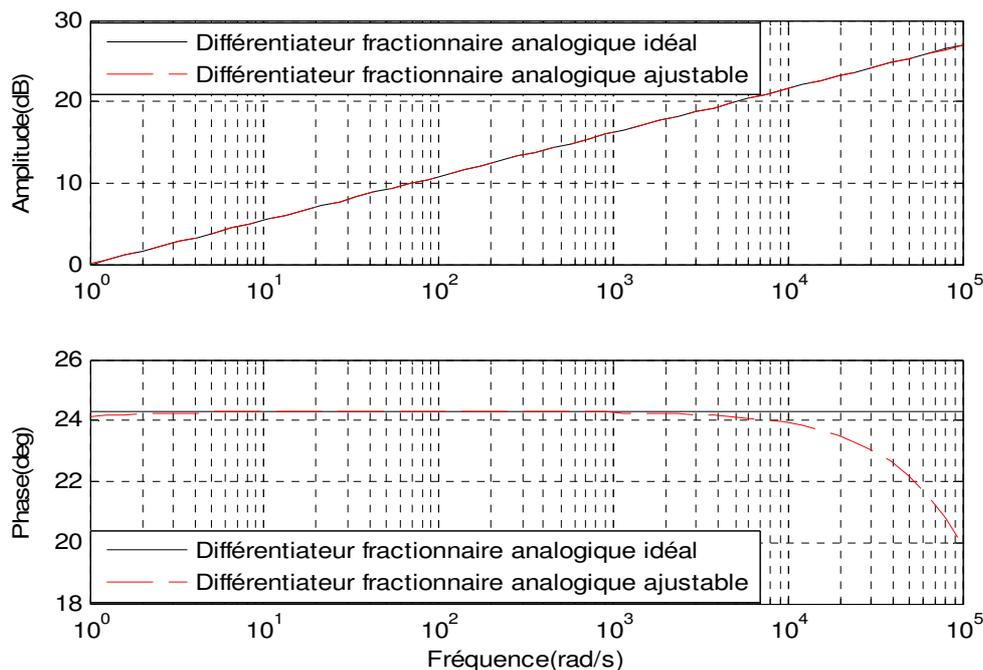


Figure (III.8) : Amplitude et Phase de $s^{0.27}$ et de son implémentation ajustable

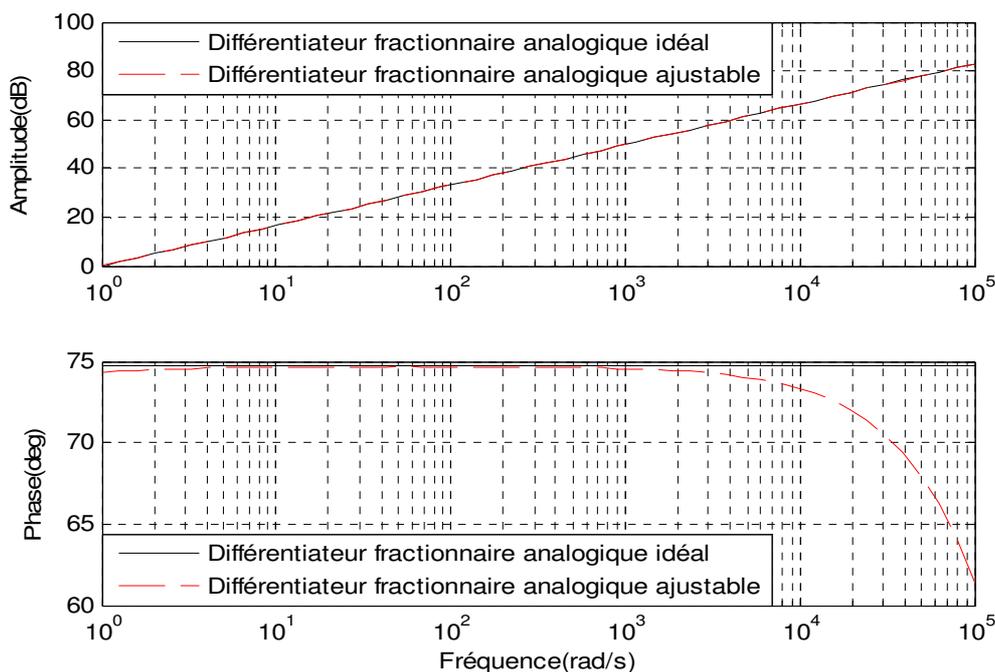


Figure (III.9) : Amplitude et Phase de $s^{0.83}$ et de son implémentation ajustable

Dans ce cas aussi, on note que les tracés de *Bode* des fonction de transfert des différentiateurs $s^{0.27}$ et $s^{0.83}$ ainsi que leurs approximations ajustables en structure de *Farrow* correspondantes sont superposées dans la plage de fréquence d'intérêt $[\omega_b, \omega_h] = [1 \text{ rad/s}, 1000 \text{ rad/s}]$.

III.5 Différentiateur Numérique d'Ordre Fractionnaire Ajustable

Plus récemment, les opérateurs numériques d'ordre fractionnaire ajustables ont été développés [55],[57],[60], car ils peuvent être particulièrement utiles dans certaines applications en temps réel telles que le traitement du signal, l'identification des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire représentées par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire et le réglage des correcteurs $PI^{\lambda}D^{\mu}$ d'ordre fractionnaire. Dans cette section on va introduire un différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable équivalant au différentiateur analogique s^m ($0 < m < 1$). Tout d'abord, un différentiateur numérique RII d'ordre fractionnaire ajustable est obtenu en se basant sur le différentiateur analogique ordre fractionnaire développé dans la section (III.4). Ensuite, le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable est obtenu à partir de différentiateur numérique fractionnaire RII. Pour les deux structures numériques RII et RIF, le différentiateur numérique est implémenté par la structure numérique *Farrow*.

III.5.1 Conception

La fonction de transfert de l'opérateur différentiateur d'ordre fractionnaire est donnée par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (III. 61)$$

avec $s=j\omega$ la fréquence complexe et m est un nombre positif tel que $0 < m < 1$. Dans une bande de fréquences donnée $[\omega_b, \omega_h]$, le différentiateur fractionnaire de l'équation (III.61) peut être approximée par un différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable de l'équation (III.30) comme suit :

$$G_D(s) = s^m \cong \sum_{n=0}^M m^n G_{Dn}(s) \quad (III. 62)$$

où les sous-fonctions $G_{Dn}(s)$, pour $0 \leq n \leq M$, complètement indépendantes de l'ordre de différentiation m sont données dans l'équation (III.32) par l'expression suivante:

$$G_{Dn}(s) = b_n + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{b_{in}s}{\left(1 + s/p_{Di}(m)\right)} \quad (III. 63)$$

L'implémentation numérique du différentiateur d'ordre fractionnaire de l'équation (III.61) est obtenue par la discrétisation de la fonction rationnelle $G_D(s)$ de l'équation (III.62). Cette discrétisation est faite en utilisant la transformation d'Euler $s=(1-z^{-1})/T$ [61] , où T est la période d'échantillonnage. Alors, le filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) du

différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable approximant le différentiateur d'ordre fractionnaire ainsi obtenu est donné par la fonction suivante :

$$s^m \cong G_D(z) = G_D s \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} = \sum_{n=0}^M m^n G_{Dn}(z) \quad (\text{III. 64})$$

où les fonctions $G_{Dn}(z)$ correspondantes aux fonctions $G_{Dn}(s)$ de l'équation (III.63), pour $0 \leq n \leq M$, sont données par:

$$G_{Dn}(z) = G_{Dn}(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} = b_n + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{b_{in} \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)}{\left(1 + \left(\frac{1-z^{-1}}{T p_{Di}} \right) \right)} \quad (\text{III. 65})$$

Donc, la réponse impulsionnelle de ce différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable numérique obtenue en utilisant la transformée inverse de Z de l'équation (III.65) est donnée, pour $0 \leq k \leq +\infty$, comme suit:

$$g_D(k) = \sum_{n=0}^M m^n g_{Dn}(k) \quad (\text{III. 66})$$

où les séquences $g_{dn}(k)$, pour $0 \leq n \leq M$ et $0 \leq k \leq +\infty$, correspondantes aux fonctions $G_{Dn}(z)$ sont données par:

$$g_{Dn}(k) = b_n \delta(k) + \sum_{i=0}^{N_D} \left(\frac{b_{in} p_{Di}}{T p_{Di} + 1} \right) \left\{ \left[\frac{1}{T p_{Di} + 1} \right]^k u(k) - \left[\frac{1}{T p_{Di} + 1} \right]^{k-1} u(k-1) \right\} \quad (\text{III. 67})$$

La troncation de la séquence $g_D(k)$, pour $0 \leq k \leq (L-1)$, conduit à la réponse impulsionnelle finie (RIF) du différentiateur numérique d'ordre fractionnaire ajustable de longueur L :

$$g_D(k) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n=0}^{M_D} m^n g_{Dn}(k), & 0 \leq k \leq (L-1) \\ 0, & \text{ailleurs} \end{array} \right\} \quad (\text{III. 68})$$

Donc, la fonction de transfert correspondante au différentiateur numérique d'ordre fractionnaire ajustable RIF est donnée comme suit :

$$G_D(z) = \sum_{k=0}^{L-1} g_D(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{L-1} \left\{ \sum_{n=0}^{M_D} m^n g_{Dn}(k) \right\} z^{-k} = \sum_{n=0}^{M_D} m^n \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} g_{Dn}(k) z^{-k} \right\} \quad (\text{III. 69})$$

Maintenant, on va considérer la conception d'un différentiateur numérique d'ordre fractionnaire ajustable équivalent au différentiateur d'ordre fractionnaire analogique $H_D(s)=s^\mu$,

ou $m_l \leq \mu \leq (m_l + 1)$ avec m_l un nombre entier. La fonction de transfert du différentiateur d'ordre fractionnaire analogique $H_D(s) = s^\mu$ peut être réécrite sous la forme suivante : $H_D(s) = s^\mu$

$$H_D(s) = s^\mu = s^{(m_1+m)} = s^{m_1} s^m = s^{m_1} G_D(s) \quad (\text{III. 70})$$

où $0 \leq m \leq 1$. Ainsi, le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable $H_D(z)$ est obtenu comme suit :

$$H_D(z) = H_D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = s^{m_1} G_D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^{m_1} G_D(z) \quad (\text{III. 71})$$

$G_D(z)$ est la fonction de transfert du différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable de l'équation (III.69). La fonction $\left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^{m_1}$ peut être développée comme:

$$\left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^{m_1} = \sum_{p=0}^{m_1} \lambda_p z^{-p} \quad (\text{III. 72})$$

où $\lambda_0 = \frac{1}{T^{m_1}}$ et $\lambda_p = \left(\frac{p-m_1-1}{p} \right) \lambda_{p-1}$, pour $p = 1, 2, \dots, m_1$.

Donc, l'équation(III.71) devienne:

$$H_D(z) = \sum_{p=0}^{m_1} \lambda_p \{z^{-p} G_D(z)\} \quad (\text{III. 73})$$

En utilisant la transformée en Z inverse, la réponse impulsionnelle numérique RIF du différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable de longueur L est donnée par l'expression suivante:

$$h_D(k) = \begin{cases} \sum_{p=0}^{m_1} \lambda_p \{g_D(k-p)\}, & 0 \leq k \leq (L-1) \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III. 74})$$

$$h_D(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{M_D} m^n \left\{ \sum_{p=0}^{m_1} \lambda_p \{g_{Dn}(k-p)\} \right\}, & 0 \leq k \leq (L-1) \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III. 75})$$

Donc le calcul numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire μ , pour $m_l \leq \mu \leq (m_l + 1)$, est donné par:

$$D^\mu y(t = kT) \cong \sum_{q=0}^{L-1} h_D(q) y(k-q) = \sum_{q=0}^{L-1} \left[\sum_{n=0}^{M_D} m^n \left\{ \sum_{p=0}^{m_1} \lambda_p g_{Dn}(q-p) \right\} y(k-q) \right] \quad (\text{III. 76})$$

$$D^\mu y(t = kT) \cong \sum_{q=0}^{L-1} h_D(q) y(k-q) = \sum_{n=0}^{M_D} m^n \left[\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_1} \lambda_p g_{Dn}(q-p) \right\} y(k-q) \right] \quad (\text{III. 77})$$

III.5.2 Exemple Illustratif

Considérons la conception d'un différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable, dans la bande de fréquence $[\omega_b, \omega_h] = [0.01\text{rad/s}, 10\text{rad/s}]$, l'équivalent au différentiateur d'ordre fractionnaire analogique s^m , pour $0 < m < 1$. L'approximation rationnelle de différentiateur d'ordre fractionnaire analogique est donnée comme :

$$G_D(s) = s^m \cong K_D(m) + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{k_{Di}(m)s}{\left(1 + \frac{s}{p_{Di}(m)}\right)} \quad (\text{III. 78})$$

les pôles p_{Di} ($i = 0, 1, \dots, N_D$) sont calculés pour $m=0.5$. Pour $\omega_c=0.01\omega_b=0.0001\text{rad/s}$ et $\omega_{max}=1000\omega_h=10000\text{rad/s}$ et $y=1\text{dB}$, dans ce cas, les paramètres d'approximation a, b, p_{D0} et N_D sont $a=1.585, b=1.585, p_{D0} = 0.002$, et $N=20$. ainsi, les pôles p_{Di} ($i = 0, 1, \dots, 20$) sont donnés comme:

$$p_{Di} = 0.002(2.512)^i \quad (\text{III. 79})$$

Pour un ordre fractionnaire m ($0 < m < 1$), le coefficient $K_D(m)$ et les résidus $k_{Di}(m)$ (pour $0 \leq i \leq 20$) sont données par:

$$K_D(m) = \left[\frac{0.002}{(2.512)^m} \right]^m (1.585)^{m(m-1)} \quad (\text{III. 80})$$

$$k_{Di}(m) = \frac{\left[\frac{0.002}{(2.512)^m} \right]^m (1.585)^{m(m-1)} \prod_{j=0}^{20} [1 - (2.512)^m (2.512)^{(i-j)}]}{0.002(2.512)^i \prod_{j=0, j \neq i}^{20} [1 - (2.512)^{(i-j)}]} \quad (\text{III. 81})$$

La routine *Polyfit* de *Matlab* a été utilisée pour calculer les coefficients du polynôme en m de degré $M=10$ qui correspond aux données du coefficient $K_D(m)$ et de chaque résidu $k_{Di}(m)$ ($0 \leq i \leq 20$). Une fois que tous les coefficients d_n et d_{in} ($0 \leq n \leq 10$ et $0 \leq i \leq 20$) sont obtenus, le différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable analogique s^m ($0 < m < 1$) dans la bande de fréquence $[0.01\text{rad/s}, 10\text{rad/s}]$, est donné comme suit:

$$s^m \approx G_D(s) = \sum_{n=0}^{10} m^n \left[b_n + \sum_{i=0}^{20} \frac{b_{in}s}{\left(1 + \frac{s}{0.002(2.512)^i}\right)} \right] \quad (\text{III. 82})$$

La fonction de transfert du différentiateur numérique d'ordre fractionnaire ajustable $G_D(z)$ est alors donnée par:

$$G_D(z) = \sum_{n=0}^{10} m^n \left[b_n + \sum_{i=0}^{20} \left(\frac{b_{in} 0.002(2.512)^i}{(1 + T * 0.002(2.512)^i)} \right) \frac{(z-1)}{\left(z - \left(\frac{1}{1 + T * 0.002(2.512)^i} \right) \right)} \right] \quad (\text{III. 83})$$

La réponse impulsionnelle $g_{DI}(k)$ de ce différentiateur numérique RII d'ordre fractionnaire ajustable obtenue en utilisant la transformée en Z inverse de l'équation (III.83) est donnée, pour $0 \leq k \leq +\infty$, comme:

$$g_{DI}(k) \cong \sum_{n=0}^{10} m^n \left[b_n \delta(k) + \sum_{i=0}^{20} \left(\frac{b_{in} 0.002 (2.512)^i}{(1 + T * 0.002 (2.512)^i)} \right) \left\{ \left[\frac{1}{1 + T * 0.002 (2.512)^i} \right]^k u(k) - \left[\frac{1}{1 + T * 0.002 (2.512)^i} \right]^{k-1} u(k-1) \right\} \right] \quad (III. 84)$$

La réponse impulsionnelle $g_{DF}(k)$ du différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable de longueur $L=200$ est donnée, pour $0 \leq k \leq (L-1)$, par :

$$g_{DF}(k) \cong \sum_{n=0}^{10} m^n \left[b_n \delta(k) + \sum_{i=0}^{20} \left(\frac{b_{in} 0.002 (2.512)^i}{(1 + T * 0.002 (2.512)^i)} \right) \left\{ \left[\frac{1}{1 + T * 0.002 (2.512)^i} \right]^k u(k) - \left[\frac{1}{1 + T * 0.002 (2.512)^i} \right]^{k-1} u(k-1) \right\} \right] \quad (III. 85)$$

La fonction de transfert du différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable $G_{DF}(z)$ est alors donnée par:

$$G_{DF}(z) = \sum_{k=0}^{199} [g_{DF}(k)] z^{-k} \quad (III. 86)$$

Donc le calcul numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire m , pour $0 \leq m \leq 1$, est donné par:

$$D^m y(t = kT) = \sum_{k=0}^{199} g_{DF}(l) y(k-l) = \sum_{n=0}^{10} m^n \left\{ \sum_{k=0}^{199} g_{DFn}(l) y(k-l) \right\} \quad (III. 87)$$

où, pour $0 \leq n \leq 10$.

$$g_{DFn}(k) = \left[b_n \delta(k) + \sum_{i=0}^{20} \left(\frac{b_{in} 0.002 (2.512)^i}{(1 + T * 0.002 (2.512)^i)} \right) \left\{ \left[\frac{1}{1 + T * 0.002 (2.512)^i} \right]^k u(k) - \left[\frac{1}{1 + T * 0.002 (2.512)^i} \right]^{k-1} u(k-1) \right\} \right] \quad (III. 88)$$

La figure (III.10) montre le diagramme de *Bode* du différentiateur analogique d'ordre fractionnaire $s^{0.84}$, du différentiateur analogique d'ordre fractionnaire ajustable ainsi que du différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable pour une période d'échantillonnage $T=0.1s$ et une longueur $L=200$.

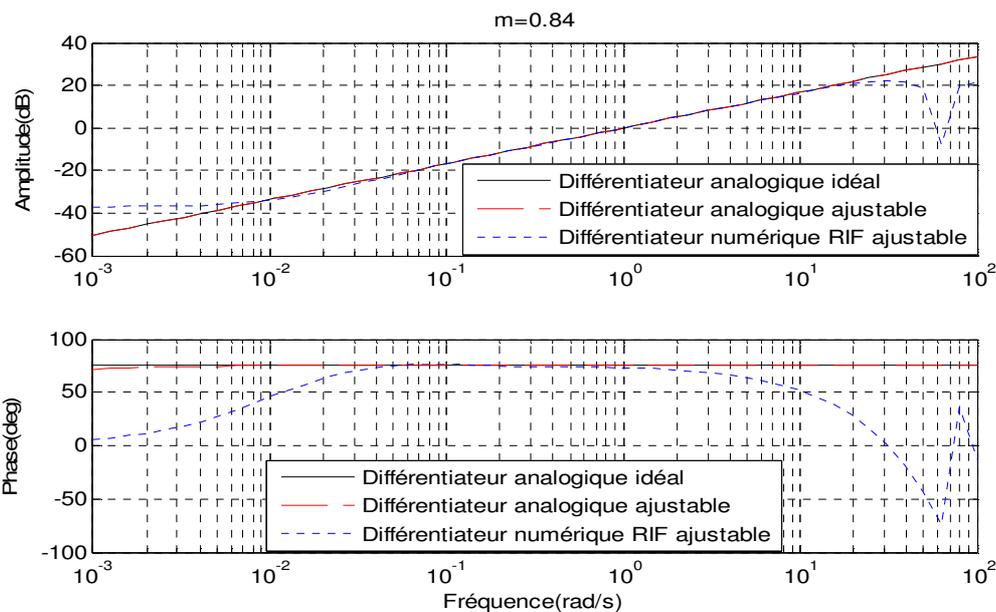


Figure (III.10) : Tracé de Bode du différentiateur fractionnaire $s^{0.84}$, analogique d'ordre fractionnaire ajustable et numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable

La figure (III.11) montre le signal échelon unité ainsi que ses dérivées d'ordre fractionnaire $m=0.27$, $m=0.48$ et $m=0.82$ en utilisant le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable proposé (pour une période d'échantillonnage $T=0.1s$ et une longueur $L=200$) et le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire de Grunwald-Letnikov.

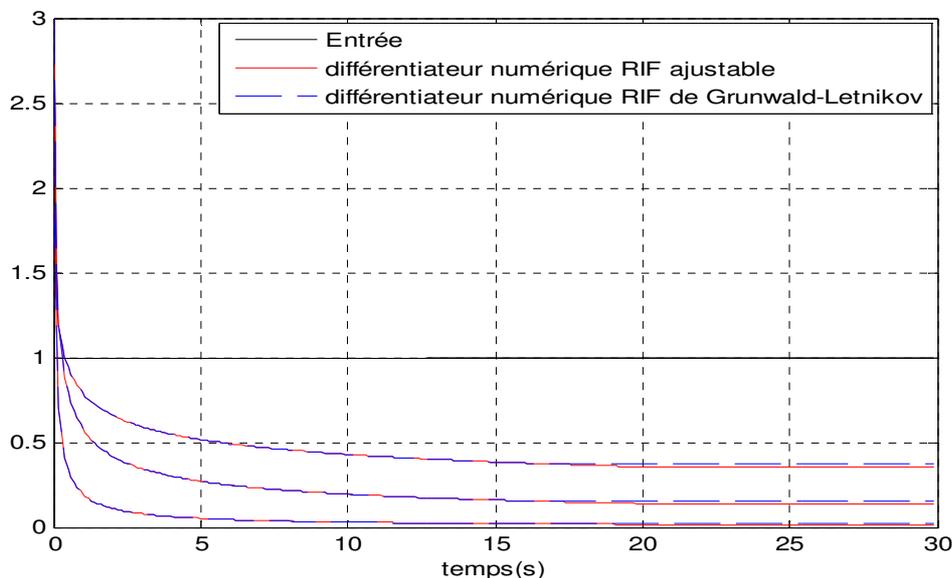


Figure (III.11) : Echelon unité et ses dérivées d'ordre fractionnaire $m=0.27$, $m=0.48$ et $m=0.82$ en utilisant le différentiateur numérique RIF ajustable et de Grunwald-Letnikov

La figure (III.12) montre le signal rampe unité ainsi que ses dérivées d'ordre fractionnaire $m=0.27$, $m=0.48$ et $m=0.82$ en utilisant le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire

ajustable proposé (pour une période d'échantillonnage $T=0.1s$ et une longueur $L=200$) et le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire de *Grunwald-Letnikov*.

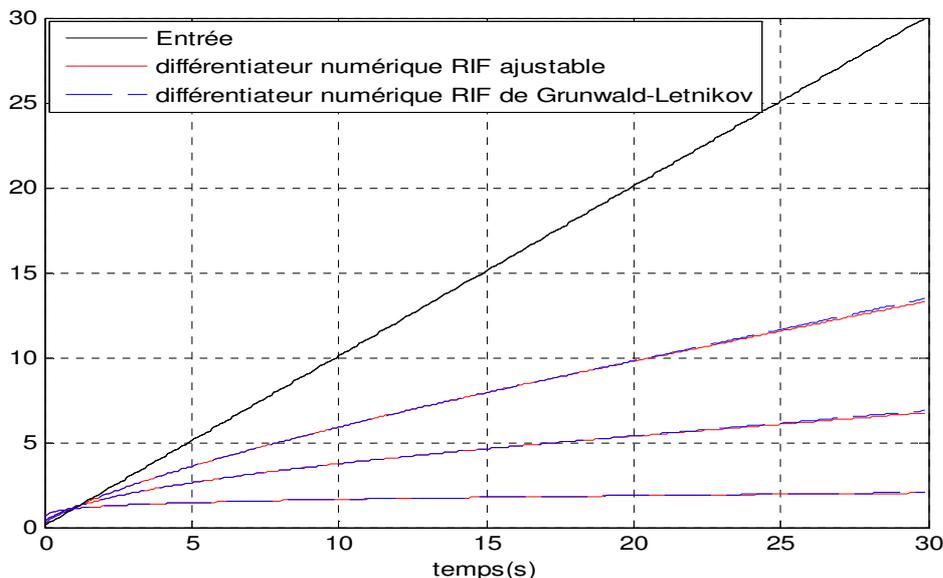


Figure (III.12) : Rampe unité et ses dérivées d'ordre fractionnaire $m= 0.27$, $m=0.48$ et $m = 0.82$ en utilisant le différentiateur numérique RIF ajustable et de *Grunwald-Letnikov*

La figure (III.13) montre le signal $\sin(0.5t)$ ainsi que ses dérivées d'ordre fractionnaire $m= 0.27$, $m=0.48$ et $m = 0.82$ en utilisant le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable proposé (pour une période d'échantillonnage $T=0.1s$ et une longueur $L=200$) et le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire de *Grunwald-Letnikov*.

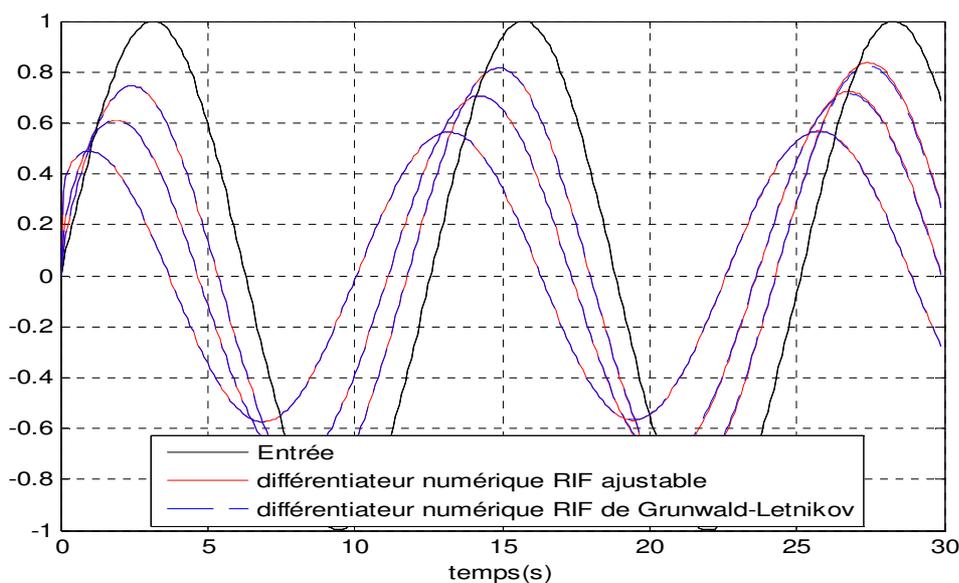


Figure (III.13) : Signal $\sin(0.5t)$ et ses dérivées d'ordre fractionnaire $m= 0.27$, $m=0.48$ et $m = 0.82$ en utilisant le différentiateur numérique RIF ajustable et de *Grunwald-Letnikov*

III.6 Conclusion

Les techniques d'implémentation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire existantes dans la littérature sont des techniques fixes. Leurs implémentations analogiques ajustables n'existent pas encore. Alors, nous avons présenté une nouvelle méthode de simulation et d'implémentation de l'intégrateur s^{-m} et du différentiateur s^m ($0 < m < 1$) d'ordre fractionnaire par une structure ajustable, dans une bande fréquentielle donnée, en utilisant une structure dite structure de *Farrow* en se basant sur la fonction rationnelle d'approximation de la méthode de *Charef*. L'approche proposée est basée sur l'interpolation polynomiale en fonction de l'ordre m des coefficients de l'approximation par des fonctions rationnelles analogiques de l'intégrateur et du différentiateur d'ordre fractionnaire. Des exemples illustratifs ont été présentés pour montrer l'exactitude et l'efficacité de la technique d'implémentation proposée.

En se basant sur la méthode d'implémentation analogique de l'intégrateur s^{-m} et du différentiateur s^m ($0 < m < 1$) d'ordre fractionnaire par une structure ajustable, un différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable équivalant au différentiateur analogique s^m ($0 < m < 1$) a été développé. Tout d'abord, un différentiateur numérique RII d'ordre fractionnaire ajustable est obtenu, ensuite, le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable est obtenu à partir de différentiateur numérique fractionnaire RII. Pour les deux structures numériques RII et RIF, le différentiateur numérique est implémenté par la structure numérique *Farrow*. En raison de sa structure, le différentiateur numérique d'ordre fractionnaire ajustable jouera un rôle important dans les domaines l'identification, le traitement du signal et la commande des systèmes d'ordre fractionnaire.

Un exemple illustratif a été aussi présenté pour montrer l'exactitude et l'efficacité de la technique d'implémentation du différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable proposée. Les dérivées d'ordre fractionnaire de quelques signaux usuels ont été obtenues et comparées à celles obtenues par le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire de *Grunwald-Letnikov*. Les résultats obtenus ont été très satisfaisants.

IV. Identification des Systèmes Linéaires Fractionnaire Utilisant le Différentiateur d'Ordre Fractionnaire Ajustable

IV.1 Introduction

Dans les dernières décennies, il a été observé que plusieurs systèmes physiques sont bien décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaires plutôt que par des équations différentielles classiques d'ordre entier [7], [62-63] ; donc, les systèmes d'ordre fractionnaire sont devenus un outil de plus en plus populaire pour la modélisation du comportement de nombreux systèmes physiques.

L'identification de ces systèmes d'ordre fractionnaire a de plus en plus d'intérêt de la communauté scientifique. Cependant, ces types de modèles posent un problème d'identification plus difficile parce que ça nécessite non seulement l'estimation des paramètres du modèle, mais également la détermination des ordres fractionnaires ainsi que le calcul numérique fastidieux des dérivés d'ordre fractionnaire. Quelques techniques d'identification des systèmes d'ordre fractionnaire ont été proposées dans la littérature, où la plupart d'entre eux sont des extensions des méthodes d'identification pour les systèmes réguliers d'ordre entier et nécessitent une connaissance a priori des ordres des dérivées fractionnaires pour estimer que les paramètres du modèle [22-23] [64-66] .

Ce chapitre est divisé en trois parties pour l'identification des systèmes dynamiques décrits par différentes équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaires en utilisant des données temporelles. Dans la première partie on propose l'identification des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire représentés par des équation différentielles d'ordre fractionnaire en se basant sur l'algorithme des moindres carrés récursif appliqué à une structure ARX obtenue de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire à l'aide d'un différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable. Dans cette partie la connaissance a priori des ordres de différenciation de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire est nécessaire pour l'identification des paramètres du modèle fractionnaire. Comme la structure ARX est obtenue de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire à l'aide d'un différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable, nous avons constaté que les calculs fastidieux des dérivés d'ordre fractionnaire peuvent être évités à chaque itération de l'algorithme des moindres carrés récursif. Donc dans la seconde partie on propose l'identification des systèmes fractionnaires linéaires d'ordre commensurable sans connaissance

préalable de l'ordre fractionnaire commensurable de l'équation différentielle linéaire. Dans cette partie on peut essayer plusieurs valeurs de l'ordre commensurable autour de sa valeur la plus probable pour estimer les paramètres du modèle fractionnaire et l'estimée de la valeur de l'ordre fractionnaire commensurable est alors celle dont l'erreur quadratique entre les données mesurées et le modèle estimé est la plus petite. La troisième partie traite l'identification du système linéaire d'ordre fractionnaire fondamental. La méthode d'identification proposée est une extension du travail de la première pour inclure l'estimation directe de l'ordre commensurable en plus de l'estimation des paramètres du modèle. Les idées de base et les formulations du schéma d'identification sont présentées. Des exemples illustratifs sont également présentés pour valider l'approche d'identification proposée pour les différents systèmes linéaires d'ordre fractionnaires.

IV.2 Identification des Paramètres des Systèmes Linéaires d'Ordre Fractionnaire

Un système linéaire d'ordre fractionnaire monovarié est décrit par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante [4]:

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (IV.1)$$

où $u(t)$ est l'entrée, $y(t)$ est la sortie, les paramètres du modèle a_i ($1 \leq i \leq n$ et b_j ($0 \leq j \leq m$) sont des nombres réels constants, les ordres α_i ($1 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont des nombres réels de telle sorte que $(\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n, \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_m, \text{ et } \beta_m < \alpha_n$. Avec des conditions initiales nulles, la fonction de transfert du système linéaire fractionnaire est donnée comme suit [4]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\beta_j}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i}} \quad (IV.2)$$

Quand les ordres de dérivation α_i ($1 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont des multiples du même nombre réel α ($0 < \alpha < 1$), telle que $\alpha_i = i \cdot \alpha$ ($1 \leq i \leq n$) et $\beta_j = j \cdot \alpha$ ($0 \leq j \leq m$) avec $m \leq n$, le système est un système d'ordre fractionnaire commensurable. Donc la fonction de transfert sera [4]:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i (s^\alpha)^i}{1 + \sum_{i=1}^n a_i (s^\alpha)^i} \quad (IV.3)$$

L'objectif d'un algorithme d'identification est le développement d'une technique d'estimation des paramètres d'un modèle mathématique qui sera capable de reproduire le comportement dynamique d'un système physique.

IV.2.1 Formulation de l'Identification

Dans ce contexte, nous allons considérer les systèmes dynamiques linéaires d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.1) où les ordres des dérivés sont connus a priori. Par conséquent, seuls les coefficients a_i ($0 \leq i \leq n$) et b_j ($0 \leq j \leq m$) du modèle fractionnaires sont alors soumis à l'estimation paramétrique. En général, les équations différentielles d'ordre fractionnaire n'ont pas de solutions analytiques et pour leurs solutions numériques la discrétisation des dérivées fractionnaires sont alors nécessaires.

Dans la suite, nous allons utiliser le différentiateur ordre fractionnaire ajustable numérique RIF développé dans le chapitre III. En utilisant la définition en temps discret du différentiateur d'ordre fractionnaire de l'équation (III.77), l'équation différentielle fractionnaire de l'équation (VI.1), considérée initialement au repos, est convertie en une forme discrète comme suit [66]:

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{q=0}^{L-1} h_{D\alpha_i}(q) y(k-q) = \sum_{j=0}^m b_j \sum_{q=0}^{L-1} h_{D\beta_j}(q) u(k-q) \quad (IV.4)$$

$$\begin{aligned} & y(k) + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\alpha_i})^{n1} \left[\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\alpha_i}} \lambda_p g_{Dn\alpha_i}(q-p) \right\} y(k-q) \right] \right) \\ & = \sum_{j=0}^m b_j \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\beta_j})^{n1} \left[\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\beta_j}} \lambda_p g_{Dn\beta_j}(q-p) \right\} u(k-q) \right] \right) \end{aligned} \quad (IV.5)$$

ou, pour $1 \leq i \leq n$, $m_{1\alpha_i}$ est un nombre entier tel que $m_{1\alpha_i} \leq \alpha_i \leq m_{1\alpha_i} + 1$ et $m_{\alpha_i} = (\alpha_i - m_{1\alpha_i})$ et, pour $0 \leq j \leq m$, $m_{1\beta_j}$ est aussi un nombre entier tel que $m_{1\beta_j} \leq \beta_j \leq m_{1\beta_j} + 1$ et $m_{\beta_j} = (\beta_j - m_{1\beta_j})$.

En Réorganisant l'équation (IV.5) pour $q = 0$ et $1 \leq q \leq (L-1)$, on obtient l'expression suivante:

$$\begin{aligned} & y(k) \left[1 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\alpha_i})^{n1} g_{Dn\alpha_i}(0) \right) \right] \\ & + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\alpha_i})^{n1} \left[\sum_{q=1}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\alpha_i}} \lambda_p g_{Dn\alpha_i}(q-p) \right\} y(k-q) \right] \right) \\ & = \sum_{j=0}^m b_j \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\beta_j})^{n1} \left[\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\beta_j}} \lambda_p g_{Dn\beta_j}(q-p) \right\} u(k-q) \right] \right) \end{aligned} \quad (IV.6)$$

Par conséquent, la solution $y(k)$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.1) est donnée comme suit:

$$\begin{aligned} y(k) = & - \frac{\sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\alpha_i})^{n1} \left[\sum_{q=1}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\alpha_i}} \lambda_p g_{Dn\alpha_i}(q-p) \right\} y(k-q) \right] \right)}{\left[1 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\alpha_i})^{n1} g_{Dn\alpha_i}(0) \right) \right]} \\ & + \frac{\sum_{j=0}^m b_j \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\beta_j})^{n1} \left[\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\beta_j}} \lambda_p g_{Dn\beta_j}(q-p) \right\} u(k-q) \right] \right)}{\left[1 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\alpha_i})^{n1} g_{Dn\alpha_i}(0) \right) \right]} \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Une forme simplifiée de l'équation (IV.7) est donnée par l'expression suivante [66]:

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a'_i Y_i(k) + \sum_{j=0}^m b'_j U_j(k) \quad (IV.8)$$

ou a'_i , $Y_i(k)$, pour $1 \leq i \leq n$, et b'_j , $U_j(k)$, et $0 \leq j \leq m$, sont donnés respectivement par:

$$a'_i = \frac{a_i}{\left[1 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\alpha i})^{n1} g_{Dn\alpha i}(0)\right)\right]} \quad (IV.9)$$

$$b'_j = \frac{b_j}{\left[1 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\alpha i})^{n1} g_{Dn\alpha i}(0)\right)\right]} \quad (IV.10)$$

$$Y_i(k) = \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\alpha i})^{n1} \left[\sum_{q=1}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\alpha i}} \lambda_p g_{Dn\alpha i}(q-p) \right\} y(k-q) \right] \right) \quad (IV.11)$$

$$U_j(k) = \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{\beta j})^{n1} \left[\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\beta i}} \lambda_p g_{Dn\beta j}(q-p) \right\} u(k-q) \right] \right) \quad (IV.12)$$

Donc la sortie du système $y(k)$ peut être exprimée sous la forme d'une régression comme suit:

$$y(k) = \phi(k)\theta \quad (IV.13)$$

où les paramètres du vecteur θ et le vecteur de régression $\Phi(k)$ sont donnés par:

$$\begin{aligned} \theta &= [a'_1, a'_2, \dots, a'_n, b'_0, b'_1, \dots, b'_m]^T \\ \Phi(k) &= [-Y_1(k), -Y_2(k), \dots, -Y_n(k), U_0(k), U_1(k), \dots, U_m(k)] \end{aligned} \quad (IV.14)$$

L'expression de l'équation (IV.13) est une structure qui est linéaire par rapport aux paramètres inconnus du vecteur θ ; par conséquent, il peut être résolu en utilisant l'approche classique des moindres carrés.

IV.2.2 Algorithme d'Estimation des Paramètres

Dans le problème des moindres carrés classique, on suppose que la variable estimée $\hat{y}(k)$ est donnée par le modèle de régression:

$$\hat{y}(k) = \phi(k)\theta \quad (IV.15)$$

où le vecteur $\Phi(k)$ de l'équation (IV.14) est connu et le vecteur des paramètres θ est inconnu.

Dans ce contexte, le vecteur $\Phi(k)$ est calculé, en utilisant les deux équations (IV.11) et (IV.12), à partir des observations données $y(k)$ et $u(k)$ qui sont obtenus à partir d'une expérience. On note que les termes des équations (IV.11) et (IV.12) $\sum_{q=1}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\alpha i}} \lambda_p g_{Dn\alpha i}(q-p) \right\} y(k-q)$ et $\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1\beta i}} \lambda_p g_{Dn\beta j}(q-p) \right\} u(k-q)$ des équations (IV.11) et (IV.12) sont, respectivement, indépendantes des ordres des dérivés fractionnaires α_i ($1 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$). Par conséquent, ils sont calculés qu'une seule fois pour des observations expérimentales données $y(k)$ et $u(k)$. Cependant, plusieurs ensembles de valeurs $Y_i(k)$ ($1 \leq i \leq n$) et $U_j(k)$ ($0 \leq j \leq m$) peuvent être facilement calculés pour différentes combinaisons autour des valeurs les plus probables des ordre de dérivés fractionnaires α_i ($1 \leq i \leq n$) et β_i ($0 \leq j \leq m$) sans répéter les calculs fastidieux des dérivés d'ordre fractionnaire à chaque essai. Donc, plusieurs ensembles

de valeurs du paramètre de vecteur θ peuvent être obtenus et le meilleur peut être choisi, par rapport à un critère de minimisation donné. Le principe de la méthode des moindres carrés indique que le vecteur estimé $\hat{\theta}$ est choisi de telle sorte que le critère quadratique des moindres carrés suivant :

$$J(\theta) = \frac{1}{K} \left[\sum_{k=1}^{K_m} [y(k) - \hat{y}(k, \theta)]^2 \right] \quad (IV.16)$$

est minimal [45][67] . Dans ce cas, le vecteur des paramètres estimé est donné par:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left\{ J(\theta) = \frac{1}{K} \left[\sum_{k=1}^{K_m} [y(k) - \hat{y}(k, \theta)]^2 \right] \right\} \quad (IV.17)$$

Si la matrice $[\sum_{k=1}^{K_m} [\phi^T(k)\phi(k)]]^{-1}$ est inversible, le critère quadratique des moindres carrés $J(\theta)$ a un minimum unique et le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}$ est donné par [45] [67] :

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^{K_m} [\phi^T(k)\phi(k)] \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{K_m} [\phi^T(k)y(k)] \right] \quad (IV.18)$$

La version récursive de l'équation (IV.18) est donnée par les expressions suivantes [45] :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + F(k)\phi(k+1) \frac{(y(k+1) - \hat{\theta}^T(k)\phi(k+1))}{\lambda + \phi^T(k+1)F(k)\phi(k+1)} \\ F(k+1) = \frac{1}{\lambda} \left[F(k) - \frac{F(k)\phi(k+1)\phi^T(k+1)F(k)}{1 + \phi^T(k+1)F(k)\phi(k+1)} \right] \end{cases} \quad (IV.19)$$

où le paramètre λ est tel que $0 < \lambda < 1$ et la valeur initiale $F(0)$ de la matrice du gain d'adaptation $F(k)$ est choisie comme:

$$F(0) = \frac{1}{\delta} I, \quad \text{avec } 0 < \delta \ll 1 \quad (IV.20)$$

Une fois que le vecteur des paramètres $\theta = [a'_1, a'_2, \dots, a'_n, b'_0, b'_1, \dots, b'_m]^T$ est calculé, les coefficients $a_i (0 \leq i \leq n)$ et $b_j (0 \leq j \leq m)$ de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.1) sont ensuite obtenus à partir des deux équations (IV.9), (IV.10) comme suit:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \dot{a}_1 W_1) & \dot{a}_1 W_2 & \cdots & \dot{a}_1 W_n \\ \dot{a}_2 W_1 & (1 + \dot{a}_2 W_2) & \cdots & \dot{a}_2 W_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{a}_n W_1 & \dot{a}_n W_2 & \cdots & (1 + \dot{a}_n W_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \vdots \\ \dot{a}_n \end{bmatrix} \quad (IV.21)$$

$$b_j = b'_j \left[1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \dot{a}_i W_i \right\} \right] \quad (IV.22)$$

où $W_i = - \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{ai})^{n1} g_{Dn ai}(0) \right)$ pour $1 \leq i \leq n$

IV.2.3 Exemples Illustratifs

Nous allons présenter deux exemples de simulation sur PC en utilisant MATLAB pour valider l'efficacité de l'approche d'identification proposée des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire.

IV.2.3.1 Exemple 1

L'exemple considéré est un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable stable représenté par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante:

$$0.04 \frac{d^{2.61}y(t)}{dt^{2.61}} + 0.24 \frac{d^{1.74}y(t)}{dt^{1.74}} + 1.20 \frac{d^{0.87}y(t)}{dt^{0.87}} + y(t) = u(t) \quad (IV.23)$$

Sa fonction de transfert est donnée par:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25}{(s^{2.61} + 6s^{1.74} + 30s^{0.87} + 25)} \quad (IV.24)$$

Le modèle fractionnaire à identifier proposé a la même structure que le système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (IV.23). Par conséquent, il est représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante:

$$a_3 \frac{d^{2.61}y(t)}{dt^{2.61}} + a_2 \frac{d^{1.74}y(t)}{dt^{1.74}} + a_1 \frac{d^{0.87}y(t)}{dt^{0.87}} + y(t) = b_0 u(t) \quad (IV.25)$$

En utilisant la définition en temps discret du différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable de l'équation (III.77), l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire (IV.25), considéré comme initialement au repos, est ensuite convertie en une forme discrète comme suit :

$$\begin{aligned} y(k) + a_3 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D2.61}(q)y(k-q) + a_2 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D1.74}(q)y(k-q) \\ + a_1 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D0.87}(q)y(k-q) = b_0 u(k) \end{aligned} \quad (IV.26)$$

Les paramètres utilisés pour le calcul numérique des réponses impulsionnelles numériques RIF des dérivés d'ordre fractionnaire ($h_{D2.61}(k)$, $h_{D1.74}(k)$, $h_{D0.87}(k)$) de l'équation (IV.26) sont:

- La période d'échantillonnage $T = 0.01s$
- $N_D = 35$ et $M_D = 10$
- La longueur de la réponse impulsionnelle du différentiateur fractionnaire numérique RIF $L=500$

Dans ce travail, les valeurs numériques des observations $y(k)$ et $u(k)$ de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.23) qui seront utilisées dans l'identification des paramètres du modèle de l'équation (IV.25) sont générées en utilisant les méthodes de résolution des systèmes d'ordre fractionnaire développées dans [68-69] .

La fonction de transfert $H(s)$ de l'équation (IV.24) est réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{25}{((s^{0.87})^3 + 6(s^{0.87})^2 + 30(s^{0.87}) + 25)} \\
 &= \frac{25}{(s^{0.87} + 1)((s^{0.87})^2 + 5(s^{0.87}) + 25)}
 \end{aligned} \tag{IV.27}$$

Dans ce cas, $H(s)$ peut être décomposé en éléments simples comme suit:

$$H(s) = \frac{(25/21)}{(s^{0.87} + 1)} - \frac{(25/21)s^{0.87} + (100/21)}{((s^{0.87})^2 + 5(s^{0.87}) + 25)} \tag{IV.28}$$

L'équation (IV.28) peut être mise en fonctions fondamentales d'ordre fractionnaire comme suit:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{(25/21)}{(s^{0.87} + 1)} - \left(\frac{1}{7\sqrt{3}}\right) \frac{(25/2)\sqrt{3}}{((s^{0.87})^2 + 5(s^{0.87}) + 25)} \\
 &\quad - \left(\frac{5}{21}\right) \frac{(5(s^{0.87}) + 25/2)}{((s^{0.87})^2 + 5(s^{0.87}) + 25)}
 \end{aligned} \tag{IV.29}$$

De [68-69], les trois fonctions d'ordre fractionnaire fondamentales de l'équation (IV.29) peuvent être facilement approximées par des fonctions rationnelles, dans la bande de fréquence donnée $[0, \omega_H = 10000 \text{ rad/s}]$ avec $\omega_{max} = 100000\omega_H$, comme suit:

$$\frac{1}{(s^{0.87} + 1)} \cong \sum_{i=1}^{2N_0-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \tag{IV.30}$$

Les pôles p_i et les résidus k_i , pour $i = 1, 2, \dots, 2N_0-1$ et N_0 de l'approximation sont donnés par [68]:

$$p_i = (1.2)^{i-N_0}, \quad k_i = \frac{\frac{1}{2\pi} \sin(0.17\pi)}{\cosh[0.87 \log(1.2^{(N_0-i)})] - \cos(0.17\pi)}, \quad N_0 = 114 \tag{IV.31}$$

Pour la seconde et la troisième expressions de l'équation (IV.29), nous aurons:

$$\begin{aligned}
 \frac{(25/2)\sqrt{3}}{((s^{0.87})^2 + 5(s^{0.87}) + 25)} &= \frac{\sqrt{1 - (1/2)^2}}{((0.1572s)^{1.74} + (0.1572s)^{0.87} + 1)} \\
 &\cong \sum_{i=1}^{2N_1-1} \frac{kk_i \left(a_i s + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)}{\frac{s^2}{\omega_i^2} + 0.7178 \frac{s}{\omega_i} + 1}
 \end{aligned} \tag{IV.32}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{(5(s^{0.87}) + 25/2)}{((s^{0.87})^2 + 5(s^{0.87}) + 25)} &= \frac{\left((0.1572s)^{0.87} + (1/2) \right)}{((0.1572s)^{1.74} + (0.1572s)^{0.87} + 1)} \\
 &\cong \sum_{i=1}^{2N_1-1} \frac{kk_i \left(a_i s + (1/2) \right)}{\frac{s^2}{\omega_i^2} + 0.7178 \frac{s}{\omega_i} + 1}
 \end{aligned} \tag{IV.33}$$

où les paramètres a_i , ω_i et k_i , pour $i = 1, 2, \dots, 2N_1-1$ et N_1 des deux approximations ci-dessus sont donnés par [69] :

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{-0.0245}{(1.2)^{i-N_1}}, \omega_i = \frac{6.3613}{(1.2)^{N_1-i}}, N_1 = 104 \\ k_i &= \frac{\frac{1}{2\pi} \sin(0.17\pi)}{\cosh[0.87 \log(1.2^{(N_1-i)})] - \cos(0.17\pi)} \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

Les réponses impulsionnelle $h(t)$ et indicielle $y_{st}(t)$ du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable représenté par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.23) peuvent être facilement obtenues des fonctions rationnelles des équations (IV.30), (IV.32) et (IV.33) comme suit:

$$\begin{aligned} h(t) &= \left(\frac{25}{21}\right) \sum_{i=1}^{227} k_i p_i \exp(-p_i t) \\ &- \left(\frac{1}{7\sqrt{3}}\right) \sum_{i=1}^{207} \omega_i k_i \exp(-0.3589\omega_i t) \sin(0.9334\omega_i t - 0.1565) \\ &- \left(\frac{5}{21}\right) \sum_{i=1}^{207} \omega_i k_i \exp(-0.3589\omega_i t) \cos(0.9334\omega_i t - 0.1565) \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

$$\begin{aligned} y_{st}(t) &= \left(\frac{25}{21}\right) \sum_{i=1}^{227} k_i (1 - \exp(-p_i t)) \\ &- \left(\frac{1}{7\sqrt{3}}\right) \left[1 - \sum_{i=1}^{207} k_i \exp(-0.3589\omega_i t) \sin(0.9334\omega_i t - 1.0472) \right] \\ &- \left(\frac{5}{21}\right) \left[1 - \sum_{i=1}^{207} k_i \exp(-0.3589\omega_i t) \cos(0.9334\omega_i t - 1.0472) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Simulation avec une entrée échelon unité

Dans ce cas, l'entrée $u(k)$ est un échelon unité et les valeurs numériques d'observation $y(k)$ obtenues à partir de l'équation (IV.36) sont données comme suit:

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.37})$$

$$\begin{aligned} y(k) &= y_{st}(kT) = \left(\frac{25}{21}\right) \sum_{i=1}^{227} k_i (1 - \exp(-p_i kT)) \\ &- \left(\frac{1}{7\sqrt{3}}\right) \left[1 - \sum_{i=1}^{207} k_i \exp(-0.3589\omega_i kT) \sin(0.9334\omega_i kT - 1.0472) \right] \\ &- \left(\frac{5}{21}\right) \left[1 - \sum_{i=1}^{207} k_i \exp(-0.3589\omega_i kT) \cos(0.9334\omega_i kT - 1.0472) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

Figure (IV.1) montre les entrées-sorties utilisées pour l'identification pour ce type d'excitation.

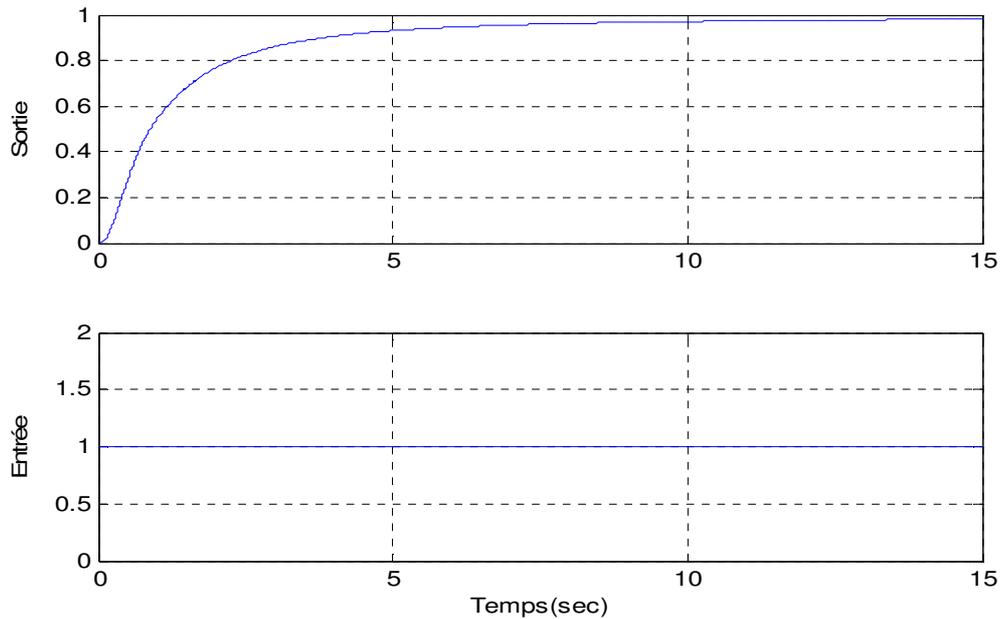
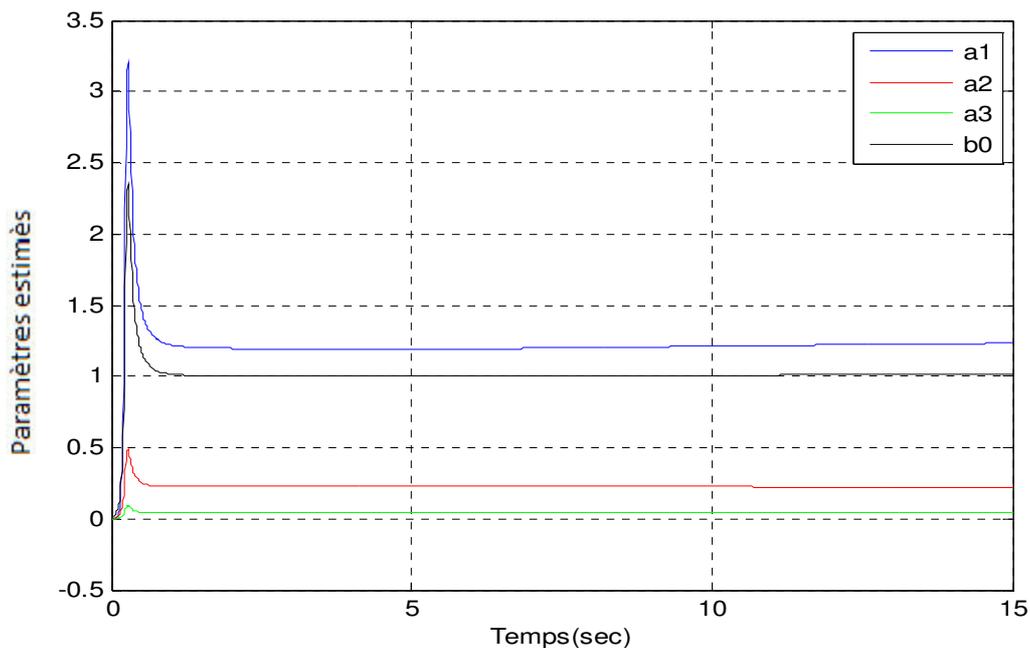


Figure (IV.1) : Les entrées-sorties utilisées pour l'identification

L'algorithme des moindres carrés récursifs de l'équation (IV.19) est initialisé par le paramètre $\lambda = 0.9999$, la matrice de gain d'adaptation $F(0) = (1/\delta)I$, avec $\delta=10^{-3}$, et le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(0) = [a'_1(0), a'_2(0), a'_3(0), b'_0(0)] = [0, 0, 0, 0]$.

La figure (IV.2) montre l'évolution des paramètres estimés du modèle fractionnaire de l'équation (IV.25). Nous constatons qu'ils convergent vers des valeurs en régime permanent avec une réponse transitoire très rapide.



Figure(IV.2): Evolution des paramètres estimés

Le tableau (IV.1) représente les valeurs théoriques et identifiées des paramètres.

Tableau (IV.1): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres

| <i>Paramètres</i> | a_1 | a_2 | a_3 | b_0 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|
| <i>Valeurs exactes</i> | 1.200 | 0.240 | 0.040 | 1.000 |
| <i>Valeurs estimées</i> | 1.2325 | 0.2231 | 0.0410 | 1.0139 |

La figure (IV.3) montre l'entrée et les réponses indicielles du système originale et du système identifié pour ce type d'excitation. De cette figure on note que les deux réponses sont presque identiques.

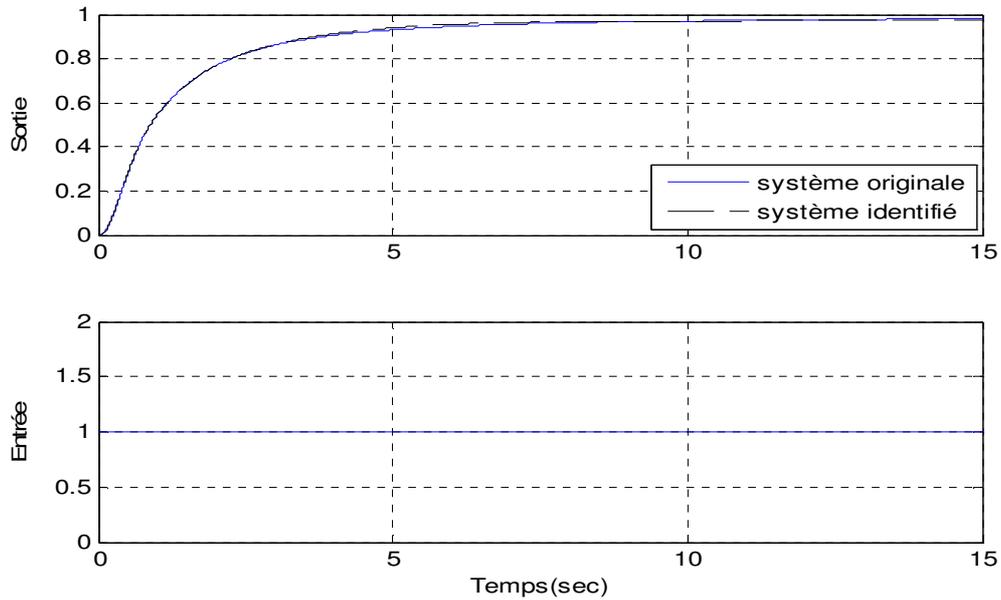


Figure (IV.3): L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié

Simulation avec une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA)

Dans ce cas, l'entrée $u(k)$ est une séquence binaire pseudo-aléatoire et les valeurs numériques d'observation $y(k)$ sont obtenues par la convolution de la réponse impulsionnelle du système fractionnaire $h(t)$ de l'équation (IV.35) et du signal SBPA(k). Alors, $u(k)$ et $y(k)$ sont donnés par les expressions suivantes:

$$u(k) = \begin{cases} SBPA(k), & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (IV.39)$$

$$y(k) = h(kT) * SPBA(k) = \left\{ \left(\frac{25}{21} \right) \sum_{i=1}^{227} k_i p_i \exp(-p_i kT) - \left(\frac{1}{7\sqrt{3}} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{7\sqrt{3}} \right) \sum_{i=1}^{207} \omega_i k k_i \exp(-0.3589 \omega_i kT) \sin(0.9334 \omega_i kT - 0.1565) \right. \\ \left. - \left(\frac{5}{21} \right) \sum_{i=1}^{207} \omega_i k k_i \exp(-0.3589 \omega_i kT) \cos(0.9334 \omega_i kT - 0.1565) \right\} * PRBS(k) \quad (IV.40)$$

Figure (IV.4) montre les entrées-sorties utilisées pour l'identification de ce type d'excitation.

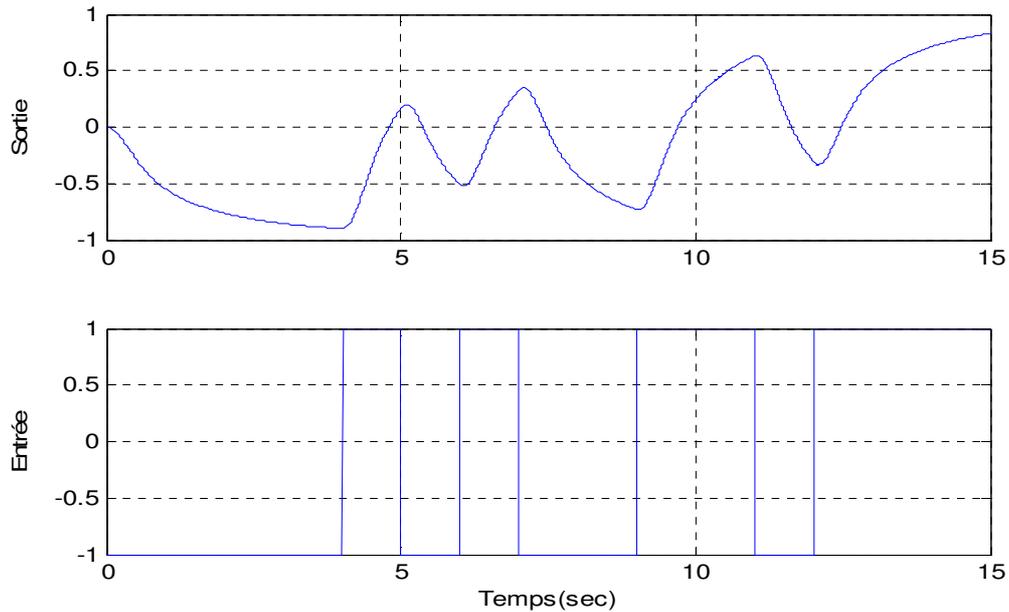


Figure (IV.4) : Les entrées-sorties utilisées pour l'identification

Dans ce cas aussi, l'algorithme des moindres carrés récursifs de l'équation (IV.19) est initialisé par le paramètre $\lambda = 0.9999$, la matrice de gain d'adaptation $F(0) = (1/\delta)I$, avec $\delta=10^{-3}$, et le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(0) = [a'_1(0), a'_2(0), a'_3(0), b'_0(0)] = [0, 0, 0, 0]$.

La figure (IV.5) représente l'évolution des paramètres identifiés du modèle fractionnaire de l'équation (IV.25). Nous constatons aussi que les paramètres estimés convergent vers les valeurs exactes en régime permanent avec une réponse transitoire très rapide.

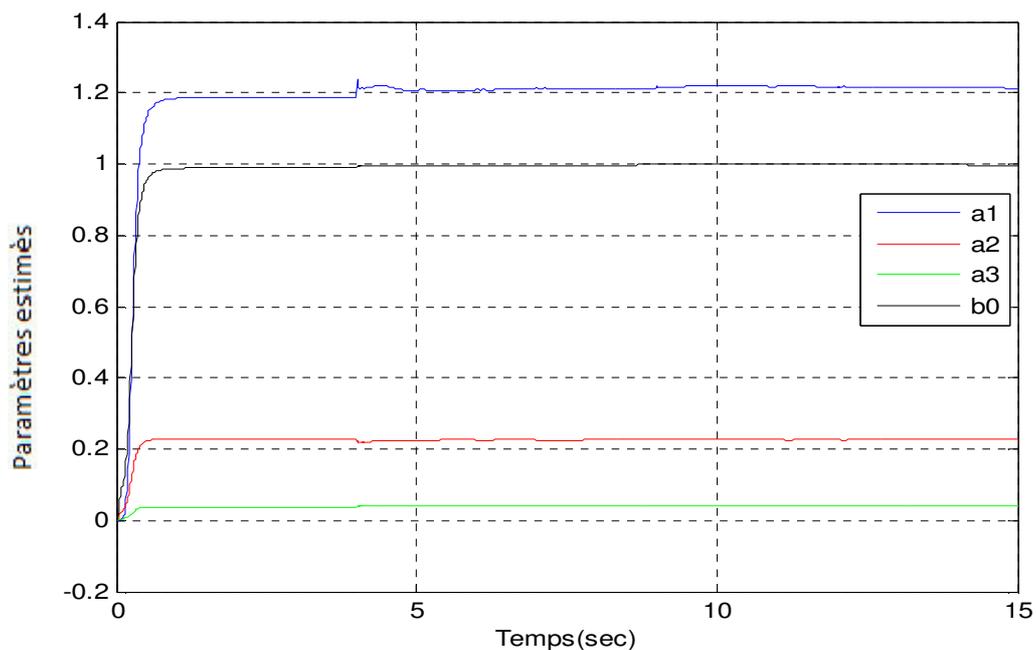


Figure (IV.5): Evolution des paramètres identifiés

Tableau (IV.2) montre les valeurs théoriques et identifiés des paramètres.

Tableau (IV.2): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres

| <i>Paramètres</i> | a_1 | a_2 | a_3 | b_0 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|
| <i>Valeurs exactes</i> | 1.200 | 0.240 | 0.040 | 1.000 |
| <i>Valeurs estimées</i> | 1.2122 | 0.2260 | 0.0413 | 0.9955 |

Figure (IV.6) montre l'entrée et les réponses du système originale et du système identifié pour ce type d'excitation. Sur cette figure on peut aussi voir que les deux réponses se chevauchent.

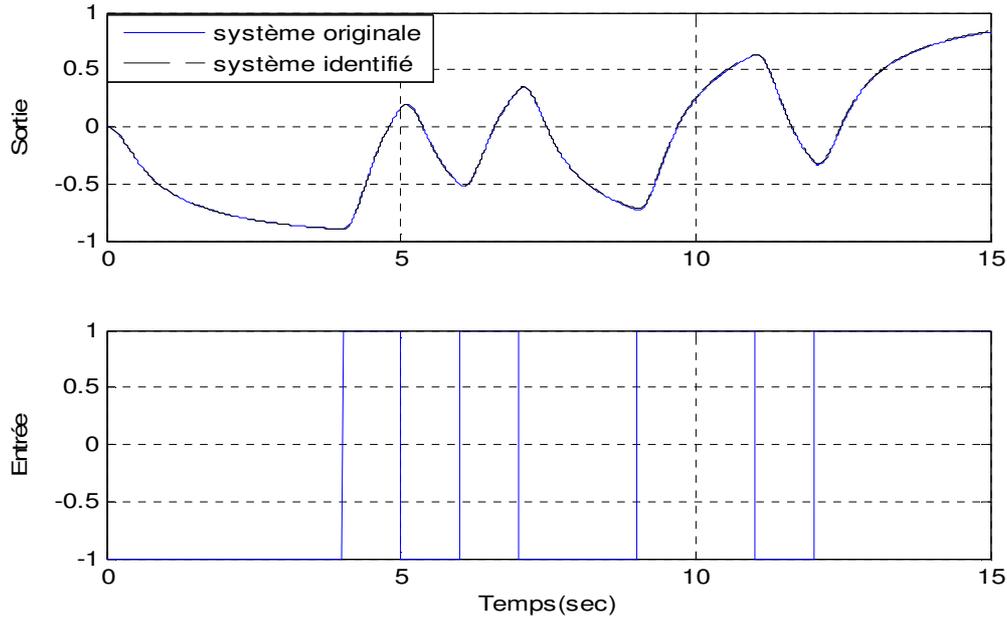


Figure (IV.6): L'entrée et les réponses des systèmes originale et identifié

IV.2.3.2 Exemple 2

Le second exemple considéré est un système linéaire fractionnaire d'ordre non-commensurable stable représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante

$$1.10 \frac{d^{2.27}y(t)}{dt^{2.27}} + 0.32 \frac{d^{1.59}y(t)}{dt^{1.59}} + 0.40 \frac{d^{0.47}y(t)}{dt^{0.47}} + y(t) = 0.40 \frac{d^{1.2}u(t)}{dt^{1.2}} + u(t) \quad (\text{IV. 41})$$

Sa fonction de transfert est donnée par:

$$H(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{0.40s^{1.2} + 1}{1.1s^{2.27} + 0.32s^{1.59} + 0.40s^{0.47} + 1} \quad (\text{IV. 42})$$

Le modèle fractionnaire à identifier proposé possède la même structure que le système fractionnaire d'ordre non-commensurable d'équation (IV.41).

Donc, il est représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante:

$$a_1 \frac{d^{2.27}y(t)}{dt^{2.27}} + a_2 \frac{d^{1.59}y(t)}{dt^{1.59}} + a_3 \frac{d^{0.47}y(t)}{dt^{0.47}} + y(t) = b_0 \frac{d^{1.2}u(t)}{dt^{1.2}} + b_1u(t) \quad (\text{IV. 43})$$

En utilisant la définition en temps discret du différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable de l'équation (III.77), l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire (IV.43), considéré comme initialement au repos, est convertie en une forme discrète comme suit :

$$\begin{aligned}
 y(k) + a_1 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D2.27}(q)y(k-q) + a_2 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D1.59}(q)y(k-q) \\
 + a_3 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D0.47}(q)y(k-q) = b_0 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D1.2}(q)u(k-q) + b_1 u(t)
 \end{aligned} \tag{IV.44}$$

Les paramètres utilisés pour le calcul numérique des réponses impulsionnelles numériques RIF des dérivés d'ordre fractionnaire ($h_{D2.27}(k)$, $h_{D1.59}(k)$, $h_{D0.47}(k)$ et $h_{D1.2}(k)$) de l'équation (IV.44) sont donnés comme suit:

- La période d'échantillonnage $T = 0.1s$
- $N_D = 35$ et $M_D = 10$
- La longueur de la réponse impulsionnelle du différentiateur fractionnaire numérique RIF $L=250$

Dans ce travail, les valeurs numériques des observations $y(k)$ et $u(k)$ de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.41) qui seront utilisées dans l'identification des paramètres du modèle de l'équation (IV.43) sont générés en utilisant la définition *Grünwald-Letnikov* du différentiateur d'ordre fractionnaire qui est donnée comme suit [4]:

$$d^\alpha y(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^K \omega_k^{(\alpha)} y(t - kh) \tag{IV.45}$$

où α est un nombre réel et les coefficients $\omega_k^{(\alpha)}$ sont donnés par l'expression suivante :

$$\omega_0^{(\alpha)} = 1, \quad \omega_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right) \omega_{k-1}^{(\alpha)} \text{ pour } k = 1, 2, \dots \tag{IV.46}$$

La solution $y(k)$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.1) $y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{\beta_j} u(t)$ est donnée comme suit:

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{h^{\alpha_i}} \sum_{k=0}^K \omega_k^{(\alpha_i)} y(t - kh) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{1}{h^{\beta_j}} \sum_{k=0}^K \omega_k^{(\beta_j)} u(t - kh) \tag{IV.47}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \left[\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{h^{\alpha_i}}} \right] \left[- \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{h^{\alpha_i}} \sum_{k=1}^K \omega_k^{(\alpha_i)} y(t - kh) \right. \\
 & \left. + \sum_{j=0}^m b_j \frac{1}{h^{\beta_j}} \sum_{k=0}^K \omega_k^{(\beta_j)} u(t - kh) \right]
 \end{aligned} \tag{IV.48}$$

Simulation avec une entrée en échelon unité

Dans ce cas, l'entrée $u(k)$ (échelon unité) et les valeurs numériques d'observation $y(k)$ obtenues à partir de l'équation (IV.48) sont données comme suit:

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.49})$$

$$y_{st}(t) + \frac{0.4}{T^{0.47}} \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(0.47)} y_{st}(t - kT) + \frac{0.32}{T^{1.59}} \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(1.59)} y_{st}(t - kT) + \frac{1.1}{T^{2.27}} \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(2.27)} y_{st}(t - kT) = \frac{0.4}{T^{1.2}} \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(1.2)} u(t - kT) + u(k) \quad (\text{IV.50})$$

$$y_{st}(t) + \frac{0.4}{(0.1)^{0.47}} \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(0.47)} y_{st}(t - k(0.1)) + \frac{0.32}{(0.1)^{1.59}} \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(1.59)} y_{st}(t - k(0.1)) + \frac{1.1}{(0.1)^{2.27}} \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(2.27)} y_{st}(t - k(0.1)) = \frac{0.4}{(0.1)^{1.2}} \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(1.2)} u(t - k(0.1)) + u(k) \quad (\text{IV.51})$$

$$y_{st}(t) = - \frac{\frac{0.4}{(0.1)^{0.47}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(0.47)} y_{st}(t - k(0.1))}{\left(1 + \frac{0.4}{(0.1)^{0.47}} + \frac{0.32}{(0.1)^{1.59}} + \frac{1.1}{(0.1)^{2.27}}\right)} - \frac{\frac{0.32}{(0.1)^{1.59}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(1.59)} y_{st}(t - k(0.1))}{\left(1 + \frac{0.4}{(0.1)^{0.47}} + \frac{0.32}{(0.1)^{1.59}} + \frac{1.1}{(0.1)^{2.27}}\right)} - \frac{\frac{1.1}{(0.1)^{2.27}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(2.27)} y_{st}(t - k(0.1))}{\left(1 + \frac{0.4}{(0.1)^{0.47}} + \frac{0.32}{(0.1)^{1.59}} + \frac{1.1}{(0.1)^{2.27}}\right)} + \frac{\frac{0.4}{(0.1)^{1.2}} \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(1.2)} u(t - k(0.1)) + u(k)}{\left(1 + \frac{0.4}{(0.1)^{0.47}} + \frac{0.32}{(0.1)^{1.59}} + \frac{1.1}{(0.1)^{2.27}}\right)} \quad (\text{IV.52})$$

$$y_{st}(t) = - \frac{1.1805 \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(0.47)} y_{st}(t - k(0.1))}{219.4595} - \frac{12.4494 \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(1.59)} y_{st}(t - k(0.1))}{219.4595} - \frac{204.8296 \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(2.27)} y_{st}(t - k(0.1))}{219.4595} + \frac{6.3396 \sum_{k=0}^{100} \omega_k^{(1.2)} u(t - k(0.1)) + u(k)}{219.4595} \quad (\text{IV.53})$$

Figure (IV.7) montre les entrées-sorties utilisées pour l'identification pour ce type d'excitation.

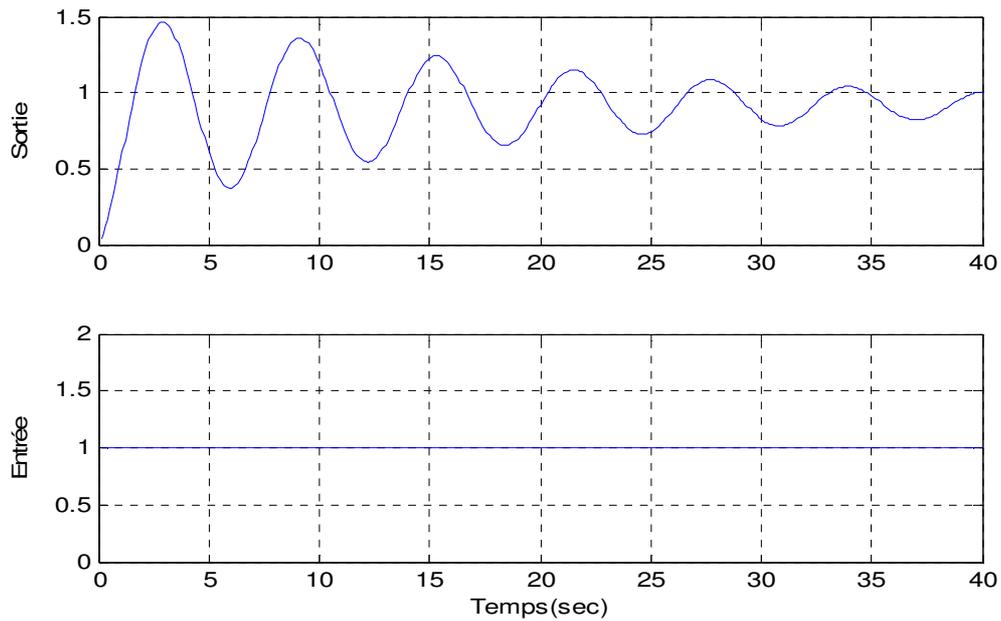


Figure (IV.7) : Les entrées-sorties utilisées pour l'identification

L'algorithme des moindres carrés récursifs de l'équation (IV.19) est initialisé par le paramètre $\lambda = 0.99$, la matrice de gain d'adaptation $F(0) = (1/\delta)I$, avec $\delta=10^{-8}$, et le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(0) = [a'_1(0), a'_2(0), a'_3(0), b'_0(0), b'_1(0)] = [0, 0, 0, 0, 0]$.

La figure (IV.8) montre l'évolution des paramètres estimés du modèle fractionnaire de l'équation (IV.43). Nous constatons qu'ils convergent vers des valeurs en régime permanent avec une réponse transitoire très rapide.

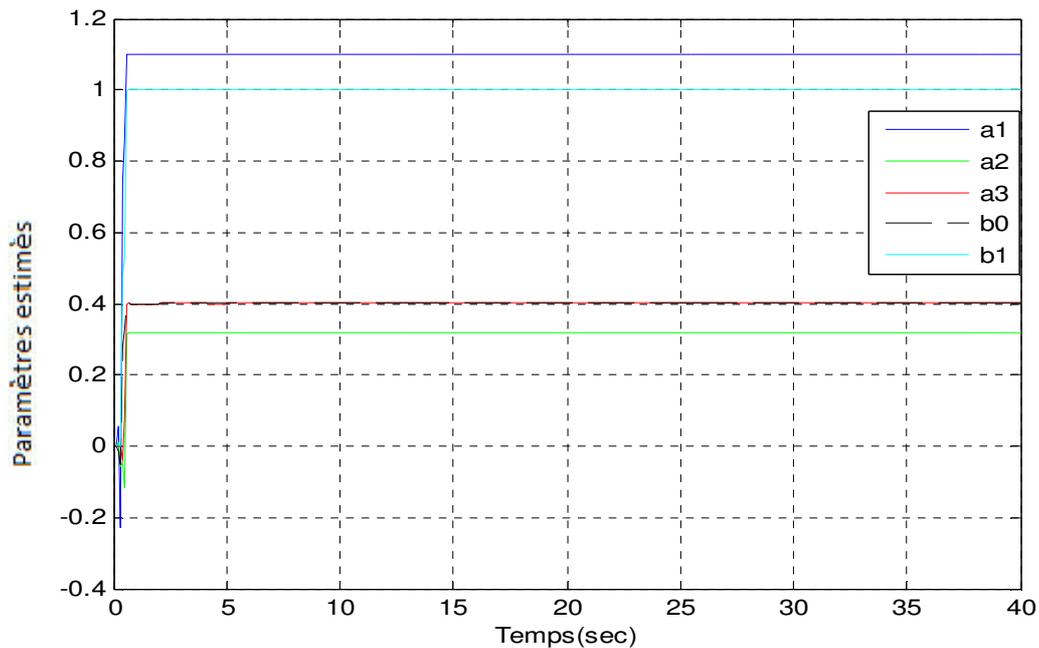


Figure (IV.8): Evolution des paramètres estimés

Le tableau (IV.3) représente les valeurs théoriques et identifiées des paramètres.

Tableau (IV.3): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres

| <i>Paramètres</i> | a_1 | a_2 | a_3 | b_0 | b_1 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <i>Valeurs exactes</i> | 1.10 | 0.32 | 0.40 | 0.40 | 1 |
| <i>Valeurs estimées</i> | 1.1002 | 0.3199 | 0.4002 | 0.4001 | 1.0001 |

La figure (IV.9) montre l'entrée et les réponses indicielles du système originale et du système identifié pour ce type d'excitation. De cette figure on note que les deux réponses sont presque identiques.

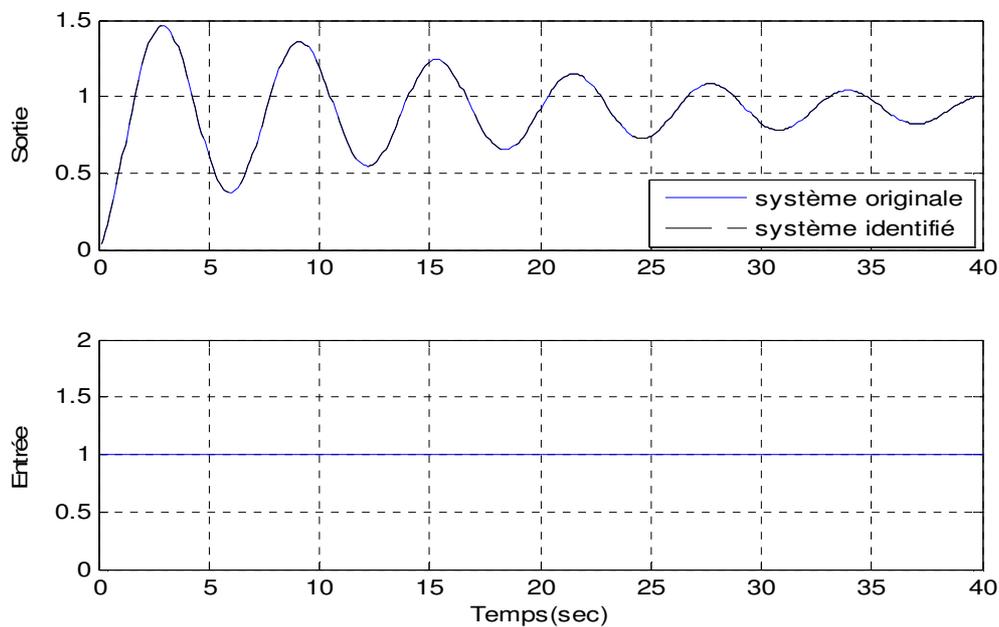


Figure (IV.9): L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié

Simulation avec une séquence binaire pseudo-aléatoire

Dans ce cas, l'entrée $u(k)$ est une SBPA et les valeurs numériques d'observation $y(k)$ sont obtenues à partir de l'équation (IV.53).

La figure (IV.10) montre les entrées-sorties utilisées pour l'identification de ce type d'excitation.

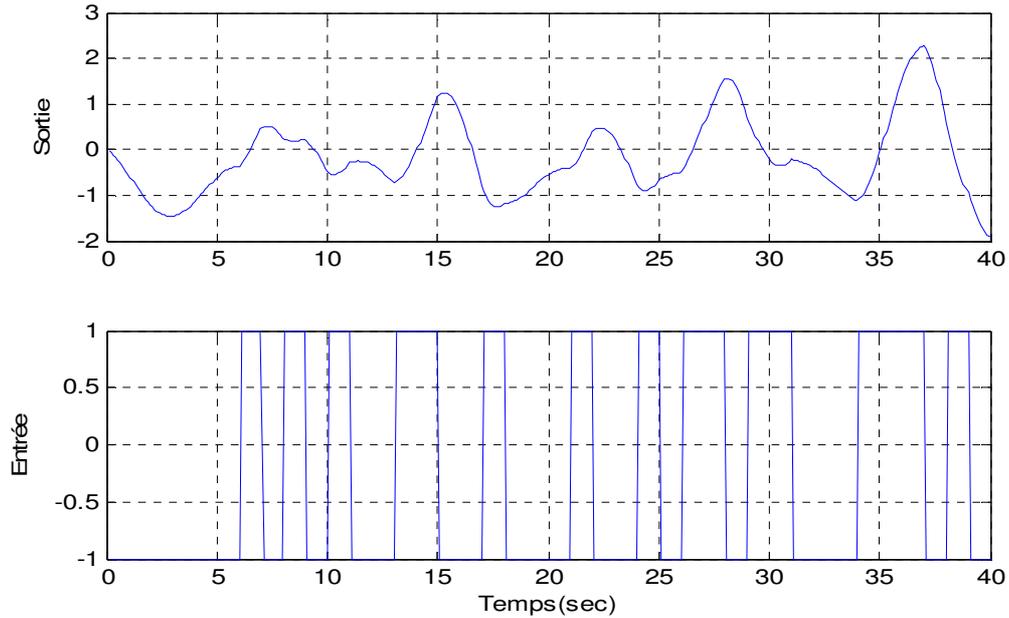


Figure (IV.10) : Les entrées-sorties utilisées pour l'identification

L'algorithme des moindres carrés récursifs de l'équation (IV.19) est initialisé par le paramètre $\lambda = 0.99$, la matrice de gain d'adaptation $F(0) = (1/\delta)I$, avec $\delta=10^{-8}$, et le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(0) = [a'_1(0), a'_2(0), a'_3(0), b'_0(0)] = [0, 0, 0, 0]$.

La figure (IV.11) représente l'évolution des paramètres identifiés du modèle fractionnaire de l'équation (IV.43). Nous constatons aussi que les paramètres estimés convergent vers les valeurs exactes en régime permanent avec une réponse transitoire très rapide.

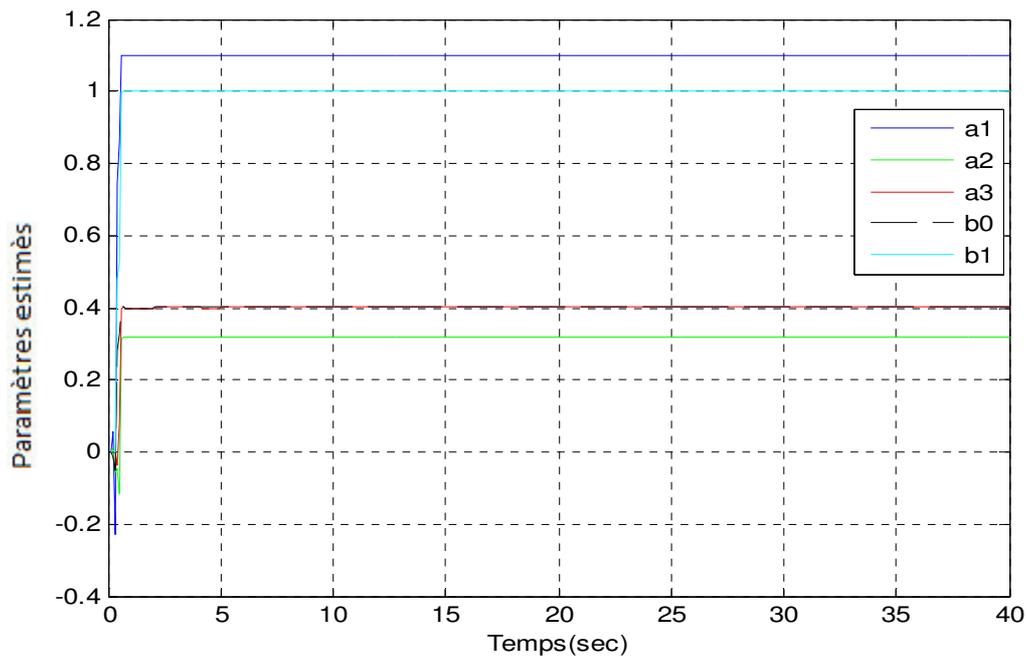


Figure (IV.11): Evolution des paramètres identifiés

Le tableau (IV.4) représente les valeurs théoriques et identifiés des paramètres.

Tableau (IV.4): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres

| <i>Paramètres</i> | a_1 | a_2 | a_3 | b_0 | b_1 |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <i>Valeurs exactes</i> | 1.10 | 0.32 | 0.40 | 0.40 | 1 |
| <i>Valeurs estimées</i> | 1.100 | 0.320 | 0.400 | 0.400 | 1.000 |

Figure (IV.12) montre l'entrée et les réponses du système originale et du système identifié pour ce type d'excitation. De cette figure on peut aussi voir que les deux réponses se chevauchent.

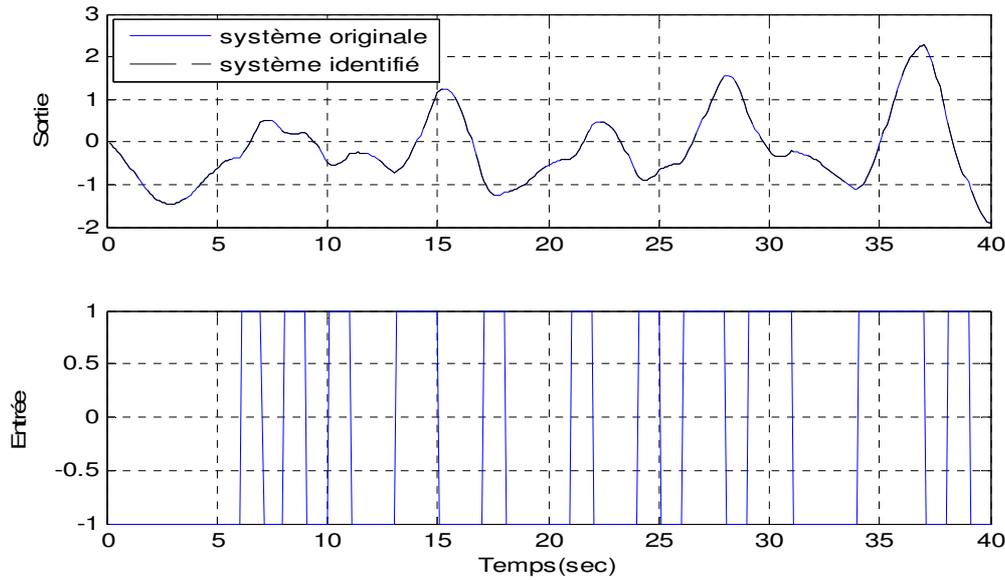


Figure (IV.12) : L'entrée et les réponses des systèmes originale et identifié

IV.3 Identification des Paramètres avec Recherche de l'Ordre des Systèmes Linéaires Fractionnaire d'Ordre Commensurable

Dans cette partie, on va considérer l'identification d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable monovarié décrit par l'équation différentielle fractionnaire suivante [4]:

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^{i\alpha} u(t) \quad (IV.55)$$

où $u(t)$ est l'entrée, $y(t)$ est la sortie, les paramètres du modèle a_i ($1 \leq i \leq n$) et b_i ($0 \leq i \leq m$) sont des nombres réels constants, avec $m \leq n$, et α est un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. Avec des conditions initiales nulles, la fonction de transfert de ce type de système fractionnaire est donnée dans l'équation (IV.3). L'objectif de l'identification d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable monovarié est l'estimation des paramètres a_i ($1 \leq i \leq n$) et b_i ($0 \leq i \leq m$) du modèle sans que l'ordre α soit connu a priori. Donc, la valeur de l'ordre α est obtenue parmi plusieurs valeurs comme étant l'ordre dont l'erreur quadratique entre les observations et le modèle estimé est la plus petite [70].

IV.3.1 Formulation de l'Identification

En utilisant le différentiateur ordre fractionnaire ajustable numérique RIF de l'équation (III.77), développé dans le Chapitre III, l'équation différentielle fractionnaire de l'équation (VI.55), considérée initialement au repos, est convertie en une forme discrète comme suit:

$$\begin{aligned} y(k) + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{ai})^{n1} \left[\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1ai}} \lambda_p g_{Dnai}(q-p) \right\} y(k-q) \right] \right) \\ = b_0 u(k) + \sum_{i=1}^m b_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{ai})^{n1} \left[\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1ai}} \lambda_p g_{Dnai}(q-p) \right\} u(k-q) \right] \right) \end{aligned} \quad (IV.56)$$

où pour $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i = i\alpha$, m_{1ai} est un nombre entier tel que $m_{1ai} < \alpha_i < (m_{1ai} + 1)$ et $m_{ai} = (\alpha_i - m_{1ai})$ donc $0 < m_{ai} < 1$. De l'équation (IV.56), la solution $y(k)$ de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.55) est donnée comme suit:

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a'_i Y_i(k) + \sum_{i=0}^m b'_i U_i(k) \quad (IV.57)$$

où $U_0(k) = u(k)$, $Y_i(k)$ et a'_i , pour $1 \leq i \leq n$, et $U_i(k)$ et b'_i , pour $1 \leq i \leq m$, sont donnés respectivement, comme suit:

$$Y_i(k) = \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{ai})^{n1} \left[\sum_{q=1}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1ai}} \lambda_p g_{Dnai}(q-p) \right\} y(k-q) \right] \right) \quad (IV.58)$$

$$a'_i = \frac{a_i}{\left[1 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{ai})^{n1} g_{Dnai}(0) \right) \right]}$$

$$U_i(k) = \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{ai})^{n1} \left[\sum_{q=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m_{1ai}} \lambda_p g_{Dnai}(q-p) \right\} u(k-q) \right] \right) \quad (IV.59)$$

$$b'_i = \frac{b_i}{\left[1 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{n1=0}^{M_D} (m_{ai})^{n1} g_{Dnai}(0) \right) \right]}$$

La sortie du système $y(k)$ peut alors être exprimée sous la forme d'une régression comme suit:

$$y(k) = \phi(k)\theta \quad (IV.60)$$

où les paramètres du vecteur θ et le vecteur de régression $\Phi(k)$ sont donnés par:

$$\theta = [a'_1, a'_2, \dots, a'_n, b'_0, b'_1, \dots, b'_m]^T \quad (IV.61)$$

$$\Phi(k) = [-Y_1(k), -Y_2(k), \dots, -Y_n(k), U_0(k), U_1(k), \dots, U_m(k)]$$

IV.3.2 Algorithme d'Estimation des Paramètres

Dans le problème des moindres carrés classique, on suppose que la variable estimée $\hat{y}(k)$ est donnée par le modèle de régression suivant:

$$\hat{y}(k) = \phi(k)\theta \quad (IV.62)$$

où le vecteur $\Phi(k)$ de l'équation (IV.61) est connu et le vecteur des paramètres θ est inconnu.

Le principe de la méthode des moindres carrés indique que le vecteur estimé $\hat{\theta}$ est choisi de telle sorte que le critère quadratique des moindres carrés suivant est minimal [45] [67]:

$$J(\theta) = \frac{1}{K} \left[\sum_{k=1}^{K_m} [y(k) - \hat{y}(k, \theta)]^2 \right] \quad (IV.63)$$

La version récursive est donnée par les équations suivantes [45]:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{F(k)\phi(k+1)(y(k+1) - \hat{\theta}^T(k)\phi(k+1))}{\lambda + \phi^T(k+1)F(k)\phi(k+1)} \\ F(k+1) = \frac{1}{\lambda} \left[F(k) - \frac{F(k)\phi(k+1)\phi^T(k+1)F(k)}{1 + \phi^T(k+1)F(k)\phi(k+1)} \right] \end{cases} \quad (IV.64)$$

où le paramètre λ est tel que $0 < \lambda < 1$ et la valeur initiale $F(0)$ de la matrice du gain d'adaptation $F(k)$ est choisie comme:

$$F(0) = \frac{1}{\delta} I, \quad \text{avec } 0 < \delta \ll 1 \quad (IV.65)$$

IV.3.3 Recherche de l'Ordre Commensurable

Dans cette approche l'ordre commensurable α est considéré comme inconnu; mais il se trouve dans l'intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, où α_{min} et α_{max} sont connus. On commence systématiquement par résoudre la version récursive du critère quadratique des moindres carrés de l'équation (IV.64) pour plusieurs valeurs de l'ordre commensurable α de l'intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$. La valeur estimée de l'ordre α est obtenue comme étant l'ordre de l'intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ dont l'erreur quadratique entre les observations et le modèle estimé est la plus petite.

Dans ce contexte, lorsque l'ordre fractionnaire commensurable α est dans l'intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ les termes $\sum_{q=1}^{L-1} \{ \sum_{p=0}^{m_1 \alpha_i} \lambda_p g_{Dn \alpha_i}(q-p) \} y(k-q)$ et $\sum_{q=0}^{L-1} \{ \sum_{p=0}^{m_1 \alpha_j} \lambda_p g_{Dn \alpha_j}(q-p) \} u(k-q)$ de $Y_i(k)$ pour $(1 \leq i \leq n)$ et $U_j(k)$ pour $(1 \leq j \leq m)$ des équations (IV.58) et (IV.59), respectivement, sont indépendamment des ordres de dérivés fractionnaires $\alpha_i = i\alpha$ ($1 \leq i \leq n$). Par conséquent, ils sont calculés une seule fois pour les observations expérimentales données $y(k)$ et $u(k)$. Donc, pour un ensemble de valeurs de l'ordre fractionnaires commensurable α de l'intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ un ensemble de valeurs $Y_i(k)$ ($1 \leq i \leq n$) et $U_j(k)$ ($1 \leq j \leq m$) (IV.59) peuvent être facilement calculés sans répéter les calculs fastidieux des dérivés d'ordre fractionnaire à chaque essai.

IV.3.4 Exemples Illustratifs

Nous allons présenter deux exemples de simulation sur PC en utilisant MATLAB pour valider l'efficacité de l'approche d'identification des paramètres avec recherche de l'ordre des systèmes linéaires fractionnaire d'ordre commensurable

IV.3.4.1 Exemple 1

Dans ce cas, l'exemple considéré est un système fractionnaire d'ordre commensurable $\alpha = 0,85$ stable représenté par l'équation différentiel linéaire d'ordre fractionnaire suivante:

$$0.04 \frac{d^{2.55}y(t)}{dt^{2.55}} + 0.24 \frac{d^{1.70}y(t)}{dt^{1.70}} + 1.20 \frac{d^{0.85}y(t)}{dt^{0.85}} + y(t) = u(t) \quad (\text{IV.66})$$

Sa fonction de transfert est donnée par:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25}{(s^{2.55} + 6s^{1.70} + 30s^{0.85} + 25)} \quad (\text{IV.67})$$

Le modèle fractionnaire à identifier est représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante:

$$a_3 \frac{d^{3\alpha}y(t)}{dt^{3\alpha}} + a_2 \frac{d^{2\alpha}y(t)}{dt^{2\alpha}} + a_1 \frac{d^{\alpha}y(t)}{dt^{\alpha}} + y(t) = b_0 u(t) \quad (\text{IV.68})$$

où les paramètres a_1, a_2, a_3, b_0 et l'ordre α sont inconnus ; mais α est dans l'intervalle $[0,51 : 0,99]$. Pour une valeur donnée de α de l'intervalle $[0,51 : 0,99]$, en utilisant la définition en temps discret du différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable de l'équation (III.77), l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire (IV.68), considéré comme initialement au repos, est convertie en une forme discrète comme suit :

$$\begin{aligned} y(k) + a_3 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D^{3\alpha}}(q)y(k-q) + a_2 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D^{2\alpha}}(q)y(k-q) \\ + a_1 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D^{\alpha}}(q)y(k-q) = b_0 u(k) \end{aligned} \quad (\text{IV.69})$$

Les paramètres utilisés pour le calcul numérique des réponses impulsionnelles numériques RIF des dérivés d'ordre fractionnaire ($h_{D^{3\alpha}}(k), h_{D^{2\alpha}}(k), h_{D^{\alpha}}(k)$) de l'équation (IV.69) sont:

- La période d'échantillonnage $T = 0.1s$
- $N_D = 28$ et $M_D = 10$
- La longueur de la réponse impulsionnelle du différentiateur fractionnaire numérique RIF $L=250$

Lorsque $u(k)$ un échelon unitaire ($u(k) = 1$ pour $k \geq 0$), les valeurs numériques des observations $y(k)$ de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.66) qui seront utilisées

dans l'identification des paramètres et de l'ordre du modèle de l'équation (IV.68) sont générées en utilisant la définition *Grünwald-Letnikov* du différentiateur fractionnaire [4].

Alors, $y(k)$ est donnée comme suit :

$$y(t) = -\frac{\frac{1.2}{T^{0.85}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(0.85)} y(t - kT)}{\left(1 + \frac{1.2}{T^{0.85}} + \frac{0.24}{T^{1.7}} + \frac{0.04}{T^{2.55}}\right)} - \frac{\frac{0.24}{T^{1.70}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(1.70)} y(t - kT)}{\left(1 + \frac{1.2}{T^{0.85}} + \frac{0.24}{T^{1.7}} + \frac{0.04}{T^{2.55}}\right)} - \frac{\frac{0.04}{T^{2.55}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(2.55)} y(t - kT)}{\left(1 + \frac{1.2}{T^{0.85}} + \frac{0.24}{T^{1.7}} + \frac{0.04}{T^{2.55}}\right)} + \frac{u(k)}{\left(1 + \frac{1.2}{T^{0.85}} + \frac{0.24}{T^{1.7}} + \frac{0.04}{T^{2.55}}\right)} \quad (IV.70)$$

Figure(IV.13) montre les entrées-sorties utilisées pour l'identification pour ce type d'excitation.

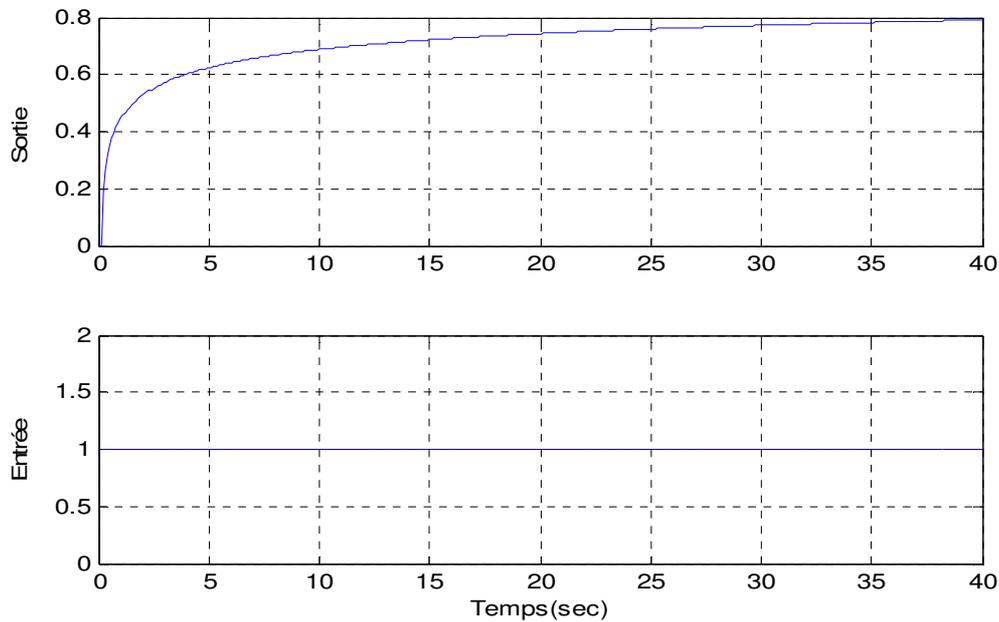


Figure (IV.13) : Les entrées-sorties utilisées pour l'identification

L'algorithme des moindres carrés récursifs de l'équation (IV.64) est initialisé par le paramètre $\lambda = 0.99999$, la matrice de gain d'adaptation $F(0) = (1/\delta)I$, avec $\delta=10^{-8}$, et le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(0) = [a_1'(0), a_2'(0), a_3'(0), b_0'(0)] = [0, 0, 0, 0]$.

Ces paramètres du modèle de l'équation (IV.68) sont estimés pour chaque valeur de l'ordre α qui varie de 0.51 à 0.99 avec un pas de 0.01. A chaque essai, l'erreur quadratique $E_\alpha = \sum_{k=1}^K [y(k) - \hat{y}(k, \theta)]^2$ est calculée entre les valeurs d'observations $y(k)$ et la sortie $\hat{y}(k)$ du modèle estimé.

La figure (IV.14) montre le tracé de l'erreur quadratique E_α en fonction de l'ordre fractionnaire commensurable α .

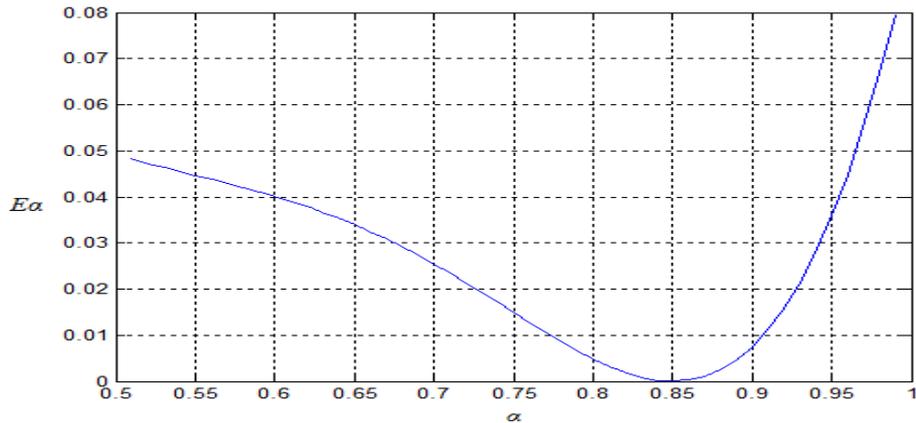


Figure (IV.14) : Tracé de l'erreur quadratique E_α en fonction du paramètre α

De la figure (IV.14), on note que la plus petite valeur de l'erreur quadratique E_α correspond à l'ordre fractionnaire commensurable $\alpha = 0,85$.

Alors, les valeurs des paramètres du modèle seront obtenues lorsque l'ordre $\alpha = 0,85$. Dans ce cas, les valeurs théoriques et identifiées des paramètres sont représentées dans le tableau (IV.5).

Tableau (IV.5): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres

| Paramètres | a_1 | a_2 | a_3 | b_0 |
|------------------|------------|------------|------------|------------|
| Valeurs exactes | 1.20 | 0.24 | 0.04 | 1.00 |
| Valeurs estimées | 1,20000684 | 0,24000062 | 0,04000168 | 1,00000253 |

La figure(IV.15) montre l'entrée et les réponses indicielles du système original et du système identifié pour ce type d'excitation. De cette figure on note que les deux réponses sont presque identiques.

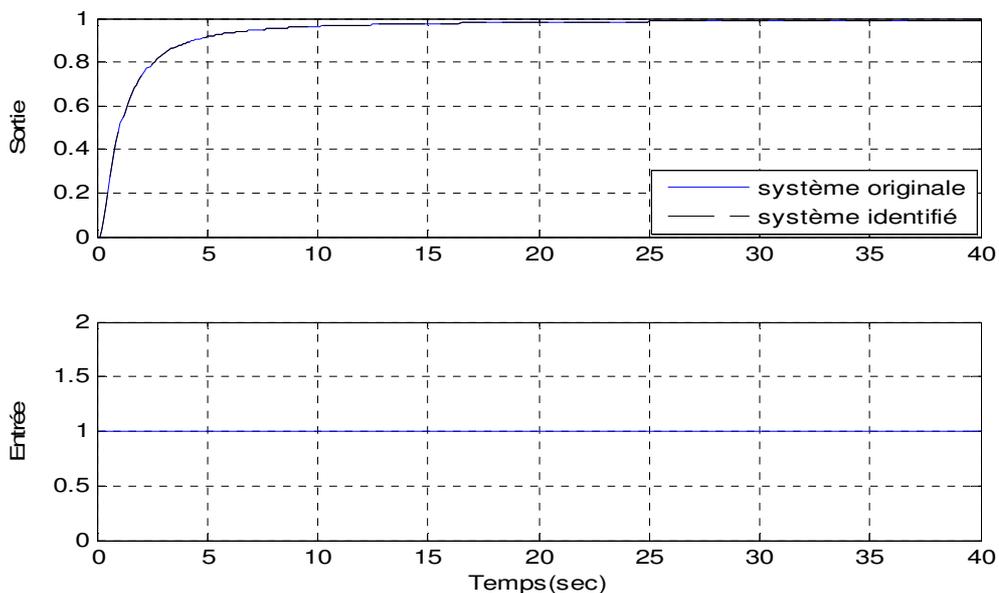


Figure (IV.15): L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié

IV.3.4.2 Exemple 2

Le second 'exemple considéré est un système fractionnaire d'ordre commensurable $\alpha = 0,35$ stable représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante:

$$0.04 \frac{d^{1.05}y(t)}{dt^{1.05}} + 0.24 \frac{d^{0.70}y(t)}{dt^{0.70}} + 1.20 \frac{d^{0.35}y(t)}{dt^{0.35}} + y(t) = u(t) \quad (\text{IV. 71})$$

Sa fonction de transfert est donnée par:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25}{(s^{1.05} + 6s^{0.70} + 30s^{0.35} + 25)} \quad (\text{IV. 72})$$

Le modèle fractionnaire à identifier est représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante:

$$a_3 \frac{d^{3\alpha}y(t)}{dt^{3\alpha}} + a_2 \frac{d^{2\alpha}y(t)}{dt^{2\alpha}} + a_1 \frac{d^{\alpha}y(t)}{dt^{\alpha}} + y(t) = b_0 u(t) \quad (\text{IV. 73})$$

où les paramètres a_1, a_2, a_3, b_0 et l'ordre α sont inconnus ; mais α est dans l'intervalle $[0,1 : 0,49]$. Pour une valeur donnée de α de l'intervalle $[0,1 : 0,49]$, en utilisant la définition en temps discret du différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable de l'équation (III.77), l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire (IV.73), considéré comme initialement au repos, est converti en une forme discrète comme suit :

$$\begin{aligned} y(k) + a_3 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D3\alpha}(q)y(k-q) + a_2 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D2\alpha}(q)y(k-q) \\ + a_1 \sum_{q=0}^{L-1} h_{D\alpha}(q)y(k-q) = b_0 u(t) \end{aligned} \quad (\text{IV. 74})$$

Les paramètres utilisés pour le calcul numérique des réponses impulsionnelles numériques RIF des dérivés d'ordre fractionnaire ($h_{D3\alpha}(k), h_{D2\alpha}(k), h_{D\alpha}(k)$) de l'équation (IV.74) sont:

- La période d'échantillonnage $T = 0.1s$
- $N_D = 28$ et $M_D = 10$
- La longueur de la réponse impulsionnelle du différentiateur fractionnaire numérique RIF $L=250$

Lorsque $u(k)$ un échelon unitaire ($u(k) = 1$ pour $k \geq 0$), les valeurs numériques des observations $y(k)$ de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.71) qui seront utilisées dans l'identification des paramètres et de l'ordre du modèle de l'équation (IV.73) sont générées en utilisant la définition *Grünwald-Letnikov* du différentiateur fractionnaire [4].

Alors, $y(k)$ est donné comme suit :

$$y(t) = -\frac{\frac{1.2}{T^{0.85}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(0.35)} y(t - kT)}{\left(1 + \frac{1.2}{T^{0.35}} + \frac{0.24}{T^{0.7}} + \frac{0.04}{T^{1.05}}\right)} - \frac{\frac{0.24}{T^{1.70}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(0.70)} y(t - kT)}{\left(1 + \frac{1.2}{T^{0.35}} + \frac{0.24}{T^{0.7}} + \frac{0.04}{T^{1.05}}\right)} - \frac{\frac{0.04}{T^{2.55}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(1.05)} y(t - kT)}{\left(1 + \frac{1.2}{T^{0.35}} + \frac{0.24}{T^{0.7}} + \frac{0.04}{T^{1.05}}\right)} + \frac{u(k)}{\left(1 + \frac{1.2}{T^{0.35}} + \frac{0.24}{T^{0.7}} + \frac{0.04}{T^{1.05}}\right)} \quad (IV.75)$$

La figure (IV.16) montre les entrées-sorties utilisées pour l'identification pour ce type d'excitation.

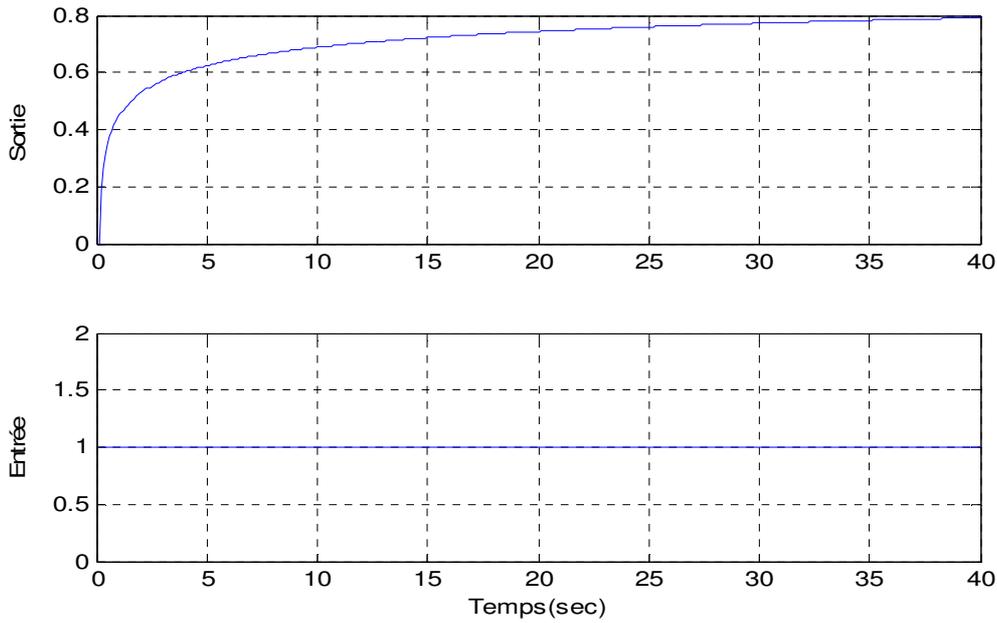


Figure (IV.16) : Les entrées-sorties utilisées pour l'identification

L'algorithme des moindres carrés récursifs de l'équation (IV.64) est initialisé par le paramètre $\lambda = 0.99999$, la matrice de gain d'adaptation $F(0) = (1/\delta)I$, avec $\delta=10^{-8}$, et le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(0) = [a'_1(0), a'_2(0), a'_3(0), b'_0(0)] = [0, 0, 0, 0]$.

Ces paramètres du modèle de l'équation (IV.68) sont estimés pour chaque valeur de l'ordre α qui varie de 0.1 à 0.49 avec un pas de 0.01. A chaque essai, l'erreur quadratique $E_\alpha = \sum_{k=1}^K [y(k) - \hat{y}(k, \theta)]^2$ est calculée entre l'observateur $y(k)$ et la sortie $\hat{y}(k)$ du modèle estimé.

La figure (IV.17) montre le tracé de l'erreur quadratique E_α en fonction de l'ordre fractionnaire commensurable α .

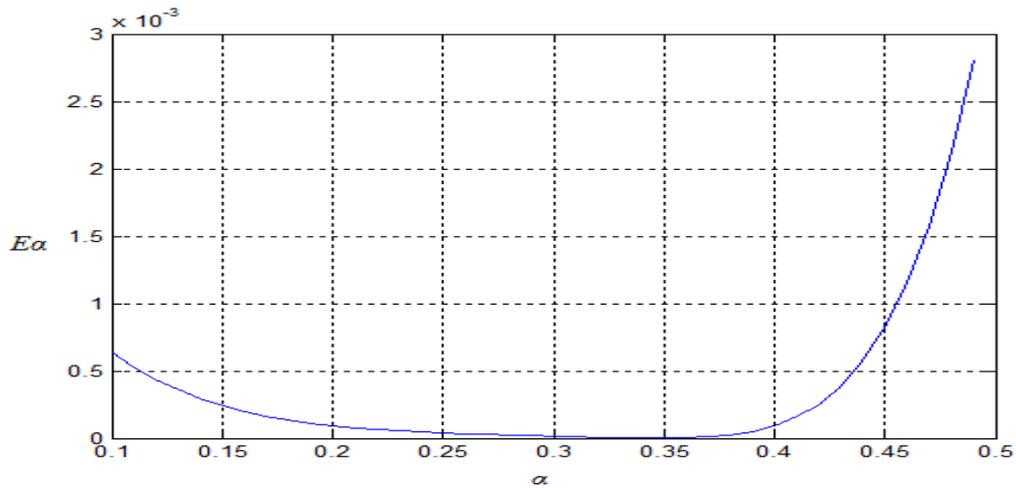


Figure (IV.17) : Tracé de l'erreur quadratique E_α en fonction du paramètre α

De la figure (IV.17), on note que la plus petite valeur de l'erreur quadratique E_α correspond à l'ordre fractionnaire commensurable $\alpha = 0,35$. Alors, les valeurs des paramètres du modèle seront obtenues lorsque l'ordre $\alpha = 0,35$. Dans ce cas, les valeurs théoriques et identifiées des paramètres sont représentées dans le tableau (IV.6).

Tableau (IV.6): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres

| Paramètres | a_1 | a_2 | a_3 | b_0 |
|------------------|-----------|------------|------------|------------|
| Valeurs exactes | 1.20 | 0.24 | 0.04 | 1.00 |
| Valeurs estimées | 1,1999966 | 0,23999892 | 0,04000467 | 0,99999993 |

La figure (IV.18) montre l'entrée et les réponses indicielles du système originale et du système identifié pour ce type d'excitation. De cette figure on note que les deux réponses sont presque identiques.

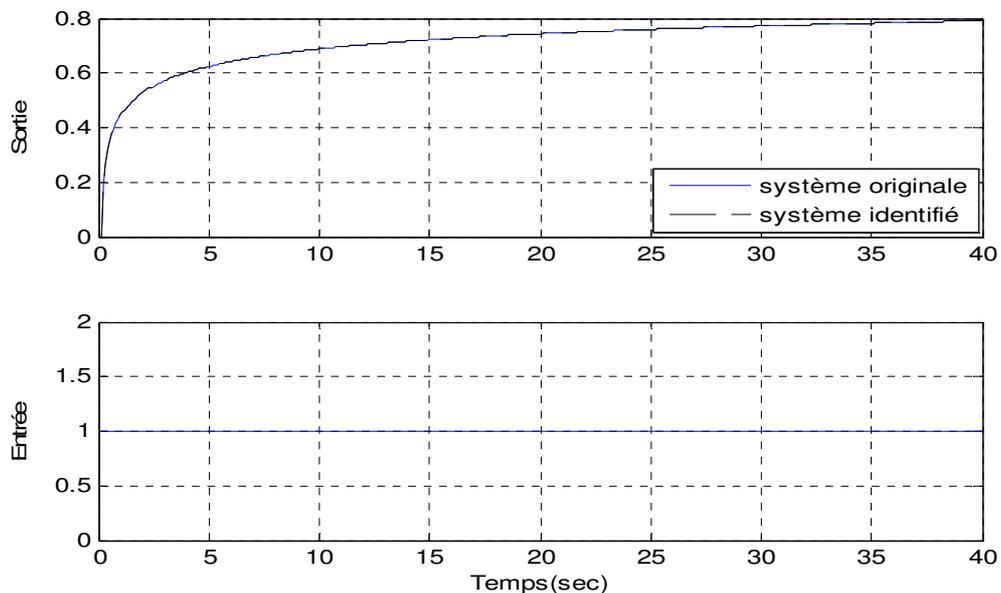


Figure (IV.18): L'entrée et les réponses indicielles des systèmes originale et identifié

IV.4 Identification des Paramètres et de l'Ordre du Système Linéaires Fractionnaire d'Ordre Commensurable Fondamental

Le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable fondamental est décrit par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante [4] :

$$aD^\alpha y(t) + y(t) = bu(t) \quad (\text{IV.76})$$

où $u(t)$ est l'entrée et $y(t)$ est la sortie ; les paramètres a et b sont des nombres réels constants ainsi que l'ordre α tel que $0 < \alpha < 1$. Avec des conditions initiales nulles, la fonction de transfert de ce type de système linéaire fractionnaire est donnée comme suit [4] :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{1 + as^\alpha} \quad (\text{IV.77})$$

Dans ce contexte, l'objectif de l'identification de ce type de système linéaire fractionnaire est l'estimation de ses paramètres a et b ainsi que l'ordre m simultanément [71].

IV.4.1 Formulation de l'Identification

Comme dans les sections précédentes, en utilisant la définition du différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable numérique de l'équation (III.77), l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (VI.76), considérée initialement au repos, est convertie en une forme discrète comme suit:

$$y(k) + a \sum_{n1=0}^{M_D} \alpha^{n1} \left[\sum_{q=0}^{L-1} g_{Dn}(q)y(k-q) \right] = bu(k) \quad (\text{IV.78})$$

Alors, la solution $y(k)$ est donnée comme suit:

$$y(k) = \left[\frac{1}{1 + \{a \sum_{n1=0}^{M_D} \alpha^{n1} g_{Dn}(0)\}} \right] \left\{ -a \sum_{n1=0}^{M_D} \alpha^{n1} \left[\sum_{q=1}^{L-1} g_{Dn}(q)y(k-q) \right] + bu(k) \right\} \quad (\text{IV.79})$$

Une forme simplifiée de (IV.79) est donnée par l'expression suivante :

$$y(k) = -\hat{a}Y(k) + \hat{b}U(k) \quad (\text{IV.80})$$

ou \hat{a} et $Y(k)$, \hat{b} et $U(k)$ sont données respectivement par:

$$\hat{a} = \frac{a}{[1 + \{a \sum_{n1=0}^{M_D} \alpha^{n1} g_{Dn}(0)\}]} , Y(k) = \sum_{n1=0}^{M_D} \alpha^{n1} \left[\sum_{q=1}^{L-1} g_{Dn}(q)y(k-q) \right] \quad (\text{IV.81})$$

$$\hat{b} = \frac{b}{[1 + \{a \sum_{n1=0}^{M_D} \alpha^{n1} g_{Dn}(0)\}]} , U(k) = u(k) \quad (\text{IV.82})$$

Donc la sortie du système $y(k)$ peut être exprimée sous la forme d'une régression comme suit:

$$y(k) = \phi(k)\theta = [-Y(k) \ U(k)] \begin{bmatrix} \hat{a}' \\ \hat{b}' \end{bmatrix} \quad (\text{IV.83})$$

Alors, l'expression de l'équation (IV.83) qui est une structure linéaire par rapport aux paramètres inconnus du vecteur $\theta = [a' \ b']^T$ peut être résolue en utilisant l'approche classique des moindres carrés si l'ordre de différentiation m de l'équation (IV.76) est connu ou estimé. Donc il faut trouver une méthode d'estimation de l'ordre α .

IV.4.2 Algorithme d'Estimation des Paramètres

A partir de l'équation (IV.83), la variable estimée $\hat{y}(k)$ est donnée par le modèle de régression:

$$\hat{y}(k) = \Phi(k)\hat{\theta} \quad (\text{IV.83})$$

où le vecteur $\Phi(k) = [-Y(k) \ U(k)]$ et le vecteur des paramètres $\theta = [\hat{a}' \ \hat{b}']^T$.

Le principe de la méthode des moindres carrés indique que le vecteur estimé $\hat{\theta}$ est choisi de telle sorte que le critère quadratique des moindres carrés suivant est minimal [45] [67]:

$$J(\theta) = \frac{1}{K} \left[\sum_{k=1}^{K_m} [y(k) - \hat{y}(k, \theta)]^2 \right] \quad (\text{IV.84})$$

La version récursive est donnée par les équations suivantes [45]:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{F(k)\phi(k+1)(y(k+1) - \hat{\theta}^T(k)\phi(k+1))}{\lambda + \phi^T(k+1)F(k)\phi(k+1)} \\ F(k+1) = \frac{1}{\lambda} \left[F(k) - \frac{F(k)\phi(k+1)\phi^T(k+1)F(k)}{1 + \phi^T(k+1)F(k)\phi(k+1)} \right] \end{cases} \quad (\text{IV.85})$$

où le paramètre λ est tel que $0 < \lambda < 1$ et la valeur initiale $F(0)$ de la matrice du gain d'adaptation $F(k)$ est choisie comme:

$$F(0) = \frac{1}{\delta} I, \quad \text{avec } 0 < \delta \ll 1 \quad (\text{IV.86})$$

Dans ce cas, le calcul du vecteur $\hat{\theta}(k+1)$ des paramètres de l'itération courante ($k+1$) utilise l'ordre commensurable $\hat{\alpha}(k)$ de l'itération précédente (k)

IV.4.3 Algorithme d'Estimation de l'Ordre Commensurable

A partir de l'équation (IV.80), la solution estimée est donnée par:

$$\hat{y}(k) = -\hat{a}'Y(k) + \hat{b}'U(k) \quad (\text{IV.87})$$

où le vecteur $\hat{\theta}(k) = [\hat{a}' \ \hat{b}']^T$ des paramètres estimés est connu de l'étape d'estimation des paramètres de l'itération en cours (k) en utilisant l'ordre commensurable estimé $\hat{\alpha}(k-1)$ de l'itération précédente ($k-1$). Comme $\hat{y}(k)$ dépend aussi de $U(k) = u(k)$ qui est l'entrée et $Y(k)$ qui est donnée dans l'équation (IV.81) par l'expression suivante :

$$Y(k) = \sum_{n1=0}^{M_D} [\hat{\alpha}(k)]^{n1} \left[\sum_{q=1}^{L-1} g_{Dn}(q)y(k-q) \right] \quad (\text{IV.88})$$

Ainsi, l'erreur d'estimation $Er(k)$ de l'itération en cours (k) donnée comme suit :

$$Er(k) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - \hat{a}'Y(k) + \hat{b}'U(k) \quad (IV.89)$$

dépend aussi de l'ordre commensurable estimé $\hat{\alpha}(k)$ qui est inconnu.

Alors, $\hat{\alpha}(k)$ sera ajusté de telle sorte que l'erreur au carrée $[Er(k)]^2$ est minimisée. Dans ce contexte, l'algorithme du gradient qui est connu aussi sous le nom d'algorithme de la plus forte pente ou de la plus profonde descente (steepest descent algorithm) sera utilisé pour l'estimation de l'ordre commensurable $\hat{\alpha}(k)$. La version récursive de cet algorithme pour le calcul de l'ordre commensurable estimé est donnée par l'expression suivante :

$$\hat{\alpha}(k+1) = \hat{\alpha}(k) - \mu \frac{d[Er(k)]^2}{d\hat{\alpha}} = \hat{\alpha}(k) - 2\mu Er(k)g(k) \quad (IV.90)$$

où μ est le pas et $g(k) = \frac{d[Er(k)]}{d\hat{\alpha}}$ est le gradient de l'erreur $Er(k)$. Parce que $y(k)$ ne dépend pas de l'ordre commensurable $\hat{\alpha}(k)$ la fonction $g(k)$ est donnée comme suit:

$$g(k) = \frac{d[Er(k)]}{d\hat{\alpha}} = \frac{d[y(k) - \hat{y}(k)]}{d\hat{\alpha}} = -\frac{d[\hat{y}(k)]}{d\hat{\alpha}} \quad (IV.91)$$

$$g(k) = -\frac{d}{d\hat{\alpha}} \{-\hat{a}'Y(k) + \hat{b}'U(k)\} = \left\{ \hat{a}' \frac{dY(k)}{d\hat{\alpha}} - \hat{b}' \frac{dU(k)}{d\hat{\alpha}} \right\} \quad (IV.92)$$

où $\frac{dY(k)}{d\hat{\alpha}}$ et $\frac{dU(k)}{d\hat{\alpha}}$ sont donnés comme suit:

$$\frac{dY(k)}{d\hat{\alpha}} = \frac{d}{d\hat{\alpha}} \left\{ \sum_{n1=0}^{M_D} [\hat{\alpha}(k)]^{n1} \left[\sum_{q=1}^{L-1} g_{Dn}(q)y(k-q) \right] \right\}, \quad \frac{dU(k)}{d\hat{\alpha}} = \frac{du(k)}{d\hat{\alpha}} \quad (IV.93)$$

Comme $y(k)$, $u(k)$ et $g_{dn}(k)$ ne dépendent pas de l'ordre commensurable $\hat{\alpha}(k)$, les expressions de $\frac{dY(k)}{d\hat{\alpha}}$ et $\frac{dU(k)}{d\hat{\alpha}}$ peuvent facilement être calculées comme suit:

$$\frac{dY(k)}{d\hat{\alpha}} = \sum_{n1=0}^{M_D} n1([\hat{\alpha}(k)]^{(n1-1)}) \left[\sum_{q=1}^{L-1} g_{Dn}(q)y(k-q) \right], \quad \frac{dU(k)}{d\hat{\alpha}} = 0 \quad (IV.94)$$

Alors, la fonction $g(k)$ est donnée par l'expression suivante:

$$g(k) = \hat{a}' \sum_{n1=0}^{M_D} n1([\hat{\alpha}(k)]^{(n1-1)}) \left[\sum_{q=1}^{L-1} g_{Dn}(q)y(k-q) \right] \quad (IV.95)$$

Une fois que le vecteur des paramètres $\hat{\theta} = [\hat{a}' \hat{b}']^T$ estimé et l'ordre commensurable $\hat{\alpha}$ estimé sont calculés, les paramètres \hat{a} et \hat{b} estimés des coefficients a et b de l'équation différentielle fractionnaire de l'équation (IV.76) sont enfin tirés des expressions des équations (IV.81) et (IV.82) comme suit:

$$\hat{a} = \frac{\hat{a}'}{[1 + \{\hat{a}' \sum_{n1=0}^{M_D} \alpha^{n1} g_{Dn}(0)\}]} , \quad \hat{b} = \frac{\hat{b}'}{[1 + \{\hat{a}' \sum_{n1=0}^{M_D} \alpha^{n1} g_{Dn}(0)\}]} \quad (IV.96)$$

IV.4.4 Récapitulation de l'Algorithme d'Identification

L'identification des paramètres a et b ainsi que l'ordre α simultanément du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable fondamental de l'équation (VI.76) est faite selon les trois étapes suivantes.

Etape 1

- Choisir les paramètres δ, λ, μ et ε tel que $0 < \delta \ll 1, 0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1$ et $0 < \varepsilon \ll 1$.
- Choisir la valeur initiale $F(0) = (1/\delta)I$ de la matrice de gain d'adaptation $F(k)$.
- Choisir la valeur initiale du vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(0) = [\hat{a}' = 0 \ \hat{b}' = 0]^T$.
- Choisir la valeur initiale de l'ordre commensurable estimé $\hat{\alpha}(0) = \alpha_0 \neq 0$.
- Calculer les termes $\sum_{q=1}^{L-1} g_{Dn}(q)y(k-q)$ de $Y(k)$ de l'équation (IV.81) pour l'entrée $u(k)$ et les observations correspondantes $y(k)$ données (ces termes sont calculés une seule fois).

Etape 2

- Calculer $Y(k+1)$ de l'équation (IV.81) en utilisant $\hat{\alpha}(k)$.
- Calculer le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(k+1)$ de l'équation (IV.85).
- Calculer $Er(k+1)$ de l'équation (IV.89).
- Si l'erreur quadratique moyenne $E_{qm} = \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{K_m} [Er(k)]^2}{K_m} \right\} < \varepsilon$; arrêter les itérations (avec K_m est le nombre d'échantillons).

Etape 3

- Si l'erreur quadratique moyenne $E_{qm} > \varepsilon$; calculer le gradient $g(k)$ de l'équation (IV.95).
- Calculer l'ordre commensurable estimé $\hat{\alpha}(k+1)$ de l'équation (IV.90).
- Mettre $k = k + 1$ et aller à l'étape 2.

IV.4.5 Exemple Illustratif

Pour valider l'efficacité de l'approche d'identification des paramètres a et b ainsi que l'ordre α du système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable fondamental un exemple illustratif est présenté. Dans ce cas, l'exemple considéré est un système fractionnaire d'ordre commensurable fondamental stable représenté par l'équation différentiel linéaire d'ordre fractionnaire suivante:

$$0.1 \frac{d^{0.57}y(t)}{dt^{0.57}} + y(t) = 2.0u(t) \quad (IV.97)$$

Sa fonction de transfert est donnée par:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(1 + 0.1s^{0.57})} \quad (IV.98)$$

Le modèle fractionnaire à identifier est représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante:

$$a \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + y(t) = bu(t) \quad (\text{IV. 99})$$

où les paramètres a , b et l'ordre α sont inconnus.

L'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.99), considéré comme initialement au repos, est converti en une forme discrète comme suit :

$$y(k) + a \sum_{q=0}^{L-1} h_{D\alpha}(q)y(k-q) = bu(k) \quad (\text{IV. 100})$$

Les paramètres utilisés pour le calcul numérique de la réponse impulsionnelle numérique RIF de la dérivée d'ordre fractionnaire $h_{D\alpha}(k)$ de l'équation (IV.100) sont:

- La période d'échantillonnage $T = 0.1s$
- $N_D = 35$ et $M_D = 10$
- La longueur de la réponse impulsionnelle du différentiateur fractionnaire numérique RIF $L=150$

Les valeurs numériques des observations $y(k)$ de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (IV.97) qui seront utilisées dans l'identification des paramètres et de l'ordre du modèle de l'équation (IV.99) sont générées en utilisant la définition *Grünwald-Letnikov* du différentiateur fractionnaire [4] . Alors, $y(k)$ est donné comme suit :

$$y(t) = \frac{-\frac{0.1}{T^{0.57}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(0.57)} y(t-kT)}{\left(1 + \frac{0.1}{T^{0.57}}\right)} + \frac{2.0u(k)}{\left(1 + \frac{0.1}{T^{0.57}}\right)} \quad (\text{IV. 101})$$

Simulation avec une entrée échelon unité

Dans ce cas, l'entrée $u(k)$ est un échelon unité et les valeurs numériques d'observation $y(k)$ obtenues à partir de l'équation (IV.101) sont données comme suit:

$$y(t) = \frac{-\frac{0.1}{(0.1)^{0.57}} \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(0.57)} y(t-0.1k)}{\left(1 + \frac{0.1}{(0.1)^{0.57}}\right)} + \frac{2.0u(k)}{\left(1 + \frac{0.1}{(0.1)^{0.57}}\right)} \quad (\text{IV. 102})$$

$$y(t) = -0.2927 \sum_{k=1}^{100} \omega_k^{(0.57)} y(t-0.1k) + 1.5758u(k) \quad (\text{IV. 103})$$

L'algorithme d'estimation des paramètres a et b de l'équation (IV.85) est initialisé par $\lambda = 0.98$, la matrice de gain d'adaptation $F(0) = (1/\delta)I$, avec $\delta=10^{-4}$, et le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(0) = [a'(0), b'(0)] = [0, 0]$. L'algorithme d'estimation de l'ordre commensurable α de l'équation (IV.90) est initialisé par $\mu = 0.1$ et $\hat{\alpha}(0) = 0.98 > 0.57$.

Les figures (IV.19) et (IV.20) montrent, respectivement, l'évolution des paramètres et de l'ordre commensurable estimés du modèle fractionnaire de l'équation (IV.99).

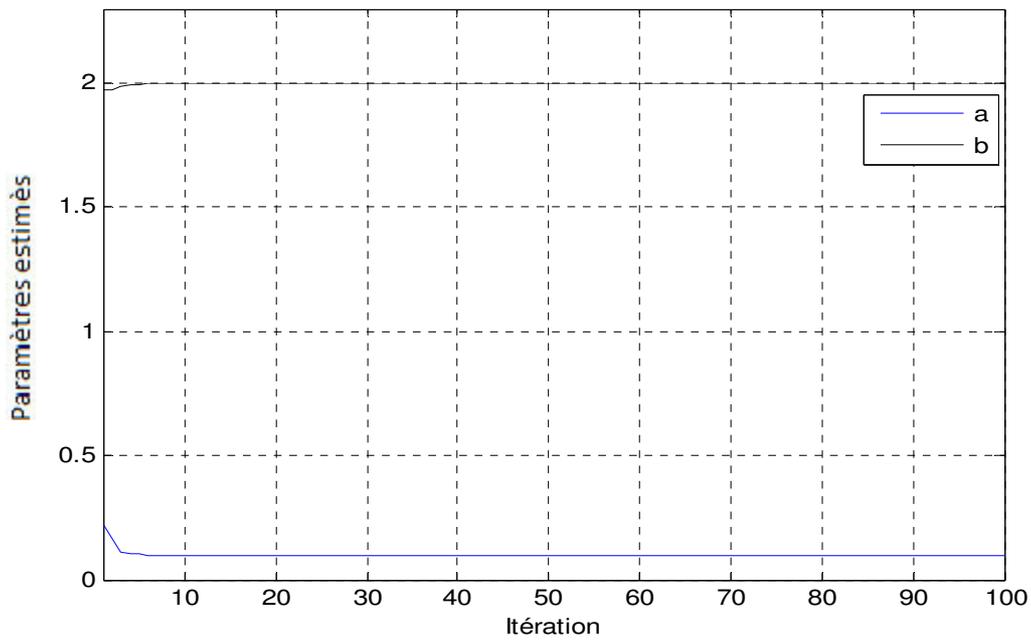


Figure (IV.19): Evolution des paramètres estimés

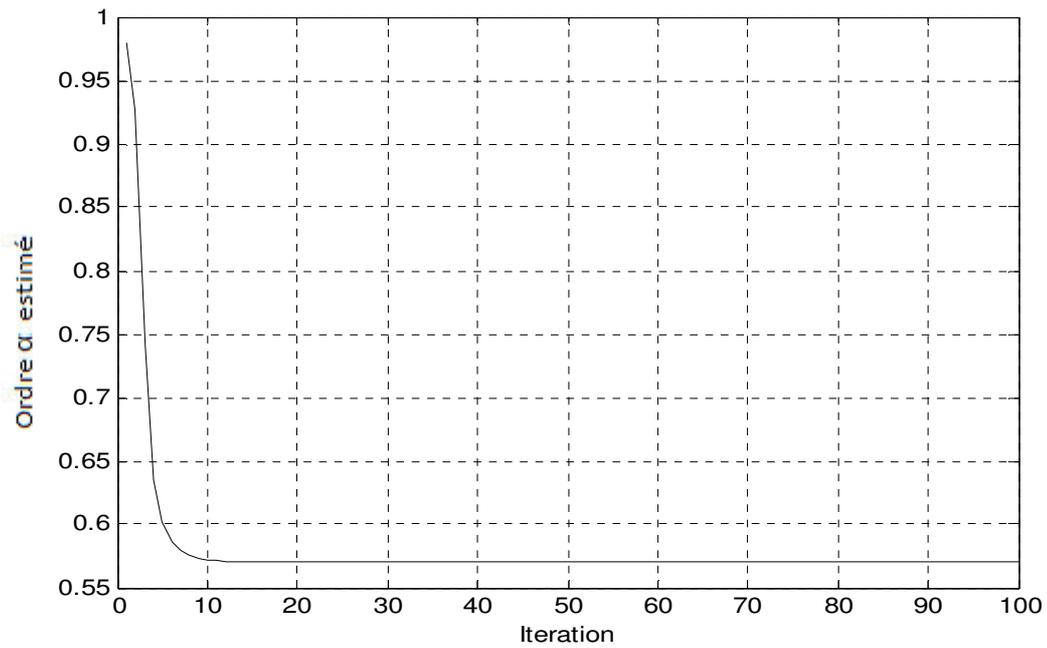


Figure (IV.20): Evolution de l'ordre commensurable estimé $\hat{\alpha}$

Le tableau (IV.7) représente les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre commensurable du modèle fractionnaire de l'équation (IV.99).

Tableau (IV.7): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre

| Paramètres | α | a | b |
|------------------|----------|--------|--------|
| Valeurs exactes | 0.57 | 0.1 | 2.0 |
| Valeurs estimées | 0.5703 | 0.1000 | 2.0000 |

Maintenant, on va changer l'initialisation de l'ordre commensurable α de $\hat{\alpha}(0) = 0.98 > 0.57$ au $\hat{\alpha}(0) = 0.15 < 0.57$. Figures (IV.21) et (IV.22) montrent, respectivement, l'évolution des paramètres et de l'ordre commensurable estimés du modèle fractionnaire de l'équation (IV.99).

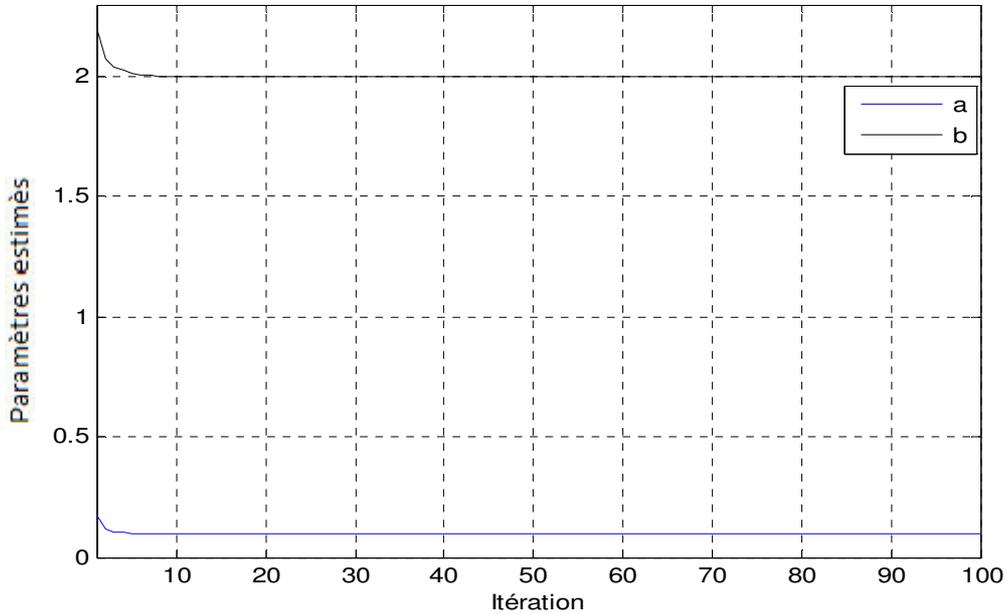


Figure (IV.21): Evolution des paramètres estimés

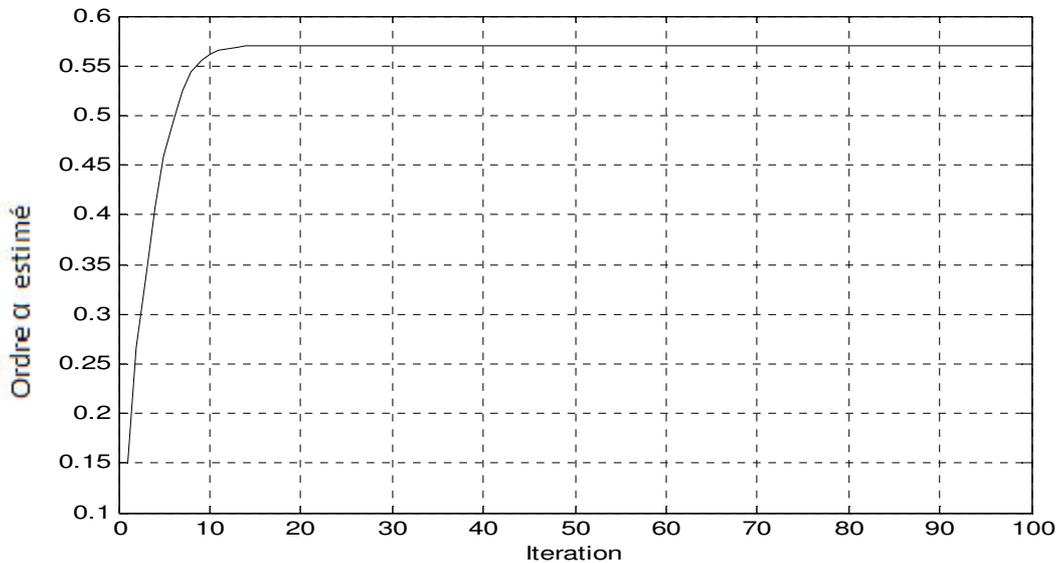


Figure (IV.22): Evolution de l'ordre commensurable estimé $\hat{\alpha}$

Dans ce cas aussi, tableau (IV.8) représente les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre commensurable du modèle fractionnaire de l'équation (IV.99).

Tableau (IV.8): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre

| Paramètres | α | a | b |
|------------------|----------|--------|--------|
| Valeurs exactes | 0.57 | 0.1 | 2.0 |
| Valeurs estimées | 0.5703 | 0.1000 | 2.0000 |

On note que pour les deux différentes initialisations de l'ordre α de l'algorithme d'estimation de l'ordre commensurable α de l'équation (IV.90) on a obtenu les mêmes résultats et que les paramètres et l'ordre commensurable estimés convergent vers les valeurs exactes en régime permanent avec une réponse transitoire très rapide.

Simulation avec une séquence binaire pseudo-aléatoire

Dans ce cas, l'entrée $u(k)$ est une SBPA et les valeurs numériques d'observation $y(k)$ sont obtenues à partir de l'équation (IV.103). L'algorithme d'estimation des paramètres a et b de l'équation (IV.85) est initialisé par $\lambda = 0.98$, la matrice de gain d'adaptation $F(0) = (1/\delta)I$, avec $\delta=10^{-4}$, et le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}(0) = [a'(0), b'(0)] = [0, 0]$. L'algorithme d'estimation de l'ordre commensurable α de l'équation (IV.90) est initialisé par $\mu = 0.1$ et $\hat{\alpha}(0) = 0.98 > 0.57$. Les figures (IV.23) et (IV.24) montrent, respectivement, l'évolution des paramètres et de l'ordre commensurable estimés du modèle fractionnaire de l'équation (IV.99).

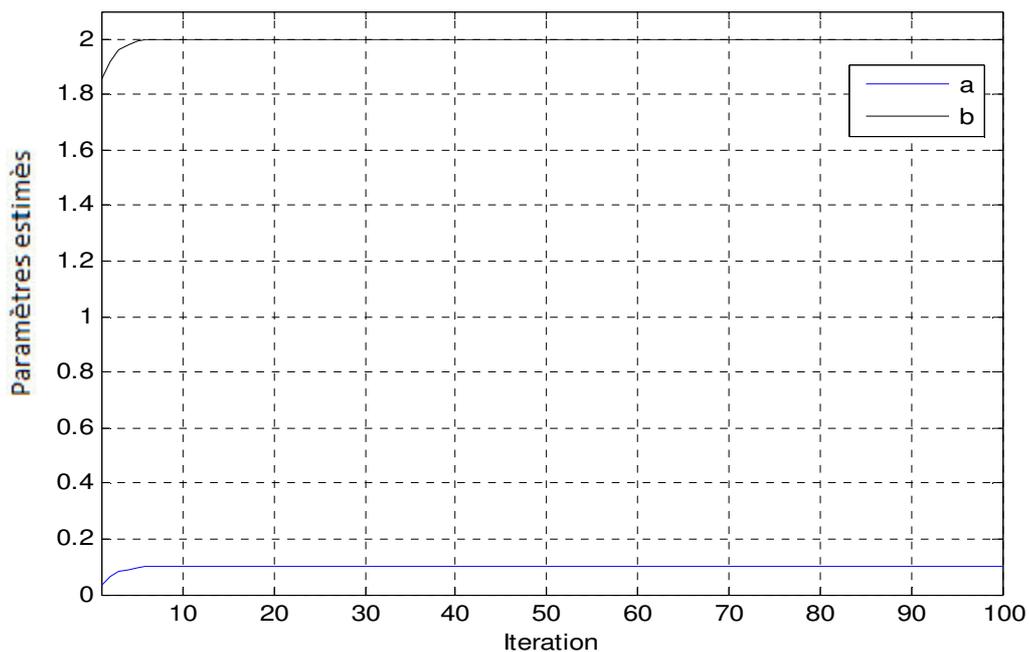


Figure (IV.23): Evolution des paramètres estimés

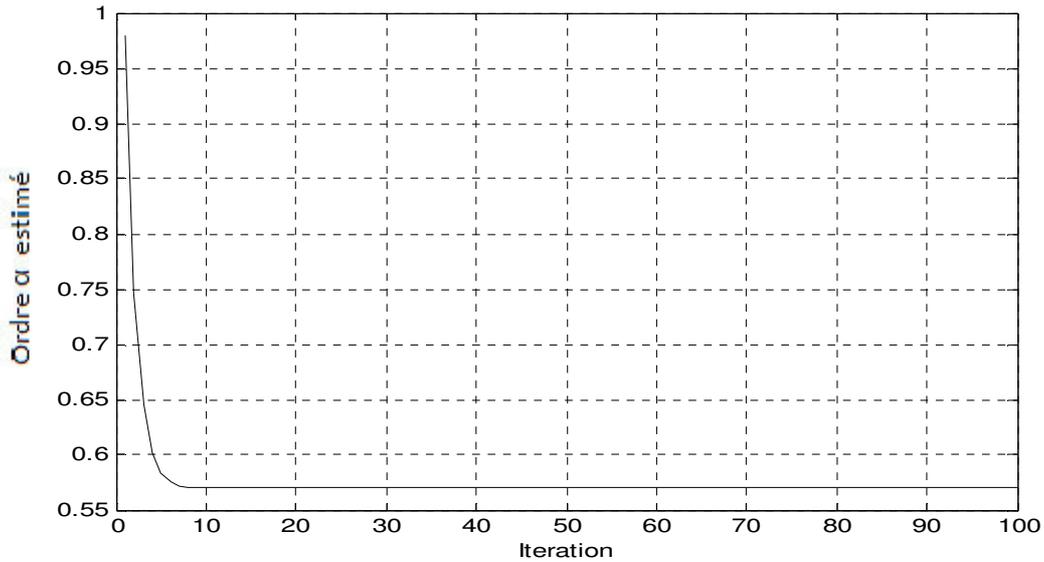


Figure (IV.24): Evolution de l'ordre commensurable estimé $\hat{\alpha}$

Dans ce cas aussi, tableau (IV.9) représente les valeurs exactes et identifiées des paramètres et de l'ordre commensurable du modèle fractionnaire de l'équation (IV.99).

Tableau (IV.9): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre

| Paramètres | α | a | b |
|------------------|----------|--------|--------|
| Valeurs exactes | 0.57 | 0.1 | 2.0 |
| Valeurs estimées | 0.5699 | 0.1000 | 2.0000 |

Maintenant, on va changer l'initialisation de l'ordre commensurable α de $\hat{\alpha}(0) = 0.98 > 0.57$ au $\hat{\alpha}(0) = 0.15 < 0.57$. Figures (IV.25) et (IV.26) montrent, respectivement, l'évolution des paramètres et de l'ordre commensurable estimés du modèle fractionnaire de l'équation (IV.99).

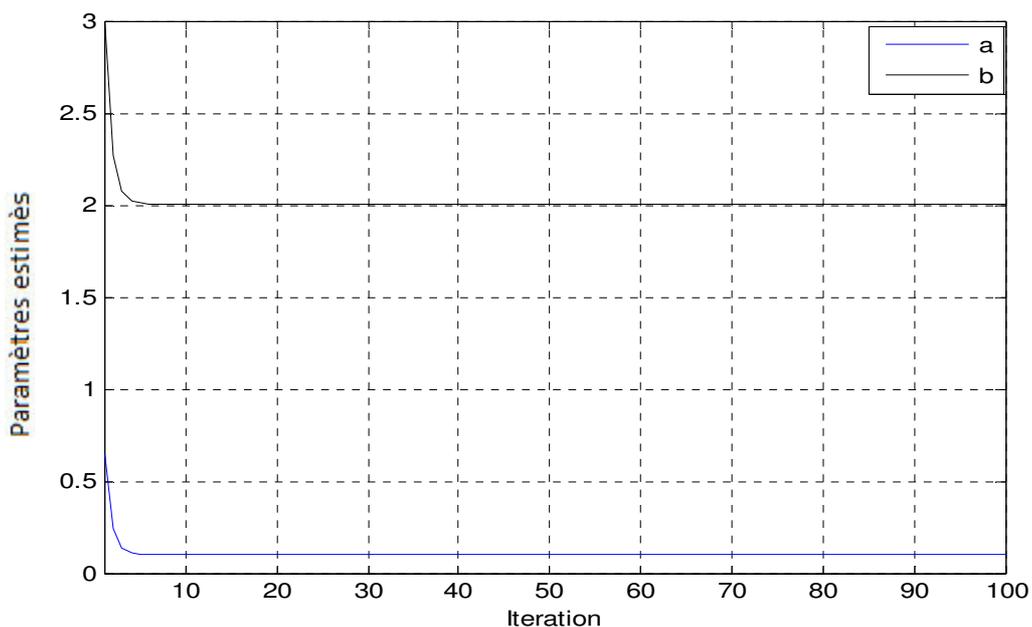


Figure (IV.25): Evolution des paramètres estimés

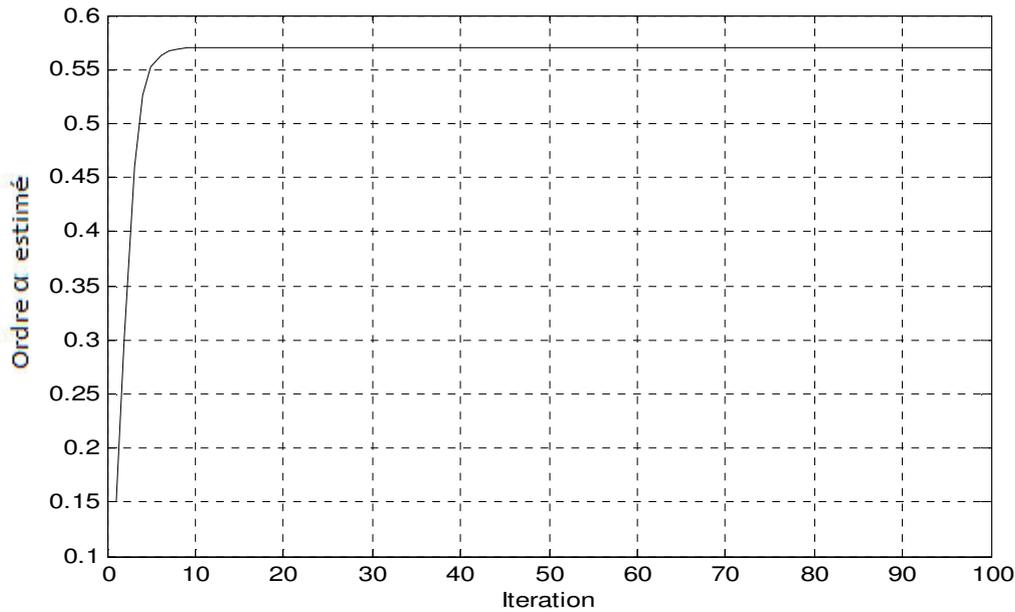


Figure (IV.26): Evolution de l'ordre commensurable estimé $\hat{\alpha}$

Dans ce cas aussi, tableau (IV.10) représente les valeurs exactes et identifiées des paramètres et de l'ordre commensurable du modèle fractionnaire de l'équation (IV.99).

Tableau (IV.10): les valeurs théoriques et identifiées des paramètres et de l'ordre

| Paramètres | α | a | b |
|------------------|----------|--------|--------|
| Valeurs exactes | 0.57 | 0.1 | 2.0 |
| Valeurs estimées | 0.5699 | 0.1000 | 2.0000 |

Pour ce type d'entrée, on note que pour les deux différentes initialisations de l'ordre m de l'algorithme d'estimation de l'ordre commensurable α de l'équation (IV.90) on a obtenu les mêmes résultats et que les paramètres et l'ordre commensurable estimés convergent aussi vers les valeurs exactes en régime permanent avec une réponse transitoire très rapide.

IV.5 Conclusion

Dans ce Chapitre, des méthodes d'identification dans le domaine temporel des systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire ont été proposées. Bien que ces systèmes linéaires d'ordre fractionnaire posent un problème d'identification plus difficile parce qu'elles nécessitent non seulement l'estimation des paramètres du modèle, mais également la détermination des ordres fractionnaires ainsi que le calcul numérique fastidieux des dérivés d'ordre fractionnaire ; nous avons montré que ce problème d'identification peut être résolu par l'algorithme des moindres carrés récursifs appliqué à une équation de régression linéaire obtenue de l'équation différentielle linéaire

d'ordre fractionnaire à l'aide d'un différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable sans répéter les calculs fastidieux des dérivés d'ordre fractionnaire à chaque itérations de l'algorithme d'identification. Dans la première méthode d'identification proposée seuls les paramètres du modèle d'ordre fractionnaire sont estimés ; donc la connaissance a priori des ordres de différentiation de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire représentant le model fractionnaire est nécessaire pour l'identification. Pendant les simulations nous avons constaté que cette méthode être utilisée pour plusieurs essais autour des valeurs les plus probables des ordres fractionnaires de différenciation du modèle fractionnaire pour estimer leurs valeurs sans répéter les calculs des dérivées d'ordre fractionnaire à chaque itération de l'algorithme d'identification. Des simulations numériques ont été présentées pour valider la méthode d'identification proposée et les résultats obtenus ont été très satisfaisants.

Profitant du peu de calcul dans la première méthode d'identification proposée, nous avons alors étendue cette dernière aux systèmes fractionnaires linéaires d'ordre commensurable sans connaissance préalable de l'ordre fractionnaire commensurable de l'équation différentielle linéaire représentant le modèle. Alors, dans la seconde méthode d'identification proposée les paramètres du modèle sont calculés pour plusieurs valeurs de l'ordre commensurable autour de sa valeur la plus probable ; ainsi les estimées des paramètres et de l'ordre commensurable sont alors celles dont l'erreur quadratique entre les observations et le modèle estimé est la plus petite. Des simulations numériques pour différentes entrées ont aussi été présentées pour valider la méthode d'identification proposée et les résultats obtenus ont été très satisfaisants.

Comme l'identification des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire pose un problème plus difficile puisqu'elle nécessite l'estimation des paramètres ainsi que les ordres des différentiations du modèle. Par conséquent, la troisième méthode d'identification proposée traite l'identification du système linéaire d'ordre fractionnaire fondamental qui est le plus simple des systèmes fractionnaires parce qu'il a deux paramètres et un ordre de différentiation. L'objectif de la méthode d'identification proposée est l'estimation des deux paramètres et l'ordre simultanément. L'algorithme d'estimation proposé se compose de deux parties ; la première partie concerne l'estimation des paramètres en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursifs et la seconde partie concerne l'estimation de l'ordre en utilisant l'algorithme du gradient. Des exemples illustratifs sont également présentés pour valider l'approche d'identification proposée et les résultats obtenus ont été très satisfaisants.

On note que les valeurs numériques des observations utilisées dans les trois méthodes d'identification sont générées à l'aide de méthodes de simulation des systèmes d'ordre fractionnaire différentes de celles utilisées dans les méthodes d'identification proposée.

Conclusion Générale

Récemment, il a été observé que plusieurs systèmes physiques sont mieux décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaires que par des équations différentielles classiques d'ordre entier. Ce qui explique que les systèmes d'ordre fractionnaires sont devenus un outil de plus en plus populaire pour la modélisation du comportement de nombreux processus. L'identification des systèmes dynamiques par modèles d'équations différentielles d'ordre fractionnaire est devenue un domaine de recherche très important dans la théorie des systèmes au cours de deux dernières décennies. Cependant, ces types de modèles fractionnaires posent un problème d'identification plus difficile parce que ça nécessite non seulement l'estimation des paramètres du modèle, mais également la détermination des ordres fractionnaires de différentiation. A partir des années 1990, des travaux sur l'identification par modèles fractionnaires, tant dans le domaine temporel que fréquentiel, ont été proposés. Beaucoup de ces techniques d'identification ont été des extensions de méthodes d'identification classiques des systèmes d'ordre entier. Malgré toutes les méthodes développées, un travail de recherche continu pour le développement de nouvelles techniques d'identification des systèmes d'ordre fractionnaires est toujours en cours pour et l'amélioration de la qualité d'identification de ce type de systèmes. Dans cette thèse, nous avons abordé le problème de développement de nouveaux algorithmes d'identification des systèmes dynamiques linéaires d'ordre fractionnaire. Les méthodes d'identification proposées sont développées dans le domaine temporel à l'aide d'un différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable.

Notre première contribution consiste à développer une structure numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable pour l'implémentation du différentiateur d'ordre fractionnaire s^m , où m est un nombre réel positif. En se basant sur la méthode d'implémentation analogique du différentiateur d'ordre fractionnaire s^m ($0 < m < 1$) par une fonction rationnelle utilisant l'approximation de Charef, le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable est obtenu sous la forme de la structure numérique de Farrow. Les résultats de l'implémentation du différentiateur analogique s^m ($0 < m < 1$) obtenus ont été très satisfaisants. En raison de sa structure, le différentiateur numérique RIF d'ordre fractionnaire ajustable jouera un rôle important dans les algorithmes d'identification développés dans ce contexte.

La seconde contribution de cette thèse consiste à développer un algorithme d'identification dans le domaine temporel pour les systèmes dynamiques linéaires d'ordre fractionnaire décrits par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. Nous avons montré que ce problème d'identification peut être résolu par l'algorithme des moindres carrés récursifs appliqué à une équation de régression linéaire obtenue de l'équation différentielle linéaire

d'ordre fractionnaire représentant le système linéaire d'ordre fractionnaire à l'aide d'un différentiateur d'ordre fractionnaire ajustable sans répéter les calculs fastidieux des dérivés d'ordre fractionnaire à chaque itérations de l'algorithme d'identification. Deux classes d'identification des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ont été développées.

Dans la première classe la connaissance a priori des ordres de différenciation de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire est nécessaire pour l'identification des paramètres du modèle fractionnaire. Nous avons alors étendu l'algorithme d'identification de la première classe aux systèmes linéaires fractionnaires d'ordre commensurable sans connaissance préalable de l'ordre fractionnaire commensurable de l'équation différentielle linéaire représentant le modèle. Dans ce cas, les paramètres du modèle sont calculés pour plusieurs valeurs de l'ordre commensurable autour de sa valeur la plus probable ; ainsi les estimées des paramètres et de l'ordre commensurable sont alors celles dont l'erreur quadratique entre les observations et le modèle estimé est la plus petite. Des simulations numériques ont été présentées pour valider la méthode d'identification proposée et les résultats obtenus ont été très satisfaisants.

Dans la seconde classe la méthode d'identification proposée traite l'identification du système linéaire d'ordre fractionnaire fondamental qui est le plus simple des systèmes fractionnaires parce qu'il a deux paramètres et un ordre de différenciation. Dans ce cas l'algorithme d'estimation proposé se compose de deux parties ; la première partie concerne l'estimation des paramètres en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursifs de la première classe et la seconde partie concerne l'estimation de l'ordre en utilisant l'algorithme du gradient. Des exemples illustratifs sont également présentés pour valider l'approche d'identification proposée et les résultats obtenus ont été très satisfaisants.

Perspectives et suggestions :

- ✓ Extension des algorithmes développés aux systèmes fractionnaire linéaires d'ordre commensurable généralisés pour l'estimation des paramètres et l'ordre commensurable.
- ✓ Extension des algorithmes développés aux systèmes fractionnaire linéaires d'ordre non commensurable pour l'estimation des paramètres et les ordres de différenciation.
- ✓ Validation expérimentale des algorithmes d'identification proposés.
- ✓ Application des algorithmes d'identification proposés dans la commande adaptative.

Référence

- [1] J. Sabatier, O. Agrawal and J. Machado, *Advances in fractional calculus: Theoretical Development and Applications in Physics and Engineering*. Dordrecht, the Netherlands: Springer Verlag, 2007.
- [2] M. Dalir, M. Bashour, "Applications of fractional calculus", *Applied Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 21, pp. 1021-1032, 2010.
- [3] B. West, "Fractal physiology and the fractional calculus: a perspective", *Frontiers in Physiology*, vol. 1, 2010.
- [4] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue and V. Feliu-Battle, *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. London: Springer, 2010.
- [5] A. Djouambi, *Contribution à La Commande CRONE*. Thèse de Doctorat, Département D'électronique , Université Mentouri de Constantine , 2008.
- [6] A. Kilbas, H. Srivastava and J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [7] R. Magin, *Fractional calculus in bioengineering*. Connecticut: Begell House Publishers, 2006.
- [8] V. Tarasov, *Fractional dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles*. Beijing: Higher Education Press, 2010.
- [9] F. Mainardi, *Fractional Calculus And Waves In Linear Viscoelasticity: An Introduction To Mathematical Models*. World Scientific, 2010.
- [10] I. Petráš, *Fractional-order nonlinear systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Berlin: Springer-Verlag Press, 2011.
- [11] H. Sheng, Y. Chen and T. Qiu, *Fractional processes and fractional-order signal processing*. London: Springer-Verlag London Ltd., 2012.
- [12] D. Baleanu, J. Machado and A. Luo, *Fractional dynamics and control*. New York, NY: Springer, 2012.
- [13] S. Das and I. Pan, *Fractional order signal processing: Introductory Concepts and Applications*. Heidelberg. New York: Springer, 2012.
- [14] F. Padula and A. Visioli, *Advances in robust fractional control*. New York: Springer , 2015.
- [15] B. Mathieu, L. Le Lay, and A. Oustaloup, "Identification of non integer order systems in the time domain", in *Proceedings of the IEEE-SMC/IMACS Symposium on Control Optimization and Supervision Lille. France*, pp. 843-847, 1996.

- [16] J. C. Trigeassou, T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup, and F. Levron, "Modelling and identification of non integer order system", *Proc ECC'99, European Control Conference, Karlsruhe, Germany*, 1999.
- [17] T. Hartley and C. Lorenzo, "Fractional-order system identification based on continuous order-distributions", *Signal Processing*, vol. 83, no. 11, pp. 2287-2300, 2003.
- [18] A. Oustaloup, O. Cois and L. Le Lay, *Représentation et identification par modèle non entier*. Paris: Hermès Science publications, 2005.
- [19] R. Mansouri, M. Bettayeb, T. Djamah and S. Djennoune, "Vector Fitting fractional system identification using particle swarm optimization", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 206, no. 2, pp. 510-520, 2008.
- [20] P. Nazarian and M. Haeri, "Generalization of order distribution concept use in the fractional order system identification", *Signal Processing*, vol. 90, no. 7, pp. 2243-2252, 2010.
- [21] A. Narang, T. Chen and S. Shah, "Continuous-time model identification of fractional-order models with time delays", *IET Control Theory & Applications*, vol. 5, no. 7, pp. 900-912, 2011.
- [22] A. Djouambi, A. Voda and A. Charef, "Recursive prediction error identification of fractional order models", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 6, pp. 2517-2524, 2012.
- [23] D. Valério and J. Sá da Costa, "Finding a fractional model from frequency and time responses", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, no. 4, pp. 911-921, 2010.
- [24] A. van der Ziel, "Unified presentation of 1/f noise in electron devices: fundamental 1/f noise sources", *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 233-258, 1988.
- [25] W. Willinger, M. Taqqu, W. Leland and D. Wilson, "Self-Similarity in High-Speed Packet Traffic: Analysis and Modeling of Ethernet Traffic Measurements", *Statistical Science*, vol. 10, no. 1, pp. 67-85, 1995.
- [26] R. Black, H. Hurst and Y. Simaika, *Long-term storage: an experimental study*. London: Constable, 1965.
- [27] A. Scotti, C. Meneveau and S. Saddoughi, "Fractal dimension of velocity signals in high-Reynolds-number hydrodynamic turbulence", *Physical Review E*, vol. 51, no. 6, pp. 5594-5608, 1995.
- [28] H. Sun and B. Onaral, "A Unified Approach to Represent Metal Electrode Polarization", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. -30, no. 7, pp. 399-406, 1983.
- [29] R. Caponetto, *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*. New Jersey: World Scientific, 2010.

- [30] Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. San Diego: Academic Press, 1998.
- [31] I. Petráš, I. Podlubný, P. O'Leary, Ľ. Dorčák, and B. M. Vinagre, *Analogue realizations of fractional order controllers*. Technical University of Kosice, 2002.
- [32] A. Maachou, *Identification par modèle non entier non linéaire: application à la modélisation de la diffusion thermique*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, France, 2012.
- [33] D. Matignon, "Stability properties for generalized fractional differential systems", *ESAIM: Proceedings*, vol. 5, pp. 145-158, 1998.
- [34] P. Torvik and R. Bagley, "On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, no. 2, p. 294, 1984.
- [35] L. Le Lay, *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Talence, France, 1998
- [36] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J. L. Battaglia, "Non integer model from modal decomposition for time domain system identification ", *Proceedings of the 12th IFAC SYSID, Santa Barbara. USA*, pp. 989-994, 2000.
- [37] R. Malti, S. Victor, A. Oustaloup and H. Garnier, "An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification", *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 41, no. 2, pp. 14379-14384, 2008.
- [38] D. Valério, *Fractional Robust System Control*. PhD thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2005.
- [39] A. Tepljakov, *Fractional-order calculus based identification and control of linear dynamic systems*. Master's thesis, Department of Computer Control, Tallinn University of Technology, 2011.
- [40] M. Aoun, R. Malti, F. Levron and A. Oustaloup, "Synthesis of fractional Laguerre basis for system approximation", *Automatica*, vol. 43, no. 9, pp. 1640-1648, 2007.
- [41] R. Malti, S. Victor and A. Oustaloup, "Advances in System Identification Using Fractional Models", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 3, no. 2, p. 021401, 2008.
- [42] S. Victor, *Identification par modèle non entier pour la poursuite robuste de trajectoire par platitude*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, France, 2010.
- [43] R. Malti, M. Aoun, F. Levron, and A. Oustaloup, "Unified construction of fractional generalized orthogonal bases ", *Fractional Differentiation and its Applications*, pp. 87-102, 2005

- [44] R. Malti, M. Aoun, and A. Oustaloup, " Synthesis of fractional Kautz-like basis with two periodically repeating complex conjugate modes ", *In Control Communications and Signal Processing, First International Symposium on IEEE*, pp. 835-839, 2004
- [45] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad, and A. Karimi, *Adaptive control*. Berlin: Springer, 1998.
- [46] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup and C. Ceyral, "Fractional differentiation for edge detection", *Signal Processing*, vol. 83, no. 11, pp. 2421-2432, 2003.
- [47] M. Benmalek and A. Charef, "Digital fractional order operators for R-wave detection in electrocardiogram signal", *IET Signal Processing*, vol. 3, no. 5, p. 381, 2009.
- [48] I. Podlubny, "Fractional-order systems PI λ D μ controllers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 208-214, 1999.
- [49] A. Charef, "Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional PI λ D μ controller", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 153, no. 6, pp. 714-720, 2006.
- [50] S. Ladaci and A. Charef, "On Fractional Adaptive Control", *Nonlinear Dynamics*, vol. 43, no. 4, pp. 365-378, 2006.
- [51] C. Monje, B. Vinagre, V. Feliu and Y. Chen, "Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications", *Control Engineering Practice*, vol. 16, no. 7, pp. 798-812, 2008.
- [52] Y. Chen and B. Vinagre, "A new IIR-type digital fractional order differentiator", *Signal Processing*, vol. 83, no. 11, pp. 2359-2365, 2003.
- [53] C. Tseng, "Design of FIR and IIR fractional order Simpson digital integrators", *Signal Processing*, vol. 87, no. 5, pp. 1045-1057, 2007.
- [54] K. Hamdaoui, and A. Charef, "A new discretization method for fractional order differentiators via the bilinear transformation", *In 15th International Conference on Digital Signal Processing IEEE*, pp. 280-283, 2007.
- [55] C. Tseng, "Design of variable and adaptive fractional order FIR differentiators", *Signal Processing*, vol. 86, no. 10, pp. 2554-2566, 2006.
- [56] C. Tseng, "Series expansion design of variable fractional order integrator and differentiator using logarithm", *Signal Processing*, vol. 88, no. 9, pp. 2278-2292, 2008.
- [57] J. Shyu, S. Pei and C. Chan, "An iterative method for the design of variable fractional-order FIR differintegrators", *Signal Processing*, vol. 89, no. 3, pp. 320-327, 2009.
- [58] C. W Farrow, " A continuously variable digital delay element", *In Circuits and Systems, IEEE International Symposium on IEEE*, pp. 2641-2654, 1988.
- [59] A. Charef, H. Sun, Y. Tsao and B. Onaral, "Fractal system as represented by singularity function", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 9, pp. 1465-1470, 1992.

- [60] A. Charef and T. Bensouici, "Design of digital FIR variable fractional order integrator and differentiator", *Signal, Image and Video Processing*, vol. 6, no. 4, pp. 679-689, 2011.
- [61] K. Ogata, *Discrete-time control systems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1987.
- [62] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*. Singapore: World Scientific, 2000.
- [63] A. Carpinteri and F. Mainardi, *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*. Wien: Springer, 1997.
- [64] T. Djamah, R. Mansouri, S. Djennoune and M. Bettayeb, "Optimal low order model identification of fractional dynamic systems", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 206, no. 2, pp. 543-554, 2008.
- [65] M. Amairi, M. Aoun, S. Najar and M. Abdelkrim, "Guaranteed frequency-domain identification of fractional order systems: application to a real system", *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 17, no. 1, p. 32, 2012.
- [66] D. Idiou, A. Charef and A. Djouambi, "Linear fractional order system identification using adjustable fractional order differentiator", *IET Signal Processing*, vol. 8, no. 4, pp. 398-409, 2014.
- [67] T. Soderstrom and P. Stoica, *System identification*. New York: Prentice Hall, 1989.
- [68] A. Charef, H. Nezzari, "On the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation", *Nonlinear Dynamics*, vol.65, no.3, pp. 335-348, 2011
- [69] H. Nezzari, A. Charef, "Analog Realization of Generalized Fractional Order Damped Sine and Cosine Functions", *Proceedings of the Symposium on Fractional Signals and Systems, Coimbra, Portugal*, pp. 89-98, November 4-5,2011.
- [70] A. Charef, D. Idiou, A. Djouambi, and A. Voda, " Identification of linear fractional systems of commensurate order", *In 3rd International Conference on Systems and Control, IEEE*, 259-264, 2013.
- [71] D. Idiou, A. Charef, A. Djouambi, and A. Voda, " Parameters and Order Identification of the Fundamental Linear Fractional Systems of Commensurate Order ", *Proceeding of the Second International Conference on Electrical Engineering and Control Applications, ICEECA2014*, vol. 11, no. 15, 2014.

Abstract

It has been observed that many physical systems are well characterized by linear fractional order models. Hence, their identification is attracting more and more interest of the scientific community. However, they pose a more difficult identification problem than the integer order systems because it requires not only the estimation of the model coefficients but also the determination of the fractional orders with the tedious calculation of fractional order derivatives. This thesis focuses on the identification in the time domain of the dynamic fractional order systems described by linear fractional order differential equations. The proposed identification method is based on the recursive least squares algorithm applied to an ARX structure derived from the linear fractional order differential equation using a numerical fractional differentiator of adjustable order. In the first place, this identification method has been used to estimate the parameters with a prior knowledge of the fractional differentiation orders of the fractional order linear differential equation representing the linear fractional order system under investigation. Then, it has been used to estimate the parameters of a linear fractional system of commensurate order without a prior knowledge of the commensurate fractional order which is obtained among several values as the one when the square error between the measured data and the estimated model is the smallest one. Finally, an extension of the proposed identification method has been done to estimate the parameters and the order at the same time of the fundamental linear fractional order system. Illustrative examples are also presented to validate the usefulness of the proposed identification methods.

Keywords:

Adjustable fractional differentiator, Identification, Linear fractional differential equation,

Recursive least squares method

ملخص

قد لوحظ أن العديد من الأنظمة الفيزيائية تتميز بنماذج خطية ذو الأس الجزئي. إذن تحديد هذا النوع من الأنظمة أصبح يجذب الكثير من الاهتمام من المجتمع العلمي. لكن طريقة تحديدهم هي أكثر صعوبة من طريقة تحديد النماذج الخطية ذو الأس الكامل لأنه لا يتطلب فقط تقدير معاملات النموذج ولكن أيضا تحديد الأس الجزئي مع الحسابات العددية المملة المستمدة من مشتقات ذو الأس الجزئي. هذه الأطروحة تركز على تحديد في المجال الزمني الأنظمة الديناميكية ذو الأس الجزئي الممثلة بالمعادلات التفاضلية الخطية ذو الأس الجزئي. إن الطريقة المطروحة لتحديد النماذج الخطية ذو الأس الجزئي تركز على خوارزمية المتكررة لادنية المربعات المطبقة على هيكل ARX الذي تم الحصول عليه من المعادلة التفاضلية الخطية ذو الأس الجزئي باستخدام المشتقة الرقمية ذات الأس الجزئي القابل للتعديل. أولا، تم استخدام الطريقة المقترحة لتحديد النماذج الخطية ذو الأس الجزئي لتقدير المعاملات مع معرفة مسبقة للأسس الجزئية للمعادلة التفاضلية الخطية ذو الأس الجزئي التي تمثل النظام ذو الأس الجزئي الذي هو تحت الدراسة. وبعد ذلك استعملت هذه الطريقة المقترحة لتقدير المعاملات للأنظمة الخطية ذو الأس الجزئي المتعادل بدون معرفة مسبقة للأسس الجزئي المتعادل الذي يتم الحصول عليه من بين عدة قيم بوصفه للأسس الجزئي المتعادل الذي يعطينا اصغر قيمة لمربع الفرق بين البيانات المقاسة والنموذج المقدر. وأخيرا تم تمديد الطريقة المقترحة لتحديد النماذج الخطية ذو الأس الجزئي لتقدير المعاملات مع الأس في نفس الوقت لنظام خطي ذو الأس الجزئي الأساسي. وقد تم عرض أمثلة توضيحية للتحقق من جدوى الطريقة المقترحة لتحديد النماذج الخطية ذو الأس الجزئي

كلمات المفاتيح:

الاشتقاق ذو الأس القابل للتعديل، المعادلات التفاضلية الخطية ذو الأس الجزئي، تحديد الأنظمة،

خوارزمية المتكررة لادنية المربعات

CURRICULUM VITÆ

Daoud Idiou est né le 01 Février 1980 à Constantine. Il a obtenu le diplôme d'Ingénieur d'état en Electronique option Contrôle en 2006 de l'Université de Constantine et le diplôme de Magister en Electronique option Contrôle et Traitement du Signal en 2009 de l'Université de Constantine. Depuis septembre 2009, il est doctorant au département d'Electronique de l'Université des Frères Mentouri de Constantine. Depuis mai 2011, il est Attaché de Recherche avec le Centre de Recherche en Technologies Industrielles (CRTI), Unité de Recherche Appliquée en Sidérurgie et Métallurgie URASM Annaba. Son domaine de recherche actuel est la Modélisation et l'Identification des Systèmes d'Ordre Fractionnaire .

.