



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

Université des Frères Mentouri de Constantine

Faculté des sciences de la technologie

THÈSE

N° d'ordre :.....

Série :.....

pour obtenir le titre de Docteur en sciences

En électronique

Option : Microélectronique

présentée et soutenue publiquement par

Dib. Lyes

Modélisation de la propagation ultrasonore dans les milieux complexes

Directeur de thèse : Pr **Bouhedja Samia**

Soutenue : 27/juin/2016

devant le Jury composé de :

<i>Président :</i>	Pr. Benghalia abdelmadjid	Univ. Frères Mentouri Constantine
<i>Rapporteur :</i>	Pr. Bouhedja Samia	Univ. Rabah Bitat Constantine
<i>Examineur :</i>	Pr. Bouchemat mohamed	Univ. Frères Mentouri Constantine
<i>Examineur :</i>	Pr. Bouzid Samia	Univ. Rabah Bitat Constantine
<i>Examineur :</i>	Pr. Zaabat mourad	Univ. Oum-el-bouaghi

Laboratoire des hyperfréquences et des semi-conducteurs (LHS)

P.B. 325, 25017 Constantine, ALgerie

T
H
È
S
E

TABLE DES MATIÈRES

résumé	iv
abstract	vi
remerciements	vii
Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xvi
Introduction générale	xvi
1 Matériaux poreux : Notions générales et description	1
I Introduction	1
II Milieux poreux : Notions	1
II.1 Matériau poreux et échelle spatiale	3
II.2 Approche macroscopique et microscopique	5
II.2.1 Point de vue microscopique	5
II.2.2 Point de vu macroscopique : approche de Biot	6
III Milieux poreux : Description	6
III.1 Paramètres du fluide	7
III.2 Paramètres de la matrice solide	7
III.3 Paramètres caractérisant le couplage entre les deux phases	7
III.3.1 Porosité	8
III.3.2 Perméabilité visqueuse et résistivité au passage de l'air	9
III.3.3 Tortuosité	10
III.3.4 Autres paramètres géométriques	12
III.3.4.1 Longueur caractéristique visqueuse Λ	12
III.3.4.2 Longueur caractéristique thermique Λ'	15
III.3.4.3 Relation entre les deux longueurs caractéristiques	16

IV	Ondes présentes dans un milieu semi-infini poreux continu biphasique	17
IV.1	Ondes volumiques	17
IV.2	Onde superficielle de Rayleigh	18
V	Conclusion	19
2	Description mathématique des milieux poreux en acoustique	20
I	Introduction	20
II	Hypothèses de base	21
II.1	Modèle poroélastique	21
II.2	Modèle de fluide équivalent	22
III	Formulation (u, U) pour le modèle poroélastique de Biot-Allard	23
III.1	Energie de déformation et relations contraintes-déformations du milieu poreux homogène	23
III.2	Relations déformations-déplacements	25
III.3	Relations contraintes-déformations	26
III.4	Expériences de Biot-Willis	26
III.5	Densité d'énergie cinétique	30
III.6	Fonction de dissipation	31
III.7	Equation de mouvement de Biot	31
IV	Formulation (p) pour le Modèle fluide équivalent de Biot-Allard	33
V	Solution des équations : propagation des ondes dans un milieu poreux	35
V.1	Equations de propagation des ondes de compressions P	35
V.2	Equation de propagation de l'onde de cisaillement S	38
VI	Caractérisation acoustique	39
VI.1	Impédance de surface d'un milieu poreux à une structure rigide	40
VI.1.1	Relation de transport d'impédance	40
VI.1.2	Formule de raccordement d'impédance	41
VI.1.3	Condition limite arrière	41
VI.1.4	Coefficient d'absorption	43
VI.2	Impédance de surface d'un milieu poreux à structure élastique	43
VII	Quelques exemples d'applications pour différents matériaux poreux rigide et élastique	46
VIII	Conclusion	51
3	Approche analytique : Méthode des matrices de transfert	53
I	Introduction	53
II	Méthode de la matrice de transfert	54

II.1	Principe de la méthode	54
II.2	Presentation matricielle des milieux classiques	54
II.2.1	Couche de fluide	54
II.2.2	Couche solide	55
II.2.3	Couche poroélastique	57
II.2.3.1	Présentation matricielle	58
II.2.3.2	Evaluation des matrices $[T]$ et $[T^p]$	59
II.2.4	Plaque élastique mince	61
II.2.5	Ecrans imperméables	62
II.2.6	Autres matériaux	63
II.3	Matrices de transfert de couplage	63
II.3.1	Deux couches de même nature	63
II.3.2	Interfaces entre les couches de nature différente	65
II.3.2.1	Interface solide-fluide	65
II.3.2.2	Interface Poreux-fluide	66
II.3.2.3	Interface solide-poreux	66
II.3.2.4	Interface plaque mince-poreux	67
III	Assemblage de la matrice de transfert globale	67
III.1	Condition du mur rigide	68
III.2	Condition de fluide semi-infini	68
III.3	Calcul des indicateurs acoustiques	70
III.3.1	Impédance de surface et coefficients de reflexion et d'absorption	70
III.3.2	Coefficient de transmission et perte de transmission	71
IV	Applications	72
IV.1	Configuration : Air/poreux rigide/air	72
IV.2	Configuration : Air/plaque/air/plaque/air	73
IV.3	Configuration : Air/poreux rigide/air/plaque/air	74
IV.4	Configuration : Air/poreux rigide/plaque/air	75
IV.5	Configuration : Air/poroélastique/plaque/air	76
V	Conclusion	77
4	Approche numérique : Eléments finis	78
I	Introduction	78
II	Formulation mixte déplacement-pression (u, p)	79
II.1	Equation en déplacement-pression	79
II.1.1	Phase solide	79

II.1.2	Phase fluide	81
III	Modélisation des matériaux poroélastiques sur Comsol	82
IV	Implémentation de la formulation mixte de Biot dans Comsol	83
IV.1	Conditions aux limites du couplage	84
IV.1.1	Couplage poroélastique/air	84
IV.1.2	Couplage poroélastique/élastique	85
IV.1.3	Couplage poroélastique/poroélastique	86
IV.2	Matériaux poreux dans Comsol	86
V	Conclusion	93
	Conclusion générale	95
	ANNEXES	95
A	Calcul de la densité effective et la compressibilité dynamique en utilisant différents modèles	97
I	Modèle Johnson-Allard à 5 paramètres	97
II	Modèle de Lafarge-Allard à 6 paramètres	98
B	Eléments $[T_{ij}]$ de la matrice de transfert $[T]$	99
C	Eléments des matrices A_1, A_2, B_1, et B_2	102
	Bibliographie	103
	Bibliographie	103

ملخص

الهدف من هذه الاطروحة هو نمذجة انتشار الأمواج الصوتية في أوسط معقدة، وكذلك دراسة امتصاص الصوت من طرف هذه المواد للحد من الضوضاء الناتجة عن الاجهزة المصنعة. المواد المسامية من النوع المطاطي هي المواد المسامية التي تكون هياكلها متحركة، اي انها قابلة للحركة وللتشوه. ان نظرية بيوت جونسون شومبو ألالر أو بيوت ألالر المعممة تستعمل من أجل وصف تصرف هذه المواد التي يتم نمذجتها كأنها نظام ثنائي الطور مكون من مادة صلبة واخرى سائلة (الهواء) ذات ازدواجية بالنسبة للزمن والمكان.

لقد تم افتراض مقارنة تحليلية في إطار نظرية بيوت ألالر المعممة، هذه المقاربة هي طريقة مصفوفة التحويل التي تسمح بحساب الدلائل الصوتية. كذلك تم استعمال مقارنة رقمية التي تركز على العناصر المنتهية وذلك من اجل حساب الجزء الحقيقي والتخيلي للممانعة السطحية ومعامل الامتصاص باستعمال برنامج محاكاة يدعى كمسول ميلتيفيزيكس. وبعد ذلك قارنا بين المقاربتين من أجل حساب الدلائل الصوتية، ودرسنا مدى تأثير المعاملات الميكانيكية و الصوتية على الامتصاص الصوتي لهذه المواد، حيث لاحظنا تأثير بارز للوحدة النمطية لمعامل يونج و كذلك معامل بواسون، و عدم وجود اي تأثير لباقي المعلمات الاخرى.

الكلمات المفتاحية: المواد المسامية، نموذج (Biot-Allard)، المصفوفة المحولة، Comsol multiphysics، معامل

الامتصاص، رغوة البوليمر

RÉSUMÉ

Modélisation de la propagation ultrasonore dans les milieux complexes

Ce travail de thèse a pour objectif la modélisation de la propagation des ondes sonores dans les milieux complexes, en particulier poreux et l'étude de l'absorption acoustique de ces matériaux afin de réduire le bruit généré par les produits manufacturés. Les matériaux poroélastiques sont des matériaux poreux dans le cas où la structure est mise en mouvement, c'est-à-dire la structure est déformable ou mobile. La théorie de **Biot-Johnson-Chompoux-Allard** (ou modèle de **Biot-Allard** généralisé) est utilisée pour décrire le comportement de ces matériaux poro-visco-élastiques modélisés comme des systèmes bi-phasiques constitués d'une phase solide et d'une phase fluide, l'air, couplées dans le temps et dans l'espace. Une approche analytique est proposée dans le cadre de la théorie de **Biot-Allard** généralisée. Cette approche est une méthode de la matrice de transfert. Les indicateurs acoustiques ont été calculés en utilisant cette méthode. Une approche numérique basée sur les éléments finis est utilisée pour calculer les parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption, en utilisant un code de calcul appelé Comsol Multiphysics. Une comparaison entre les simulations utilisées par les deux approches a été effectuée pour calculer les indicateurs acoustiques. Aussi les effets des paramètres mécaniques sur l'absorption acoustique ont été étudiés. Un effet notable a été observé dans le cas des paramètres du module d'Young et du coefficient de Poisson ainsi que la densité et reste absent pour les autres paramètres.

Mots clés : *Matériaux poreux, modèle de Biot-Allard, matrice de transfert, Comsol Multiphysics, Coefficient d'absorption, mousse polymère.*

ABSTRACT

Modelling of ultrasound propagation in complex media

This thesis work aims at modeling the propagation of sound waves in complex medium, or porous materials, and the study of sound absorption of these materials to reduce the noise generated by manufactures. Poroelastic materials are porous materials in the case where the structure is set in motion, that are to say the structure is deformable or movable. The theory of Biot-Johnson-Chompoux-Allard (or model of generalized Biot-Allard) is used to describe the behavior of these poro-viscoelastic materials modeled as two-phase systems consisting of a solid phase and a fluid phase, air, coupled with time and space.

An analytical approach is proposed in the context of the generalized Biot-Allard theory. This approach is a method of the transfer matrix. Acoustic indicators were calculated from this method.

A numerical approach based on the finite elements is used to calculate the real and imaginary part of the surface impedance and the absorption coefficient, using a calculated code called COMSOL Multiphysics.

A comparison between the simulations used by the two approaches was made to calculate the acoustic indicators. But also the effects of mechanical parameters of sound absorption were studied. A notable effect was observed in the case the Young's modulus parameter, but nothing has been observed for other parameters.

Keywords : porous materials, Biot-Allard model, transfer matrix, Comsol Multiphysics, absorption coefficient, polymer foam

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier

..La directrice de cette thèse le professeur **Bouhedja Samia** , pour son suivi, sa confiance et la liberté qu'elle m'a accordé durant ces années.

...les membres du jury, pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail : le professeur **Benghalia abdelmadjid**, le professeur **Bouchemat mohamed**, le professeur **Zaabat mourad**, et le professeur **Mme Bouzid samia** qui ont accepté d'être membres de jury.

...les membres de laboratoire des hyperfréquences et des semi-conducteurs (LHS) qui ont m'accueilli parmi eux.

...les amis : Mohamed lamine Bouchemal, Hamza Amrani, Farah Hamdi, LABANI Warda, MAYA. Amir Bouaroudj

...la directrice de la bibliothèque de Zarzara madame Katia, et ses équipes, surtout Hocine, Rabeh, Mouloud, Skender, moussa, Anouar, Khadra, sihem, samia, samia. et les autres pour leurs soutien durant toutes les années de mes études.

Anisi que

...mes chers amis : Mahrez El mechta, Hocine felousse, Ilyes nouicer, Bessem Kaghouché, Samir labioudh, Khebab Mohamed, Tahar besouissi, Abdeali Saouli, Laid Zaarour. Bella Mourad....

NOMENCLATURE

$[T]$	Matrice de transfert
α	Coefficient d'absorption
α_∞	Tortuosité dynamique
α_p	Coefficient thermodynamique classique pour les dilatations
\bar{I}	Matrice d'identité
\bar{k}	Matrice de la perméabilité visqueuse du matériau poreux
$\bar{\varphi}_1$	Onde rapide
$\bar{\varphi}_2$	Onde lente
β_v	Coefficient thermodynamique classique pour les dilatations
ΔV	Différence de potentiel
δ	Profondeur de la couche visqueuse
δ_1^2	Racine du nombre d'onde longitudinale
δ_3^2	Racine du nombre d'onde cisaillement
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
\dot{E}_{mech}	Taux de dissipation de l'énergie
\dot{U}	Vitesse macroscopique du solide
\dot{u}	Vitesse macroscopique du fluide
η	Viscosité dynamique
η_s	Facteur de perte
γ	rapport de la chaleur spécifique
Λ	Longueur caractéristique visqueuse
λ	Longueur d'onde

Λ'	Longueur caractéristique thermique
$\langle \sigma^f \rangle$	Etat de contraintes reliées à la phase fluide
$\langle \sigma^s \rangle$	Etat de contraintes reliées à la phase solide
$\langle \varepsilon^f \rangle$	Etat de déformations des éléments unitaires fluide
$\langle \varepsilon^s \rangle$	Etat de déformations des éléments unitaires solide
$\langle v_m^2 \rangle$	Energie cinétique moyenne
$\langle v_m^2 \rangle^2$	Energie cinétique moyenne macroscopique
μ	viscosité de l'air ($Kgm^{-1}s^{-1}$)
ν	Coefficient de Poisson
ω	Pulsation
ϕ	Porosité
ψ	Potentiel scalaire
ψ^s	Potentiel vectoriel associé au déplacement de la phase fluide
ψ^s	Potentiel vectoriel associé au déplacement de la phase solide
ρ_0	Masse volumique de l'air
ρ_1	Densité de la phase solide du matériau poreux
ρ_f	Pression du fluide
ρ_{11}	Masse volumique apparente de Biot
ρ_{12}	Masse volumique apparente de Biot
ρ_{22}	Masse volumique apparente de Biot
ρ_f	Masse volumique au repos (Kg/m^3)
σ	Résistance statique à l'écoulement
σ_{ij}^f	Composantes tensorielles des contraintes exercées sur la phase fluide
σ_{ij}^p	Composantes du tenseur total exercées sur l'élément cubique unitaire
σ_{ij}^s	Composantes tensorielles des contraintes exercées sur la phase solide
D	Fonction de dissipation visqueuse
T	Densité d'énergie cinétique
W	Potentiel de déformation

θ^f	Dilatation de l'élément unitaire de la phase fluide
θ^s	Dilatation de l'élément unitaire de la phase solide
$\tilde{\rho}(\omega)$	Densité du fluide effective
$\tilde{\rho}_{11}$	Masse volumique dynamique complexe de Biot
$\tilde{\rho}_{12}$	masse volumique dynamique complexe de Biot
$\tilde{\rho}_{22}$	masse volumique dynamique complexe de Biot
\tilde{b}	Coefficient d'amortissement visqueux complexe
\tilde{G}	Facteur correcteur de la viscosité
\tilde{H}_E	Matrice d'élasticité de la phase solide
\tilde{K}_e	coefficient dynamique complexes de Biot
\tilde{P}	Module de compression dynamique complexe de l'air
\tilde{Q}	coefficient dynamique complexes de Biot
\tilde{Q}_E	Forces élastiques agissant sur la phase solide
\tilde{q}_E	Forces élastiques agissant sur la phase fluide
\tilde{R}	coefficient dynamique complexe de Biot
$\tilde{\epsilon}^s$	Déformations de la phase solide
$\tilde{\sigma}_s$	Contrainte exercée sur la phase solide
ϵ_{ij}^f	Composantes du tenseurs de déformation du fluide
ϵ_{ij}^p	Composantes du tenseur total des déformations sur l'élément cubique unitaire poroélastique
ϵ_{ij}^s	Composantes du tenseurs de déformation du solide
φ^f	Potentiel scalaire associé au déplacement de la phase fluide
φ^s	Potentiel scalaire associé au déplacement de la phase solide
A	Coefficient élastique de Biot
c_1	Vitesse de phase de l'onde rapide
c_2	Vitesse de phase de l'onde lente
c_f	célérité du son ($m.s^{-1}$)
D_0	Intensité du flux d'énergie

E	Module d'Young
F	Facteur géométrique
f_c	Fréquence de découplage
h	Longueur d'échelle des pores
H_1	Longueur d'échelle macroscopique
H_2	Longueur d'onde
I	Courant électrique
$K(\omega)$	Compressibilité dynamique du fluide
k_1	Nombre d'onde complexe
k_2	Nombre d'onde complexe
k_3	Nombre d'onde de l'onde de cisaillement
K_β	Vecteur de l'onde de cisaillement
K_b	Module de compression de la matrice solide dans le vide
K_f	Compressibilité dynamique du fluide libre
K_s	Module de compression du matériau constituant la phase solide
K_a	module de compressibilité adiabatique (Pa)
N	Coefficient élastique de Biot
P_1	onde de dilatation
P_2	onde de dilatation
P_0	Pression atmosphérique(Pa)
P_r	nombre de Prandlt
Q	Coefficient élastique de Biot
R	Coefficient élastique de Biot
r	Coefficient de reflexion
R'	Ordre de grandeur de l'étendue spatiale du volume élémentaire représentatif
R_f	Résistivité au passage de l'air
S	Section
t	Temps

T_0	Température moyenne ambiante dans l'air
V^f	Champ acoustique dans le fluide
v_m	Micro-vitesse du fluide
V_p	Potentiel microscopique de l'écoulement
V_t	Volume total (m^3)
V_f	Volume des pores (m^3)
W	vitesse de filtration (m/s)
Z_1^f	Impédance caractéristique du fluide de l'onde rapide
Z_2^f	Impédance caractéristique du fluide de l'onde lente
Z_1^s	Impédance caractéristique du solide de l'onde rapide
Z_2^s	Impédance caractéristique du solide de l'onde lente
Z_0	Impédance caractéristique de l'air
Z_s	Impédance de surface
d	Dimension caractéristique du pore
L	Taille caractéristique du système
T	Température $^{\circ}C$

TABLE DES FIGURES

1.1	Echelles caractéristiques d'un milieu poreux [Oln99]	2
1.2	Illustration schématique des échelles caractéristiques d'un milieu poreux [Oln99] .	2
1.3	Photographie d'un échantillon poreux à l'échelle microscopique [Dou07]	3
1.4	Matrice d'un milieu poreux avec différentes porosités à l'échelle microscopique . .	3
1.5	Différentes échelles spatiales du milieu poreux	4
1.6	Différentes phases du milieu poreux	5
1.7	Différentes formes de porosité a) porosité ouverte (connectée). b) porosité fermée (déconnectée) . c) porosité piégée :	8
1.8	Configuration de mesure de la perméabilité visqueuse k_0 ou la résistivité au pas- sage de l'air $R_f = \eta/k$	9
1.9	Illustration schématique de la tortuosité. la flèche principale représente la vitesse de particule macroscopique v_f (longueur droite l_r) et les petites flèches représente la micro-vitesse locale v_m (longueur des lignes courantes l_d)	11
1.10	Configuration de mesure de la conductivité.	11
1.11	Configuration de l'échelle du pore : β est la distance de la surface au point M , le point O est l'origine du système de coordonnées	14
1.12	Relation entre les longueurs caractéristiques visqueuse et thermique Λ et Λ' et la géométrie du pore	17
1.13	Ondes volumiques	18
1.14	Onde de Rayleigh	19
2.1	Illustration schématique du volume élémentaire représentatif	21
2.2	Illustration de l'échelle macroscopique H_2	22
2.3	Schéma représentatif des contraintes exercées sur les phases solide et fluide d'un élément cubique élémentaire	24
2.4	Test de compressibilité à double enveloppe	27
2.5	Matériau poreux non-enveloppé subissant une augmentation de pression	28

2.6	Représentation schématique des profils de vitesses dans un tube cylindrique. a) basse fréquence et b) haute fréquence.	31
2.7	Configuration de calcul de l'impédance de surface d'un matériau poreux	40
2.8	Transport d'impédance à l'intérieur d'un milieu poreux	40
2.9	Raccordement d'impédance à la frontière entre deux milieux poreux	41
2.10	Configuration de calcul de l'impédance de surface : MUR RIGIDE	42
2.11	Configuration de calcul de l'impédance de surface : LAME D'AIR	42
2.12	Configuration de calcul de l'impédance de surface : ZERO DE PRESSION	43
2.13	Un échantillon poroélastique posé sur une condition d'arrière fixée	44
2.14	Coefficient d'absorption et les parties réelle et imaginaire de la laine de verre : Cas mur rigide	47
2.15	Coefficient d'absorption et les parties réelle et imaginaire de la laine de verre : Cas lame d'air de 0.12 mm	48
2.16	Coefficient d'absorption pour les deux modèles de la laine de verre avec et sans lame d'air	48
2.17	Coefficient d'absorption et les parties réelle et imaginaire de la mousse : Cas mur rigide	49
2.18	Coefficient d'absorption et les parties réelle et imaginaire de la mousse : Cas lame d'air de 0.12 mm	49
2.19	Coefficient d'absorption pour les deux modèles de la mousse polymère avec et sans lame d'air	50
2.20	Coefficient d'absorption et les parties réelle et imaginaire de textile fibreux : Cas mur rigide	50
2.21	Coefficient d'absorption et les parties réelle et imaginaire de textile fibreux : Cas lame d'air de 0.12 mm	51
2.22	Coefficient d'absorption pour les deux modèles du textile fibreux avec et sans lame d'air	51
3.1	Onde plane frappant un domaine fini d'épaisseur h	54
3.2	Onde plane dans un milieu multicouche	64
3.3	Milieu multicouche soutenu par un mur rigide	69
3.4	Domaine de milieux multicouches soutenu par un fluide semi-infini	69
3.5	Milieu stratifié : air/poreux rigide/air	72
3.6	Air/poreux rigide/air	73
3.7	Milieu stratifié : air/plaque/air/plaque/air	73
3.8	Air/poreux/air/plaque/air	74

3.9 Milieu stratifié : air/poreux rigide/air/plaque/air	74
3.10 Air/poreux rigide/air/plaque/air	75
3.11 Milieu stratifié : air/poreux rigide/plaque/air	75
3.12 Air/poreux rigide/plaque/air	76
3.13 Milieu stratifié : air/poroélastique/plaque/air	76
3.14 Air/poroélastique/plaque/air	77
4.1 Représentation d'un matériau poreux saturé par un seul fluide d'après la formulation mixte déplacement-pression ou $\{u, p\}$	79
4.2 Comparaison entre les résultats analytique et numérique de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption [DBA15]	88
4.3 a) Influence du module d'Young sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance [DBA15]	89
4.4 a) Influence du coefficient de Poisson sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance [DBA15]	90
4.5 a) Influence de la densité sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance [DBA15]	90
4.6 a) Influence du facteur de perte sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance [DBA15]	91
4.7 a) Influence de la longueur caractéristique visqueuse sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance	91
4.8 a) Influence de la longueur caractéristique thermique sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance	92
4.9 a) Influence de la porosité sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance	92
4.10 a) Influence de la tortuosité sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance	93
4.11 Influence de la résistivité sur l'absorption acoustique	93

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Caractéristiques acoustiques et mécaniques des trois types de matériaux [Dou07]	46
3.1	Éléments de la matrice $\Gamma_{ij}(x_3)$	61
3.2	Propriétés acoustiques et mécaniques de la laine de verre	72
3.3	Propriétés de la plaque élastique	72
4.1	Propriétés acoustiques et mécaniques de la mousse polymère [HGC12]	87

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La révolution technologique et industrielle connue par l'homme à notre époque, a non seulement envahi et contribué à notre vie quotidienne mais aussi a enrichi le spectre des nuisances sonores. Ce dernier peut provoquer chez l'homme des problèmes physiques et psychiques (surdité, stress, perturbations du sommeil, etc.). En conséquence, l'homme a tenté de réduire les nuisances sonores dans son environnement. Il faut dire que l'exigence de confort acoustique n'a pas accompagné cette révolution à ses débuts. Mais depuis une vingtaine d'année, l'acoustique à travers l'exigence sociale de la réduction du bruit et du confort sonore, est devenue un paramètre incontournable de la conception des produits manufacturés (aéronautique, automobile, ferroviaire, outillage, électroménager), de l'urbanisme (aéroport, trafic routier, transformateurs de puissance électriques). Donc, l'assurance d'un confort acoustique au quotidien est devenue un enjeu politique, par l'approbation d'une loi qui protège les hommes et l'environnement.

La méthode la plus couramment utilisée pour répondre à l'amélioration du confort acoustique, utilise un control passif de l'énergie acoustique au moyen de matériaux absorbants. Ces derniers sont généralement des mousses polymères ou des fibreux (laine de roches, fibre de verre,...). Les matériaux poreux sont constitués dans leur forme la plus simple, de deux phases, une phase solide appelée squelette, et une phase fluide, l'air en acoustique. Ces matériaux sont le si ge d'interactions fortes entre leurs constituants conduisant à des phénomènes d'atténuation ou d'absorption importants.

La prédiction du comportement acoustique ou vibratoire des matériaux poreux n'est pas encore totalement maîtrisée. De nombreux modèles théoriques introduisant un grand nombre de paramètres (tortuosité, porosité, résistivité, longueurs caractéristiques thermique et visqueuse) ont été développés. Les premiers travaux de modélisation sont initiés par **Zwicker** et **Kosten** [ZK49] au milieu du siècle dernier (1949). Ce modèle appelé modèle de "fluide équivalent"   structure rigide, considère que la propagation dans le matériau est semblable à celle dans un fluide libre dont les caractéristiques sont modifiées par la présence du solide. Les effets visqueux sont pris en compte en modifiant la masse volumique de la phase fluide et les effets thermiques en modifiant son module de compressibilité dynamique. Un autre modèle plus simple est celui de **Delany** et **Bazley** (1970) [DB70] qui établit des lois empiriques suivant lesquelles les constantes

de propagation et les impédances caractéristiques pour les matériaux fibreux sont en fonction du rapport de la fréquence et de la résistance. Afin de modéliser plus finement les effets dissipatifs, **Johnson et coll** [JKD87]., introduisent une fonction de forme visqueuse appelée longueur caractéristique visqueuse Λ qui, contrairement à celle de **Zwikker et Kosten**, n'est pas limitée par la nature géométrique du squelette. De façon similaire, **Champoux et Allard** [CA91] définissent une fonction de forme liée aux effets thermiques ainsi qu'une longueur caractéristique thermique Λ' . En 1996, **Lafarge et coll** [LLAT97]., introduisent la perméabilité thermique k'_0 afin d'améliorer la prise en compte des effets thermiques à basses fréquences.

Cependant, le modèle de fluide équivalent à structure rigide n'est plus adapté lorsque le squelette du matériau est mobile ou se déforme. Le modèle fondamental de propagation d'ondes acoustiques dans les matériaux poreux, tenant compte des vibrations de structure a été présenté par **Biot**. Il utilise le formalisme de la mécanique des milieux continus et suggéra que le milieu poreux pouvait être vu au niveau macroscopique comme la superposition en temps et en espace de deux milieux continus couplés. Cette modélisation est adaptée à l'acoustique par **Allard** en intégrant les diverses contributions précitées de **Johnson et coll.**, **Champoux et Allard**, **Lafarge et coll**, ce modèle est appelé le modèle de **Biot-Allard**.

La caractérisation des matériaux poro-visco-élastiques ou vibro-acoustiques, nécessite la connaissance des propriétés élastiques relatives aux phases solide et liquide du matériau et aussi celles relatives aux interactions entre les deux phases. La mesure de ces propriétés élastiques ou mécanique des matériaux poreux est indispensable pour décrire et analyser les vibrations du squelette dans les gammes ; basses, moyennes, et hautes fréquences.

Pour assurer le confort acoustique, il est nécessaire d'étudier la performance d'absorption acoustique de matériaux poreux contre les ondes acoustiques (ou les bruits) générés par les produits manufacturés. Donc, il faut étudier d'une manière très précise, la propagation de ces ondes aux seins de ces matériaux. Cette propagation est caractérisée par l'un des deux couples ; la densité effective et la compressibilité dynamique, ou l'impédance de surface et la constante de propagation. Elles dépendent des paramètres intrinsèques du matériau poreux. A partir de ces couples on peut calculer le coefficient d'absorption d'un tel matériau, afin de savoir sa qualité et sa performance d'absorption acoustique.

Le travail présenté dans ce manuscrit s'attache à la modélisation de la propagation des ondes sonores dans les milieux poreux, en particulier les milieux poroélastiques ou poro-visco-élastiques soumis à une excitation acoustique, et à la prédiction du comportement acoustique des matériaux poreux souples à titre d'exemple, les mousses polymères (polyuréthane, mélamines). Ce manuscrit s'articule donc en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les milieux poreux. Tous d'abord nous commençons par des notions de base nécessaires à la compréhension de la structure du milieu

poreux. Ensuite nous rappelons les différentes échelles spatiales que nous pouvons rencontrer dans notre modélisation, les différents mécanismes de dissipation de l'énergie acoustique due au comportement viscoélastique du squelette, le frottement visqueux entre les parois du squelette et le fluide et l'échange thermique entre l'air et le squelette lors du passage d'une onde acoustique. Nous décrivons ainsi dans ce chapitre qualitativement les matériaux poreux, en soulignant d'une façon plus détaillée, tous les paramètres intrinsèques acoustiques et mécaniques définissant chaque phase du matériau poreux, solide et fluide, et les paramètres de couplages entre les deux phases. Et enfin nous citons les ondes qui peuvent se propager dans un milieu semi-infini continu bi-phasique.

Le second chapitre présente une description mathématique des milieux poreux en acoustique. Nous rappelons les hypothèses de base pour les deux modèles, poroélastique et fluide équivalent, ainsi les formulations mathématiques décrivant la propagation des ondes acoustiques pour chaque modèle. Nous présentons aussi dans ce chapitre, d'une part une solution détaillée pour la formulation déplacement-déplacement (u, U) du modèle de Biot-Allard, et d'autre part l'existence des deux ondes (p) et (s) pouvant se propager dans le cas du matériau poroélastique. Et enfin, nous donnons la définition de l'impédance de surface, du coefficient d'absorption et aussi des conditions d'arrière pour les deux cas de la structure, rigide et élastique du matériau poreux étudié. Des exemples d'applications pour différents matériaux poreux rigides et élastiques illustrent bien cette partie.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'approche analytique, représentée par la méthode de la matrice de transfert. Cette méthode a pour objectif d'étudier d'une manière très simple la modélisation des ondes acoustiques dans les matériaux stratifiés. Ces derniers peuvent être de natures différentes ; solide élastique, plaque mince, fluide, rigide poreux, limp poreuse et poroélastique. Le modèle présenté dans ce chapitre est basé sur la représentation de la propagation des ondes planes dans différents médias, en termes de matrices de transfert. Nous rappelons dans ce chapitre, les différentes matrices de transfert de chaque type du matériau, et nous présentons les matrices d'interface reliant les matériaux de même nature ou le cas contraire. Et enfin nous calculons les indicateurs acoustiques du problème posé avec des exemples d'applications pour les différents matériaux poreux (rigide ou élastique).

Le dernier chapitre présente des résultats de modélisation obtenus par la simulation avec le code de calcul basé sur les éléments finis, appelé Comsol-Multiphysics. Nous implémentons les deux équations de la formulation mixte (u, p) , développée par Atalla et al et dérivée à partir des équations de la formulation déplacement-déplacement (u, U) de Biot. Dans un premier temps, nous calculons l'impédance de surface et le coefficient d'absorption en fonction de la fréquence. Et nous comparons les résultats obtenus à ceux calculés analytiquement par Matlab. Dans un second temps, nous étudions l'effet du module d'Young, le coefficient de Poisson, la densité, et

le facteur de forme sur la qualité d'absorption.

Ce manuscrit est clôturé par une conclusion générale.



1

MATÉRIAUX POREUX : NOTIONS GÉNÉRALES ET DESCRIPTION

I Introduction

Dans ce chapitre nous mettons en lumière le concept des milieux poreux et les types d'ondes pouvant se propager dans ces milieux. Dans un premier temps nous commençons par la notion de milieu poreux en soulignant les différentes échelles spatiales rencontrées dans la modélisation, tout en précisant les approches microscopiques et macroscopiques. Dans second temps, nous décrivons qualitativement les milieux poreux en définissant les paramètres intrinsèques de chaque phase de ces milieux. Nous rappelons ensuite les différentes ondes qui peuvent se propager dans les milieux poreux.

II Milieux poreux : Notions

Les milieux poreux sont des milieux biphasiques, composés d'une matrice solide appelée squelette, rigide ou élastique, qui définit un réseau de pores saturés par un fluide compressible et visqueux, qui est généralement l'air dans les applications courantes, (figure 1.1) [Oln99,Sel03]. En général la structure des matériaux poreux est très complexe parce que le milieu, souvent considéré homogène au niveau macroscopique, est désordonné du point de vue microscopique (figure 1.2). La géométrie et la physique microscopiques et macroscopiques varient considérablement d'une matière poreuse à l'autre, comme nous l'avons illustré sur les figures (1.1) et (1.3). Les formes des pores, la structure de la partie solide (le squelette) et aussi la surface de contact entre les

deux phases, qui sont important pour l'évaluation de la dissipation, sont bien visibles à l'échelle microscopique. Pour les mousses polymères, métalliques et céramiques, la phase solide est faite de cellules connectées, tandis que la matière fibreuse suit un arrangement de fibres minérales complexes.

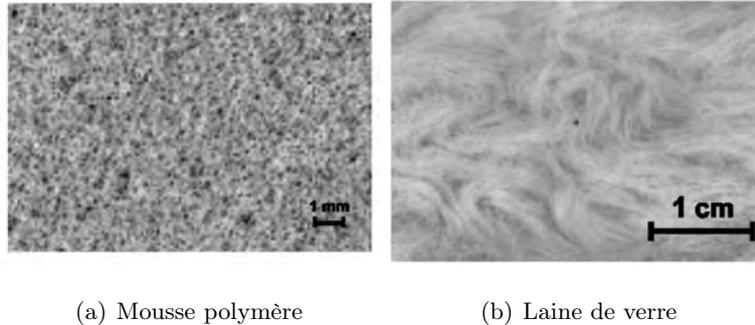


FIGURE 1.1 – Echelles caractéristiques d'un milieu poreux [Oln99]

- Le fluide saturant peut librement circuler autour du squelette dit à porosité ouverte.
- Le squelette est constitué d'un assemblage continu de poutres formées à base de polymères (figure 1.1 (a)) ou discontinu de fibres de type minérales ou textiles (figure 1.1 (b))

Ces matériaux poreux sont couramment utilisés dans divers secteurs industriels selon le confort acoustique concerné. Ils permettent de réduire le niveau de bruit à partir de trois mécanismes de dissipation de l'énergie mécanique :

- a). Le premier est rattaché au comportement viscoélastique du squelette.
- b). Le second est lié à la viscosité de l'air : Les frottements visqueux entre les parois du squelette et fluide vont dissiper l'énergie acoustique lors du mouvement relatif entre les deux phases.
- c). Le dernier mécanisme est relié aux échanges thermiques entre l'air et le squelette lors du passage d'une onde acoustique.

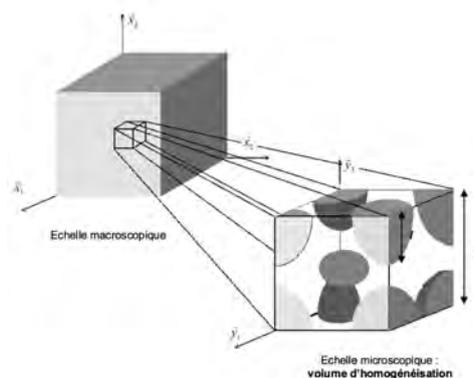
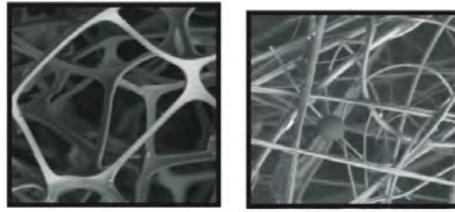


FIGURE 1.2 – Illustration schématique des échelles caractéristiques d'un milieu poreux [Oln99]



(a) Mousse polymère (b) Laine de verre

FIGURE 1.3 – Photographie d’un échantillon poreux à l’échelle microscopique [Dou07]

II.1 Matériau poreux et échelle spatiale

Une des premières questions qui se posent lorsque nous abordons l’étude des milieux poreux, est celle de l’échelle spatiale d’analyse : nous avons deux échelles d’espace qui sont en effet envisageables. La première est l’échelle microscopique, dans laquelle, la partie solide d’une part, et la partie fluide d’autre part, occupent des domaines géométriques séparés dans un volume élémentaire de milieu poreux. Donc un point géométrique se trouve soit dans la partie solide ou dans la partie fluide à un instant donné. Cette échelle microscopique a la dimension du pore. A ce niveau nous pouvons écrire l’ensemble des équations mécaniques, physiques et chimiques régissant le comportement des phases et les interactions entre celles-ci. Donc, cette échelle est adaptée pour résoudre les problèmes de taille microscopique, tels que les problèmes interfaciques par exemple.

Dans un milieu poreux, deux types de porosité sont bien distincts. Une porosité connectée correspondant à l’espace interstitiel continu, où s’effectue l’écoulement de la phase fluide (Deux points au même fluide sont reliés par un trajet interne continu), et une porosité fermée ou occluse, saturée de fluide ou non, piégée dans la matière, dans ce cas là, aucun écoulement de fluide n’a lieu.

La matrice du milieu poreux est alors constituée de la partie matérielle solide du volume élémentaire et de sa porosité occluse figure (1.4) [Cou91]. Dans notre étude nous considérons une porosité connectée et notée ϕ . lorsque le fluide occupe totalement l’espace poreux, alors le mi-

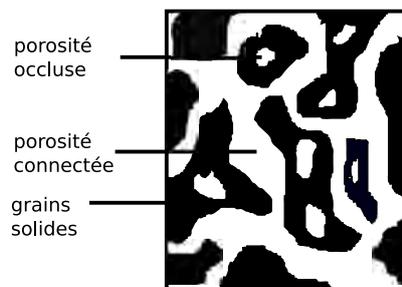


FIGURE 1.4 – Matrice d’un milieu poreux avec différentes porosités à l’échelle microscopique

lieu poreux est saturé. Notons cependant que ce fluide n'est pas forcément homogène. Il peut présenter plusieurs composantes, par exemple un solvant et plusieurs solutés. Dans le cas où la saturation est partielle, plusieurs fluides distincts coexistent : le cas le plus courant est celui où une troisième phase de type gazeuse est prise en compte, l'air par exemple. Plusieurs phases fluides différentes apparaissent alors dans l'étude des milieux poreux non saturés.

La seconde échelle est l'échelle macroscopique, adaptée à l'étude des problèmes de taille humaine, tels que ceux rencontrés en mécanique des sols et des structures, en géomécanique etc. Au niveau macroscopique, le volume élémentaire est modélisé par la superposition de plusieurs particules occupant au même instant les mêmes points géométriques mais avec des cinématiques a priori différentes, (figure 1.5) [DB02]. Pour un choix meilleur de la taille du volume élémentaire, il

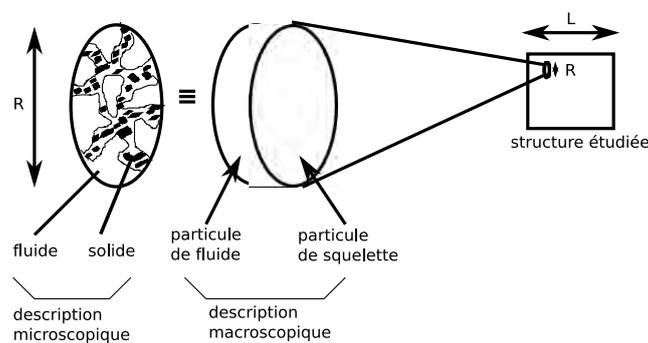


FIGURE 1.5 – Différentes échelles spatiales du milieu poreux

faut avoir deux objectifs. Le premier, doit être représentatif du milieu poreux, c'est-à-dire il doit être d'un ordre de grandeur suffisamment grand spatialement pour fournir une modélisation pertinente de l'ensemble des phénomènes physiques microscopiques. On appelle V.E.R le volume élémentaire représentatif. Le second, à étendue spatiale doit être très inférieur à la dimension du problème macroscopique posé, permettant une description continue de la matière.

Si nous supposons que L est la taille caractéristique du système étudié, R' est l'ordre de grandeur de l'étendue spatiale du volume élémentaire représentatif, et d est la dimension caractéristique des pores (figure 1.5), nous pouvons résumer les conditions précédentes sur les différentes échelles de perception d'un milieu poreux de cette façon :

$$d \ll R' \ll L$$

Dans ce cas, nous pouvons traiter le milieu poreux par une description continue de la matière, et le considérer comme continu classique mais généralisé à plusieurs phases, c'est-à-dire comme une superposition de plusieurs milieux continus. Le squelette est défini comme l'ensemble de la matrice (qui en constitue la partie matérielle), et de l'espace poreux connecté, {alors c'est la phase solide coïncidant avec la phase fluide occupant l'espace poreux connecté (figure 1.6)} [Cou91]. Il existe des mouvements différentiels entre les deux phases, car le milieu poreux est ouvert. Nous

pouvons écrire les équations poroélastiques et de couplages pour les différentes phases moyennées solide et fluide. Notons que nous considérons la géométrie réelle du milieu poreux élémentaire

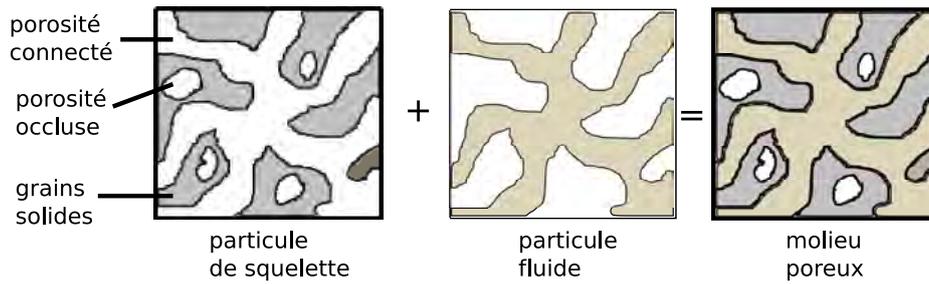


FIGURE 1.6 – Différentes phases du milieu poreux

puisque c'est le cas de l'approche.

Historiquement, à l'échelle macroscopique, les premières études ont été menées par (Darcy) sur l'écoulement dans les milieux poreux, et par (Terzaghi et Biot) sur le comportement mécanique des milieux poreux.

II.2 Approche macroscopique et microscopique

II.2.1 Point de vue microscopique

Des études ont été réalisées par plusieurs auteurs tels que : Auriault [Aur80], Burridge et Keller [BK81], et Auriault et al [ABC85], Terada et al [TIK98], et Coussy et al [Cou91], pour résoudre des problèmes qui nécessitent le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. Ces auteurs considèrent le mélange solide-fluide et résolvent à l'échelle du pore les équations mécaniques propres et celles du mélange. L'homogénéisation s'effectue ensuite soit par développement asymptotique soit par des procédures de moyennisation : elle conduit aux équations de Biot macroscopiques. Les caractéristiques macroscopiques des termes intervenant dans les équations se trouvent ainsi justifiées par cette homogénéisation et sont exprimées à l'aide des caractéristiques microscopiques.

Les équations du mélange solide-fluide au niveau microscopique sont celles de l'élasticité hookeenne pour le solide et de Navier-Stokes linéarisées pour le fluide Newtonien. Les termes d'inertie des équations de Navier-Stokes sont négligés vu le faible nombre de Reynolds et les auteurs traitent donc les équations de Stokes. Des contraintes appropriées sont écrites à l'interface microscopique solide-fluide. Dans l'expression des contraintes d'interaction microscopique, il est important de noter que la contribution de la partie visqueuse est négligeable par rapport à la celle de la pression [13]. Le rapport des deux contributions est de l'ordre de grandeur du ratio échelle microscopique sur échelle macroscopique. C'est pourquoi la répartition des contraintes dans le fluide est quasiment hydrostatique, bien que la viscosité joue un rôle majeur dans l'écou-

lement.

II.2.2 Point de vue macroscopique : approche de Biot

L'approche macroscopique est plus ancienne et revient à Terzaghi dans les années 20, et Biot dans les années 50. La théorie de Terzaghi se limite à des équations découplées entre l'écoulement de la phase fluide et la déformation de la phase solide. A partir de cette théorie, plusieurs articles publiés par Biot, traitent les problèmes de mécanique ondulatoire des milieux poreux [Bio41, Bio55, Bio56b, Bio56c, Bio56a, Bio62a, Bio62b]. Cette modélisation est justifiée a posteriori par l'approche microscopique du paragraphe précédent.

A partir de l'approche énergétique, Biot traite la théorie de la déformation, et écrit les relations générales des contraintes-déformations solide et fluide d'un milieu isotrope et anisotrope [Bio41, Bio55]. Le travail effectué par Biot [Bio56b, Bio56c, Bio56a], reste une référence pour la propagation des ondes dans un milieu poreux. Biot suppose que l'écoulement du fluide suit le modèle Poiseuille à faible fréquence [Bio56b]. L'approche énergétique conduit à la mise en évidence de deux ondes de dilatation, P , l'une dite "rapide", et l'autre "lente", et une onde de cisaillement, S . L'étude a été approfondie et dans le cas des plus hautes fréquences où l'écoulement de Poiseuille est mis en défaut [Bio56c]. Un terme correctif à cet écoulement sous la forme d'un facteur structural représentant les effets de la viscosité et de la forme des pores a été introduit. Son effet sur les trois ondes se propageant dans un milieu poreux a été généralisé, en tenant compte des cas du squelette solide anisotrope et viscoélastique [Bio56a].

L'objectif des travaux [Bio62a, Bio62b] est une reformulation plus générale des travaux antérieurs incluant l'anisotropie du milieu, la viscoélasticité et la dissipation interne du solide. Les équations en termes de propagation sont alors présentées sous une forme générale incluant ces différents opérateurs.

III Milieux poreux : Description

Les matériaux poreux jouent un rôle très important dans l'efficacité acoustique des systèmes permettant de réduire le niveau de bruit. Donc il est nécessaire de connaître tous les paramètres intrinsèques de chaque phase, solide et fluide. Ces paramètres décrivant le comportement et la microstructure de ces matériaux, seront souvent utilisés dans ce travail.

En effet, nous avons onze paramètres intrinsèques, deux pour la phase fluide : la masse volumique et le module de compression, et quatre pour la phase solide considérée élastique : la masse volumique, le module de Young, le coefficient de Poisson, et l'amortissement structural de la matrice. Ces paramètres ne sont pas utiles pour un matériau dont la matrice est rigide. Pour cela cinq autres paramètres tiennent compte du couplage entre les deux phases (liés à la géomé-

trie de la structure poreuse) : La porosité, la résistance statique à l'écoulement, la tortuosité, la longueur caractéristique thermique et la longueur caractéristique visqueuse.

Nous rappelons donc les principales définitions des paramètres intrinsèques physiques et mécaniques décrivant le comportement du matériau poreux.

III.1 Paramètres du fluide

Le fluide saturant est l'air : ses caractéristiques sont [Dou07] : Température $T_0 = 18^\circ C$, Pression au repos $P_0 = 1.0132 \times 10^5 Pa$, masse volumique au repos $\rho_f = 1.213 Kg/m^3$, célérité du son $c_f = 342.2 m.s^{-1}$, viscosité $\mu = 1.54 \times 10^{-5} Kg.m^{-1}.s^{-1}$, module de compressibilité adiabatique $K_a = 1.42 \times 10^5 Pa$, nombre de Prandtl $P_r = 0.71$ et rapport du chaleur spécifique $\gamma = 1.4$.

III.2 Paramètres de la matrice solide

La partie solide du milieu poreux est caractérisée par quatre paramètres : la masse volumique, le module d'Young, le coefficient de Poisson, et le facteur de perte. Dans le cas de faible déformation, le comportement du matériau peut être considéré linéaire et décrit par une loi de Hooke utilisant des grandeurs complexes. Une représentation vectorielle des champs de déformation et de contraintes [Dou07], nous permet d'écrire :

$$\{\tilde{\sigma}_s\} = [\tilde{H}_E]\{\tilde{\epsilon}^s\} \quad (1.1)$$

Avec $\tilde{\sigma}_s$, $\tilde{\epsilon}^s$, et $[\tilde{H}_E]$ représentent respectivement la contrainte, la déformation, et la matrice d'élasticité de la phase solide (le symbole tilde désigne une quantité complexe et dépendante de la fréquence).

Dans le cas d'un milieu isotrope, la matrice d'élasticité $[\tilde{H}_E]$ peut être caractérisée à partir du module d'Young et du coefficient de Poisson complexe [Dou07]

$$\tilde{E} = E(\omega) + jE'(\omega) = E(\omega)(1 + j\eta(\omega)) \quad (1.2)$$

$$\tilde{\nu} = \nu(\omega) + j\nu'(\omega) \quad (1.3)$$

Avec η_s le facteur perte défini comme le ratio de la réponse instantanée (partie réelle de la matrice) sur la réponse en quadrature de phase (partie imaginaire).

III.3 Paramètres caractérisant le couplage entre les deux phases

Les paramètres de couplage entre les deux phases, solide et fluide sont :

III.3.1 Porosité

La porosité est le paramètre le plus évident à définir. Il est le rapport entre le volume des pores V_f au volume total V_t de l'échantillon et on note [LWdR08] :

$$\phi = \frac{V_f}{V_t} \quad (1.4)$$

Par définition, la porosité est un paramètre sans dimension variant entre 0 et 1. quand $\phi = 0$, le matériau est un solide et quand $\phi = 1$, le matériau est un fluide. Le volume du solide est $V_s = V_t - V_f$.

Seulement ces deux paramètres (V_t et V_f) sont nécessaires pour calculer la porosité. Comme nous l'avons souligné précédemment, il existe plusieurs définitions de la porosité, à savoir les porosités connectée et déconnectée, aussi appelées ouverte et fermée respectivement.

Dans la porosité connectée ou ouverte, le volume du vide est relié à l'extérieur et les pores sont interconnectés. Mais dans le cas général, il peut arriver qu'une certaine partie du vide soit enfermée à l'intérieur de l'échantillon. Cela signifie qu'il peut y avoir des pores non connectés à l'extérieur. La porosité fermée ou déconnectée est donc la différence entre la porosité totale et la porosité connectée. Cette dernière porosité est rarement rencontrée dans la plupart des milieux poreux naturels. Un autre cas, moins fréquent est celui de la porosité piégée, dans lequel les pores sont mal raccordés et les canaux sont tellement étroits que l'air est emprisonné à l'intérieur des cavités lorsque l'échantillon est immergé. les cavités peuvent être aussi des résonateurs de Helmholtz pendant l'écoulement du fluide. les différentes porosités sont illustrées dans la (figure 1.7) La fabrication des matériaux poreux, parfois donne naissance à de petites

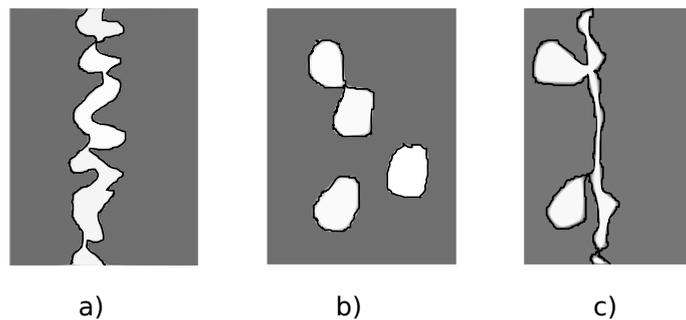


FIGURE 1.7 – Différentes formes de porosité a) porosité ouverte (connectée). b) porosité fermée (déconnectée) . c) porosité piégée :

quantités de porosités déconnectées [Hen97, Gee08]. Dans notre travail la porosité déconnectée est négligeable. Cependant la porosité piégée est rarement rencontrée, Donc, pour notre étude la porosité connectée est la seule considérée.

III.3.2 Perméabilité visqueuse et résistivité au passage de l'air

La perméabilité a été définie par Darcy dans le cas spécifique de l'eau, et a été généralisée avec l'introduction du concept de la viscosité. Pour un écoulement non turbulent, la loi de Darcy dans le cas du matériau poreux anisotrope prend la forme :

$$W = -\frac{\bar{k}}{\eta} \nabla p_f \quad (1.5)$$

où W est la vitesse de filtration ou une quantité de fluide traversant une unité de surface du matériau à l'extérieur tel que $W = \phi(\dot{U} - \dot{u})$, avec \dot{U} et \dot{u} représentent respectivement, les vitesses macroscopiques du fluide et du solide, \bar{k} est la matrice de la perméabilité visqueuse du matériau poreux, égale à k_0 dans le cas isotrope, η est la viscosité dynamique du fluide saturant, et p_f est la pression du fluide.

La perméabilité visqueuse est calculée directement à partir de la mesure de la chute de pression lorsque le fluide circule à travers l'échantillon poreux à une vitesse donnée. Dans le cas unidimensionnel isotopique (figure 1.8) [LWdR08, Ler08], la loi de Darcy s'écrit :

$$Q = \frac{k_0}{\eta} S \frac{\Delta p_f}{d} \quad (1.6)$$

où $Q = S\|W\|$ est le débit volumique traversant un échantillon d'épaisseur d et de section S , avec une baisse de pression Δp_f entre les bords. L'analogie avec la résistance électrique est

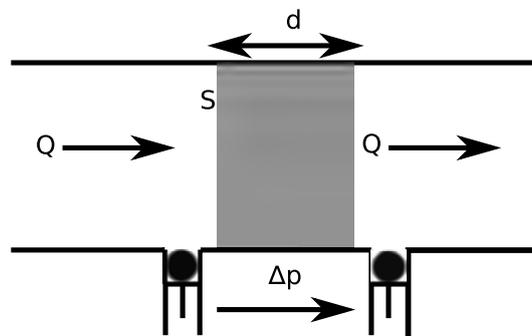


FIGURE 1.8 – Configuration de mesure de la perméabilité visqueuse k_0 ou la résistivité au passage de l'air $R_f = \eta/k$

évidente si nous comparons le débit du fluide volumique à l'intensité du courant, et la diminution de la pression Δp_f à la différence de potentiel électrique. Par conséquent, les acousticiens et les ingénieurs préfèrent utiliser la résistivité du flux ou la résistivité de l'écoulement, définie comme :

$$R_f = \eta/k_0 \quad (1.7)$$

Cette résistivité illustre la réduction de l'écoulement à travers l'échantillon induit principalement par une géométrie complexe et grande surface de contact entre le squelette et le fluide.

III.3.3 Tortuosité

Il y'a deux définitions de la tortuosité α_∞ : l'une est liée uniquement à la description de la géométrie de microstructure du milieu poreux, et l'autre est liée à des processus dynamiques. La première décrit les lignes de courant à l'intérieur du système des pores connectés tortueux [Hen97, Bro80]. C'est le rapport de la longueur l_d de la ligne du courant joignant les deux bords d'un échantillon à la longueur droite ou réelle l_r entre les deux mêmes extrémités comme illustré dans la figure (1.9). Elle s'exprime par :

$$\alpha_\infty = l_d/l_r \quad (1.8)$$

Cette définition n'est pas utilisée dans la pratique, parce que les investigations acoustiques impliquent les processus dynamiques.

La tortuosité définie pour les processus dynamiques et celle définie à partir de la structure, sont voisines parce que la même géométrie du squelette est prise en compte. Cependant, la seconde est fréquente parce qu'elle est mesurable à partir de la propagation des ondes acoustiques.

Une définition de la tortuosité est obtenue à partir de l'étude du champ micro-vitesse du fluide v_m comme représenté dans la figure (1.9). L'énergie cinétique moyenne, pour chaque contribution de la micro-vitesse du fluide $\langle v_m^2 \rangle$ calculée à chaque point du volume des pores V_p , est supérieure à l'énergie cinétique moyenne macroscopique $v_f^2 = \langle v_m^2 \rangle^2$ le long de la direction de propagation de la même perturbation dans le même fluide, mais libre à l'écoulement. Par conséquent, la tortuosité s'écrit [LWdR08] :

$$\alpha_\infty = \frac{\langle v_m^2 \rangle}{\langle v_m \rangle^2} = \frac{1/V_p \int_{V_p} v_m^2 dV_p}{(1/V_p \int_{V_p} v_m dV_p)^2} \quad (1.9)$$

Une confirmation de la pertinence de cette définition de la tortuosité sera donnée dans la présentation de l'énergie cinétique dans la théorie de Biot, Chapitre 2. La tortuosité illustre la distribution de taille de pores et sa géométrie complexe (variation de la longueur des pores et des coupes transversales) par rapport à la taille totale de l'échantillon. La tortuosité peut également être définie à travers la conductivité électrique du fluide saturant. Une analogie entre la loi de Darcy et le transport électrique est réalisée et s'écrit [LWdR08] :

$$I = \sigma_f S \frac{\Delta V}{d} \quad (1.10)$$

où I est le courant électrique et ΔV la différence de potentiel (associée respectivement à l'écoulement du fluide de la débit Q et à la diminution de pression du fluide l'équation (1.6)). σ_f est la conductivité électrique dans un récipient d'épaisseur d de section S . Une autre mesure la différence de potentiel ΔV est effectuée lorsqu'un matériau poreux, saturé par le même fluide conducteur avec la même épaisseur d et la même section S , est placé entre les électrodes comme

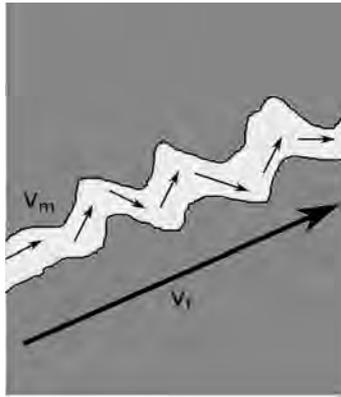


FIGURE 1.9 – Illustration schématique de la tortuosité. la flèche principale représente la vitesse de particule macroscopique v_f (longueur droite l_r) et les petites flèches représente la micro-vitesse locale v_m (longueur des lignes courantes l_d)

dans la figure 1.10. Le squelette est isolant de sorte que la conduction électrique a lieu uniquement dans l'espace des pores et les lignes de courant qui suivent la géométrie. Par conséquent, la porosité ϕ doit apparaître dans le calcul de la conductivité σ de la matière poreuse. Une autre expression de la tortuosité s'écrit en fonction de la porosité ϕ et de la conductivité de l'écoulement du fluide σ_f :

$$\alpha_\infty = \phi \frac{\sigma_f}{\sigma} \quad (1.11)$$

Etant donné que la résistivité (ou la résistance à l'écoulement) est très importante dans l'échan-

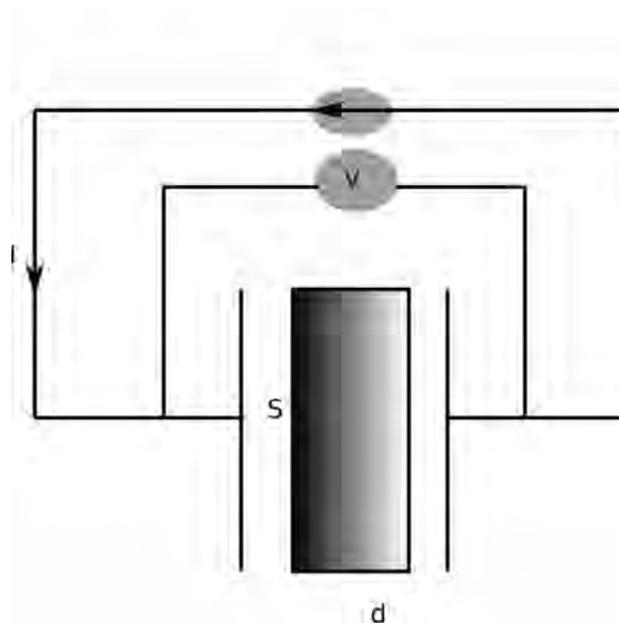


FIGURE 1.10 – Configuration de mesure de la conductivité.

tillon poreux, la conductivité σ est inférieure à la conductivité σ_f . (la porosité ϕ a une valeur

comprise entre 0 et 1, et la tortuosité doit être supérieure ou égale à 1. Finalement, une relation relie la porosité à la tortuosité à travers le facteur géométrique $F = \sigma_f / \sigma$ [SME01]

III.3.4 Autres paramètres géométriques

Deux paramètres géométriques importants et largement utilisés peuvent être définis pour tous les matériaux poreux. Ils ont été initialement dérivés de la classe spéciale de matériaux poreux à squelette rigide, dans laquelle le squelette n'est pas excité par une sollicitation extérieure (c'est-à-dire aucune onde ne se déplace dans le squelette). Cela peut se produire lorsque le fluide saturant est assez léger comme l'air et pas trop visqueux. Cette hypothèse permet d'obtenir de nouveaux résultats quand les effets de dissipation, c'est-à-dire les pertes visco-thermiques aux parois des pores, sont prises en considération.

III.3.4.1 Longueur caractéristique visqueuse Λ : La longueur caractéristique visqueuse a été introduite par Johnson et coll [JKD87]. Leurs arguments sont basés sur la dissipation de l'énergie à travers les canaux tant que le fluide circule après qu'il a été soumis à un gradient de pression harmonique microscopique $\nabla p_f \exp(j\omega t)$. Seulement la dissipation due aux effets visqueux est prise en compte par la suite par Zwikker et Kosten [ZK49] qui ont montré que les pertes visco-thermiques dans la théorie de Kirchhoff [LL59] de la propagation des ondes dans des tubes cylindriques sont séparables. Les travaux de Johnson montrent qu'un potentiel microscopique de l'écoulement v_p est défini pour décrire le mouvement des fluides microscopiques dans le volume des pores qui peut être considéré identique à celui d'un fluide idéal. Le potentiel de cet écoulement potentiel peut s'écrire :

$$V_p(x) = -\nabla\psi \quad (1.12)$$

où ψ est le potentiel scalaire et $x = (x_1, x_2, x_3)$. Le fluide est supposé être Newtonien et incompressible dans l'échelle des pores. Cependant, pour les hautes fréquences, la profondeur de la couche visqueuse $\delta = \sqrt{2\eta/\rho_f\omega}$ est plus petite que toutes les tailles des pores caractéristiques. Cela implique que le mouvement du fluide v dans la majeure partie des pores est principalement un écoulement potentiel, sauf dans la couche limite visqueuse δ sur les parois des pores. Ainsi, le mouvement du fluide microscopique est réduit à $v \simeq v_p$.

En raison du gradient de pression oscillatoire appliquée au fluide, une perturbation acoustique se déplace le long des canaux de volume de pore. Puisque les canaux sont étroits, l'effet de la dissipation visqueuse ne peut être négligé. Classiquement, le vecteur d'onde k est complexe sa partie imaginaire $k_{im} = Im(k)$ est le facteur d'absorption responsable de l'intensité de l'onde sonore décroissante de manière exponentielle avec le profondeur x comme $\exp(-2k_{im}x)$

L'absorption est reliée au taux de dissipation de l'énergie \dot{E}_{mech} et à l'intensité du flux d'énergie

D_0 , [LWdR08] par :

$$k_{im} = \|k_{im}\| = \frac{|\dot{E}_{mech}|}{2D_0} \quad (1.13)$$

Cette relation donne la quantité d'énergie dissipée par unité de volume en fonction du dépassement de la densité d'énergie à travers le même volume élémentaire. La valeur absolue traduit le fait que la dissipation se produit dans les deux directions prises par le fluide à travers les canaux. La densité de flux d'énergie est le produit de la vitesse du son $c(\omega)$ par la densité d'énergie, qui est équivalent à l'énergie cinétique moyenne dans l'échelle des pores. et s'écrit :

$$D_0 = c(\omega) \times \left[\frac{1}{2} \rho_f \frac{1}{V_p} \int_{V_p} |v_p(x)|^2 dV \right] \quad (1.14)$$

Le taux de dissipation d'énergie est une moyenne sur un cycle de la dépendance temporelle sinusoïdale, et puisque le fluide est incompressible, nous pouvons écrire :

$$\dot{E}_{mech} = -\frac{1}{4} \eta \frac{1}{V_p} \int_{V_p} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right|^2 dV \quad (1.15)$$

Cette intégration doit être décomposée en une intégration sur le volume poreux, $\dot{E}_{mech}^{V_p}$, où le mouvement peut être pris comme potentiel, et une intégration sur la surface de délimitation \dot{E}_{mech}^S . A haute fréquences, il est clair que l'intégration sur la surface de délimitation domine, parce que la profondeur de la couche visqueuse devient plus petite que la taille moyenne du pore, et la dissipation se produit uniquement sur les parois. Au voisinage des parois, qui peuvent être considérées plates à hautes fréquences, le champ de la vitesse est de la forme [LWdR08] :

$$v(x) = v_p(x_w) \left[1 - e^{-jK_\beta \beta} \right] \quad (1.16)$$

Un autre système de coordonnées est alors défini, avec une nouvelle origine qui se déplace le long de la paroi des pores x_w , et β une coordonnée locale mesurée à partir de la paroi des pores. Le vecteur de l'onde de cisaillement K_β a sa valeur classique $K_\beta = (1 - j)/\delta = \sqrt{-j\omega\rho_f/\eta}$, avec δ , la profondeur de la couche visqueuse. La configuration est illustrée dans la (figure 1.11). Par conséquent, l'effet visqueux de la couche limite de l'équation. (15) est réduit à :

$$\dot{E}_{mech} \simeq \dot{E}_{mech}^S = \frac{1}{2} \frac{1}{V_p} \sqrt{\frac{1}{2} \eta \rho_f \omega} \int_S |v_p(x_w)|^2 dS \quad (1.17)$$

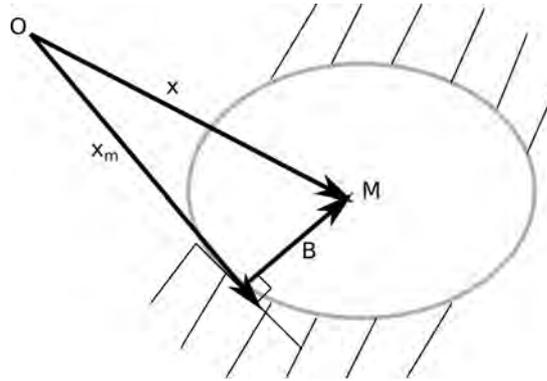


FIGURE 1.11 – Configuration de l'échelle du pore : β est la distance de la surface au point M , le point O est l'origine du système de coordonnées

En outre, et quelle que soit la fréquence au voisinage du squelette rigide, la vitesse du son s'écrit :

$$c(\omega) = \sqrt{K(\omega)\tilde{\rho}(\omega)} \quad (1.18)$$

avec $K(\omega)$ représente le module de compressibilité dynamique du fluide, et $\tilde{\rho}(\omega)$ est une densité du fluide effective qui dépend de la fréquence. La relation de dispersion donne le nombre d'onde sous la forme :

$$k = \frac{\omega}{c(\omega)} \quad (1.19)$$

Au voisinage de la paroi limite du pore et à hautes fréquences, la densité effective $\tilde{\rho}(\omega)$ converge vers un paramètre de masse $m = \rho_f \tau / \phi$ et le module de compressibilité dynamique converge vers $K(\omega) / \phi$ où K_f est la compressibilité dynamique du fluide libre [Bru98]. Nous montrerons au chapitre 2 que la partie qui dépend de la fréquence est fonction de la densité ainsi que module de compressibilité dynamique proviennent de fonctions de correction pour incarner précisément le processus de dissipation. Il en résulte qu'à hautes fréquences, la vitesse du son a une valeur réelle et indépendante de la fréquence, et s'écrit :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c(\omega) = \frac{c_f}{\tau} \quad (1.20)$$

avec $c_f = \sqrt{K_f \rho_f}$ est la vitesse du son dans le fluide saturant. Cela signifie également que la dispersion devient négligeable. En conséquence, le facteur de qualité Q défini devient égale à $Q = 2k_{im}/k_{re}$, où $k_{re} = \text{Re}(k)$. En combinant les équations (13-15), (17) et (19), on obtient, la limite asymptotique à hautes fréquences :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{Q} = -\frac{1}{2} \delta \frac{\int_S |v_p(r_w)|^2 dS}{\int_{V_p} |v_p(r)|^2 dV} \quad (1.21)$$

A partir de laquelle Johnson et al [34] définissent la longueur caractéristique visqueuse Λ tel que

$$\frac{2}{\Lambda} = \frac{\int_S |v_p(r_w)|^2 dS}{\int_{V_p} |v_p(r)|^2 dV} \quad (1.22)$$

Cette longueur caractéristique donne un rayon moyen des pores dans lesquels les effets visqueux sont importants.

III.3.4.2 Longueur caractéristique thermique Λ' : Par analogie avec la longueur caractéristique visqueuse déterminée par Johnson et al, Champoux et Allard [CA91] ont introduit la longueur caractéristique thermique Λ' qui tient compte des échanges entre le fluide et le solide à la limite des parois où le squelette est rigide. Une description plus précise des matériaux poreux sous excitation acoustique est ainsi obtenue. Le même gradient de pression oscillatoire $\nabla \rho_f \exp(j\omega t)$ est appliqué au fluide saturant, qui est l'air, considéré dans cette section comme gaz parfait.

La loi de Fourier de conduction thermique linéaire, en l'absence de la source de chaleur externe, s'écrit sous la forme générale [Ach12] :

$$k\nabla^2 T = \rho_f T_0 \frac{d\sum_e}{dt} \quad (1.23)$$

où T est la température acoustique, k est la conductivité thermique, \sum_e l'entropie, ρ_f la densité de l'air, et T_0 la température moyenne ambiante dans l'air. Il est connu dans la thermodynamique, la variation d'entropie peut être écrite sous la forme [Ach12] :

$$\frac{d\sum_e}{dt} = \frac{c_v}{TP_0\beta_p} \frac{dp_f}{dt} - \frac{c_p}{T\rho_f\alpha_v} \frac{d\rho_f}{dt} \quad (1.24)$$

avec p_f et ρ_f sont les variations respectives de la pression et de la densité dans le fluide, et P_0 est la pression ambiante moyenne. Les quantités c_v et c_p sont, respectivement, les chaleurs spécifiques par unité de masse à une pression et un volume constant. Les quantités α_v et β_v sont les coefficients thermodynamiques classiques pour les dilatations telles que $\alpha_v = 1/V(\partial V/\partial T)_{P_0}$ et $\beta_p = 1/P_0(\partial P_0/\partial T)_V$, avec $V = 1/\rho_f$ la variation de la masse volumique de l'air. Ainsi l'air dans ce cas, est considéré comme un gaz idéal. On obtient pour n moles de ce dernier la loi $P_0V = nRT_0$ où R est une constante du gaz idéal ($R = 8.32$). Par conséquent, $\alpha_v = \beta_p = 1/T$ et $c_p - c_v = nR$, il peut également être exprimé par :

$$\frac{\rho_f T_0}{P_0} (c_p - c_v) = 1 \quad (1.25)$$

Dans le cas d'un gaz idéal, l'équation statistique de l'air est

$$\frac{1}{P_0} \frac{dp_f}{dt} = \frac{1}{T_0} \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dt} \quad (1.26)$$

La combinaison des équations (23) et (24), pour éliminer le terme $d\rho_f/dt$, donne

$$k\nabla^2 T = \rho_f c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp_f}{dt} \quad (1.27)$$

La capacité thermique et la conductivité sont généralement très grande par rapport à l'air pour la plupart des milieux poreux. Le squelette peut donc être considéré comme un thermostat, et la variation de la température T à la surface de contact S entre le solide et le fluide est égale à zéro.

Une fréquence angulaire ω' est définie comme :

$$\omega' = \frac{\eta}{k} c_p \omega = P_r \omega$$

Dans un petit domaine proche de la surface de contact, l'équation (1.27) devient, dans le domaine fréquentiel :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} = j \frac{\rho_f T}{\eta} \omega' - j \frac{p_f}{\eta c_p} \omega' \quad (1.28)$$

La solution qui disparaît à $\beta = 0$ prend la forme :

$$T = \frac{p_f}{\rho_f c_p} \left(1 - e^{j\beta K_\beta B} \right) \quad (1.29)$$

où $K_\beta = (1 - j)/\delta$ est le vecteur de l'onde de cisaillement (pour la propagation de l'onde thermique). Cette solution est très similaire à celle obtenue pour le champ des vitesses $v(r)$ au voisinage des parois, comme dans l'équation (16). Dans un volume poreux V_p , la température moyenne est :

$$\langle T \rangle = \frac{\int_{V_p} T dV}{\int_{V_p} dV} = \frac{p_f}{\rho_f c_p} \left[1 - \frac{1}{V_p} \int_{V_p} e^{-j\beta K_\beta B} dV \right] \quad (1.30)$$

Le volume dV de l'air est égale à $S d\beta$ au voisinage des parois, la quantité $\exp(-j\beta K_\beta B)$ diminue rapidement quand β augmente, si $jK_\beta B = 2/(1 - j)\delta$ nous pouvons écrire :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{V_p} e^{-j\beta K_\beta B} S d\beta = \frac{S}{jK_\beta B} = \frac{S(1 - j)\delta}{2B} \quad (1.31)$$

et, par conséquent, à hautes fréquences, avec une pression supposée constante au niveau local, la température moyenne s'écrit :

$$\langle T \rangle = \frac{p_f}{\rho_f c_p} \left[1 - (1 - j) \frac{\delta}{B\Lambda'} \right] \quad (1.32)$$

où Λ' est la longueur caractéristique thermique introduit par Champoux et Allard

$$\frac{2}{\Lambda'} = \frac{\int_S dS}{\int_{V_p} dV} = \frac{S}{V_p} \quad (1.33)$$

III.3.4.3 Relation entre les deux longueurs caractéristiques :

La longueur caractéristique visqueuse Λ donne une valeur moyenne du rayon de la constriction du pore, et la longueur caractéristique thermique Λ' donne une valeur moyenne de rayon du pore lui-même (figure 1.12). Ceci est la raison principale pour laquelle la distance entre les parois est grande, et le gradient thermique est important.

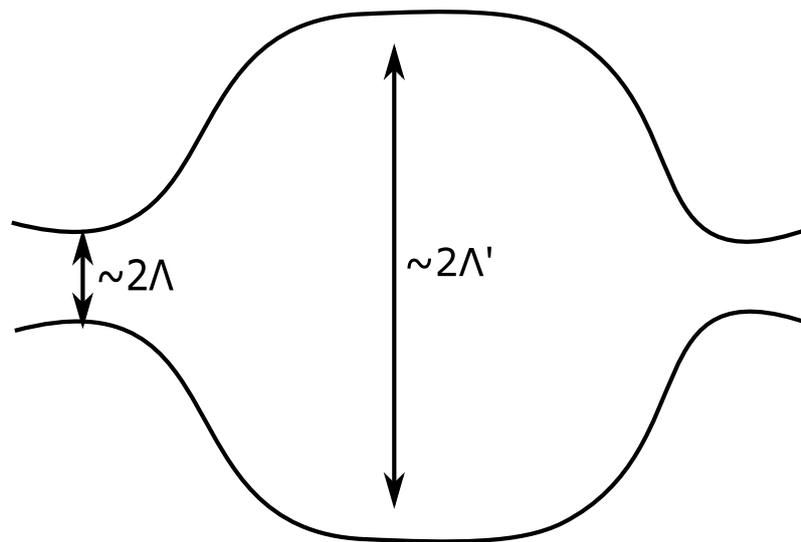


FIGURE 1.12 – Relation entre les longueurs caractéristiques visqueuse et thermique Λ et Λ' et la géométrie du pore

IV Ondes présentes dans un milieu semi-infini poreux continu biphasique

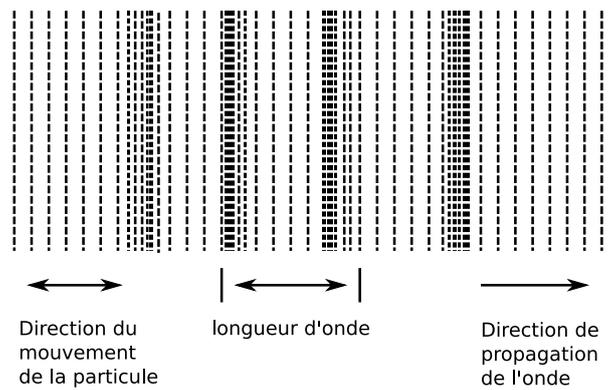
Dans cette section nous allons rappeler les principales caractéristiques de la propagation d'ondes dans les milieux poreux. Les problèmes de propagation d'ondes dans les milieux poreux continus biphasiques font intervenir des ondes volumiques et une onde surfacique si le milieu poreux présente une surface libre.

IV.1 Ondes volumiques

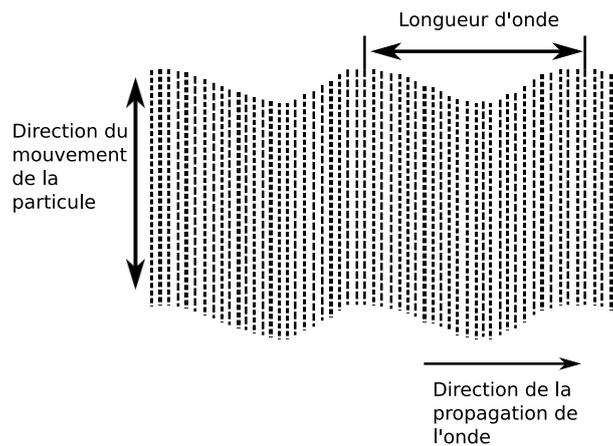
Dans le cas d'un milieu massif infini excité, il existe trois ondes volumiques sphériques qui se propagent. Deux de ces trois ondes sont des ondes primaires et la troisième est une onde secondaire.

- **Les ondes primaires $P1$ et $P2$** : ce sont des ondes de compression et parfois appelées ondes de dilatations ou ondes irrotationnelles. La déformation générées est longitudinale, elle a lieu dans la même direction que la direction de propagation de l'onde [Gra75].

La première onde de compression $P1$, encore appelée onde de première espèce, est souvent dite « rapide » et peu atténuée alors que la seconde onde $P2$, ou onde de seconde espèce, est dite « lente » et fortement atténuée. Nous reviendrons sur ces caractéristiques au chapitre 2. Les deux ondes de compression existent dans les deux phases solide et fluide (figure 1.13-a) .



(a) Onde de compression



(b) Onde de cisaillement

FIGURE 1.13 – Ondes volumiques

Les figures 1.13 (a) et (b) illustrent les mouvements longitudinal et transversal des particules générées respectivement par une onde de compression et d'une onde de cisaillement.

- **Les ondes secondaires S** : il s'agit d'une onde de cisaillement encore appelée onde transversale ou onde équivolumique (figure 1.13-b). La déformation générée est transversale, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de la propagation.

IV.2 Onde superficielle de Rayleigh

En présence d'une surface libre pour un massif semi-infini, il apparaît un troisième type d'onde, dite onde superficielle ou onde de surface. C'est Rayleigh le premier qui a démontré son existence en élasto-dynamique : elle porte donc le nom d'onde de Rayleigh et est notée onde R . Il s'agit d'une onde particulièrement importante dans la mesure où elle est beaucoup plus énergétique que les ondes volumiques. Une comparaison des énergies véhiculées par les différentes ondes en élasto-dynamique est fournie par Lefeuvre-Mesgouez [LM99, LMPLH02, LMM12].

Une seconde caractéristique de l'onde R est sa décroissance exponentielle en profondeur du mas-

sif : il s'agit véritablement d'une onde de surface. Prépondérante en surface, sa contribution s'annule très vite en profondeur où les ondes volumiques sont alors prépondérantes.

Dans le cas de l'onde de Rayleigh, la déformation engendrée correspond à un mouvement des particules elliptiques et rétrogrades par rapport à la direction de propagation de l'onde. La figure 1.14 illustre ce mouvement [Gra75].

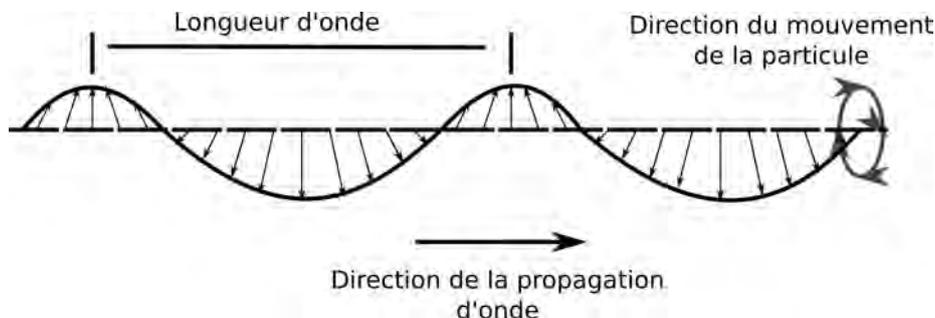


FIGURE 1.14 – Onde de Rayleigh

Des expressions simples et directes dans un cas général des vitesses des quatre ondes précédentes n'existent pas. Une détermination de ces célérités nécessite un travail théorique sur lequel nous reviendrons au chapitre 2. Notons néanmoins que l'onde la plus rapide est toujours $P1$ et que les ondes S et R ont des vitesses très proches. L'ordre entre les différentes célérités est fonction de la nature du milieu.

V Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu donner des notions de bases nécessaires à la compréhension de la structure du milieu poreux. Nous avons rappelé aussi les différentes échelles spatiales que nous pouvons rencontrer dans notre modélisation, et déterminé les différents types de dissipation de l'énergie acoustique due aux comportements viscoélastique du squelette, au frottement visqueux entre les deux parois du squelette et du fluide, et à l'échange thermique entre l'air et le squelette lors du passage de l'air. Dans ce travail nous avons défini de manière très claire chaque paramètre de chaque phase constituant le matériau poreux, et aussi les paramètres définissant le couplage entre les deux phases. Nous avons cité les ondes qui peuvent se propager dans ces milieux : ondes volumiques et ondes de Rayleigh.



2

DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES MILIEUX POREUX EN ACOUSTIQUE

I Introduction

Les divers matériaux poreux utilisés dans les domaines de l'industrie, du transport et de l'électronique afin d'assurer l'isolation acoustique (c'est-à-dire réduire le niveau du bruit), sont soumis ou non aux vibrations de la structure sur laquelle ils sont fixés, selon leur structure. Cette dernière peut être considérée comme élastique ou rigide pour un milieu poreux. L'objectif de ce chapitre est de présenter deux modèles mathématiques décrivant la propagation du son dans les milieux poreux : le modèle poroélastique de Biot-Allard [DAL88] et le modèle du fluide équivalent de Biot-Allard généralisé II. Le premier justifie le mouvement simultané de la phase solide et de la phase fluide. Il s'applique aux matériaux à matrice élastique i.e. les matériaux poroélastiques. Le second est un cas limite du premier où le mouvement de la phase fluide est négligé. Donc, il s'applique aux matériaux poreux à matrice rigide, i.e. les fluides équivalents. Dans ce chapitre, nous exposons en premier, les hypothèses de base pour les deux modèles. Nous décrivons en second, le modèle poroélastique de Biot-Allard à partir du formalisme Lagrangian. Ensuite nous présentons le modèle de fluide équivalent de Biot-Allard résultant du modèle poroélastique. Enfin, nous présentons les deux ondes obtenues à partir de la solution des équations du modèle de Biot-Allard généralisé II, ainsi les parties réelles et imaginaires de l'impédance de surface, et le coefficient d'absorption dans les trois conditions aux limites arrières du milieux poreux.

II Hypothèses de base

II.1 Modèle poroélastique

Le modèle poroélastique de Biot-Allard est basé sur les hypothèses de la théorie de Biot [Bio56b, Bio56c]. Ces hypothèses s'appuient sur un élément de volume cubique unitaire représentatif du milieu poreux considéré, nous pouvons citer :

1. l'élément est homogène et isotrope d'un point de vue macroscopique (Figure 2.1).

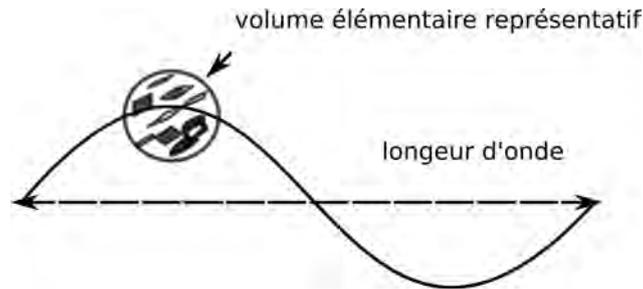
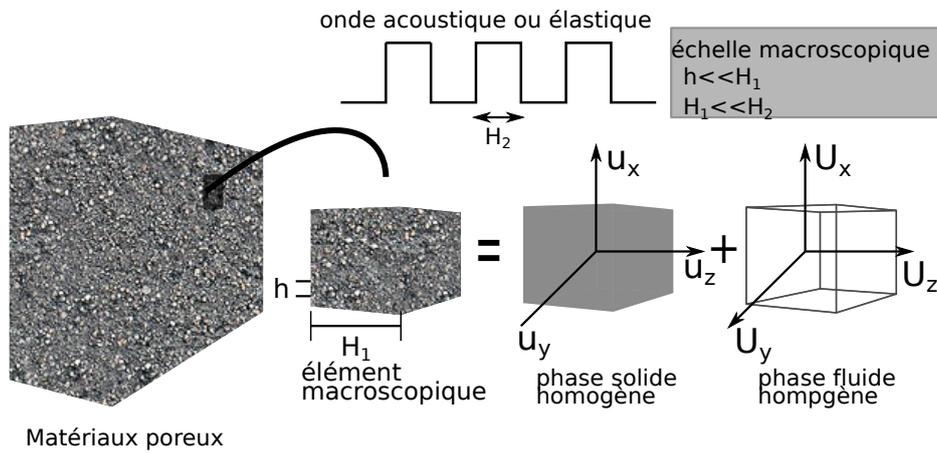


FIGURE 2.1 – Illustration schématique du volume élémentaire représentatif

2. l'élément possédant une structure poreuse est saturé par un fluide initialement au repos.
3. la matrice de l'élément est élastique.
4. les pores dans l'élément sont interconnectés entre eux et avec l'extérieur.
5. les parois des pores sont imperméables et la distribution du volume de pores est concentrée autour d'une valeur moyenne.
6. les pores sont petits par rapport à l'élément ($h \ll H_1$) (Figure 2.2).
7. l'élément est petit par rapport à la longueur d'onde des ondes élastiques et acoustiques ($H_1 \ll H_2$) (Figure 2.2).
8. les comportements de la phase solide et la phase fluide sont linéaires. i.e les déformations de la matrice et les ébranlements acoustiques sont considérés faibles.
9. le fluide est peu visqueux de sorte qu'il ne réagit pas aux forces de cisaillement.
10. le fluide est en équilibre thermodynamique sauf les mouvements produits par la propagation même des ondes.
11. les effets thermiques et visqueux sont indépendants.

Comme indiqué au chapitre 1 autour de l'échelle macroscopique, on considère que le milieu poreux est composé de deux milieux continus couplés, l'un est solide et l'autre est fluide. La figure (2.2) illustre bien la description macroscopique. On suppose que la longueur d'échelle des pores h est petite devant la longueur d'échelle macroscopique H_1 de l'élément de volume unitaire. Donc,

FIGURE 2.2 – Illustration de l'échelle macroscopique H_2

l'élément est composé de petits grains ou des petits pores et apparaît localement homogène à l'échelle macroscopique H_1 .

Il faut donc que $h \ll H_1 \ll H_2$, pour que la description macroscopique soit admise. Cette condition étant respectée, on peut admettre que les propriétés du milieu varient de manière lente à l'échelle macroscopique H_1 . Aussi, on peut considérer que les déplacements macroscopiques (u_x, u_y, u_z) et (U_x, U_y, U_z) , respectivement de la phase solide et fluide d'un élément macroscopique comme variables Lagrangiennes plutôt que les déplacements microscopiques. Dans ce contexte, les équations de Biot peuvent être obtenues dans le cas d'un milieu homogène et isotrope à l'échelle macroscopique, à partir des équations de mouvement de la microstructure de l'hypothèse "10" .

II.2 Modèle de fluide équivalent

Comme indiqué précédemment que le modèle de fluide équivalent, est un cas limite "matrice rigide" du modèle poroélastique de Biot-Allard. Par conséquent, toutes les hypothèses mentionnées ci-dessus dans le cadre de la théorie de Biot sont admises excepté l'hypothèse "3". Nous rajoutons les deux hypothèses suivantes :

1. La matrice du milieu poreux est rigide c'est-à-dire immobile, soit à cause de sa grande rigidité (céramique poreuse, laine de verre renforcée, etc) ou sa masse élevée.
2. La matrice solide du matériaux poreux n'est ni en contact avec une structure vibrante ni excitée mécaniquement.

L'hypothèse "2" n'est pas une condition essentielle pour qu'une approche de fluide équivalent soit valide, tant que l'hypothèse "1" est présente. Allard et al ont étudié le comportement de mousses poroélastiques partiellement réticulées par la théorie de Biot. Ils ont noté que pour les mousses à faibles et moyennes résistances statiques à l'écoulement, l'hypothèse pour qu'une

seule onde de compression se propage dans le fluide soit valide, Une fréquence de découplage est définie à partir de laquelle l'ébranlements de la phase fluide n'induit pas de mouvements dans la phase solide. Cette fréquence s'écrit alors :

$$f_c = \frac{\phi^2 \sigma}{2\pi \rho_1} \quad (2.1)$$

où σ est la résistance statique à l'écoulement, et ρ_1 est la densité de la phase solide du matériau poreux. Cette condition explique les conclusions de Allard et al pour de faibles résistances statiques à l'écoulement. Ainsi, l'hypothèse 1 est respectée pour les matériaux poroélastiques, pour les fréquences supérieures à la fréquence de découplage.

Des travaux récents, indiquent que la matrice d'un matériau poroélastique, peut souvent être considérée rigide même pour des fréquences inférieures à la fréquence de découplage.

III Formulation (u, U) pour le modèle poroélastique de Biot-Allard

Allard a adapté la théorie de Biot sur la propagation des ondes acoustiques dans les milieux poroélastiques, afin de tenir compte des mécanismes de dissipation. Allard a remplacé le facteur correcteur de la viscosité introduit par Biot par un facteur correcteur basé sur la notion de la longueur caractéristique visqueuse introduit par Johnson et al [JKD87]. En plus il a introduit les effets thermiques en utilisant un module de compression dynamique complexe basé sur la notion de la longueur caractéristique thermique introduite par Champoux et Allard [CA91]

Nous allons présenter dans les paragraphes qui suivent, les développements théoriques menant aux équations du mouvement de Biot pour les milieux poroélastiques. Ensuite nous reprenons le formalisme Lagrangian utilisé par Biot .

III.1 Energie de déformation et relations contraintes-déformations du milieu poreux homogène

Biot a décrit les différentes contraintes exercées à chaque face d'un élément cubique unitaire à l'échelle macroscopique (figure 2.2) [Bio56a]. Ces contraintes sont moyennes ou macroscopiques. La figure (2.3), montre que le tenseur des contraintes sur l'élément unitaire peut se diviser en deux. D'une part, les contraintes exercées sur la phase solide, sont représentées par les composantes tensorielles σ_{ij}^s . D'autre part, les contraintes exercées sur la phase fluide, sont représentées par les composantes tensorielles σ_{ij}^f . Donc, les composantes du tenseur total exercées sur l'élément cubique unitaire sont données par $\sigma_{ij}^p = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^f$. Les contraintes exercées sur la phase fluide peuvent être définies à partir d'une contrainte macroscopique unique "s" reliée à la pression

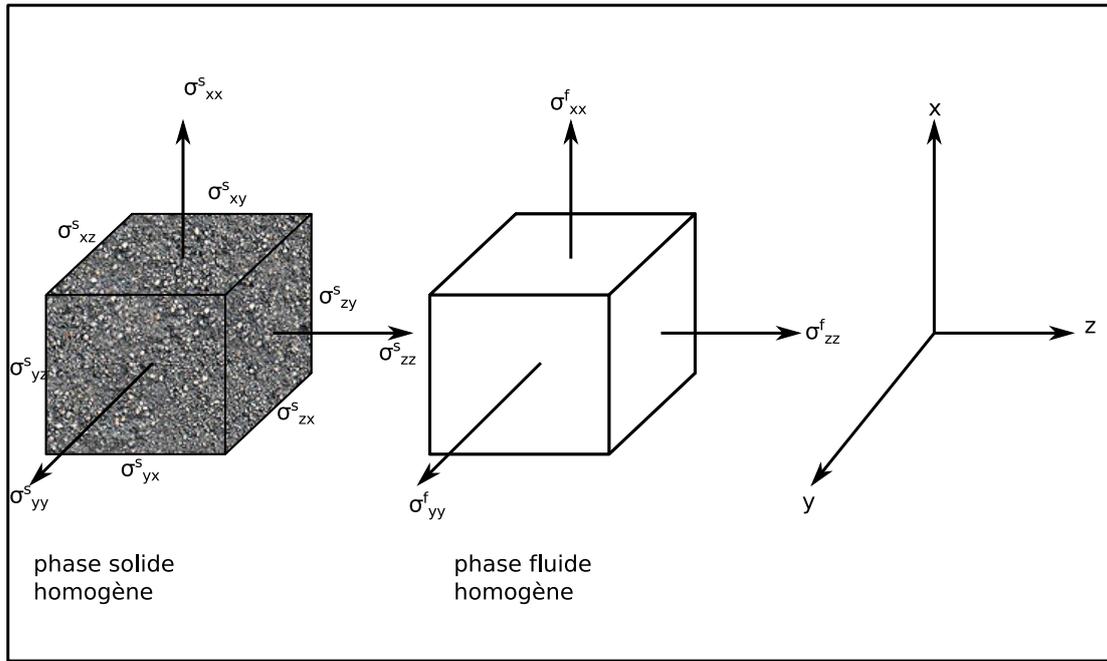


FIGURE 2.3 – Schéma représentatif des contraintes exercées sur les phases solide et fluide d'un élément cubique élémentaire

macroscopique "p" du fluide dans les pores par

$$\sigma_{ij}^f = s\delta_{ij} = -\phi p\delta_{ij} \quad (2.2)$$

avec ϕ est la porosité du matériau poreux, et δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.3)$$

Le signe négatif dans l'équation (2.2) est du à la compression de l'élément crée par une pression positive appliquée sur l'élément unitaire. Par convention, une contrainte de compression est définie comme négative.

De la même manière, Biot a défini les tenseurs de déformation de chaque phase, solide et fluide. Les composantes des tenseurs de déformation sont notées respectivement ε_{ij}^s et ε_{ij}^f pour les phases solide et fluide. En considérant l'hypothèse 10, on peut négliger les composantes ε_{ij}^f pour $i \neq j$, selon l'équation (2.3). Donc, les composantes du tenseur total des déformations sur l'élément cubique unitaire poroélastique sont données par :

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^f \quad (2.4)$$

Dans un système d'axe x, y et z , les contraintes peuvent être représentés par un vecteur à six composantes, parce que dans un état d'équilibre des forces et des moments sur l'élément cubique

unitaire, le tenseur des contraintes de la phase solide est symétrique, $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ji}^s$. Ce vecteur est donné par

$$\langle \sigma^s \rangle = \langle \sigma_{xx}^s \quad \sigma_{yy}^s \quad \sigma_{zz}^s \quad \sigma_{xy}^s \quad \sigma_{yz}^s \quad \sigma_{xz}^s \rangle \quad (2.5)$$

de la même façon, et suivant l'équation (2-2), l'état de contraintes reliée à la phase fluide peut être représentée par un vecteur comme suit :

$$\langle \sigma^f \rangle = \langle \sigma_{xx}^f \quad \sigma_{yy}^f \quad \sigma_{zz}^f \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle = -\phi p \langle m \rangle \quad (2.6)$$

avec

$$\langle m \rangle = \langle 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

de la même manière, les états de déformations des éléments unitaires solide et fluide peuvent être représentés respectivement par les vecteurs :

$$\langle \varepsilon^s \rangle = \langle \varepsilon_{xx}^s \quad \varepsilon_{yy}^s \quad \varepsilon_{zz}^s \quad 2\varepsilon_{xy}^s \quad 2\varepsilon_{yz}^s \quad 2\varepsilon_{xz}^s \rangle \quad (2.7)$$

$$\langle \varepsilon^f \rangle = \langle \varepsilon_{xx}^f \quad \varepsilon_{yy}^f \quad \varepsilon_{zz}^f \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle \quad (2.8)$$

III.2 Relations déformations-déplacements

Les relations déformations-déplacements reliées à la phase solide du matériau poroélastique sont identiques à celles citées en élasticité, soit :

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.9)$$

Cependant, les grandeurs utilisées sont définies à l'échelle macroscopique plutôt qu'à l'échelle microscopique, (figure 2.2). Dans l'équation précédente u_i représente les composantes du vecteur déplacement moyen ou macroscopique, de la phase solide, soit $\{u\}$. La dilatation de l'élément unitaire de la phase solide est donnée par :

$$\theta^s = u_{i,i} \quad (2.10)$$

Les relations déformations-déplacements reliées à la phase fluide du matériau poroélastique sont analogues à celles données par l'équation (2.9). Cependant, on néglige l'action des forces de cisaillement comme indiqué précédemment dans l'hypothèse 10, ce qui donne :

$$\varepsilon_{ij}^f = U_{k,l} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{kl} \quad (2.11)$$

où U_i représente les composantes du vecteur déplacement moyen, ou macroscopique de la phase fluide, soit $\{U\}$. La déformation de l'élément unitaire de la phase fluide est donc uniquement représentée par une dilatation définie par

$$\theta^f = U_{i,i} \quad (2.12)$$

III.3 Relations contraintes-déformations

Les relations contraintes-déformations ont été établies par Biot [Bio62a] à partir du potentiel de déformation \mathbf{W} . Ce potentiel représente la densité volumique d'énergie de déformation. Il est relié à l'énergie de déformation U par la relation :

$$U = \int_v \mathbf{W} dv \quad (2.13)$$

où dv est un élément de volume infinitésimal.

Selon l'hypothèse 8, on a un système poroélastique conservatif et linéaire, et toutes les formes de dissipation sont négligées. Donc les contraintes exercées sur un élément poroélastique unitaire induisent des déformation qui engendrent une variation d'énergie de déformation à partir d'un état d'énergie de déformation minimale. On conclut que les contraintes sont des fonctions linéaires de déformations. Par conséquent, l'énergie de déformation est une forme quadratique linéaire, positive et symétrique. La densité volumique d'énergie de déformation W , ou le potentiel de déformation, d'un agrégat poroélastique est donné par Biot [Bio62a].

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}^s + \sigma_{ij}^f \varepsilon_{ij}^f \right) \quad (2.14)$$

Les relations linéaires entre les contraintes et les déformations sont données par les dérivées partielles de \mathbf{W} suivantes :

$$\sigma_{ij}^s = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varepsilon_{ij}^s} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij}^f = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varepsilon_{ij}^f} \quad (2.15)$$

Par analogie avec l'élasticité linéaire, l'équation précédente peut s'écrire à l'aide de 4 coefficients élastiques dans le cas isotrope, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^s = (A\theta^s + Q\theta^f) \delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij}^s \\ \sigma_{ij}^f = -p\phi\delta_{ij} = (Q\theta^s + R\theta^f) \end{cases} \quad (2.16)$$

où A , N , Q , et R sont les quatre coefficients élastiques de Biot [Bio62b]. Les coefficients A et N sont respectivement analogues aux coefficients de Lamé λ et μ , dans la théorie de l'élasticité où μ est le module de cisaillement. Le coefficient R est le module de compression moyen de la phase fluide et le coefficient Q traduit le couplage élastique entre la phase fluide et la phase solide.

III.4 Expériences de Biot-Willis

"Les expériences Gedanken" suggérées par Biot fournissent une évaluation pour les coefficients élastiques P , N , Q , et R . Ces expériences sont statiques, mais elles donnent une description qui reste valable pour les grandes longueurs d'ondes par rapport à la dimension caractéristique du volume élémentaire représentatif. Il existe trois expériences Gedanken qui sont décrites par Biot-Willis [BW57].

Dans la première expérience, le matériau poreux subit une contrainte de cisaillement pure ($\theta^s = \theta^f = 0$), nous avons donc :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^s &= 2N\varepsilon_{ij} \\ \sigma_{ij}^f &= 0\end{aligned}\quad (2.17)$$

il est évident que N est le module de cisaillement du matériau, par conséquent, celui de la matrice, puisque l'air ne contribue pas à la force de rappel de cisaillement.

Dans la deuxième expérience, le matériau est entouré par une enveloppe flexible qui subit une pression hydrostatique p_1 . Comme représenté dans la figure 2.4, la pression de l'air à l'intérieur de l'enveloppe reste constante et égale à p_0 .

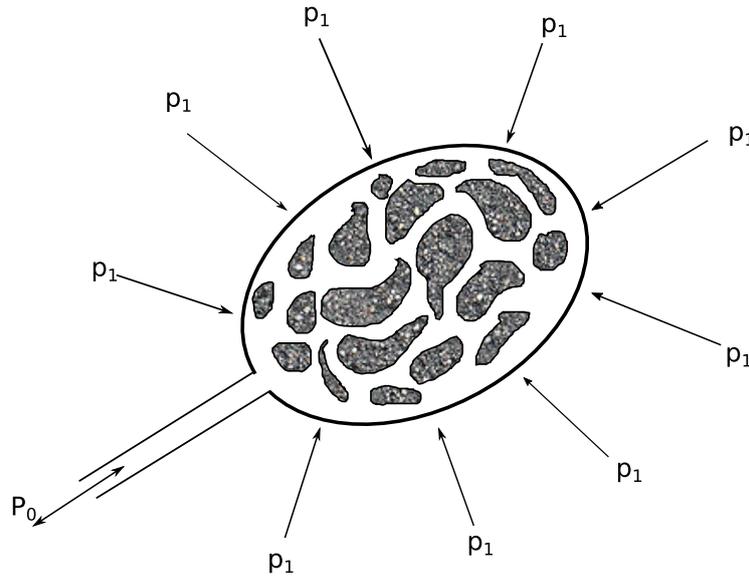


FIGURE 2.4 – Test de compressibilité à double enveloppe

Cette expérience fournit une définition pour le module de compression K_b de la matrice à une pression constante dans l'air :

$$K_b = -p_1/\theta_1^s \quad (2.18)$$

θ_1^s étant la dilatation de la matrice, et $\sigma_{xx}^s, \sigma_{yy}^s, \sigma_{zz}^s$, étant égale à $-p_1$. Pour les matériaux étudiés dans cette thèse, K_b est le module de compression de la matrice dans le vide.

Les équations (2.16) et (2.17) peuvent être réécrites sous la forme :

$$-p_1 = \left(P - \frac{3}{4}N\right)\theta_1^s + Q\theta_1^f \quad (2.19)$$

$$0 = Q\theta_1^s + R\theta_1^f \quad (2.20)$$

Dans ces équations θ_1^f est la dilatation de l'air dans le matériau qui est généralement inconnue a priori. Cette dilatation est due à la variation dans la porosité de la matrice, qui n'est pas directement prévisible. Le champ microscopique des contraintes dans la matrice de cette expérience

est très compliqué. Dans la troisième expérience, représentée par la figure (2.5), le matériau est non-enveloppé et subit une augmentation de pression p_1 dans l'air. Cette variation dans la pression est transmise à la matrice, et la composante du tenseur de contrainte de la matrice devient :

$$\tau_{ij}^s = -p_f(1 - \phi)\delta_{ij} \quad (2.21)$$

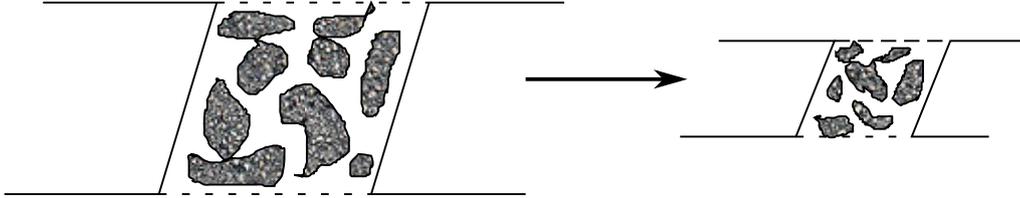


FIGURE 2.5 – Matériau poreux non-enveloppé subissant une augmentation de pression

Les équations (2.16) et (2.17) peuvent être réécrites sous la forme :

$$-p_f(1 - \phi) = \left(P - \frac{3}{4}N\right)\theta_2^s + Q\theta_2^f \quad (2.22)$$

$$-\phi p_f = Q\theta_2^s + R\theta_2^f \quad (2.23)$$

Dans ces équations, θ_2^s et θ_2^f sont respectivement, les dilatations de la matrice et de l'air. La quantité $-p_f/\theta_2^s$, qui sera noté par K_s , est le module de compression du solide élastique à partir de laquelle la matrice est donnée :

$$K_s = -p_f/\theta_2^s \quad (2.24)$$

Dans la dernière expérience, il n'y a aucune variation de la porosité, la déformation de la matrice est la même comme si le matériau n'était pas poreux. Elle peut être associée à un simple changement d'échelle.

La quantité $-p_f/\theta_2^f$ est le module de compression K_f de l'air :

$$K_f = -p_f/\theta_2^f \quad (2.25)$$

A partir des équations (2-19) à (2-26), un système de trois équations qui contient trois paramètres inconnus P , Q , et R s'écrit :

$$Q/K_s + R/K_f = \phi \quad (2.26)$$

$$\left(P - \frac{3}{4}N\right)/K_s + Q/K_f = 1 - \phi \quad (2.27)$$

$$\left[\left(P - \frac{3}{4}N\right) - \frac{Q^2}{R}\right]/K_b = 1 \quad (2.28)$$

Les coefficients élastiques P , Q , et R , calculés à partir des équations (2-27) à (2-29) sont donnés par :

$$P = \frac{(1 - \phi) \left[1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} \right] K_s + \phi \frac{K_s}{K_f} K_b}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} + \frac{4}{3} N \quad (2.29)$$

$$Q = \frac{[1 - \phi - K_b/K_s] \phi K_s}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} \quad (2.30)$$

$$R = \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} \quad (2.31)$$

Pour la plupart des matériaux poreux utilisés en acoustique et saturés par un fluide (dans notre cas le fluide est l'air), on peut considérer que le module de compression K_s du matériau constituant la phase solide est très élevé par rapport au module de compression K_f de l'air et au module de compression K_b de la matrice solide dans le vide (*in vacuo*). Ainsi, $K_b/K_s \ll 1$ et $K_f/K_s \ll 1$, les coefficients élastiques de Biot se réduisent [Bio62b, Cha05a] :

$$\begin{aligned} P &= \frac{(1-\phi)^2}{\phi} K_f + K_b + \frac{3}{4} N \\ Q &= (1 - \phi) K_f \\ R &= \phi K_f \end{aligned} \quad (2.32)$$

De plus, le module de compression K_b est relié au module de cisaillement N de la matrice en introduisant un coefficient de Poisson macroscopique ν de la façon suivante

$$K_b = \frac{2N(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.33)$$

Donc, la rigidité de la matrice solide est déterminée par le module de cisaillement N et le coefficient de Poisson ν , au lieu de N et le module de compression de la matrice solide *in vacuo* K_b . Le coefficient de Biot P devient :

$$P = \frac{(1 - \phi)^2}{\phi} K_f + 2N \frac{\nu}{(1 - 2\nu)} \quad (2.34)$$

Le module de compression de l'air K_f proposé dans la théorie de Biot sur la propagation des ondes acoustiques dans les milieux poroélastiques, est réel et indépendant de la fréquence. Il ne tient compte que des effets thermiques. On sait que dans les pores, il est fortement influencé par les échanges thermiques qui sont produits entre la phase solide et la phase fluide. Il est évident que le transfert de chaleur d'une phase à l'autre dépend de la vitesse à laquelle les échanges se produisent. En outre, en régime harmonique, le module de compression de l'air dans les pores varie en fonction de la fréquence. c'est-à-dire, sa valeur en écoulement isotherme statique ($\omega \rightarrow 0$) passe à une valeur adiabatique en écoulement harmonique haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$). Donc, le transfert de chaleur de la phase fluide à la phase solide est vu comme une dissipation de l'énergie de l'onde acoustique se propageant dans le réseau poreux. On conclut que le module de compression de l'air K_f doit posséder une partie imaginaire traduisant cette

dissipation d'énergie et doit être dépendant de la fréquence. Allard a proposé l'utilisation d'un module de compression dynamique complexe de l'air, \tilde{K}_e ¹ traduisant les effets thermiques, pour mieux adapter les équations constitutives de BIOT aux problèmes acoustiques. Dans ce cas, il faut remplacer le coefficient K_f par \tilde{K}_e .

Les coefficients élastiques précédents P , Q , R sont remplacés par les coefficients dynamique complexes \tilde{P} , \tilde{Q} , et \tilde{R} et s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{(1-\phi)^2}{\phi} \tilde{K}_e + 2N \frac{\nu}{(1-2\nu)} \\ \tilde{Q} &= (1-\phi) \tilde{K}_e \\ \tilde{R} &= \phi \tilde{K}_e \end{aligned} \quad (2.35)$$

De plus, pour tenir compte d'un amortissement structural associé à la matrice solide, il faut remplacer le module de cisaillement N de Biot par un module de cisaillement complexe soit :

$$N \rightarrow N(1 - \eta_s) \quad (2.36)$$

où η_s est le coefficient d'amortissement structural de la matrice solide.

III.5 Densité d'énergie cinétique

La densité d'énergie cinétique T associée à un élément cubique unitaire poroélastique, défini par Biot (à l'échelle macroscopique) en utilisant respectivement, les vitesses moyennes \dot{u}_i et \dot{U}_i des phases solides et fluides est exprimée par [Bio56a] :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \left(\rho_{11} \dot{u}_i \dot{u}_i + 2\rho_{12} \dot{u}_i \dot{U}_i + \rho_{22} \dot{U}_i \dot{U}_i \right) \quad (2.37)$$

Cette densité T est reliée à l'énergie cinétique totale V de l'agrégat poreux par $V = \int_v T dv$ selon l'hypothèse 1. Cette équation est valide pour les matériaux poroélastiques isotropes, afin que les directions x_i et x_j où $i \neq j$ soient découplées dynamiquement. Dans l'équation (2.42) ρ_{11} , ρ_{22} : sont respectivement les masses volumiques apparentes de Biot des phases solides et fluides. Tandis que, ρ_{12} est un coefficient de couplage entre les deux phases. Ces coefficients de masses dépendent seulement des effets géométriques et sont donnés par [JKD87] :

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \rho_1 - \rho_{12} \\ \rho_{22} &= \phi \rho_0 - \rho_{12} \\ \rho_{12} &= -\phi \rho_0 (\alpha_\infty - 1) \end{aligned} \quad (2.38)$$

où ρ_1 est la masse volumique de la phase solide, ρ_0 la masse volumique de l'air, α_∞ la tortuosité du réseau poreux. Nous pouvons remarquer dans l'équation (2.38) que les deux coefficients ρ_{11} et ρ_{22} sont en fonction de ρ_{12} , et ce dernier est en fonction de la tortuosité. On peut dire que les effets géométriques sont représentés par la tortuosité. Cette dernière varie entre 1 et 7, mais jamais inférieure à 1. Par conséquent, nous pouvons noter une élévation de la masse sur les phases solide et fluide, relative aux effets géométriques puisque ρ_{12} est toujours négative.

1. le tilde ($\tilde{}$) au-dessus d'une variable indique que cette variable est complexe et dépend de la fréquence

III.6 Fonction de dissipation

Une fonction de dissipation visqueuse D qui dépend seulement du mouvement relatif entre la phase solide et fluide, a été défini par Biot à l'échelle macroscopique. Comme la densité d'énergie cinétique, la fonction de dissipation est une forme quadratique et symétrique de vitesses macroscopique \dot{u}_i et \dot{U}_i . elle s'écrit :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \tilde{b} \left(\dot{u}_i - \dot{U}_i \right) \left(\dot{u}_i - \dot{U}_i \right) = \frac{1}{2} \tilde{b} \left(\dot{u}_i \dot{u}_i - 2 \dot{u}_i \dot{U}_i + \dot{U}_i \dot{U}_i \right) \quad (2.39)$$

où \tilde{b} est un coefficient d'amortissement visqueux complexe qui dépend de la fréquence. Il justifie les effets visqueux dans la propagation des ondes élastiques et acoustiques dans les milieux poreux. Ce coefficient est généralement relié à la porosité et à la résistance statistique à l'écoulement par

$$\tilde{b} = \phi^2 \sigma \tilde{G} \quad (2.40)$$

\tilde{G} est un facteur correcteur de la viscosité traduisant le fait que l'écoulement dans les pores s'éloigne d'un écoulement de Poiseuille lorsque la fréquence augmente (figure 2.6). Son expression est donnée par Johnson et al [JKD87] :

$$\tilde{G} = \sqrt{1 + j \frac{4\alpha_\infty^2 \eta \rho_0 \omega}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2}} \quad (2.41)$$

η représente la viscosité de l'air (dont la valeur à 18 degrés Celsius sous une pression de 1 atmosphère est de 1.84 Poiseuille ou $N.s.m^{-2}$).

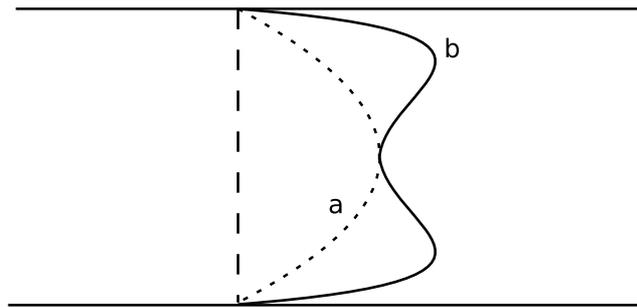


FIGURE 2.6 – Représentation schématique des profils de vitesses dans un tube cylindrique. a) basse fréquence et b) haute fréquence.

III.7 Equation de mouvement de Biot

Les équations de mouvement des milieux poroélastiques établis par Biot [Bio62b], sont obtenues à partir des équations de Lagrange en fonction de la dissipation due aux effets visqueux. Dans la théorie de Biot-Allard [DAL88], les dissipations due à l'amortissement structural de

la matrice (2.36), et aux effets thermiques (2.35) sont prises en considération. Des travaux ont été réalisés [Cha05b], pour assurer que les équations de Lagrange en fonction de la dissipation peuvent être utilisées sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{u}_i} &= \tilde{q}_E \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{U}_i} \right) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{U}_i} &= \tilde{Q}_E\end{aligned}\quad (2.42)$$

où \tilde{q}_E et \tilde{Q}_E , sont les forces élastiques agissant respectivement sur la phase solide et la phase fluide. Elles sont données par

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= \frac{d}{dx_j} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^s} = \sigma_{ij,j}^s \\ \tilde{Q}_i &= \frac{d}{dx_j} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^f} = \sigma_{ij,j}^f = -hp_{,j}\end{aligned}\quad (2.43)$$

en substituant les équations (2.37) et (2.39) dans les équations de Lagrange, on obtient les équations d'équilibres dynamique de Biot dans le cadre du modèle poroélastique Biot-Allard, soit :

$$\sigma_{ij,j}^s = \left(\rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i \right) + \tilde{b} \left(\dot{u}_i - \dot{U}_i \right) \quad (2.44)$$

$$-\phi p_{,j} = \left(\rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i \right) - \tilde{b} \left(\dot{u}_i - \dot{U}_i \right) \quad (2.45)$$

En utilisant les équations (2.9) à (2.12) et (2.16), on obtient les équations de mouvement de Biot en fonction des déplacements sous la forme :

$$Nu_{i,jj} + \left(\tilde{A} + N \right) u_{j,ij} + \tilde{Q}U_{j,ij} = \left(\rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i \right) + \tilde{b} \left(\dot{u}_i - \dot{U}_i \right) \quad (2.46)$$

$$\tilde{Q}u_{j,ij} + \tilde{R}U_{j,ij} = \left(\rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i \right) - \tilde{b} \left(\dot{u}_i - \dot{U}_i \right) \quad (2.47)$$

Pour des mouvements harmoniques ayant une dépendance temporelle de la forme $e^{j\omega t}$, les équations (2-44), (2-45) et (2-46), (2-47) deviennent respectivement sous la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}^s &= -\omega^2 \left(\tilde{\rho}_{11} u_i + \tilde{\rho}_{11} U_i \right) \\ -\phi p_{,i} &= -\omega^2 \left(\tilde{\rho}_{12} u_i + \tilde{\rho}_{22} U_i \right)\end{aligned}\quad (2.48)$$

et

$$\begin{aligned}Nu_{i,jj} + \left(\tilde{A} + N \right) u_{j,ij} + \tilde{Q}U_{j,ij} &= -\omega^2 \left(\tilde{\rho}_{11} u_i + \tilde{\rho}_{11} U_i \right) \\ \tilde{Q}u_{j,ij} + \tilde{R}U_{j,ij} &= -\omega^2 \left(\tilde{\rho}_{12} u_i + \tilde{\rho}_{22} U_i \right)\end{aligned}\quad (2.49)$$

avec

$$\tilde{A} = \tilde{P} - 2N$$

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{11} &= \rho_{11} - j \frac{\tilde{b}}{\omega} \\ \tilde{\rho}_{22} &= \rho_{22} - j \frac{\tilde{b}}{\omega} \\ \tilde{\rho}_{12} &= \rho_{12} + j \frac{\tilde{b}}{\omega}\end{aligned}\quad (2.50)$$

Les équations volumiques de l'équation (2-50), sont les masses volumiques dynamiques complexes de Biot. Elles tiennent compte des effets d'inertie via ρ_{ij} , et des effets visqueux via \tilde{b}

IV Formulation (p) pour le Modèle fluide équivalent de Biot-Allard

Le modèle fluide équivalent de Biot-Allard, est un cas limite du modèle poroélastique Biot-Allard. En effet, nous considérons que la matrice est immobile ($u_i = 0, u_{i,j} = 0$), à cause de sa grande rigidité ou de sa masse volumique élevée. Dans ce cas, les densités d'énergie de déformation (eq 2-14) et d'énergie cinétique (eq 2-37), ainsi que la fonction de dissipation (eq 2-39) se réduisent aux expressions suivantes :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^f \varepsilon_{ij}^f \quad (2.51)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \rho_{22} \dot{U}_i \dot{U}_i \quad (2.52)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \tilde{b} \dot{U}_i \dot{U}_i \quad (2.53)$$

Dans le cas rigide, on remarque que les densités d'énergie et la fonction de dissipation ne dépendent que des composantes du déplacement de la phase fluide. Donc seules les seconds équations de (2.42) et (2.43) sont valables, et l'équation d'équilibre dynamique du fluide équivalent s'écrit :

$$p_{,i} = \omega^2 \tilde{\rho}_e U_i \quad (2.54)$$

avec

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi} \quad (2.55)$$

où $\tilde{\rho}_e$ est la masse volumique dynamique complexe du fluide équivalent et tient compte des effets d'inertie et visqueux. En effet, l'équation d'Euler (2-54) est modifiée dans le cas d'un fluide équivalent.

Encore une fois, en supposant que la phase solide est rigide, ce qui implique que $K_s \rightarrow \infty$, et $K_b \rightarrow \infty$, la deuxième équation de (2.16) permet d'obtenir la relation suivante :

$$p = -\tilde{K}_e U_{i,i} \quad (2.56)$$

Cette relation est l'équation de continuité entre la pression et le déplacement en un point du fluide équivalent. Dans cette équation, \tilde{K}_e est le module de compression dynamique complexe du fluide équivalent, qui tient compte des effets thermiques de la propagation des ondes acoustiques dans le milieu poreux. Son expression est donnée par Champoux et Allard [CA91].

$$\tilde{K}_e = \frac{\gamma P_0}{\gamma(\gamma - 1) \left[1 + \frac{8\eta}{j\Lambda'^2 P_r^2 \omega \rho_0} \tilde{G}' \right]^{-1}} \quad (2.57)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques de l'air, P_0 est la pression atmosphérique, P_r est la constante de Prandtl².

et

$$\tilde{G}' = \sqrt{1 + \frac{\Lambda'^2 P_r^2 \rho_0 \omega}{16\eta}} \quad (2.58)$$

En dérivant l'équation d'Euler modifiée par rapport à x_i , et en combinant ce résultat à l'équation de continuité, on obtient, en régime harmonique ($e^{j\omega t}$), l'équation suivante :

$$p_{,ii} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_e}{\tilde{K}_e} p = 0 \quad (2.59)$$

C'est l'équation d'onde, ou d'HELMHOLTZ, du milieu fluide équivalent.

Remarque 1: Les masses volumiques $\tilde{\rho}_{11}$, $\tilde{\rho}_{22}$, $\tilde{\rho}_{12}$, et $\tilde{\rho}_0$ définies précédemment dans les modèles de Biot-Allard et de fluide équivalent, dans les équations (2.50) et (2.55), sont complexes et dépendent de la fréquence, puisqu'elles sont en fonction du coefficient d'amortissement structural \tilde{b} . Ce coefficient n'est pas celui introduit par Biot. Il est basé sur l'étude de l'écoulement d'un fluide peu visqueux dans les pores cylindriques. Pour tenir compte des diverses formes de section des pores (circulaire, fente, etc), Biot a introduit un facteur de forme dans la définition du coefficient d'amortissement structural. Ce facteur n'est pas directement mesurable, il est ajustable afin de bien reproduire des mesures acoustiques pour un matériau poreux donné.

Pour palier à l'hypothèse fondamentale de pores cylindriques à l'origine du coefficient d'amortissement de Biot, Jonhson et al, ont présenté une masse volumique dynamique complexe basée sur une longueur caractéristique visqueuse Λ déduite de la microstructure du milieu poreux. Cette nouvelle masse volumique s'applique donc à des pores de forme quelconques et n'introduit pas la facteur de forme ajustable.

Pour une dépendance fréquentielle de la forme $e^{j\omega t}$, la masse volumique dynamique complexe de Jonhson et al, est définie à partir de la tortuosité dynamique $\tilde{\alpha}$ de la façon suivante :

$$\tilde{\rho}_e = \rho_0 \tilde{\alpha} \quad (2.60)$$

avec

$$\tilde{\alpha} = \alpha_\infty - j \frac{\phi \sigma}{\omega \rho_0} \sqrt{1 + j \frac{4\alpha_\infty^4 \eta \rho_0 \omega}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2}} \quad (2.61)$$

où α_∞ représente la tortuosité à la limite des hautes fréquences $\omega \rightarrow \infty$.

On peut réécrire la masse volumique dynamique complexe comme :

$$\tilde{\rho}_e = \rho_0 \alpha - j \frac{\phi \sigma}{\omega} \tilde{G} \quad (2.62)$$

avec

$$\tilde{G} = \sqrt{1 + j \frac{4\alpha_\infty^4 \eta \rho_0 \omega}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2}}$$

2. le nombre de Prandtl est le rapport de la viscosité cinématique sur la diffusivité thermique

Remarque 2: L'équation (2.49) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} (\tilde{P} - 2N) \nabla \nabla \cdot u + N \nabla^2 u + \tilde{Q} \nabla \nabla \cdot U &= -\omega^2 (\tilde{\rho}_{11} u + \tilde{\rho}_{11} U) \\ \tilde{Q} \nabla \nabla \cdot u + \tilde{R} \nabla \nabla \cdot U &= -\omega^2 (\tilde{\rho}_{12} u + \tilde{\rho}_{22} U) \end{aligned} \quad (2.63)$$

par analogie on a :

$$u_{i,jj} = \nabla^2 u$$

$$u_{j,ij} = \nabla \nabla \cdot u$$

$$U_{j,ij} = \nabla \nabla \cdot U$$

L'opérateur Laplacien $\nabla^2 u$ est classiquement défini comme :

$$\nabla^2 u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \times (\nabla \times u)$$

V Solution des équations : propagation des ondes dans un milieu poreux

Biot a montré que trois types d'ondes différents peuvent se propager au sein d'un matériau poreux : deux ondes de compression et une onde de cisaillement.

La solution de l'équation (2-63) peut être décomposée comme [Pan96] :

$$u = \nabla \varphi^s + \nabla \times \psi^s \quad (2.64)$$

$$U = \nabla \varphi^f + \nabla \times \psi^f \quad (2.65)$$

où φ^i et ψ^i , sont les potentiels scalaire et vectoriel associés respectivement, en fonction du déplacement solide $u(i = s)$ et du déplacement de fluide $U(i = f)$. Grâce à cette décomposition de potentiels, nous pouvons déduire les équations de propagation des ondes de compression (ou dilatation) P , et de cisaillement S .

V.1 Equations de propagation des ondes de compressions P

Les ondes P sont irrotationnelles ($\nabla \times u = \nabla \times U = 0$). Donc, les équations (2.64) et (2.65) seront réduites seulement aux potentiels scalaires sous la forme :

$$u = \nabla \varphi^s, \quad U = \nabla \varphi^f \quad (2.66)$$

A partir de l'équation (2.63), et de la relation de l'opérateur de Laplace, les équations de propagation de l'onde P sont exprimées par :

$$\tilde{P} \nabla^2 \varphi^s + \tilde{Q} \nabla^2 \varphi^f = -\omega^2 (\tilde{\rho}_{11} \varphi^s + \tilde{\rho}_{12} \varphi^f) \quad (2.67)$$

$$\tilde{Q} \nabla^2 \varphi^s + \tilde{R} \nabla^2 \varphi^f = -\omega^2 (\tilde{\rho}_{12} \varphi^s + \tilde{\rho}_{22} \varphi^f) \quad (2.68)$$

Sous la forme de matrice, ces équations couplées de Helmholtz s'écrivent :

$$\nabla^2 \Phi + \omega^2 \bar{M}^{-1} \bar{\rho} \Phi \quad (2.69)$$

où Φ est le vecteur $(\varphi^s, \varphi^f)^T$. La matrice $\bar{\rho}$ est définie comme :

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{11} & \tilde{\rho}_{12} \\ \tilde{\rho}_{12} & \tilde{\rho}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

dans laquelle les matrices \bar{M} et \bar{M}^{-1} sont :

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q} & \tilde{R} \end{pmatrix}, \quad \bar{M}^{-1} = \frac{1}{\tilde{P}\tilde{R} - \tilde{Q}^2} \begin{pmatrix} \tilde{R} & -\tilde{Q} \\ -\tilde{Q} & \tilde{P} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Il en résulte que les valeurs propres de la matrice $\omega^2 \bar{M}^{-1} \bar{\rho}$, sont les racines carrées des nombres d'onde complexes k_1 et k_2 des deux ondes de compression planes couplées. Les vecteurs propres sont désignés par :

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \varphi'^s \\ \varphi'^f \end{pmatrix}, \quad \Phi'' = \begin{pmatrix} \varphi''s \\ \varphi''f \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

tel que

$$\nabla^2 \Phi' = -k_1^2 \Phi' \quad (2.73)$$

$$\nabla^2 \Phi'' = -k_2^2 \Phi'' \quad (2.74)$$

et

$$\begin{pmatrix} -k_1^2 & 0 \\ 0 & -k_2^2 \end{pmatrix} = \bar{P}^{-1} \bar{H} \bar{P} \quad (2.75)$$

avec

$$\bar{H} = -\omega^2 \bar{M}^{-1} \bar{\rho} \quad (2.76)$$

et

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} \varphi'^s & \varphi''s \\ \varphi'^f & \varphi''f \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

a partir des équations précédentes, on obtient :

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1^2 & 0 \\ 0 & -k_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

où $(\varphi_1, \varphi_2)^T$ est le vecteur dont les composantes sont les ondes du premier et second type. Ce dernier pour être lié aux ondes se propageant dans les parties solides et des fluides du matériau poreux à travers les vecteurs propres Φ' et Φ'' . Il peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \varphi^s \\ \varphi^f \end{pmatrix} = \bar{P} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

les valeurs propres $k_i^2, i = 1, 2$, sont obtenues en utilisant la solution de l'équation caractéristique :

$$\det(-k^2 \bar{I} - \bar{H}) = 0 \quad (2.80)$$

avec \bar{I} est la matrice d'identité. Comme les matrices sont des matrices carrées d'ordre 2, les valeurs propres sont :

$$-k_1^2 = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\bar{H}) + \sqrt{\text{tr}^2(\bar{H}) - 4\det(\bar{H})} \right) \quad (2.81)$$

$$-k_2^2 = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\bar{H}) - \sqrt{\text{tr}^2(\bar{H}) - 4\det(\bar{H})} \right) \quad (2.82)$$

en terme de densité et coefficient élastiques de Biot, les relations ci-dessus donnent :

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{2(\tilde{P}\tilde{R} - \tilde{Q}^2)} \left[\tilde{R}\tilde{\rho}_{12} + \tilde{P}\tilde{\rho}_{22} - 2\tilde{Q}\tilde{\rho}_{11} - \sqrt{\Delta} \right] \quad (2.83)$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{2(\tilde{P}\tilde{R} - \tilde{Q}^2)} \left[\tilde{R}\tilde{\rho}_{12} + \tilde{P}\tilde{\rho}_{22} - 2\tilde{Q}\tilde{\rho}_{11} + \sqrt{\Delta} \right] \quad (2.84)$$

où Δ est donné par :

$$\Delta = \left(\tilde{R}\tilde{\rho}_{11} + \tilde{P}\tilde{\rho}_{22} - 2\tilde{Q}\tilde{\rho}_{12} \right)^2 - 4(\tilde{P}\tilde{R} - \tilde{Q}^2) (\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2) \quad (2.85)$$

les nombres d'onde k_1 et k_2 caractérisent les ondes dites de compression de premier et second type.

Les vitesses de phases c_1 et c_2 sont facilement déduites de (2.83) et (2.84) :

$$c_1 = \frac{\tilde{R}\tilde{\rho}_{11} + \tilde{P}\tilde{\rho}_{22} - 2\tilde{Q}\tilde{\rho}_{12} + \sqrt{\Delta}}{2(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2)} \quad (2.86)$$

$$c_2 = \frac{\tilde{R}\tilde{\rho}_{11} + \tilde{P}\tilde{\rho}_{22} - 2\tilde{Q}\tilde{\rho}_{12} - \sqrt{\Delta}}{2(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2)} \quad (2.87)$$

le vecteur propre Φ' est normalisé par φ'^s et l'autre vecteur propre Φ'' est normalisé par φ''^s , de telle sorte qu'une forme différente des ondes de premier et second type, désignée par $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$, soit obtenue.

d'après l'équation (2-79), l'équation d'onde de chaque phase (solide et fluide) peut être exprimée par une combinaison linéaire de $\bar{\varphi}_i, i = 1, 2$, par conséquent :

$$\varphi^s = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 \quad (2.88)$$

$$\varphi^f = \mu_1 \bar{\varphi}_1 + \mu_2 \bar{\varphi}_2 \quad (2.89)$$

où, $\mu_i, i=1,2$, représentent les rapports de la vitesse de l'air à la vitesse de la matrice, qui s'écrivent :

$$\mu_1 = \frac{\varphi'^f}{\varphi'^s} = \frac{\tilde{P}k_1^2 - \omega^2\tilde{\rho}_{11}}{\omega^2\tilde{\rho}_{12} - \tilde{Q}k_1^2} \quad (2.90)$$

$$\mu_2 = \frac{\varphi''^f}{\varphi''^s} = \frac{\tilde{P}k_2^2 - \omega^2\tilde{\rho}_{11}}{\omega^2\tilde{\rho}_{12} - \tilde{Q}k_2^2} \quad (2.91)$$

Ces rapports indiquent dans quel milieu les ondes se propagent de manière préférentielle. Finalement $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$, sont appelés les ondes lente et rapide d'après les valeurs réelles des vitesses de phase c_1 et c_2 .

Quatre impédances caractéristiques peuvent être définies, parce que les deux ondes se propagent en même temps dans l'air et dans la matrice du matériau poreux. Dans le cas des ondes se propageant dans la direction z , l'impédance caractéristique liée à la propagation dans l'air est :

$$Z^f = p/(j\omega U_z) \quad (2.92)$$

Les déplacements macroscopiques de la matrice et l'air sont parallèles à la direction z , et par utilisation de l'équation (2-16), l'équation (2-92) peut être réécrite pour les deux ondes de compression :

$$Z_1^f = (\tilde{R} + \tilde{Q}/\mu_1) \frac{k_1}{\phi\omega} \quad (2.93)$$

$$Z_2^f = (\tilde{R} + \tilde{Q}/\mu_2) \frac{k_2}{\phi\omega} \quad (2.94)$$

l'impédance caractéristique reliée à la matrice est :

$$Z^s = -\sigma_{zz}^s/(j\omega u_z) \quad (2.95)$$

En utilisant l'équation (2-16), l'équation (2-95) peut être réécrite pour les deux ondes de compression comme suit :

$$Z_1^s = (\tilde{R} + \tilde{Q}/\mu_1) \frac{k_1}{\omega} \quad (2.96)$$

$$Z_2^s = (\tilde{R} + \tilde{Q}/\mu_2) \frac{k_2}{\omega} \quad (2.97)$$

V.2 Equation de propagation de l'onde de cisaillement S

Les ondes S, ou cisaillements, sont isovolumétriques ($\nabla \cdot u = \nabla \cdot U = 0$). Donc, les équations (2.64) et (2.65) réduites seulement aux potentiels vectoriels :

$$u = \nabla \times \psi^s, \quad U = \nabla \times \psi^f \quad (2.98)$$

a partir de l'équation de mouvement (2-63), les équations de propagation pour les ondes de cisaillement sont obtenues sous la forme :

$$\tilde{N}\nabla\psi^s = -\omega^2 (\tilde{\rho}_{11}\psi^s + \tilde{\rho}_{12}\psi^f) \quad (2.99)$$

$$0 = -\omega^2 (\tilde{\rho}_{12}\psi^s + \tilde{\rho}_{12}\psi^f) \quad (2.100)$$

dans le système ci-dessus il y a seulement l'onde de cisaillement se propageant dans la matrice. l'équation (2-100) mène à une relation simple entre le potentiel vectoriel du déplacement de la matrice ψ^s , et le potentiel vectoriel du déplacement de la phase fluide ψ^f ,

$$\psi^f = -\frac{\tilde{\rho}_{11}}{\tilde{\rho}_{22}}\psi^s \quad (2.101)$$

celui-ci donne le rapport des amplitudes des déplacements de la matrice et de l'air $\mu_3 = -\tilde{\rho}_{12}/\tilde{\rho}_{22}$. La combinaison des équations (2.99) et (2.101), permet d'obtenir l'équation de l'onde de cisaillement S dans le squelette qui s'écrit sous la forme :

$$\nabla^2\psi^s + \frac{\omega^2}{\mu_3} \left(\frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \psi^s = 0 \quad (2.102)$$

Les nombres d'ondes liés aux vitesses de phase dans la formulation Biot sont :

$$k_3^2 = \frac{\omega^2}{c_3^2} = \frac{\omega^2}{\mu_3} \left(\frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \quad (2.103)$$

le rapport μ_3 des amplitudes de déplacement de l'air et du squelette est donné par l'équation :

$$\mu_3 = -\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \quad (2.104)$$

De l'équation (1.101), on constate que le déplacement de cisaillement du fluide est proportionnel au déplacement de cisaillement du solide. Cela signifie qu'en raison de la viscosité, le mouvement du fluide est affecté par le mouvement de la matrice solide, et cette action de fluide augmente la masse effective de la structure vibrante totale.

VI Caractérisation acoustique

La propagation des ondes acoustiques dans un milieu poreux est entièrement caractérisée par l'un des deux couples [LN12, Sch83] :

- densité effective et compressibilité dynamique : (ρ_e, K)
- ou impédance de surface et constante de propagation : (Z_c, k)

Les expressions de la densité effective et de la compressibilité dynamique, la constante de propagation et l'impédance de surface du milieu poreux sont déterminée à partir les relations suivantes :

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho_e(\omega)}{K(\omega)}} \quad (2.105)$$

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\rho_e(\omega)K(\omega)} \quad (2.106)$$

La densité effective et la compressibilité dynamique sont données dans l'Annexe 3. Leurs expressions sont déterminées à partir de deux modèle selon le nombre des paramètres caractéristiques utilisées (la porosité, la résistance d'écoulement d'air, la tortuosité, la longueur caractéristique visqueuse, la longueur caractéristique thermique, et la perméabilité).

Les qualités acoustiques d'un milieu poreux sont estimées à partir de son coefficient d'absorption et de son impédance de surface, qui constituent des grandeurs fondamentales traduisant les performances absorbantes d'un milieu. Ces deux paramètres essentiels nous permettront d'identifier les caractéristiques intrinsèques de différents matériaux poreux, et aussi d'évaluer leurs efficacités relatives.

VI.1 Impédance de surface d'un milieu poreux à une structure rigide

L'impédance de surface d'un échantillon poreux, définie par le rapport entre la pression et la vitesse normale sur sa face avant, dépend non seulement des paramètres caractéristiques du milieu considéré, mais également des conditions de montage particulières de l'échantillon poreux : épaisseur, condition limite arrière, incidence des ondes acoustiques. Pour une configuration donnée, figure (2.7), elle est évaluée à partir des relations de transport d'impédance dans le milieu fluide équivalent et des formules de raccordement d'impédance entre deux milieux de caractéristique distinctes.

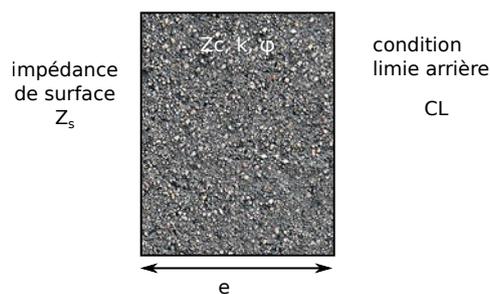


FIGURE 2.7 – Configuration de calcul de l'impédance de surface d'un matériau poreux

VI.1.1 Relation de transport d'impédance

Soit un milieu poreux à structure rigide, d'épaisseur e , et des expressions caractéristiques connues (k , constante de propagation ainsi Z_c , impédance caractéristique, (figure 2.8), soumis à une excitation acoustique sous incidence normale suivant l'axe z [Sel03]. Pour deux points

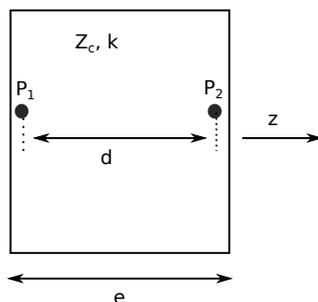


FIGURE 2.8 – Transport d'impédance à l'intérieur d'un milieu poreux

quelconques P_1 et P_2 du matériau, répartis sur un axe de direction z , une relation de transport d'impédance permet d'exprimer l'impédance au point P_1 , par exemple, par rapport à l'impédance au point P_2 , en fonction des deux grandeurs caractéristiques Z_c et k , intrinsèques au milieu de propagation :

$$Z(P_1) = Z_c \frac{-jZ(P_2)\cot(kd) + Z_c}{Z(P_2) - jZ_c\cot(kd)} \quad (2.107)$$

d , représente la distance axiale entre les deux points P_1 et P_2 .

VI.1.2 Formule de raccordement d'impédance

Nous considérons maintenant deux milieux caractérisés par leurs porosité ϕ_1 et ϕ_2 , (figure 2.9).

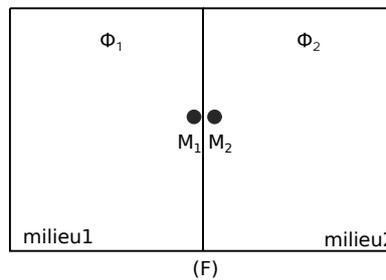


FIGURE 2.9 – Raccordement d'impédance à la frontière entre deux milieux poreux

Le raccordement d'impédance à la frontière (F) entre deux matériaux s'écrit sous la formule suivante [Sel03] :

$$Z(M_1) = \frac{\phi_1}{\phi_2} Z(M_2) \quad (2.108)$$

M_1 et M_2 sont deux points de la frontière, respectivement du côté du milieu 1 et du côté du milieu 2. Si le milieu 1 est considéré l'air (la porosité est égale à 1), donc nous avons une configuration fréquemment rencontrée dans la pratique, notamment lors de la détermination de l'impédance de surface d'un matériau poreux (milieu 2) associée à une condition limite fixée, et la relation (2.108) devient :

$$Z_s = Z(M_1) = \frac{Z(M_2)}{\phi_2} \quad (2.109)$$

VI.1.3 Condition limite arrière

Pour les trois conditions limites : mur rigide d'impédance infinie, lame d'air de profondeur d variable, et zéro de pression correspondant à une impédance nulle, l'impédance de surface d'un échantillon poreux d'épaisseur e est respectivement donnée par les relations suivantes [Sel03, Sch83] :

- Mur rigide, (figure 2.10) :

$$Z_s = -\frac{1}{\phi} j Z_c \cot(ke) \quad (2.110)$$

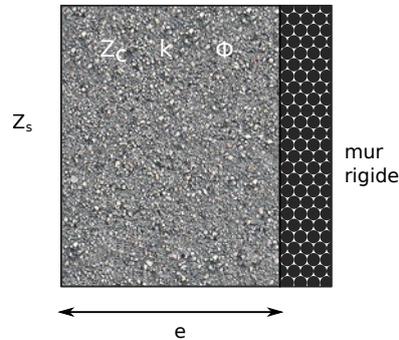


FIGURE 2.10 – Configuration de calcul de l'impédance de surface : **MUR RIGIDE**

- lame d'air d'épaisseur d, (figure 2.11)

$$Z_s = \frac{Z_c - j Z_a \cot(ke) + Z_c}{\phi \frac{Z_a - j Z_c \cot(ke)}{Z_c}} \quad (2.111)$$

avec Z_a , l'impédance sur la face arrière du matériau poreux.

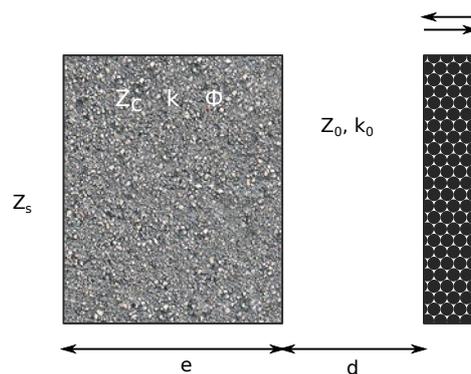
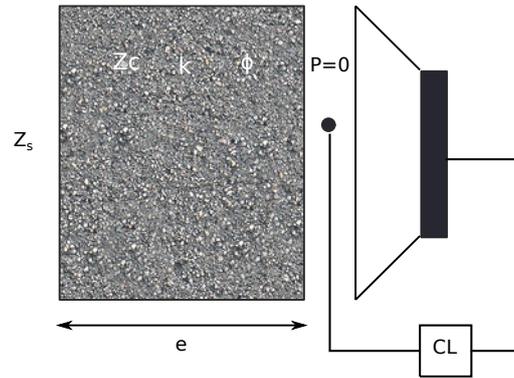


FIGURE 2.11 – Configuration de calcul de l'impédance de surface : **LAME D'AIR**

- Zéro de pression, (figure 2.12) :

$$Z_s = \frac{Z_c}{\phi} \tan(ke) \quad (2.112)$$

FIGURE 2.12 – Configuration de calcul de l'impédance de surface : **ZERO DE PRESSION**

VI.1.4 Coefficient d'absorption

Lorsqu'un matériau poreux est soumis à une excitation acoustique de pulsation ω sous incidence normale de direction z , la pression et la vitesse normale dans l'air en avant de l'échantillon, poreux s'écrivent sous forme complexe, par les relations (2.113) et (2.114), avec la convention $e^{j\omega t}$, et Z_0 est l'impédance caractéristique de l'air sous la forme :

$$p = Ie^{-jk_0z} + Re^{jk_0z} \quad (2.113)$$

$$v = \frac{1}{Z_0} [Ie^{-jk_0z} - Re^{jk_0z}] \quad (2.114)$$

I et R , sont respectivement les ondes incidentes sur la le milieu poreux et réfléchies par l'échantillon. Le coefficient de réflexion r est le rapport entre le flux incident et le flux réfléchi est égale à $r = I/R$. Il s'exprime alors directement à partir de l'impédance caractéristique de l'air et de surface du milieu poreux, $Z_s = p/v$, sa valeur est donnée par :

$$r = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \quad (2.115)$$

Donc, le coefficient d'absorption sous incidence normale, est défini à partir du coefficient de réflexion en énergie $\alpha_r = |r|^2$, se déduit par conséquent de la relation (2.116), sous la forme :

$$\alpha = 1 - \alpha_r = 1 - \left| \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \right|^2 \quad (2.116)$$

VI.2 Impédance de surface d'un milieu poreux à structure élastique

Nous considérons un matériau poreux à structure élastique déformable soumis à une onde acoustique sous incidence normale dans la direction z (figure 2.13). Dans ces conditions l'onde de cisaillement n'est pas excitée, et seules les deux ondes de compressions se propagent à travers le milieu poreux. Le modèle de Biot-Allard est utilisé pour prédire le comportement d'un échantillon poreux posé sur une condition limite arrière fixé.

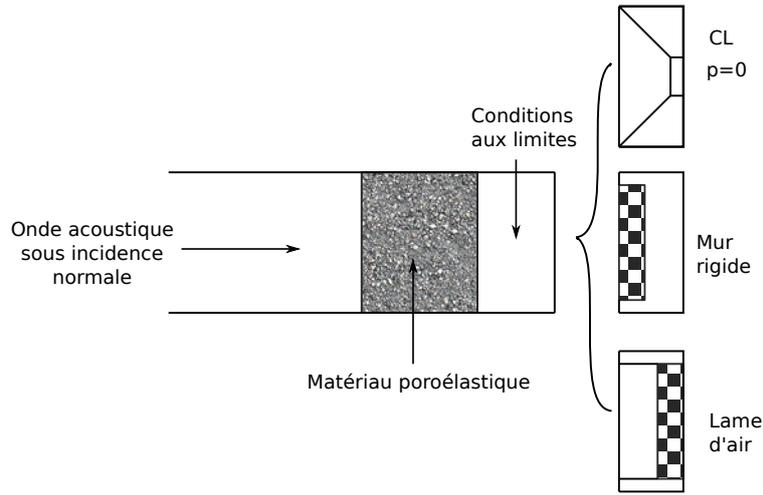


FIGURE 2.13 – Un échantillon poroélastique posé sur une condition d'arrière fixée

Pour obtenir l'impédance de surface d'un matériau poreux d'épaisseur e , il faut décomposer les vitesses (2.105) et les contraintes (2.106), en champs incidents et réfléchis, dans les deux phases fluide et solide de l'échantillon poreux.

$$\begin{cases} v^s(z) = V_I^1 e^{-jk_1 z} + V_R^1 e^{jk_1 z} + V_I^2 e^{-jk_2 z} + V_R^2 e^{jk_2 z} \\ v^f(z) = \mu_1 [V_I^1 e^{-jk_1 z} + V_R^1 e^{jk_1 z}] + \mu_2 [V_I^2 e^{-jk_2 z} + V_R^2 e^{jk_2 z}] \end{cases} \quad (2.117)$$

$$\begin{cases} v^s(z) = -Z_1^s [V_I^1 e^{-jk_1 z} - V_R^1 e^{jk_1 z}] + -Z_2^s [V_I^2 e^{-jk_2 z} - V_R^2 e^{jk_2 z}] \\ v^f(z) = -\phi Z_1^f \mu_1 [V_I^1 e^{-jk_1 z} - V_R^1 e^{jk_1 z}] - \phi Z_2^f \mu_2 [V_I^2 e^{-jk_2 z} + V_R^2 e^{jk_2 z}] \end{cases} \quad (2.118)$$

La condition limite arrière donnée (mur rigide, lame d'air ou zéro de pression) fournit la valeur des vitesses et contraintes en $z = e$, et par conséquent, une relation entre les amplitudes des ondes incidentes et réfléchies est établie. Donc, l'impédance de surface en $z = 0$ est déduite des formules de raccordement entre le milieu poreux et l'air libre au niveau de la face avant l'échantillon. Allard donne l'expression de l'impédance de surface d'un matériau poreux à structure élastique, d'épaisseur e , posé sur mur rigide [ADN⁺90] :

$$Z_s = -j \frac{Z_1^s Z_2^f \mu_2 - Z_2^s Z_1^f \mu_1}{D_{mr}} \quad (2.119)$$

avec

$$\begin{aligned} D_{mr} = (1 - \phi + \phi \mu_2) [Z_1^s - (1 - \phi) Z_1^f \mu_1] \tan(k_2 e) \\ + (1 - \phi + \phi \mu_1) [Z_2^f \mu_2 - (1 - \phi) Z_2^s] \tan(k_1 e). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Dans le cas de la condition limite de pression nulle à l'arrière de l'échantillon, l'impédance de surface s'écrit sous la forme :

$$Z_s = -j \frac{Z_1^f Z_2^s \mu_1 - Z_2^f Z_1^s \mu_2}{D_{zp}} \quad (2.121)$$

$$D_{zp} = (1 - \phi + \phi\mu_2)[Z_1^S - (1 - \phi)Z_1^f\mu_1]\cot(k_2e) \\ + (1 - \phi + \phi\mu_1)[Z_2^f\mu_2 - (1 - \phi)Z_2^S]\cot(k_1e). \quad (2.122)$$

Dans le cas où la condition à l'arrière du matériau poreux est une lame d'air d'épaisseur d , le calcul de cette impédance est très compliqué à cause de la complexité des relations entre les amplitudes modales établies au niveau de la face arrière de l'échantillon en $z = 0$. Pour obtenir la formulation de l'impédance de surface, il est nécessaire de distinguer les deux cas $\phi = 1$ et $\phi \neq 1$.

- Cas $\phi \neq 1$:

$$Z_s = \frac{M_{12}M_{23} - M_{22}M_{13}}{D_{la}} \quad (2.123)$$

avec

$$D_{la} = M_{12}M_{33} - M_{32}M_{13} - (1 - \phi)(M_{22}M_{33} - M_{23}M_{32}) \quad (2.124)$$

- Cas $\phi = 1$:

$$Z_s = \frac{M_{12}M_{23} - M_{22}M_{13}}{M_{12}M_{33} - M_{32}M_{13}} \quad (2.125)$$

Les coefficients M_{ij} , pour $i = 1..3$ et $j = 1..3$, s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} M_{12} = Z_1^s(c - 1) = Z_2^s a \\ M_{13} = Z_1^s d + Z_2^s(b - 1) \\ M_{22} = Z_1^f \mu_1(c - 1) + Z_2^f \mu_2 a \\ M_{23} = Z_1^f \mu_1 d + Z_2^f \mu_2(b - 1) \\ M_{32} = \phi\mu_1(c + 1) + \phi\mu_2 a + (1 - \phi)(c + 1) + (1 - \phi)a \\ M_{33} = \phi\mu_1 d + \phi\mu_2(b + 1) + (1 - \phi)d + (1 - \phi)(b + 1) \end{cases} \quad (2.126)$$

avec :

$$\begin{cases} a = \frac{-B_1 C_1 + D_1 A_1}{C_1 A_2 - A_1 C_2} \\ b = \frac{-C_1 B_2 + A_1 D_2}{C_1 A_2 - A_1 C_2} \\ c = \frac{-C_2 B_1 + A_2 D_1}{C_2 A_1 - A_2 C_1} \\ d = \frac{-C_2 B_2 + A_2 D_2}{C_2 A_1 - A_2 C_1} \end{cases} \quad (2.127)$$

et, pour $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} A_i = \frac{Z_i^f \mu_i}{e_i} - \frac{Z \phi \mu_i}{e_i} - \frac{Z(1-\phi)}{e_i} \\ B_i = -Z_i^f \mu_i e_i - Z \phi \mu_i e_i - Z(1 - \phi) e_i \\ C_i = \frac{Z_i^s}{(1-\phi)e_i} - \frac{Z \phi \mu_i}{e_i} - \frac{Z(1-\phi)}{e_i} \\ D_i = -\frac{Z_i^s e_i}{1-\phi} - Z \phi \mu_i e_i - Z(1 - \phi) e_i \end{cases} \quad (2.128)$$

Dans les expressions précédentes (2.127), $e_i = e^{jk_i e}$ et Z est l'impédance sur la face arrière de l'échantillon poreux, en $z = e$, $Z = -jZ_0 \cot(k_0 d)$

VII Quelques exemples d'applications pour différents matériaux poreux rigide et élastique

Nous considérons, dans cette partie, quelques exemples d'applications de matériaux absorbants comme par exemple la laine de verre, le fibreux textile, et la mousse polymère. Les caractéristiques acoustiques et mécaniques de ces derniers sont présentées dans le tableau (2.1).

Matériau	laine de verre	fibreux textile	mousse polymère
Épaisseur : e (mm)	29	23	18.9
Résistivité de passage de l'air : σ (KNs/m^4)	105	23	57
Porosité : ϕ	0.95	0.95	0.97
Tortuosité : α_∞	1	1	1.54
Longueur caractéristique visqueuse : Λ (μm)	35.1	54.1	24.6
Longueur caractéristique thermique : Λ' (μm)	105.3	162.3	73.8
Densité de squelette : ρ_1 (Kg/m^3)	17	58	46
Module d'Young : E KPa	1.4	17	214
Facteur de perte : η_s	0.1	0.1	0.115
Coefficient de Poisson : ν	0	0	0.3

TABLE 2.1 – Caractéristiques acoustiques et mécaniques des trois types de matériaux [Dou07]

Nous avons calculé les grandeurs acoustiques (les parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption) dans le but de prédire le comportement acoustique de ces matériaux pour des fréquences faibles et moyennes (1-2500 Hz). Ces calculs ont été faits en tenant compte de l'état de leur structure. Dans un premier temps, nous considérons que les matériaux étudiés ont une structure rigide ou immobile, dans ce cas là, nous utilisons le modèle de fluide équivalent (une seule onde peut se propager dans le fluide saturant les pores). Dans un second temps, nous étudions une structure élastique ou déformable en utilisant le modèle de Biot-Allard généralisé (trois ondes peuvent se propager dans le matériau). Les calculs sont effectués dans une configuration bien précise, prenant notamment en compte les conditions aux limites arrières du matériau étudié. Dans nos exemples, nous considérons les deux cas de conditions aux limites arrières du mur rigide et de la lame d'air. En ce qui concerne la laine de verre (figure 2.14), le coefficient d'absorption augmente au fur et à mesure que la valeur de la fréquence devient importante pour le modèle de Biot-Allard (o) et celui du fluide

équivalent (\square). Un décalage est observé entre les deux courbes autour de la fréquence 801 Hz, où le coefficient d'absorption atteint sa valeur maximale dans le cas où la structure est considérée comme élastique (\circ). Pour les fréquences élevées (>801 Hz) les valeurs du coefficient d'absorption pour les deux modèles se rapprochent. Cependant, pour une condition limite de

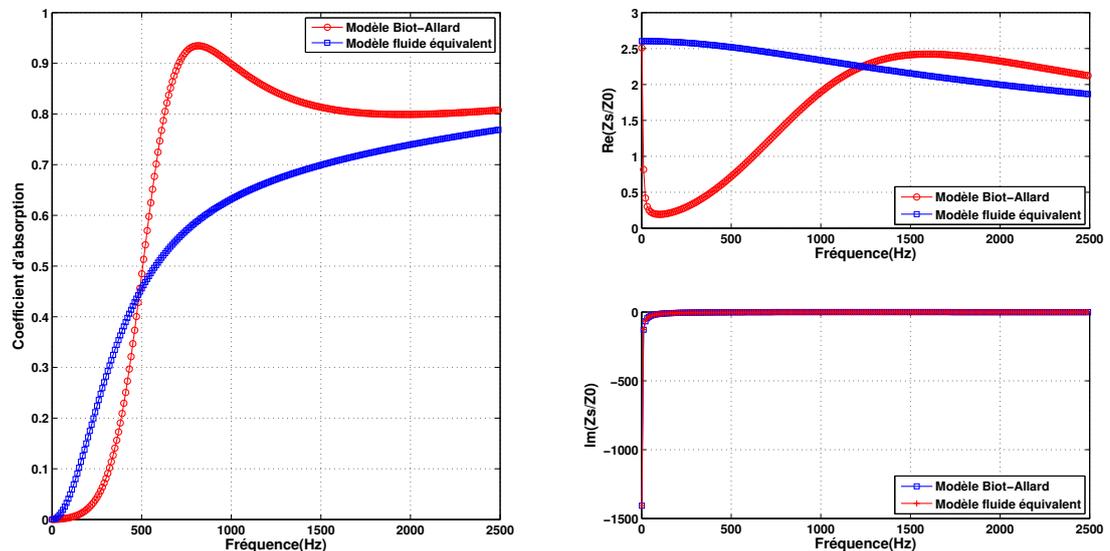


FIGURE 2.14 – Coefficient d'absorption et les parties réelle et imaginaire de la laine de verre :
Cas mur rigide

la lame d'air d'épaisseur 0.12 mm, un effet très intéressant apparaît clairement dans la (figure 2.15). Un décalage entre les courbes est observé à basses fréquences (<500 Hz). Il est dû à l'augmentation significative de l'absorption par l'espace d'air et explique le fait que l'absorption est principalement due à la dissipation visqueuse liée à la vitesse de l'air dans le milieu poreux. Lorsque le matériau est collé sur un mur rigide, la vitesse de particules au niveau de la paroi est égale à zéro, et donc, l'absorption se dégrade rapidement à basses fréquences. Lorsque le matériau est soutenu par une lame d'air, la vitesse des particules sur la face arrière du matériau oscille et atteint un maximum au quart de longueur d'onde de la fréquence la plus basse, et donc l'absorption augmente. Cet espace d'air a pour objectif d'éviter l'augmentation de l'épaisseur du matériau poreux. Une comparaison est effectuée entre le modèle de Biot-Allard et celui fluide équivalent en présence et en absence de la lame d'air. Elle est représentée par la figure (2.16) qui illustre l'évolution du coefficient d'absorption. La figure (2.17) montre la variation du coefficient d'absorption d'une mousse polymère pour le modèle Biot-Allard (structure élastique) et le modèle fluide équivalent (structure rigide) avec une condition limite arrière d'un mur rigide. Les résultats obtenus du modèle de Biot-Allard concordent avec ceux du fluide équivalent. La différence entre les deux courbes apparaît dans la gamme de moyennes fréquences (structure

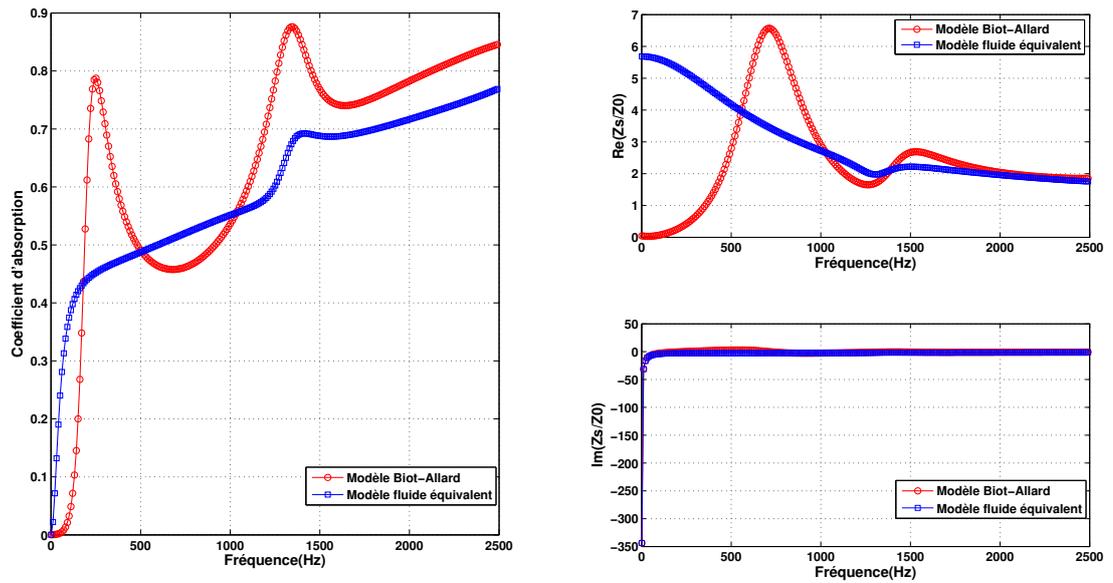


FIGURE 2.15 – Coefficient d’absorption et les parties réelle et imaginaire de la laine de verre : Cas lame d’air de 0.12 mm

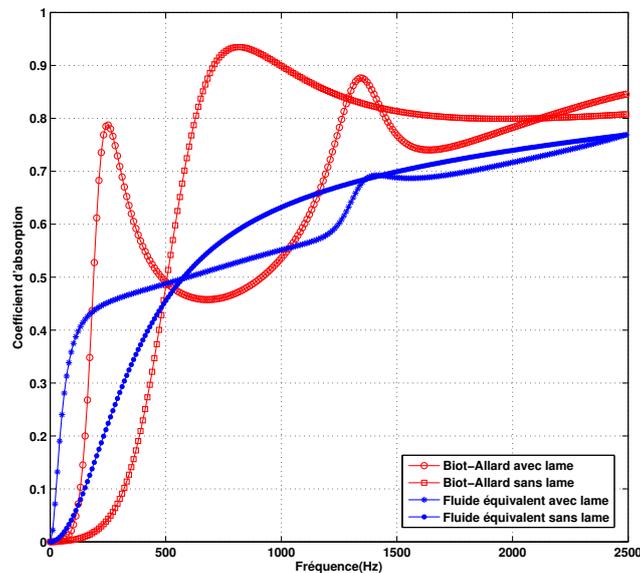


FIGURE 2.16 – Coefficient d’absorption pour les deux modèles de la laine de verre avec et sans lame d’air

élastique). Dans cette gamme, une baisse du coefficient d’absorption est observée autour de 1000 Hz. Cette baisse est due à la première résonance de la structure, qui est la résonance de quart de longueur d’onde pour un milieu poreux collé sur un mur rigide. Si une lame d’air est appliquée à la face arrière de la mousse polymère, un décalage entre les courbes est observé

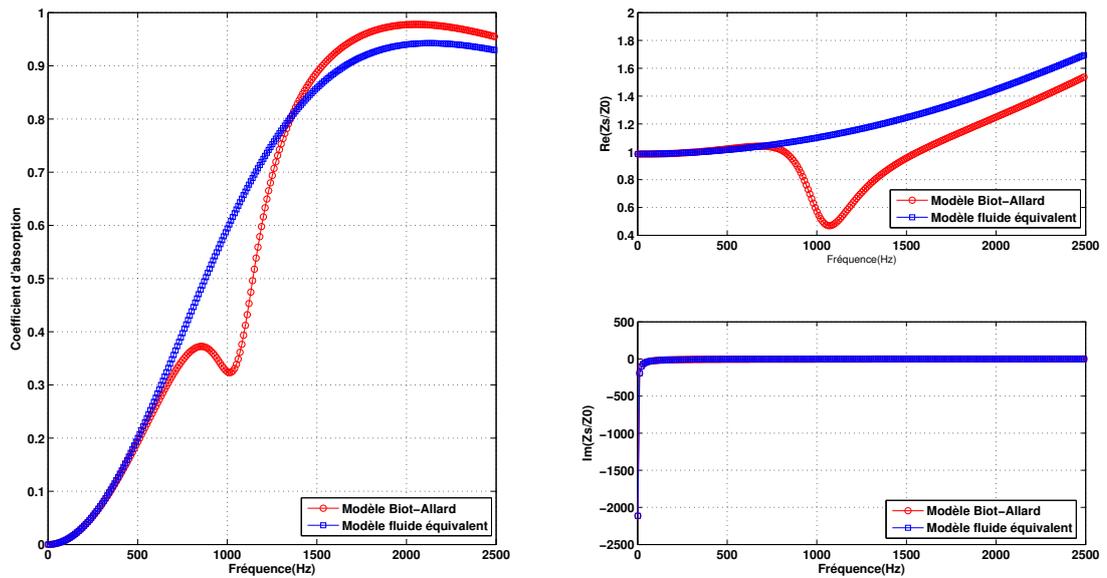


FIGURE 2.17 – Coefficient d’absorption et les parties réelle et imaginaire de la mousse : **Cas mur rigide**

vers les basses fréquences (Figure 2.18). Ainsi, Nous observons l’apparition de deux pics (○) pour le modèle Biot-Allard (structure élastique). En effet ces pics représentent un maximum d’absorption de l’énergie acoustique due aux effets visqueux de l’air dans les pores de la mousse. Une comparaison entre les deux cas de limites est illustrée dans la figure (Figure 2.19). En

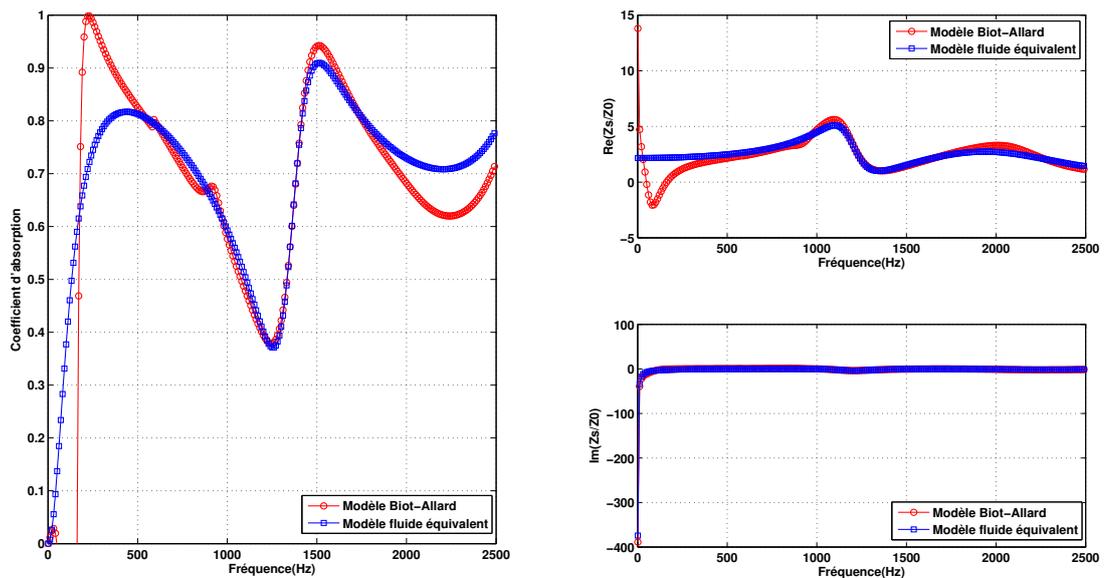


FIGURE 2.18 – Coefficient d’absorption et les parties réelle et imaginaire de la mousse : **Cas lame d’air de 0.12 mm**

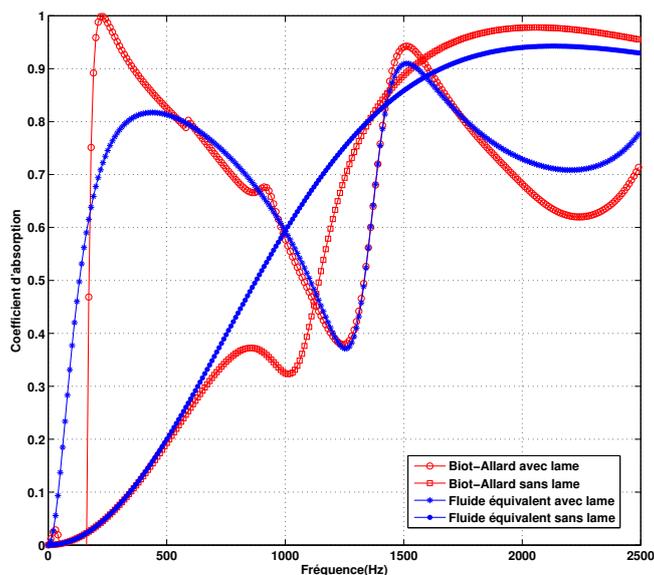


FIGURE 2.19 – Coefficient d’absorption pour les deux modèles de la mousse polymère avec et sans **lame d’air**

ce qui concerne le matériau poreux de type fibreux textile, la même évolution du coefficient d’absorption est remarquée (cas mur rigide) (figure 2.20). Le décalage entre les deux courbes vers les basses fréquences est assez similaire à l’exception d’une petite différence qui apparaît pour le modèle de Biot-Allard (figure 2.21).

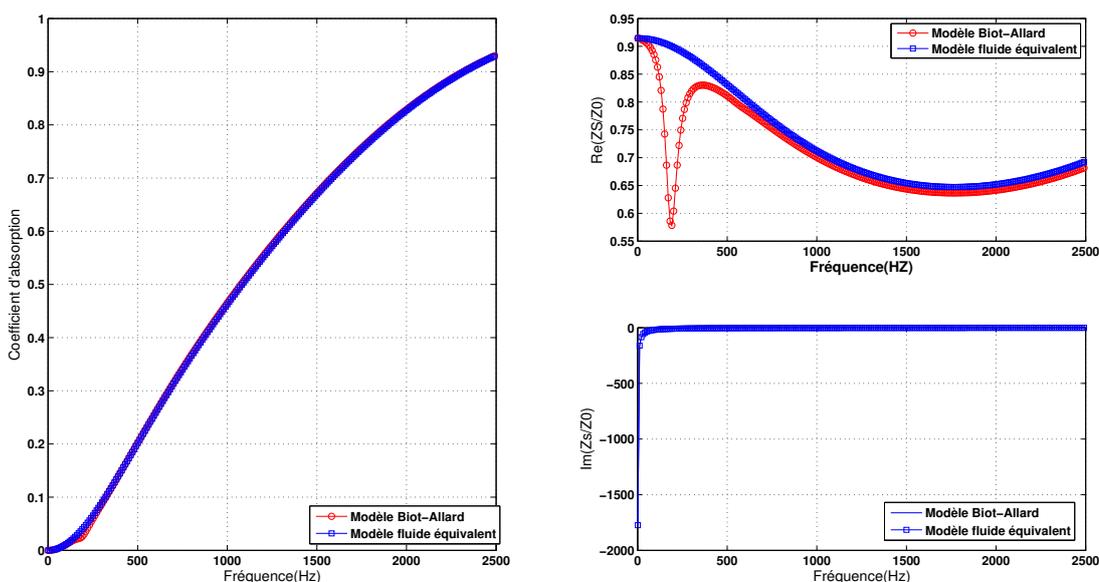


FIGURE 2.20 – Coefficient d’absorption et les parties réelle et imaginaire de textile fibreux : **Cas mur rigide**

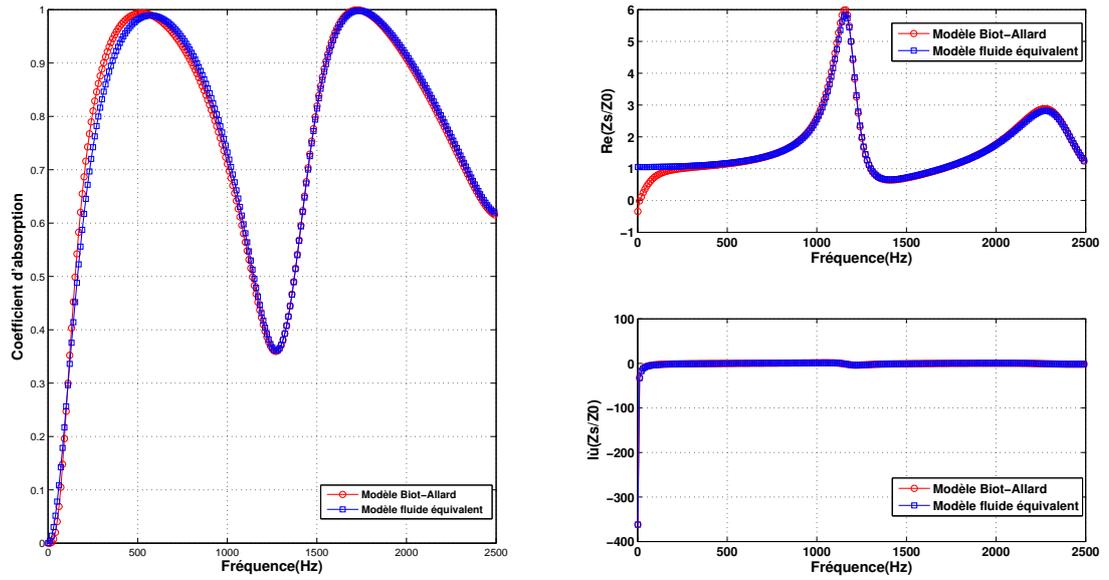


FIGURE 2.21 – Coefficient d’absorption et les parties réelle et imaginaire de textile fibreux : Cas lame d’air de 0.12 mm

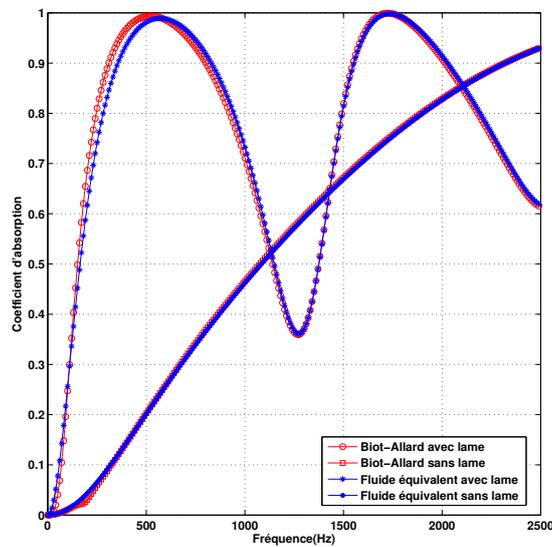


FIGURE 2.22 – Coefficient d’absorption pour les deux modèles du textile fibreux avec et sans lame d’air

VIII Conclusion

Ce chapitre nous a permis d’identifier les principaux modèles décrivant la propagation et la dissipation des ondes acoustiques et élastiques dans les milieux poreux. Deux modèles ont

été retenus dans cette recherche, le premier est le modèle poroélastique de Biot-Allard et le second est le modèle de fluide équivalent de Biot-Allard. Le deuxième est en fait le cas limite (matrice rigide) du premier. Ces deux modèles tiennent compte des mécanismes de dissipations associés aux effets visqueux et aux effets thermiques par l'introduction de la masse volumique dynamique complexe et d'un module de compressibilité dynamique complexe. A partir de ces grandeurs complexes, nous avons pu calculer les parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption dans les trois conditions aux limites d'arrière de milieux poreux (zéro de pression, mur rigide, et lame d'air).



3

APPROCHE ANALYTIQUE : MÉTHODE DES MATRICES DE TRANSFERT

I Introduction

La description du champ acoustique dans une couche poreuse n'est pas simple, car l'onde de cisaillement et les deux ondes de compression qui se propagent avant et arrière sont présentes. Dans un milieu stratifié avec des couches poreuses, couches solides élastiques et couches fluides, une description complète peut devenir très compliquée. Une représentation matricielle de propagation du son, similaire à celle utilisée par Brekhovskikh [Bre12], Folds and Loggins [FL77], Scharnhorst [Sch90] et Brouard et al [BLAT96], est décrite dans ce chapitre, et utilisée pour modéliser les champs plans acoustiques dans les médias stratifiés. Ces derniers sont supposés latéralement infinis. Ils peuvent être de différentes natures : solide élastique, plaque mince, fluide, rigide poreux, limp poreuse et poroélastique. Le modèle présenté est essentiellement basé sur la représentation de la propagation des ondes planes dans différents médias, en termes de matrices de transfert. Dans ce chapitre nous supposons que les milieux sont homogènes et isotropes. La modélisation est générale dans le sens où on peut gérer automatiquement les configurations arbitraires des médias stratifiées. Nous rappelons donc la méthode de la matrice de transfert, ensuite, celle de transfert de couplage des différents types de couches. Tout cela est suivi par le calcul des indicateurs acoustiques du problème. Enfin, des exemples d'applications pour les deux types de matériaux poreux (structure rigide et élastique) sont présentés.

II Méthode de la matrice de transfert

II.1 Principe de la méthode

Nous supposons qu'une onde plane acoustique se propage dans un matériau d'épaisseur h , à un angle d'incidence θ , (figure 3.1). La géométrie du problème est bi-dimensionnelle, dans l'incidence plane (x_1, x_3) . Divers types d'onde peuvent se propager dans le matériau, selon leur nature. La composante x_1 du nombre d'onde pour chaque onde se propageant dans le milieu fini est égale à k_t [AA09, BLA95, SB00, WR01, Low95, LP92]

$$k_t = k \sin \theta \quad (3.1)$$

Où k est le nombre d'onde à l'air libre. La propagation du son dans la couche est représentée par une matrice de transfert $[T]$ telle que :

$$V(M) = [T]V(M') \quad (3.2)$$

Où M et M' sont proches de la face avant et arrière de la couche, respectivement, et où les composantes du vecteur $V(M)$ sont les variables qui décrivent le champ acoustique au point M du milieu. La matrice $[T]$ dépend de l'épaisseur et des propriétés de chaque milieu.

II.2 Présentation matricielle des milieux classiques

II.2.1 Couche de fluide

Le champ acoustique dans un milieu fluide est complètement défini en chaque points M , (figure 3.1) par le vecteur :

$$V^f(M) = \left[p(M), v_3^f(M) \right]^T \quad (3.3)$$

Où p et v_3^f sont respectivement, la pression et la vitesse du fluide de la composante x_3 , .

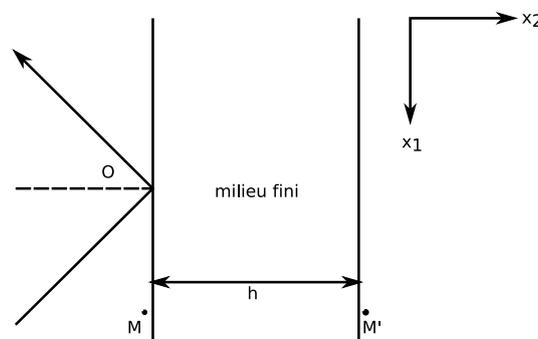


FIGURE 3.1 – Onde plane frappant un domaine fini d'épaisseur h

L'exposant T indique la transposition, $V^f(M)$ étant un vecteur de colonne.

Soient ρ et k respectivement la densité et le vecteur du nombre d'onde dans le fluide, défini par $(k^2 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$. Après élimination de la composante x_1 et du temps t , p et v_3 dans le fluide peuvent s'écrire sous la forme :

$$p(x_3) = A_1 \exp(-jk_3 x_3) + A_2 \exp(-jk_3 x_3) \quad (3.4)$$

$$v_3^f(x_3) = \frac{k_3}{\omega \rho} [A_1 \exp(-jk_3 x_3) + A_2 \exp(-jk_3 x_3)] \quad (3.5)$$

En mettant arbitrairement la coordonnée x_3 égale à zéro au point M' , les équations (3.4) et (3.5) peuvent être réécrites comme :

$$p(M') = A_1 + A_2 \quad (3.6)$$

$$v_3(M') = \frac{k_3}{\omega \rho} (A_1 - A_2) \quad (3.7)$$

En notant que h est l'épaisseur de la couche, les équations (3.6) et (3.7), avec $x_3 = -h$, peuvent être données par :

$$V^f(M) = [T] V^f(M') \quad (3.8)$$

Où la matrice de transfert $[T]$ 2×2 est donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(k_3 h) & j \frac{\omega \rho}{k_3} \sin(k_3 h) \\ j \frac{k_3}{\omega \rho} \sin(k_3 h) & \cos(k_3 h) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

II.2.2 Couche solide

Dans une couche solide élastique, les ondes longitudinale et transversale incidentes et réfléchies peuvent se propager. Le champ acoustique dans le matériau peut être complètement décrit en utilisant les quatre amplitudes de ces ondes. Les potentiels de déplacement associés peuvent s'écrire respectivement sous la forme :

$$\varphi = \exp(j\omega t - jk_1 x_1) [A_1 \exp(-k_{13} x_3) + A_2 \exp(jk_{13} x_3)] \quad (3.10)$$

$$\psi = \exp(j\omega t - jk_1 x_1) [A_3 \exp(-k_{33} x_3) + A_4 \exp(jk_{33} x_3)] \quad (3.11)$$

Où k_{13} et k_{33} sont respectivement les vecteurs de nombres d'onde de la composante x_3 donnés par :

$$\begin{cases} k_{13} = (\delta_1^2 - k_t^2)^{1/2} \\ k_{33} = ((\delta_3^2 - k_t^2)^{1/2} \end{cases} \quad (3.12)$$

Dans les équations (3.12), δ_1^2 et δ_3^2 sont respectivement, les racines des nombres d'ondes de l'onde longitudinale et cisaillement dans la couche de solide élastique, données par :

$$\begin{cases} \delta_1^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu_L} \\ \delta_3^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu_L} \end{cases} \quad (3.13)$$

Où ρ indique la densité du solide élastique, et λ et μ_L sont le premier et le second coefficient de Lamé (en général, ils sont des quantités complexes). Les constantes A_1, A_2, A_3 , et A_4 représentent les quatre ondes (incidentes et réfléchies) qui peuvent se propager dans la couche. Le champ acoustique dans la couche solide élastique peut être prédit si les quatre amplitudes sont connues. Au lieu de ces paramètres, quatre variables mécaniques peuvent être choisies pour exprimer la propagation du son partout dans le milieu. Cependant, différents systèmes de quatre quantités indépendantes v_1, v_3, σ_{33} , et σ_{13} peuvent être choisies [BLA95, SB00]. Soit V^s le vecteur :

$$V^s(M) = [v_1^s(M) \quad v_3^s(M) \quad \sigma_{33}^s(M) \quad \sigma_{13}^s(M)]^T \quad (3.14)$$

Dans ces équations, v_1^s et v_3^s sont respectivement les vitesses des composantes x_1 et x_3 au point M , σ_{33}^s et σ_{13}^s sont les contraintes normale et tangentielle respectives au point M . Elles sont données par :

$$\begin{cases} v_1^s = j\omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \\ v_3^s = j\omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} \sigma_{33}^s = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) + 2\mu_L \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ \sigma_{13}^s = \mu_L \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) \end{cases} \quad (3.16)$$

Pour obtenir la matrice de transfert $[T]$ 4×4 de la couche solide élastique, le vecteur $V^s(M)$ est d'abord relié au vecteur $A = [(A_1 + A_2), (A_1 - A_2), (A_3 + A_4), (A_3 - A_4)]$ par une matrice $[\Gamma(x_3)]$ telle que $V^s(M) = [\Gamma(x_3)]A$. Les équations (3.15) et (3.16) peuvent être utilisées pour évaluer $[\Gamma(x_3)]$ comme suit [AA09] :

$[\Gamma(x_3)] =$

$$\begin{bmatrix} \omega k_1 \cos(k_{13}x_3) & -j\omega k_{33} \sin(k_{13}x_3) & j\omega k_{33} \sin(k_{33}x_3) & -\omega k_{33} \cos(k_{33}x_3) \\ -\omega k_{13} \sin(k_{13}x_3) & \omega k_{13} \cos(k_{13}x_3) & \omega k_1 \cos(k_{33}x_3) & -j\omega k_1 \sin(k_{33}x_3) \\ -D_1 \cos(k_{13}x_3) & jD_1 \cos(k_{13}x_3) & jD_2 k_{33} \sin(k_{33}x_3) & -D_2 k_{33} \cos(k_{33}x_3) \\ D_2 k_{13} \sin(k_{13}x_3) & -D_2 k_{13} \cos(k_{13}x_3) & D_1 \cos(k_{33}x_3) & -jD_1 \sin(k_{33}x_3) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Avec $D_1 = \lambda(k_0^2 + k_{13}^2) + 2\mu_L k_{13}^2 = \mu_L(k_{13}^2 - k_0^2)$, et $D_2 = 2\mu_L k_0$. Si l'origine de l'axe x_3 est fixée au point M , les vecteurs $V^s(M)$ et $V^s(M')$ sont exprimés par :

$$\begin{cases} V^s(M) = [\Gamma(0)]A \\ V^s(M') = [\Gamma(h)]A \end{cases} \quad (3.18)$$

Ensuite, la matrice de transfert $[T]$ qui relie à $V^s(M)$ et $V^s(M')$ est égale à $[T] = [\Gamma(0)][\Gamma(h)]^{-1}$. Dans le but d'atténuer l'instabilité pouvant résulter de l'inversion de la matrice $[\Gamma(h)]$, l'origine de l'axe x_3 peut être fixée au point M' , et la matrice de transfert s'écrit :

$$[T^s] = [\Gamma(-h)][\Gamma(0)]^{-1} \quad (3.19)$$

L'inversion de la matrice $[\Gamma(0)]$ est calculée analytiquement par :

$$[\Gamma(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2k_1}{\omega\delta_3^2} & 0 & \frac{-1}{\mu_L\delta_3^2} & 0 \\ 0 & \frac{k_{33}^2 - k_1^2}{\omega k_{13}\delta_3^2} & 0 & \frac{-k_1}{\mu_L k_{13}\delta_3^2} \\ 0 & \frac{k_1}{\omega\delta_3^2} & 0 & \frac{1}{\mu_L\delta_3^2} \\ \frac{k_{33}^2 - k_1^2}{\omega k_{33}\delta_3^2} & 0 & \frac{-k_1}{\mu_L k_{33}\delta_3^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

II.2.3 Couche poroélastique

Dans le contexte de la théorie de Biot, trois types d'ondes peuvent se propager dans le milieu poreux : deux ondes de compression et une onde de cisaillement. Notons que \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 , et \mathbf{k}'_1 , \mathbf{k}'_2 , \mathbf{k}'_3 , représentent respectivement les vecteurs nombres d'ondes pour les ondes de compression (les indices 1, 2), et l'onde de cisaillement (l'indice 3). Ces quantités sont données dans le chapitre 2, par les équations (2.83), (2.84) et (2.103). Les composantes x_3 des vecteurs de nombres d'ondes sont :

$$\begin{cases} k_{i3} = (k_i^2 - k_t^2)^{1/2} & i = 1, 2, 3 \\ k'_{i3} = -k_{i3} & i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.21)$$

La racine carrée donne une partie réelle positive. Dans la représentation complexe, les potentiels de déplacement de la structure pour les ondes de compression peuvent être écrits sous la forme :

$$\varphi_i^s = A_i \exp(j(\omega t - k_{i3}x_3 - k_t x_1)) + A'_i \exp(j(\omega t + k_{i3}x_3 - k_t x_1)) \quad (3.22)$$

Les déplacements induits par les ondes rotationnelles sont parallèles au plan $(x_1, 0, x_3)$, et la seule composante x_2 du potentiel du vecteur est différente de zéro. Cette composante est :

$$\varphi_2^s = A_3 \exp(j(\omega t - k_{33}x_3 - k_t x_1)) + A'_3 \exp(j(\omega t + k_{33}x_3 - k_t x_1)) \quad (3.23)$$

Les potentiels de déplacement d'air sont reliés aux potentiels de déplacement de la structure par :

$$\varphi_i^f = \mu_i \varphi_i^s \quad i = 1, 2 \quad (3.24)$$

et

$$\psi_2^f = \mu_3 \psi_2^s \quad (3.25)$$

Le rapport μ_i , pour $i = 1, 2$, de la vitesse de l'air à la vitesse de la structure pour les deux ondes de compression, et μ_3 pour l'onde de cisaillement sont donnés dans le chapitre (2) par les équations (2.90), (2.91) et (2.104). Les champs de déplacement de la structure et de l'air sont complètement connus si A_1 , A_2 , A_3 , A'_1 , A'_2 , A'_3 le sont, tandis que les contraintes peuvent être calculées par l'équation (2.16).

II.2.3.1 Présentation matricielle : Le champ acoustique dans la couche poreuse est représenté par six ondes, et peut être décrit par les équations (3.22) et (3.23). Il peut être prédit partout si les six amplitudes $A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3$ sont connues. Cependant, au lieu de ces paramètres, on peut choisir six quantités acoustiques indépendantes : trois composantes de la vitesse et trois éléments du tenseurs de contraintes ; les deux composantes de la vitesse v_1^s et v_3^s dans la structure, la composantes de la vitesse v_3^f dans le fluide, deux composantes du tenseur de contrainte σ_{33}^s et σ_{13}^s dans la structure, et σ_{33}^f dans le fluide. Si ces six quantités sont connues au point M dans la couche, le champ acoustique peut être prédit partout dans la couche. De plus les valeurs de ces quantités en tout point dans la couche dépendent linéairement de celles au point M . Soit V^p le vecteur :

$$V^p(M) = \left[v_1^s(M) \quad v_3^s(M) \quad v_3^f(M) \quad \sigma_{33}^s(M) \quad \sigma_{13}^s(M) \quad \sigma_{33}^f(M) \right]^T \quad (3.26)$$

L'indice T indique la transposition, $V(M)$ étant un vecteur de colonne. Ces six quantités sont écrites sous la forme :

$$\begin{cases} v_1^s = j\omega \left(\frac{\partial \varphi_1^s}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2^s}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2^s}{\partial x_3} \right) \\ v_3^s = j\omega \left(\frac{\partial \varphi_1^s}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_2^s}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_2^s}{\partial x_1} \right) \\ v_3^f = j\omega \left(\frac{\partial \varphi_1^f}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_2^f}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_2^f}{\partial x_1} \right) \end{cases} \quad (3.27)$$

et

$$\begin{cases} \sigma_{33}^s = (P - 2N) \left(\frac{\partial^2(\varphi_1^s + \varphi_2^s)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\varphi_1^s + \varphi_2^s)}{\partial x_3^2} \right) \\ \quad + Q \left(\frac{\partial^2(\varphi_1^f + \varphi_2^f)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\varphi_1^f + \varphi_2^f)}{\partial x_3^2} \right) + 2N \left(\frac{\partial^2(\varphi_1^s + \varphi_2^s)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \psi_2^s}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ \sigma_{13}^s = N \left(2 \frac{\partial^2(\varphi_1^s + \varphi_2^s)}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \psi_2^s}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi_2^s}{\partial x_3^2} \right) \\ \sigma_{33}^f = R \left(\frac{\partial^2(\varphi_1^f + \varphi_2^f)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\varphi_1^f + \varphi_2^f)}{\partial x_3^2} \right) + Q \left(\frac{\partial^2(\varphi_1^s + \varphi_2^s)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\varphi_1^s + \varphi_2^s)}{\partial x_3^2} \right) \end{cases} \quad (3.28)$$

Où N est le module de cisaillement du matériau, P , Q , et R sont les coefficients élastiques de Biot définis dans le chapitre 2. Si M et M' sont respectivement mis à proximité, à la face avant et arrière de la couche, une matrice $[T^p]$ qui dépend de l'épaisseur h et des propriétés physiques du matériau reliant $V^p(M)$ à $V^p(M')$ se met sous la forme :

$$V^p(M) = [T^p] V^p(M') \quad (3.29)$$

Les éléments de la matrice T_{ij} ont été calculés en suivant les étapes suivantes : Soit A le vecteur colonne :

$$A = \left[(A_1 + A'_1), (A_1 - A'_1), (A_2 + A'_2), (A_2 - A'_2), (A_3 + A'_3), (A_3 - A'_3) \right]^T \quad (3.30)$$

et soit $[\Gamma(x_3)]$, la matrice reliant $V^p(M)$ dans x_3 à A

$$V^p(M) = [\Gamma(0)] A, \quad V^p(M') = [\Gamma(h)] A \quad (3.31)$$

Les vecteur $V^p(M)$ et $V^p(M')$ sont reliés par :

$$V^p(M) = [\Gamma(0)] [\Gamma(h)]^{-1} V^p(M') \quad (3.32)$$

et donc $[T^p]$ est égale à :

$$[T^p] = [\Gamma(0)] [\Gamma(h)]^{-1} \quad (3.33)$$

Afin d'éviter l'inversion d'une matrice, l'origine de l'axe x_3 peut être changée, et les équations suivantes peuvent être utilisées :

$$[T^p] = [\Gamma(-h)] [\Gamma(0)]^{-1} \quad (3.34)$$

La matrice $[\Gamma(0)]^{-1}$ peut être évaluée analytiquement.

II.2.3.2 Evaluation des matrices $[T]$ et $[T^p]$: Dans le but de calculer les éléments de $[\Gamma(0)]^{-1}$, les quantités $v_1^s, v_3^s, v_3^f, \sigma_{13}^s, \sigma_{33}^s$, et σ_{33}^f doivent être évaluées à partir des potentiels φ_1^s, φ_2^s , et ψ^f . La composante de la vitesse v_1^f sera également calculée en détail. Les composantes v_1^s et v_3^s sont obtenues en utilisant φ_1^s, φ_2^s , et ψ_2^f comme déterminés par les équations (3.22) et (3.23) dans l'équation (3.27).

$$v_1^s = j\omega \left[\sum_{i=1,2} \{-jk_t(A_i + A'_i)\cos(k_{i3}x_3) - k_t(A_i - A'_i)\sin(k_{i3}x_3)\} \right. \\ \left. + k_{33}(A_3 + A'_3)\sin(k_{33}x_3) + jk_{33}(A_3 - A'_3)\cos(k_{33}x_3) \right] \quad (3.35)$$

$$v_3^s = j\omega \left[\sum_{i=1,2} \{-jk_{i3}(A_i + A'_i)\sin(k_{i3}x_3) - jk_{i3}(A_i - A'_i)\cos(k_{i3}x_3)\} \right. \\ \left. - jk_t(A_3 + A'_3)\cos(k_{33}x_3) - jk_t(A_3 - A'_3)\sin(k_{33}x_3) \right] \quad (3.36)$$

Dans ces équations la dépendance du temps et de x_1 a été éliminée, et les vitesses v_1^f et v_3^f peuvent être évaluées à partir des potentiels de déplacement φ_1^f, φ_2^f , et ψ^f qui sont reliés à φ_1^s, φ_2^s , et ψ^s par les équations (3.27)

$$v_1^f = j\omega \left[\sum_{i=1,2} \{-jk_t\mu_i(A_i + A'_i)\cos(k_{i3}x_3) - k_t\mu_i(A_i - A'_i)\sin(k_{i3}x_3)\} \right. \\ \left. + k_{33}\mu_3(A_3 + A'_3)\sin(k_{33}x_3) + jk_{33}\mu_3(A_3 - A'_3)\cos(k_{33}x_3) \right] \quad (3.37)$$

$$v_3^f = j\omega \left[\sum_{i=1,2} \{-jk_{i3}\mu_i(A_i + A'_i)\sin(k_{i3}x_3) - jk_{i3}\mu_i(A_i - A'_i)\cos(k_{i3}x_3)\} \right. \\ \left. - jk_t\mu_3(A_3 + A'_3)\cos(k_{33}x_3) - k_t\mu_3(A_3 - A'_3)\sin(k_{33}x_3) \right] \quad (3.38)$$

Les deux composantes σ_{33}^s et σ_{13}^s du tenseur des contraintes dans le squelette, et σ_{33}^f dans le fluide, peuvent être calculées par les équations (2.16)

$$\sigma_{33}^s = (P - 2N) \nabla \cdot \mathbf{u}^s + Q \nabla \cdot \mathbf{u}^f + 2N \frac{\partial u_3^s}{\partial x_3} \quad (3.39)$$

$$\sigma_{13}^s = N \left(\frac{\partial u_1^s}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^s}{\partial x_1} \right) \quad (3.40)$$

$$\sigma_{33}^f = R \nabla \cdot \mathbf{u}^f + Q \nabla \cdot \mathbf{u}^s \quad (3.41)$$

Les potentiels de déplacement peuvent être utilisés pour exprimer les dérivations spatiales pour les composantes x_1 et x_3 de \mathbf{u}^s et \mathbf{u}^f dans les équations (3.39)-(3.41) sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^s = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\varphi_1^s + \varphi_2^s) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\varphi_1^s + \varphi_2^s) \quad (3.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^f = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\mu_1 \varphi_1^s + \mu_2 \varphi_2^s) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\mu_1 \varphi_1^s + \mu_2 \varphi_2^s) \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial u_3^s}{\partial x_3} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\varphi_1^s + \varphi_2^s) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial u_1^s}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^s}{\partial x_1} = 2 \frac{\partial^2 (\varphi_1^s + \varphi_2^s)}{\partial x_1 \partial x_3} + \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_3^2} \right) \quad (3.45)$$

et les équations (3.39)-(3.41) peuvent être réécrites comme :

$$\sigma_{13}^s = N \left[2k_t \sum_{1,2} k_{i3} \{j(A_i + A'_i)\sin(k_{i3}) - (A_i - A'_i)\cos(k_{i3}x_3)\} \right. \\ \left. + (k_{33}^2 - k_t^2) [(A_3 + A'_3)\cos(k_{33}x_3) - j(A_3 - A'_3)\sin(k_{33}x_3)] \right] \quad (3.46)$$

$$\sigma_{33}^s = \sum_{1,2} \{[-(P + Q\mu_i)(k_t^2 + k_{i3}^2) + 2Nk_t^2](A_i + A'_i)\cos(k_{i3}x_3) \\ + j[(P + Q\mu_i)(k_t^2 + k_{i3}^2) - 2Nk_t^2](A_i - A'_i)\sin(k_{i3}x_3) \\ + 2jNk_t k_{33}(A_3 + A'_3)\sin(k_{33}x_3) - 2Nk_t k_{33}(A_3 - A'_3)\cos(k_{33}x_3)\} \quad (3.47)$$

$$\sigma_{33}^f = \sum_{1,2} (Q + R\mu_i)(k_t^2 + k_{i3}^2) \{-(A_i - A'_i)\cos(k_{i3}x_3) + j(A_i - A'_i)\sin(k_{33}x_3)\} \quad (3.48)$$

Les coefficients des termes $(A_1 \pm A'_1)$, $(A_2 \pm A'_2)$, $(A_3 \pm A'_3)$, dans les équations (3.37), (3.38) et (3.46)-(3.48) sont les éléments de la matrice $\Gamma_{ij}(x_3)$ comme donnés dans le (tableau 3.1). Dans ce dernier, D_i et E_i sont donnés par :

$$D_i = (P + Q\mu_i)(k_t^2 + k_{i3}^2) - 2Nk_t^2 \quad i = 1, 2 \quad (3.49)$$

$$E_i = (R\mu_i + Q)(k_t^2 + k_{i3}^2) \quad i = 1, 2 \quad (3.50)$$

La matrice $[T^p] = [\Gamma(0)][\Gamma(h)]^{-1}$ est bien développée dans l'Annexe A.

TABLE 3.1 – Eléments de la matrice $\Gamma_{ij}(x_3)$

Les trois premières colonnes de $[\Gamma]$		
$\omega_t \cos(k_{i3}x_3)$	$-j\omega k_t \sin(k_{i3}x_3)$	$\omega k_t \cos(k_{23}x_3)$
$-j\omega k_{i3} \sin(k_{i3}x_3)$	$\omega k_{i3} \cos(k_{i3}x_3)$	$-j\omega k_{23} \sin(k_{23}x_3)$
$-j\omega k_{i3}\mu_1 \sin(k_{i3}x_3)$	$\omega k_{i3}\mu_1 \sin(k_{i3}x_3)$	$-j\omega k_{23}\mu_2 \sin(k_{23}x_3)$
$-D_1 \cos(k_{i3}x_3)$	$jD_1 \sin(k_{i3}x_3)$	$-D_2 \cos(k_{23}x_3)$
$2jNk_t k_{i3} \sin(k_{i3}x_3)$	$-2Nk_t k_{i3} \cos(k_{i3}x_3)$	$2jNk_t k_{23} \sin(k_{23}x_3)$
$-E_1 \cos(k_{i3}x_3)$	$-E_1 \sin(k_{i3}x_3)$	$-E_2 \cos(k_{23}x_3)$
Les trois dernières colonnes de $[\Gamma]$		
$-j\omega k_t \sin(k_{23}x_3)$	$j\omega k_{33} \sin(k_{33}x_3)$	$-\omega k_{33} \cos(k_{33}x_3)$
$\omega \mu_2 k_{23} \cos(k_{23}x_3)$	$\omega k_t \cos(k_{33}x_3)$	$-j\omega k_t \sin(k_{33}x_3)$
$\omega k_{23} \cos(k_{23}x_3)$	$\omega \mu_3 k_t \cos(k_{33}x_3)$	$-j\omega \mu_3 k_t \sin(k_{33}x_3)$
$jD_2 \sin(k_{23}x_3)$	$2jNk_{33}k_t \sin(k_{33}x_3)$	$-2Nk_{33}k_t \cos(k_{33}x_3)$
$-2Nk_{23}k_t \cos(k_{23}x_3)$	$N(k_{33}^2 - k_t^2) \cos(k_{33}x_3)$	$-jN(k_{33}^2 - k_t^2) \sin(k_{33}x_3)$
$jE_2 \sin(k_{23}x_3)$	0	0

II.2.4 Plaque élastique mince

Dans le cas d'une plaque élastique en flexion (raideur D , épaisseur h et la masse m), l'harmonique de l'équation de mouvement est donnée par :

$$Z_s(\omega)v_3(M') = \sigma_{33}(M') - \sigma_{33}(M) \quad (3.51)$$

Où

$$Z_s(\omega) = j\omega m \left(1 - \frac{Dk_t^4}{\omega^2 m} \right) \quad (3.52)$$

est l'impédance mécanique du panneau et $k_t = k_0 \sin\theta$ avec k_0 le nombre d'onde dans l'air libre. $\sigma_{33}(M)$ et $\sigma_{33}(M')$ sont respectivement, les contraintes normales juste devant et derrière la plaque et v_3 est la vitesse normale de la plaque mince $v_3 = v_3(M) = v_3(M')$. L'utilisation du vecteur $V(M) = [\sigma(M)v_3(M)]^T$ pour exprimer le champ mécanique en un point M de la plaque, nous permet de déduire directement la matrice de transfert $[T^i]$ reliant $V(M)$ et $V(M')$ à partir de l'équation (51)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -Z_s(\omega) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Notons que l'impédance mécanique du panneau peut être écrite sous la forme équivalente :

$$Z_s(\omega) = j\omega m \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \sin^4 \theta \right] \quad (3.54)$$

Où

$$\omega_c = c^2 \sqrt{\frac{m}{D}}$$

est la fréquence critique du panneau. L'amortissement dans le panneau peut être expliqué par l'utilisation de la valeur complexe du module de Young.

II.2.5 Ecrans imperméables

Les écrans imperméables sont habituellement utilisés pour couvrir ou protéger les matériaux acoustiques. Leur modélisation, en utilisant la méthode de la matrice de transfert, dépend de leur installation. Quand ils sont libres de se déplacer, en présence de l'air dans les deux cotés, ils peuvent être simplement modélisés comme une plaque mince avec une raideur négligeable. L'impédance mécanique dans ce cas là est donnée par $Z(\omega) = j\omega m$. Quand l'écran est lié à un matériau poreux, la modélisation nécessite de tenir compte des forces d'interface.

Soit M et M' deux points proches, respectivement, à la face avant et arrière de l'écran dans le contact mécanique. En supposant que l'écran peut être flexible avec une rigidité non négligeable, les lois de Newton appliquées à l'écran, aboutissent à :

$$j\omega m v_3(M') = \sigma_{33}^s(M') - \sigma_{33}^s(M) - D \frac{\partial^4 v_3(M')}{j\omega \partial x_1^4} \quad (3.55)$$

$$j\omega m v_1(M') = \sigma_{13}^s(M') - \sigma_{13}^s(M) + S \frac{\partial^2 v_1(M')}{j\omega \partial x_1^2} \quad (3.56)$$

Dans ces équations, v_1^s et v_3^s sont respectivement, les vitesses de la composants x_1 et x_3 au point M . σ_{33}^s et σ_{13}^s sont les contraintes normales et tangentielles au point M . Les quantités m , D , et S sont respectivement, la masse par unité de surface, la rigidité à la flexion, et la rigidité de la membrane de l'écran. Les opérateurs $\partial^2/\partial^2 x_1^2$ et $\partial^4/\partial^4 x_1^4$ peuvent être remplacés respectivement par $-k_t^2$ et $-k_t^4$. Par conséquent, les équations de gouvernance de l'écran s'écrivent :

$$j\omega m \left(1 - \frac{Dk_t^4}{m\omega^2} \right) v_3^s(M') = \sigma_{33}^s(M') - \sigma_{33}^s(M) \quad (3.57)$$

$$j\omega m \left(1 - \frac{Sk_t^2}{m\omega^2} \right) v_1^s(M') = \sigma_{13}^s(M') - \sigma_{13}^s(M) \quad (3.58)$$

La vitesse de l'écran $v(M)$ est la même dans les deux faces.

En utilisant $V^s(M) = [v_1^s(M) \quad v_3^s(M) \quad \sigma_{33}^s(M) \quad \sigma_{13}^s(M)]^T$ pour décrire les variables de l'écran, les équations (3.57) et (3.58) avec une même vitesse aux points M et M' , mènent à la matrice

de transfert 4×4 suivante :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_s(\omega) & 1 & 0 \\ -Z'_s(\omega) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Où $Z_s(\omega) = j\omega m (1 - Dk_t^4/m\omega^2)$ et $Z'_s(\omega) = j\omega m (1 - Sk_t^2/m\omega^2)$. Les conditions d'interface décrites dans la section (II.4.2) pour une couche solide peuvent être utilisées lorsque l'écran est en contact avec un milieu poreux ou un fluide. Dans le cas d'un écran imperméable et d'une rigidité négligeable, la modélisation est similaire à celle d'une membrane flexible. Dans ce cas l'équation (3.55) est remplacée par :

$$j\omega m v_3(M') = \sigma_{33}^s(M') - \sigma_{33}^s(M) + I \frac{\partial^2 v_3(M')}{j\omega \partial x_1^2} \quad (3.60)$$

et en conséquence, l'impédance Z dans l'équation (3.58) est remplacée par $Z_s''(\omega) = j\omega m (1 - Ik_t^2/m\omega^2)$ où I est la tension de l'écran.

II.2.6 Autres matériaux

La méthode de la matrice de transfert peut être généralisée pour tenir compte d'autres domaines tels que les plaques épaisses, plaques orthotropes, panneaux composites et sandwichs, les matériaux poreux isotopes transverses, etc. Dans ces cas les matrices de transfert sont formulées en termes de l'onde principale (direction de la propagation) dans le plan (x_1, x_3) .

II.3 Matrices de transfert de couplage

Les matrices de transfert des différents types de couches ont été évaluées dans la section précédente. Cette section est consacrée aux conditions de continuité entre deux couches adjacentes de nature différentes. La figure (3.2) illustre un milieu stratifié, où les deux points M_{2k} et M_{2k+1} ($k = 1, n - 1$) sont proches de chaque côté de la frontière entre les couches (k) et ($k + 1$). Une matrice d'interface, qui dépend de la nature des deux couches, doit être utilisée pour relier les vecteurs de champ acoustiques $V^{(k)}(M_{2k})$ et $V^{(k+1)}(M_{2k+1})$. Pour simplifier le problème, les matrices d'interface sont dérivées pour les deux premières couches de la (figure 3.2)

II.3.1 Deux couches de même nature

Si deux couches de même nature sont adjacentes (figure 3.2), les conditions de continuité sont exploitées pour construire une matrice de transfert globale décrivant la propagation acoustique entre M_1 et M_4 . Si les deux couches ne sont pas poreuses, la matrice de transfert globale est simple, et égale au produit des matrices de transfert des deux couches. Par contre, si les deux

couches sont poreuses, les conditions de continuité sont affectées par la porosité des couches comme suit :

$$v_1^s(M_2) = v_1^s(M_3) \quad (3.61)$$

$$v_3^s(M_2) = v_3^s(M_3) \quad (3.62)$$

$$\phi_1(v_3^f(M_2) - v_3^s(M_2)) = \phi_2(v_3^f(M_3) - v_3^s(M_2)) \quad (3.63)$$

$$\sigma_{33}^s(M_2) + \sigma_{33}^f(M_2) = \sigma_{33}^s(M_3) + \sigma_{33}^f(M_3) \quad (3.64)$$

$$\sigma_{13}^s(M_2) = \sigma_{13}^s(M_3) \quad (3.65)$$

$$\frac{\sigma_{33}^f(M_2)}{\phi_1} = \frac{\sigma_{33}^f(M_3)}{\phi_2} \quad (3.66)$$

Dans ce cas, la matrice de transfert globale, $[T^p]$ est écrite comme :

$$[T^p] = [T_1^p][I_{pp}][T_2^p] \quad (3.67)$$

Où, $[T_1^p]$ et $[T_2^p]$ sont les matrices de transfert des deux couches poreuses, et $[I_{pp}]$ est une matrice

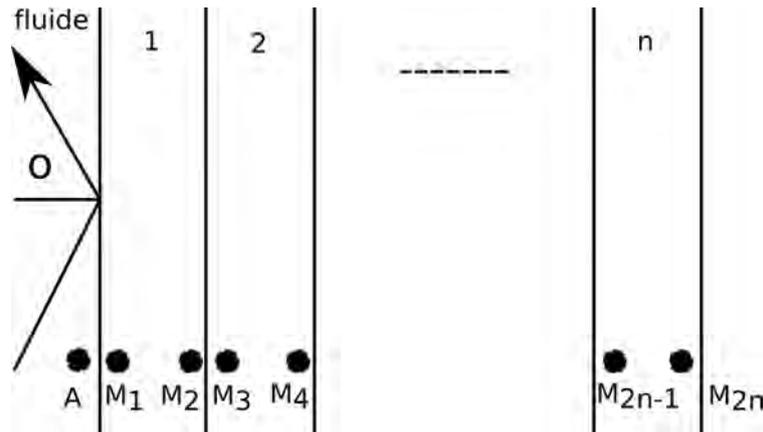


FIGURE 3.2 – Onde plane dans un milieu multicouche

d'interface 6×6 construite de l'équation (65)

$$[I_{pp}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \phi_2/\phi_1) & \phi_2/\phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (1 - \phi_1/\phi_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1/\phi_2 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Notons que cette matrice d'interface est égale à la matrice unitaire 6×6 si les deux couches ont la même porosité. Dans le cas d'un milieu poreux isotrope, les composantes du vecteur $V(z)[u_x^s, v_y^s, w_z^s, \sigma_{zz}^t, \sigma_{zx}^t, p]^T$ sont égales, pour chaque coté de la frontière entre deux couches

poreuses. Donc, la matrice d'interface est une matrice unitaire dans cette représentation et la matrice de transfert d'un milieu poreux stratifié est simplement le produit des matrices d'interface de chaque couche.

II.3.2 Interfaces entre les couches de nature différente

Lorsque les couches adjacentes ont une nature différente, les équations de la continuité peuvent être utilisées pour relier les deux matrices d'interface $[I_{12}]$ et $[J_{12}]$ aux vecteurs variables du champ à M_1 et M_2 :

$$[I_{12}]V^{(1)}(M_2) + [J_{12}]V^{(2)}(M_3) = 0 \quad (3.69)$$

Les matrices $[I_{12}]$ et $[J_{12}]$ dépendent de la nature des deux couches liées. Le nombre de lignes pour les deux matrices est égal au nombre des équations de continuité à l'interface. Ces matrices d'interface sont reliées aux vecteurs du champ aux points M_2 et M_3 , par les équations (3.69). Etant donné que $V^{(2)}(M_3) = [T^{(2)}]V^{(2)}(M_4)$ où $[T^{(2)}]$ est la matrice de transfert de la deuxième couche, la propagation acoustique entre les points M_2 et M_4 est exprimée par :

$$[I_{12}]V^{(1)}(M_2) + [J_{12}][T^{(2)}]V^{(2)}(M_4) = 0 \quad (3.70)$$

Les expressions des matrices d'interface pour les différentes interfaces sont données dans les paragraphes suivants :

II.3.2.1 Interface solide-fluide :

Les conditions de continuité sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_3^s(M_2) &= v_3^s(M_3) \\ \sigma_{33}^s(M_2) &= -p(M_3) \\ \sigma_{13}^s(M_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Ces équations peuvent être réécrites comme $[I_{sf}]V^{(s)}(M_2) + [J_{sf}]V^{(f)}(M_3) = 0$, avec

$$[I_{sf}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [J_{sf}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Les matrices $[I]$ et $[J]$ doivent permuter pour une interface fluide-solide. Les mêmes matrices peuvent être utilisées pour une interface solide-plaque mince.

II.3.2.2 Interface Poreux-fluide :

Les conditions de continuité sont données par :

$$\begin{aligned}
 (1 - \phi)v_3^s(M_2) + (1 - \phi)v_3^f(M_2) &= v_3^f(M_3) \\
 \sigma_{33}^s(M_2) &= -(1 - \phi)p(M_3) \\
 \sigma_{13}^s(M_2) &= 0 \\
 \sigma_{33}^f(M_2) &= -\phi p(M_3)
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Où ϕ est la porosité de la couche poreuse. Ces équations peuvent être réécrites sous la forme $[I_{pf}]V^{(p)}(M_2) + [J_{pf}]V^{(f)}(M_3) = 0$, avec :

$$[I_{pf}] = \begin{bmatrix} 0 & (1 - \phi) & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [J_{pf}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ (1 - \phi) & 0 \\ 0 & 0 \\ \phi & 0 \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

Les matrices $[I]$ et $[J]$ doivent permuter pour l'interface fluide-poreux.

II.3.2.3 Interface solide-poreux :

Les conditions de continuité sont données par :

$$\begin{aligned}
 v_1^s(M_2) &= v_1^s(M_3) \\
 v_3^s(M_2) &= v_3^s(M_3) \\
 v_3^s(M_2) &= v_3^f(M_3) \\
 \sigma_{33}^s(M_2) &= \sigma_{33}^s(M_3) + \sigma_{33}^f(M_3) \\
 \sigma_{13}^s(M_2) &= \sigma_{13}^s(M_3)
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

qui peuvent être réécrites comme $[I_{sp}]V^{(s)}(M_2) + [J_{sp}]V^{(p)}(M_3) = 0$, avec

$$[I_{sp}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [J_{sp}] = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

Les matrices $[I]$ et $[J]$ doivent permuter pour une interface poreux-solide. Notons que ces matrices peuvent être utilisées pour l'interface de l'écran imperméable dans le contact mécanique.

II.3.2.4 Interface plaque mince-poreux :

Pour une plaque mince en contact avec une couche poreuse, les conditions de continuité sont :

$$\begin{aligned}
 v_3^s(M_2) &= v_3(M_3) \\
 v_3^f(M_2) &= v_3(M_3) \\
 \sigma_{33}^s(M_2) + \sigma_{33}^f(M_2) &= -p(M_3) \\
 \sigma_{13}^s(M_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Où $p = -\sigma_{33}$ représente la pression à l'interface de la plaque avec le milieu poreux. Ces conditions peuvent être réécrites comme $[I_{pi}]V^{(p)}(M_2) + [J_{pi}]V^{(i)}(M_3) = 0$, avec

$$[I_{pi}] = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [J_{pi}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

III Assemblage de la matrice de transfert globale

Un simple produit entre les matrices de transfert et d'interface ne peut généralement être utilisé pour calculer la matrice de transfert globale pour un milieu stratifié, parce que la plupart des matrices d'interface ne sont pas carrées, et aussi, reliées dans l'équation (3.70) aux vecteurs du champ acoustique à la frontière des couches adjacentes dans le milieu stratifié. Pour un milieu illustré dans la (figure 3.2), on obtient les relations suivantes :

$$[I_{f1}]V^{(f)}(A) + [J_{f1}][T^{(1)}]V^{(1)}(M_2) = 0 \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
 [I_{(k)(k+1)}]V^{(k)}(M_{2k}) + [J_{(k)(k+1)}][T^{(k+1)}]V^{(k)}(M_{2(k+1)}) &= 0, \\
 k &= 1, \dots, n-1
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Cette série d'équations peut être réécrite sous la forme $[D_0]V_0 = 0$, Où

$$[D_0] = \begin{bmatrix} [I_{f1}] & [J_{f1}][T^{(1)}] & [0] & \cdots & [0] & [0] \\ [0] & [I_{12}] & [J_{12}][T^{(2)}] & \cdots & [0] & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & [0] & \cdots & [J_{(n-2)(n-1)}][T^{(n-1)}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & \cdots & [I_{(n-1)(n)}] & [J_{(n-1)(n)}][T^{(n)}] \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

et

$$V_0 = \left[v^f(A) \quad v^{(1)}(M_2) \quad v^{(2)}(M_3) \quad \dots \quad v^{(n-1)}(M_{2n-2}) \quad v^{(n)}(M_{2n}) \right]^T \tag{3.82}$$

La matrice D_0 est rectangulaire. Cependant, la matrice de transfert globale doit être carrée puisque le problème physique est bien posé. Sur le coté d'excitation, une équation d'impédance reliant la pression à la vitesse normale manque. Au niveau de la limite, les conditions de l'impédance reliant les grandeurs de champ manquent également. Ces conditions d'impédance sont trois pour une couche poreuse, deux pour une couche solide et une pour un fluide, plaque mince ou une couche imperméable. Donc, si N est la dimension de V_0 ; $[D_0]$ a $(N - 4)$ lignes si la dernière couche est poreuse, $(N - 3)$ lignes si cette couche est un solide élastique, et $(N - 2)$ lignes si elle est fluide (ou un fluide équivalent), plaque mince ou écran imperméable. Les conditions d'impédance aux limites dépendent étroitement de la nature de condition arrière : mur rigide ou domaine de fluide semi-infini.

III.1 Condition du mur rigide

Si la multicouche est soutenue par un mur rigide (figure 3.3), et si une composante du vecteur de champ $V^{(n)}(M_{2n})$ est une vitesse, alors cette composante est égale à zéro (impédance infinie). Ces conditions peuvent être écrites sous la forme $[Y^{(n)}]V^{(n)}(M_{2n}) = 0$, où $[Y^{(n)}]$ et $V^{(n)}$ sont définis selon la nature de la couche (n) :

$$[Y^p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Y^s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Y^f] = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (3.83)$$

Où l'exposant se réfère à la nature de la couche en contact avec le mur : p pour poreux, s pour solide, et f pour le fluide, fluide équivalent, plaque mince ou écran imperméable. Autrement, le vecteur $V^{(n)}$ est le vecteur variable du champ de la couche en contact du mur. Par addition des nouvelles équations au système précédent, $[D_0]V_0 = 0$, un nouveau système est obtenu pour la matrice $[D]$ à $(N - 1)$ lignes et N colonnes :

$$[D]V = 0 : [D] \begin{bmatrix} \dots \dots \dots [D_0] \dots \dots \dots \\ [0] \quad \dots \quad [0] \quad [Y^{(n)}] \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

III.2 Condition de fluide semi-infini

Si la multicouche se termine par une couche de fluide semi-infini (figure 3.4), les conditions de continuité peuvent être réécrites pour les vecteur $V^{(n)}(M_{2n})$ et le vecteur de fluide semi-infini $V^f(B)$, où B est un point dans le fluide semi-infini, proche de la frontière. Elles sont exprimées par :

$$[I_{(n)f}]V^{(n)}(M_{2n}) + [J_{(n)f}]V^f(B) = 0 \quad (3.85)$$

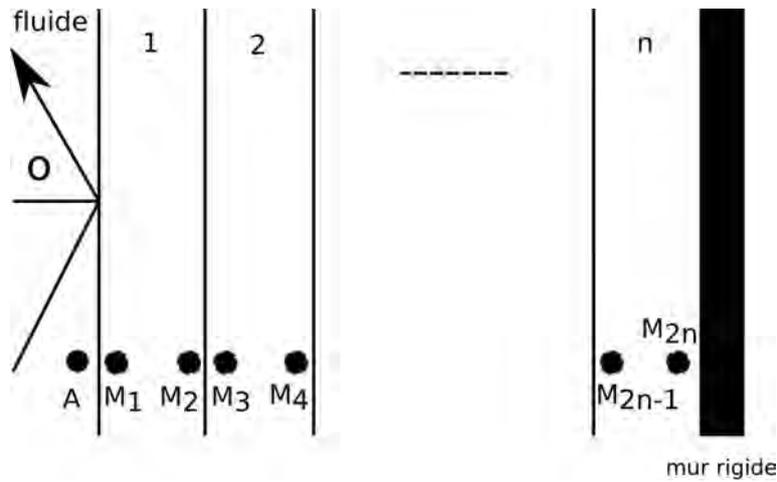


FIGURE 3.3 – Milieu multicouche soutenu par un mur rigide

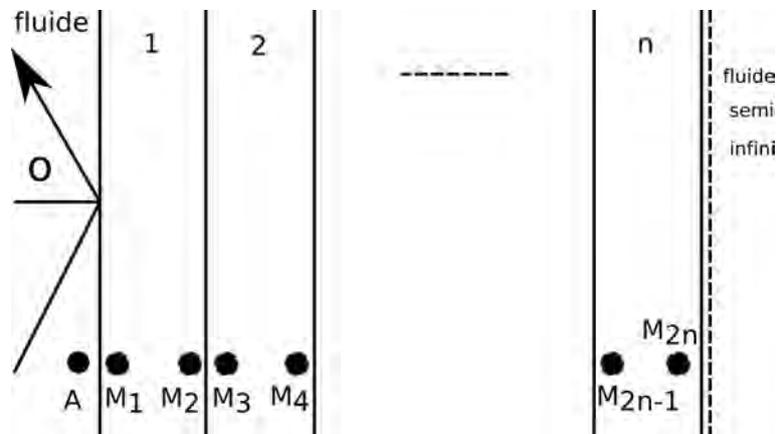


FIGURE 3.4 – Domaine de milieux multicouches soutenu par un fluide semi-infini

Où $V^f(B) = [p(B) \quad v_3^f(B)]^T$ et $[I_{(n)f}]$ et $[J_{(n)f}]$ sont les matrices d'interface qui dépendent de la nature de la dernière couche (n). En outre si Z_B est l'impédance caractéristique du fluide semi-infini, l'impédance au point B est donnée par $Z_B/\cos\theta = p(B)/v_3^f(B)$, où

$$[-1 \quad Z_B/\cos\theta]V^f(B) = 0 \tag{3.86}$$

Les équations (3.85) et (3.86) mènent au nouveau système matriciel suivant :

$$[D]V = 0 : [D] \begin{bmatrix} & & & & & [0] \\ & & & & & \vdots \\ & & [D_0] & & & [0] \\ \hline [0] & \cdots & [0] & [I_{(n)f}] & & [J_{(n)f}] \\ 0 & \cdots & 0 & & -1 & Z_B/\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ \dots \\ V^f(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^f(A) \\ V^{(1)}(M_2) \\ V^{(2)}(M_4) \\ \vdots \\ V^{(n-1)}(M_{2n_2}) \\ V^{(n)}(M_{2n}) \\ V^f(B) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

En tenant compte de l'addition des équations et des variables, la matrice $[D]$ a maintenant $(N+1)$ lignes et $(N+2)$ colonnes. En résumé, pour deux conditions aux limites, une équation est encore nécessaire. Cette équation est donnée par la condition d'impédance de fluide dans le coté excité. L'addition de cette équation à la matrice $[D]$ permet de calculer les indicateurs acoustiques du problème.

III.3 Calcul des indicateurs acoustiques

III.3.1 Impédance de surface et coefficients de reflexion et d'absorption

Lorsqu'une onde plane frappe un milieu stratifié illustré par la (figure 3.3) dans le cas d'un problème d'absorption ou par la (figure 3.4) dans le cas d'un problème de transmission, sous un angle d'incidence θ , l'impédance de surface Z_s du milieu est écrite comme $Z_s = p(A)/v_3^s(A)$, ou

$$[-1 \quad Z_s]V^f(A) = 0 \quad (3.89)$$

L'addition de cette équation au système des équations (3.84), ou (3.88), nous permet d'obtenir un nouveau système formé avec une matrice carrée :

$$\begin{bmatrix} -1 & Z_s & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & [D] & & \end{bmatrix} V = 0 \quad (3.90)$$

Le déterminant de cette matrice est égal à zero, donc Z_s est calculée par :

$$Z_s = -\frac{\det[D_1]}{\det[D_2]} \quad (3.91)$$

Où $\det[D_1]$ (respectivement $\det[D_2]$) est le déterminant de la matrice obtenue quand la première colonne (respectivement la deuxième colonne) a été éliminée de la matrice $[D]$. Le coefficient de reflexion r et le coefficient d'absorption α sont donnés par les formulations classiques suivantes :

$$r = -\frac{Z_s \cos\theta - Z_0}{Z_s \cos\theta + Z_0} \quad (3.92)$$

et

$$\alpha(\theta) = 1 - |r|^2 \quad (3.93)$$

Dans le cas d'une excitation d'un champ diffus, le coefficient d'absorption est défini comme :

$$\alpha_d = \frac{\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \alpha(\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta}{\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \cos\theta \sin\theta d\theta} \quad (3.94)$$

Où $\alpha(\theta)$ est le coefficient d'absorption à un angle d'incidence θ donné, et comme défini précédemment, θ_{max} et θ_{min} sont les limites sélectionnées de l'intégrale d'un champ de diffusion, habituellement égales 0° et 90° .

III.3.2 Coefficient de transmission et perte de transmission

Lorsque une multicouche se termine par un fluide semi-infini, le coefficient de transmission T et le coefficient de réflexion r sont reliés par

$$\frac{p(A)}{1+r} - \frac{p(B)}{T} = 0 \quad (3.95)$$

L'addition de cette nouvelle équation au système des équations (3.88), nous permet d'obtenir un nouveau système formé avec une matrice carrée $(N+2) \times (N+1)$:

$$\begin{bmatrix} T & 0 & \cdots & -(1+r) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & [D] & \cdots & \cdots \end{bmatrix} V = 0 \quad (3.96)$$

Les déterminants de cette matrice sont égaux à zéro, donc T est calculée par :

$$T = -(1+r) \frac{\det[D_{N+1}]}{\det[D_1]} \quad (3.97)$$

Où $\det[D_{N+1}]$ est le déterminant de la matrice obtenu quand la colonne $(N+1)$ a été éliminée de la matrice $[D]$. Pour une onde plane d'incidence θ , la perte de transmission est définie par

$$TL = -10 \log \tau(\theta) \quad (3.98)$$

Où $\tau(\theta) = |T^2(\theta)|$ est le coefficient de transmission pour un angle d'incidence θ . Dans le cas d'une excitation d'un champ diffus, la perte de transmission est définie par :

$$TL_d = -10 \log \left[\frac{\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} |\tau(\theta)|^2 \cos\theta \sin\theta d\theta}{\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \cos\theta \sin\theta d\theta} \right] \quad (3.99)$$

Où $\tau(\theta)$ est le coefficient de transmission pour un angle d'incidence θ donné, allant de θ_{min} à θ_{max} .

IV Applications

Dans cette section, nous présentons quelques exemples d'applications de la méthode de la matrice de transfert pour le milieu stratifié avec des couches poreuses (rigide et élastique), solides élastiques, et fluide. Nous calculons le coefficient d'absorption et la perte de transmission de certaines configurations :

IV.1 Configuration : Air/poreux rigide/air

Dans cette configuration, nous avons un milieu poreux dont la structure est rigide, délimité par deux couches fluides dans ses deux cotés (figure 3.5). Les caractéristiques acoustiques et mécaniques du milieu poreux sont données par le tableau (3.2) et les propriétés de la plaque élastique sont données dans le tableau (3.3) :

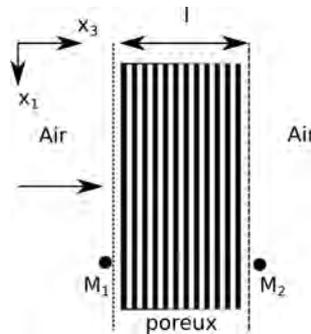


FIGURE 3.5 – Milieu stratifié : air/poreux rigide/air

Matériau	h	ϕ	σ	α_∞	Λ	Λ'	ρ_1	E	μ	η_s
Laine de verre	38	0.98	5×10^3	1.1	150	216	33	133×10^3	0.3	0.1

TABLE 3.2 – Propriétés acoustiques et mécaniques de la laine de verre

Epaisseur	Densité	Module d'Young	Coefficient de Poisson
0.2mm	7700 kg/m^3	$2.16 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	0.27

TABLE 3.3 – Propriétés de la plaque élastique

La figure (3.6-a) décrit l'évolution du coefficient d'absorption en fonction de la fréquence du système précédent (figure 3.5). Nous observons un seul pic qui représente la première résonance absorbante de quart de longueur d'onde ($\lambda/4$). Dans cette résonance la valeur du coefficient d'absorption atteint sa valeur maximale. Cependant cette valeur est rapidement dégradée jusqu'à l'atteinte de la valeur nulle. La figure (3.6-b) montre que la perte de transmission dépasse la

valeur 100 dB pour une fréquence proche de 80 Hz. Pour cette dernière valeur elle atteint une valeur minimale qui correspond à la résonance de la structure. Donc, dans ce système le coefficient d'absorption est très faible, mais sa perte de transmission est parfaite (>200 dB) dans la bande de fréquence entière sauf à la fréquence de résonance.

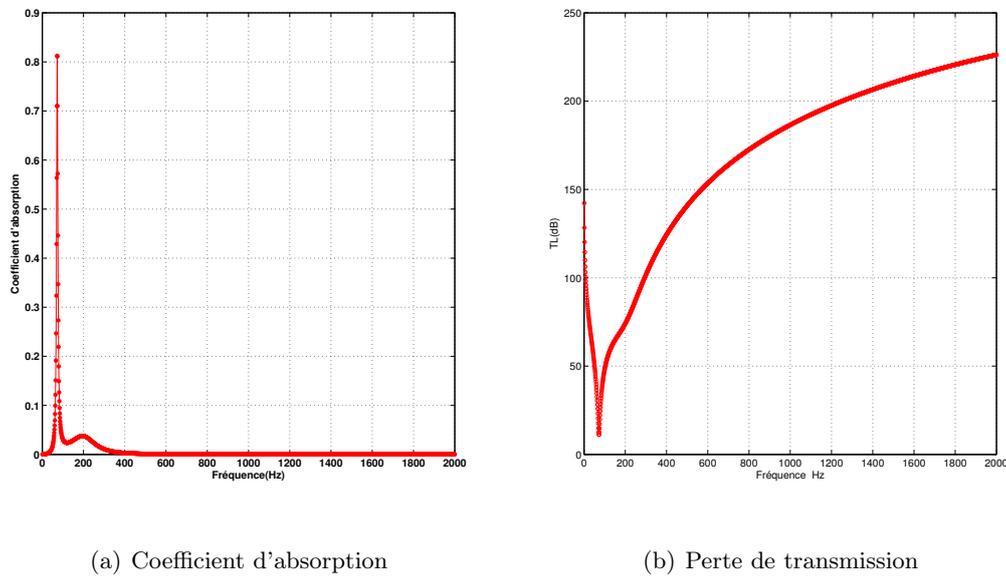


FIGURE 3.6 – Air/poreux rigide/air

IV.2 Configuration :Air/plaque/air/plaque/air

La figure (3.7) représente un milieu stratifié, qui est composé de deux plaques élastiques avec une épaisseur (h) séparés par l'air d'épaisseur (e).

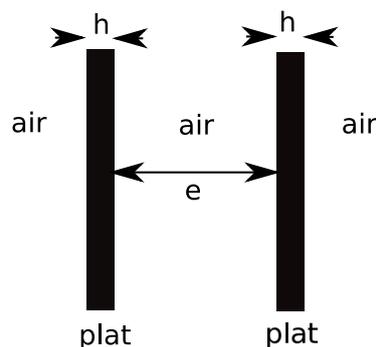
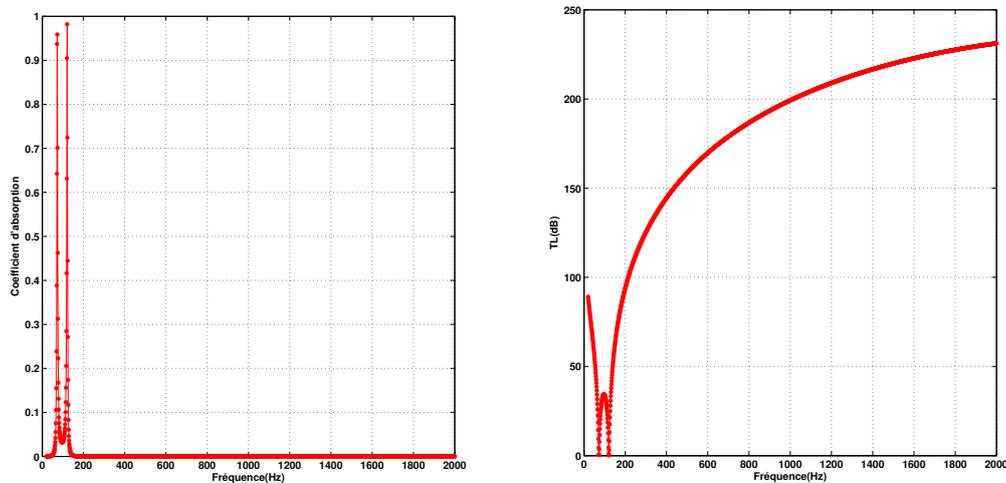


FIGURE 3.7 – Milieu stratifié : air/plaque/air/plaque/air

La figure (3.8) décrit l'évolution du coefficient d'absorption et de la perte de transmission du système précédent. Deux pics apparaissent dans la (figure 3.8-a) : le premier est dû à la résonance de quart de longueur d'onde de la plaque, tandis que le second est dû à la résonance du système

complet. Le coefficient d'absorption dans ce cas reste faible, mais sa perte de transmission est parfaite, sauf aux fréquences de résonance.



(a) Coefficient d'absorption

(b) Perte de transmission

FIGURE 3.8 – Air/poreux/air/plaque/air

IV.3 Configuration : Air/poreux rigide/air/plaque/air

Dans cette configuration, le milieu poreux avec une structure rigide et la plaque élastique d'épaisseur (d), sont séparés par une lame d'air d'épaisseur (e), le tout est délimité par le fluide (air) (figure 3.9).

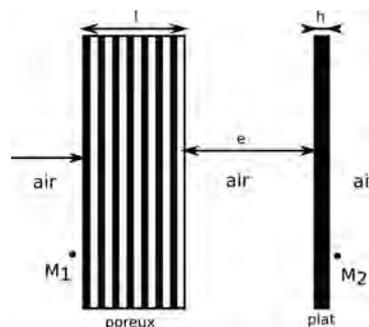
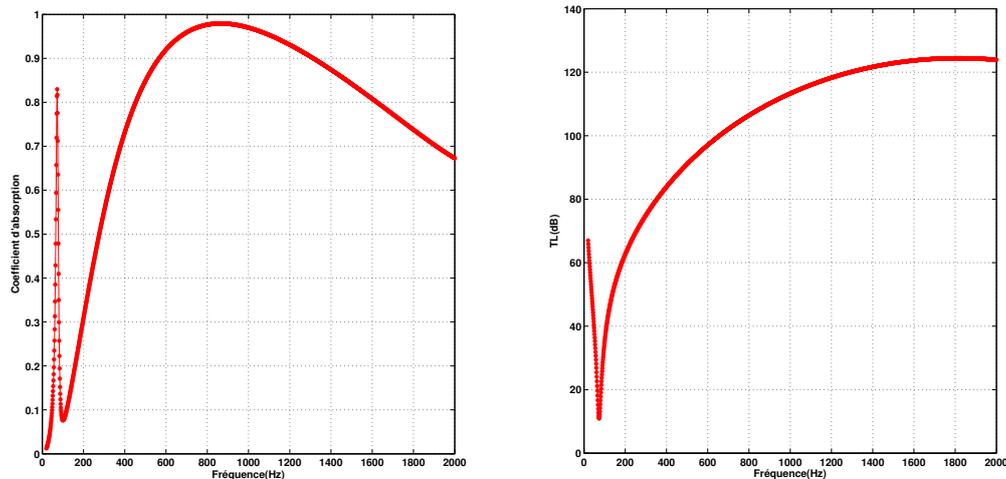


FIGURE 3.9 – Milieu stratifié : air/poreux rigide/air/plaque/air

Nous remarquons dans la (figure 3.10-a) qu'il y a un pic de l'absorption due à la première résonance de la structure poreuse. L'absorption dégrade rapidement vers zéro, ensuite augmente au fur et à mesure que la fréquence augmente. La lame d'air joue un rôle très important dans cette augmentation, parce que la vitesse des particules à la face arrière du matériau poreux oscille et atteint une valeur maximale de l'absorption. Dans ce système, l'absorption est parfaite, mais

sa perte de transmission est faible (figure 3.10-b).



(a) Coefficient d'absorption

(b) Perte de transmission

FIGURE 3.10 – Air/poreux rigide/air/plaque/air

IV.4 Configuration : Air/poreux rigide/plaque/air

Dans cette configuration la plaque élastique est collée directement sur le matériau poreux comme illustré dans la figure (3.11).

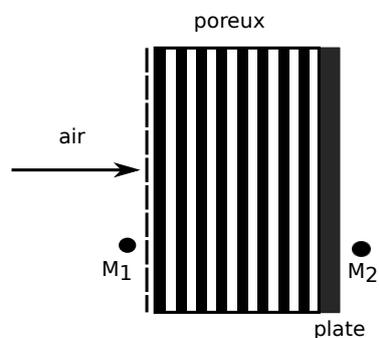


FIGURE 3.11 – Milieu stratifié : air/poreux rigide/plaque/air

Dans ce cas de système, l'absorption est parfaite dans toute la bande de fréquence (figure 3.12-a), et vice versa pour la perte de transmission qui possède des valeurs très basses (figure 3.12-b). Parce que la plaque élastique joue un rôle très important si elle est collée sur le matériau poreux. Elle empêche la transmission des ondes acoustiques venant du matériau poreux. C'est-à-dire toutes les ondes transmises à travers le milieu poreux sont réfléchies par la plaque élastique, et elles sont renvoyées vers le matériau. Ce phénomène peut dissiper l'énergie acoustique, et augmente l'absorption acoustique.

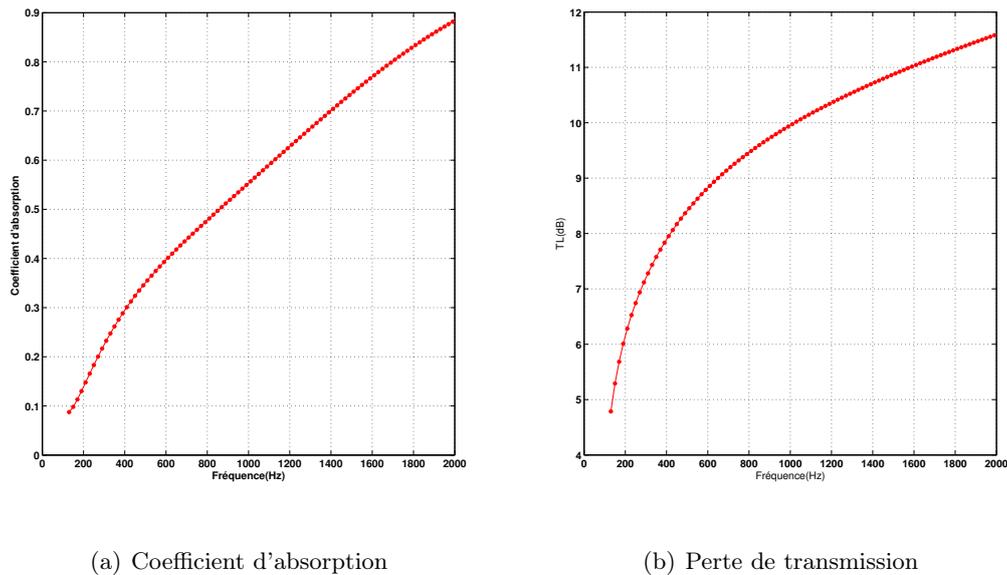


FIGURE 3.12 – Air/poreux rigide/plaque/air

IV.5 Configuration : Air/poroélastique/plaque/air

Le matériau poreux utilisé dans cette configuration est maintenant considéré élastique, c'est-à-dire la structure est déformable (figure 3.13).

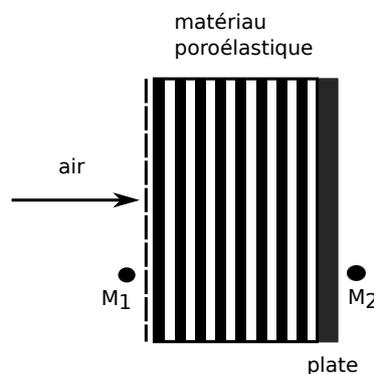


FIGURE 3.13 – Milieu stratifié : air/poroélastique/plaque/air

Dans ce cas, les ondes acoustiques peuvent se propager dans les deux phases solide et fluide. L'énergie acoustique dans ce type de matériau est rapidement dissipée à cause du mouvement de particules et l'interaction entre les deux phases du matériau poroélastique. L'absorption dans ce type de matériau est très parfaite (figure 3.14-a) par rapport aux matériaux poreux ayant une structure rigide surtout dans la gammes de basses et moyennes fréquences. Nous remarquons que le coefficient d'absorption atteint des valeurs maximales dans les fréquence inférieurs à (800 Hz). Mais il y'a une perte de transmission qui est présentée dans la (figure 3.14-b)

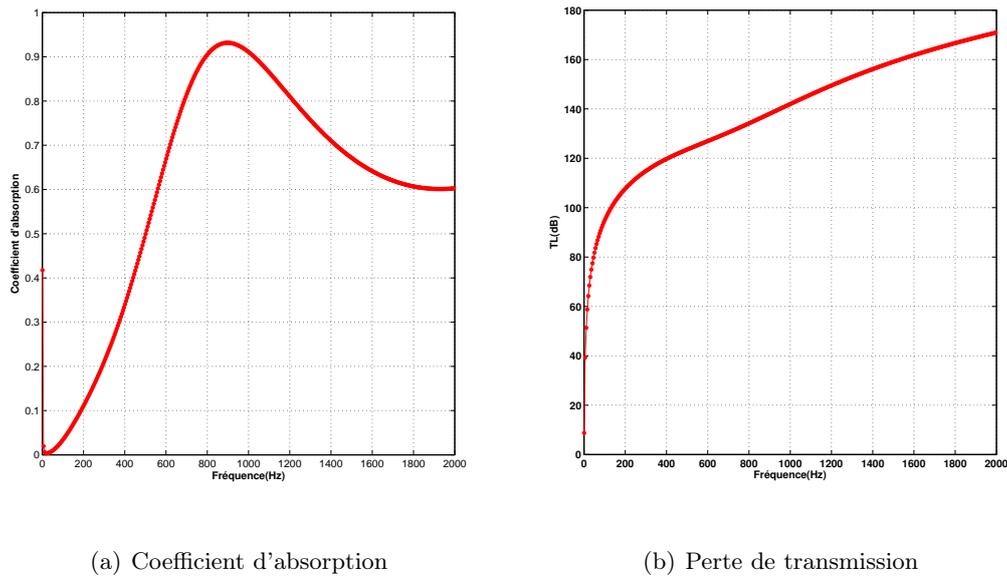


FIGURE 3.14 – Air/poroélastique/plaque/air

V Conclusion

Une approche analytique a été effectuée dans ce chapitre. C'est la méthode de la matrice de transfert qui a pour objectif de modéliser analytiquement la propagation des ondes acoustiques dans les milieux stratifiés en particulier les matériaux poroélastiques couplés avec l'air. Nous avons pu identifier à partir de cette méthode, les différentes matrices de transfert de chaque milieu ; poroélastique, fluide, solide élastique, écran perméable,...), ainsi les matrices d'interface entre les milieux de même nature et les matrices d'interface dans le cas contraire. Nous avons calculé les indicateurs acoustiques (parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface, et coefficients d'absorption et de transmission d'un milieu stratifié composé de milieux poroélastiques couplés avec l'air collés sur un mur rigide. Nous avons appliqué cette approche aux milieux stratifiés pour différentes configurations. En conclusion, cette méthode est très utile ; mais son utilisation nécessite un calcul complexe.



4

APPROCHE NUMÉRIQUE : ÉLÉMENTS FINIS

I Introduction

La méthode des éléments finis utilisée pour les matériaux poroélastiques a été appliquée aux équations de Biot-Allard depuis le début des années 90. Tout d'abord, des formulations variationnelles en déplacement (u, U) ou (u, W) ont été développées [DSLA02, Coy99, LC, Dau99], ensuite l'apparition de la formulation mixte déplacement-pression développée par Attala et al [APD98, GPA97, DSBA08, DSA01, LABH09], qui présente l'avantage de réduire le nombre d'inconnus par noeud par rapport aux formulations variationnelles, impliquant un temps de calcul très réduit. En effet cette formulation permet l'existence d'un couplage relativement aisé avec les milieux de types solide ou fluide acoustiques.

Nous présentons dans ce chapitre une étude de simulation par logiciel Comsol Multiphysics, qui est basé sur la méthode des éléments finis. On peut implémenter dans ce logiciel les différentes formulations, (u, U) ou (u, W) , ou (u, p) , mais dans notre étude, nous nous limiterons à la formulation mixte déplacement-pression (u, p) , à cause de sa simplicité de la transformer et de l'implémenter sous forme matricielle dans Comsol. A partir de cet implémentation, nous pouvons calculer les indicateurs acoustiques (les parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface, et les coefficients de réflexion et d'absorption), ainsi les déplacements de la phase solide et la pression dans l'échantillon poreux).

Pour organiser ce chapitre, tout d'abord, nous rappelons en détail les deux équations fondamentales de la formulation mixte déplacement pression de Attala et al, qui ont été développées à partir des équations du modèle de Biot [Bio62b]. Ensuite nous procédons à l'implémentation de ces équations dans Comsol en mode PDE général, et dans les conditions aux limites du cou-

plage entre les différents milieux (poroélastique/poroélastiques, poroélastique/solide élastique, et poroélastique/air). Puis nous étudions l'impédance de surface utilisée dans l'environnement Comsol. Et nous terminons par des exemples d'applications pour mieux connaître la qualité d'absorption des matériaux poreux utilisés.

II Formulation mixte déplacement-pression (u, p)

Comme indiqué dans le chapitre 2, le modèle comportemental de Biot-Johnson-Champoux-Allard ou modèle de Biot-Allard généralisé [CA91], a été décrit en utilisant les déplacements des phases solide (u) et fluide (U). Cette formulation du modèle dite déplacement-déplacement $\{u, U\}$ fait intervenir 6 variables pour un espace à 3 dimensions : 3 variables pour la phase solide, et 3 autres pour la phase fluide.

Une formulation a été développée par Attala et al [APD98], dite formulation mixte, ne faisant intervenir que 4 variables d'espace. Cette formulation utilise la description de la phase fluide et la surpression acoustique p dans les pores, (figure 4.1). Elle est nommée formulation déplacement-pression $\{u, p\}$.

II.1 Equation en déplacement-pression

II.1.1 Phase solide

Tout d'abord, nous développons l'équation du mouvement reliée à la phase solide. La deuxième ligne de l'équation (2-48) permet d'exprimer le déplacement moyen de la phase fluide U en fonction de la pression p dans les pores et du déplacement moyen u dans la phase solide.

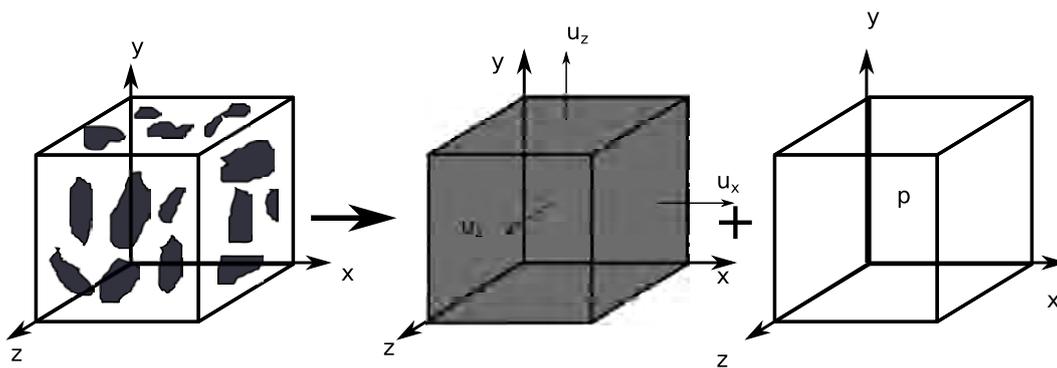


FIGURE 4.1 – Représentation d'un matériau poreux saturé par un seul fluide d'après la formulation mixte déplacement-pression ou $\{u, p\}$.

Ce qui conduit à l'équation suivante [APD98] :

$$U = \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i \quad (4.1)$$

En substituant cette expression dans l'équation d'équilibre dynamique reliée à la phase solide (première ligne de l'équation (2-48)), nous obtenons :

$$\sigma_{ij,j}^s(u, U) = -\omega^2 \left(\tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) u_i - \tilde{\rho}_{12} \frac{\phi}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i} \quad (4.2)$$

qui devient

$$\sigma_{ij,j}^s(u, U) + \omega^2 \tilde{\rho}_s u_i + \phi \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i} \quad (4.3)$$

avec

$$\tilde{\rho}_s = \tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \quad (4.4)$$

où $\tilde{\rho}_s$ est la masse volumique fictive de la phase solide. On remarque que l'équation (4.3) s'exprime bien en fonction du déplacement moyen u de la phase solide et de la pression p dans les pores. Cependant, on note que le terme $\sigma_{ij,j}^s$, faisant intervenir le tenseur des contraintes de la phase solide, est toujours dépendant de la variable U . Afin d'éliminer cette variable de l'équation (4.3), nous utilisons les relations contraintes-déformations présentées au chapitre 2. En isolant le terme $U_{i,i}$ de la deuxième ligne de (2-16), et en multipliant le résultat par \tilde{Q}/\tilde{R} , on obtient :

$$\tilde{Q}U_{i,i} = \frac{-\phi\tilde{Q}}{\tilde{R}}p - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}}u_{i,i} \quad (4.5)$$

On introduit cette nouvelle expression dans la relation contrainte-déformation pour la phase solide donnée dans la première ligne de l'équation (2-16) de façon à éliminer la dépendance du tenseur des contraintes du squelette solide en U . On trouve :

$$\sigma_{ij}^s(u, U) = \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} \right) u_{i,i} \delta_{i,j} + 2N\varepsilon_{ij}^2 - \phi \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} p \delta_{ij} \quad (4.6)$$

on définit le tenseur des contraintes réduit $\hat{\sigma}_{ij}^s(u)$ comme :

$$\hat{\sigma}_{ij}^s(u) = \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} \right) u_{i,i} \delta_{i,j} + 2N\varepsilon_{ij}^2 \quad (4.7)$$

ce tenseur s'interprète physiquement comme étant le tenseur des contraintes agissant sur la phase solide in vacuo (dans le vide). Ces contraintes sont celles qui agiraient sur le squelette solide seul si le fluide dans les pores était remplacé par un vide. En substituant cette relation dans l'équation (4-6), on obtient :

$$\sigma_{ij}^s(u, U) = \hat{\sigma}_{ij}^s(u) - \phi \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} p \delta_{ij} \quad (4.8)$$

En utilisant les expressions de \tilde{Q} et \tilde{R} , données dans (2-35), il est bien évident que $\phi\tilde{Q}/\tilde{R} = (1 - \phi)$, ce qui permet de réécrire l'équation (4-8) de la manière suivante :

$$\sigma_{ij}^s(u, U) = \hat{\sigma}_{ij}^s(u) - (1 - \phi)p\delta_{ij} \quad (4.9)$$

On remarque à partir de cette équation que le tenseur des contraintes agissant sur la phase solide du milieu poreux s'exprime alors comme la somme du tenseur des contraintes réduit $\hat{\sigma}_{ij}^s(u)$ et des contraintes agissant sur un volume $(1 - \phi)$. On introduit cette expression dans l'équation (4-3) pour obtenir l'équation du mouvement de la phase solide en fonction de u et p sous la forme :

$$\hat{\sigma}_{ij}^s(u) + \omega^2 \tilde{\rho}_s u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} = 0 \quad (4.10)$$

avec

$$\tilde{\gamma} = \phi \left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \quad (4.11)$$

où $\tilde{\gamma}$ est un coefficient de couplage volumique. L'équation (4-10) obtenue est l'équation d'équilibre dynamique associée à la phase solide du matériau poroélastique. $\tilde{\gamma} p_{,i}$ est un terme de charge fluide appliquée sur la phase solide.

II.1.2 Phase fluide

Dans un second temps, nous développons l'équation du mouvement relié à la phase fluide.

La divergence de l'équation (4-1) donne :

$$U_{i,i} = \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_{i,i} \quad (4.12)$$

En combinant cette expression avec la relation de la deuxième ligne de l'équation (2-48), on obtient l'équation du mouvement de la phase fluide en fonction des variables u et p :

$$\phi p_{,ii} - \omega^2 \left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{22} \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) u_{i,i} + \omega^2 \tilde{\rho}_{22} \frac{\phi}{\tilde{R}} p = 0 \quad (4.13)$$

En multipliant cette relation par $1/\phi$ et en utilisant l'expression de $\tilde{\gamma}$ donnée en (4-11), on obtient :

$$p_{,ii} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{R}} p - \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2} \tilde{\gamma} u_{i,i} = 0 \quad (4.14)$$

Lorsqu'on multiplie cette équation par $\phi^2/(\omega^2 \tilde{\rho}_{22})$ on trouve :

$$\frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} + \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p = \tilde{\gamma} u_{i,i} \quad (4.15)$$

Cette dernière relation peut être vue comme l'équation de Helmholtz modifiée par un terme de source $\tilde{\gamma} u_{i,i}$ relié à la dilatation harmonique de la phase solide.

Donc, finalement nous avons les deux équations de la formulation mixte déplacement-pression $\{u, p\}$ pour les deux phases solide et fluide [APD98, GPA97] :

$$\begin{array}{l} \hat{\sigma}_{ij}^s(u) + \omega^2 \tilde{\rho}_s u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} = 0 \\ \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} + \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p - \tilde{\gamma} u_{i,i} = 0 \end{array} \quad (4.16)$$

III Modélisation des matériaux poroélastiques sur Comsol

Comsol est un outil d'analyse basé sur la méthode des éléments finis et désigné spécialement pour le traitement des problèmes multiphysiques. L'utilisateur de ce logiciel peut combiner un couple de modules physiques de Comsol prédéfini et introduit des termes de couplages additionnels aux équations constitutives. Chacun des modes physiques peut être utilisé individuellement dans le cas de résolution des problèmes classiques non multiphysiques. En ce qui concerne les matériaux poreux, Comsol ne fournit pas un module spécifique. Si on suppose que le matériau poreux ayant une structure rigide soit modélisé en utilisant l'approche du fluide équivalent, le module dynamique des fluides et le module acoustique dans Comsol, peuvent être utilisés. En plus de ça, les matériaux poreux ayant une structure élastique, ne peuvent pas être modélisés multiphysiquement, par exemple en utilisant le module mécanique des solides et celui des fluides pour modéliser respectivement la phase solide et la phase fluide. Parce que dans ce cas on peut ignorer non seulement les termes de couplage multiphysiques, mais aussi un fort couplage dans les équations d'équilibre. En conséquence, le besoin d'utilisation du module EDP est nécessaire pour implémenter par exemple, soit la formulation classique de Biot, déplacement-déplacement (u, U) ou la formulation mixte de Biot déplacement-pression (u, p) , qui sont mis sous forme d'ensemble des équations différentielles. Sur Comsol, la forme générale du EDP doit être exprimée sous la forme matricielle suivante [HGC12] :

$$\Gamma \nabla = F \quad (4.17)$$

où Γ est la matrice des vecteurs flux et F est la partie droite du vecteur (les deux peuvent être fonctions des coordonnées spatiales, et des variables inconnues u et/ou leurs dérivés dans l'espace), alors que ∇ est le vecteur opérateur gradient/divergence. Les dimensions de ces quantités sont comme suit :

$$\dim \Gamma = M \times N \quad \dim \nabla = N \times 1 \quad \dim F = M \times 1 \quad (4.18)$$

ici, M est le nombre d'équations égal au nombre des inconnus ($\dim.u = M \times 1$), alors que N est la dimension de l'espace et donc dépendant du problème, il peut être 1, 2 ou 3. En coordonnées cartésiennes, le vecteur opérateur gradient/divergence ∇ , pour $N = 3$ est défini comme suit :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Les conditions aux limites dans le cas d'une EDP sous sa forme générale sont comme suit :

$$-\Gamma n = G + \left[\frac{\partial L}{\partial u} \right]^T l \quad (4.20)$$

$$0 = L \quad (4.21)$$

Où les vecteurs L et Γ peuvent être fonctions des coordonnées spatiales, des variables inconnues u , et/ou de leurs dérivés spatiales, alors que n est le vecteur unité normal sortant de la surface limite. Ce sont respectivement les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Le terme l dans les conditions aux limites de Neumann est synonyme du multiplicateur de Lagrange.

Dans ce qui suit, nous présentons toutes les expressions nécessaires pour programmer les équations de la poroélasticité sur Comsol dans le module EDP, forme générale. Ensuite nous citons les plus importantes conditions aux limites pour les programmer dans cet outil.

IV Implémentation de la formulation mixte de Biot dans Comsol

Pour analyser le comportement harmonique d'un milieu poreux, on utilise les deux équations de la formulation mixte de Biot (4.16) qui peuvent être réécrites comme suit ¹ :

$$\nabla \hat{\sigma}^s(u) + \omega^2 \tilde{\rho}u + \tilde{\gamma} \nabla p = 0 \quad (4.22)$$

$$\nabla^2 p + \omega^2 \tilde{\rho}_{22} p / R - \omega^2 (\tilde{\rho}_{22} \tilde{\gamma} / \phi^2) \nabla u = 0 \quad (4.23)$$

Cette dernière dépend de 4 variables ($M = 4$), des déplacements de la phase solide u_i , et de la pression de la phase fluide p . A partir de ces deux équations, les matrices Γ et F , constituant la forme de l'équation (4.17), sont identifiées [HGC12, HU10] :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{ij} \\ \Gamma_{4j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^s(u) \\ \nabla p \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_i \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \tilde{\rho}u - \tilde{\gamma} \nabla p \\ -\omega^2 \tilde{\rho}_{22} p / R + \omega^2 (\tilde{\rho}_{22} \tilde{\gamma} / \phi^2) \nabla u \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

l'expression de $\hat{\sigma}^s(u)$ peut être réécrite comme suit :

$$\hat{\sigma}^s(u) = (A - Q^2/R) \nabla \cdot u + 2N\varepsilon \quad (4.26)$$

où A est le coefficient de Lamé pour le solide élastique.

en définissant $u_{k,k} = \nabla \cdot u = \partial u / \partial x + \partial u / \partial y + \partial u / \partial z = u_x + u_y + u_z$, Γ et F peuvent être réécrites en détails comme :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2Nu_x + \tilde{A}u_{k,k}^s & N(u_y + v_x) & N(u_z + w_x) \\ N(u_y + v_x) & 2Nv_y + \tilde{A}u_{k,k}^s & N(w_y + v_z) \\ N(u_z + w_x) & N(v_z + w_y) & 2Nw_z + \tilde{A}u_{k,k}^s \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

1. $\hat{\sigma}_{ij}^s(u) = \nabla \hat{\sigma}^s(u)$, et $\tilde{\gamma} p_{,i} = \tilde{\gamma} \nabla p$

$$F = \begin{bmatrix} -\omega^2 \tilde{\rho} u - \tilde{\gamma} p_x \\ -\omega^2 \tilde{\rho} v - \tilde{\gamma} p_y \\ -\omega^2 \tilde{\rho} w - \tilde{\gamma} p_z \\ -\omega^2 \tilde{\rho}_{22} p / R + \omega^2 \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{22} u_{k,k}^s / \phi^2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

ici, $\hat{A} = (A - Q^2/R)$, N est le module de cisaillement du matériau poroélastique, les souscriptions " x ", " y " et " z " représentent la dérivation de x , y , et z

IV.1 Conditions aux limites du couplage

Le couplage poroélastique/air, poroélastique/élastique et poroélastique/poroélastique est présenté dans cette section. Les conditions aux limites simples (un mur rigide, pression imposée, déplacements imposés) peuvent être directement dérivées à partir de ces formulations, décrites ci-dessus :

IV.1.1 Couplage poroélastique/air

Dans le cas d'un milieu poroélastique lié à un milieu acoustique, l'équation (4.29) décrit les conditions de continuité des contraintes normales totales, la pression acoustique et l'écoulement du fluide [HGC12] comme :

$$\begin{aligned} \sigma^t n &= -p^a n \\ P &= p^a \\ (1 - \phi) u \cdot n + \phi U \cdot n &= (\rho_0 \omega^2)^{-1} \nabla p^a \cdot n \end{aligned} \quad (4.29)$$

où p^a est la pression dans le milieu acoustique, σ^t est le tenseur des contraintes totales dans le matériau poroélastique, U est le déplacement de la phase fluide dans la formulation (u, U) , n est le vecteur d'unité normal extérieur.

Les expressions détaillées pour U et σ^t ont été données par Atalla et al comme :

$$U = (\phi \omega^2 \tilde{\rho}_{22}) \nabla p - (\tilde{\rho}_{12} / \tilde{\rho}_{22}) u \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma^t &= \sigma^t(u, U) = \sigma^s(u, U) + \sigma^f(u, U) \\ &= \hat{\sigma}^s(u) - \phi(1 + Q/R) p \end{aligned} \quad (4.31)$$

en utilisant l'équation (4.31), les deux premières équations de (4.29) peuvent être transformées en :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^s(u) \cdot n &= -[1 - \phi(1 + Q/R)] p^a \cdot n \\ \nabla p \cdot n &= \nabla p^a \cdot n = 0 \\ p - p^a &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

En substituant l'équation (4.30) dans la troisième équation de (4.29), on obtient l'accélération correcte normale comme suit (4.33).

$$\nabla p^a \cdot n / \rho_0 = \omega^2 [u \cdot n (1 - \phi (1 + \tilde{\rho}_{12} / \tilde{\rho}_{22}))] + (\phi^2 / \tilde{\rho}_{22}) \nabla p \cdot n \quad (4.33)$$

l'équation (4.33) montre que l'effet de couplage entre un matériau poreux et un espace d'air se comporte comme une accélération dans la couche d'air.

Par comparaison de l'équation (4.32) avec celles (4.20) et (4.21), les vecteurs G et L peuvent être exprimés par :

$$G = \begin{bmatrix} [1 - \phi(1 + Q/R)]p^a n_x \\ [1 - \phi(1 + Q/R)]p^a n_y \\ [1 - \phi(1 + Q/R)]p^a n_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p - p^a \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

IV.1.2 Couplage poroélastique/élastique

Supposons que le matériau poroélastique est collé à un solide élastique, une continuité totale est imposée entre la phase solide et le déplacement élastique. Les continuités des contraintes normales totales, le déplacement et non-écoulement du fluide à l'interface sont conservés comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma^t \cdot n &= \sigma^e \cdot n \\ u &= u^e \\ U \cdot n - u \cdot n &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

ici, σ^e est le tenseur des contraintes total dans le matériau poroélastique, l'équation (4.35) peut être réécrite en substituant les équation (4.30) et (4.31) sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^s(u) \cdot n &= \phi (1 + Q/R) p \cdot n + \sigma^e \cdot n \\ \nabla p \cdot n &= \omega^2 / \phi (\tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}_{22}) u \cdot n \\ u^e - u &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Par comparaison de l'équation (4.36) à celles (4.20) et (4.21), les vecteurs G et L peuvent être exprimés par :

$$G = \begin{bmatrix} -\phi(1 + Q/R)pn_x - (\sigma_{xx}^e \cdot n_x + \sigma_{xy}^e n_x + \sigma_{xz}^e n_z) \\ -\phi(1 + Q/R)pn_y - (\sigma_{xy}^e \cdot n_x + \sigma_{yy}^e n_y + \sigma_{yz}^e n_z) \\ -\phi(1 + Q/R)pn_z - (\sigma_{xz}^e \cdot n_x + \sigma_{yz}^e n_y + \sigma_{zz}^e n_z) \\ -(\omega^2 / \phi) (\tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}_{22}) (u \cdot n_x + v \cdot n_y + w \cdot n_z) \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} u^e - u \\ v^e - v \\ w^e - w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

IV.1.3 Couplage poroélastique/poroélastique

Dans le cas d'un milieu poroélastique lié à un autre milieu poroélastique, les conditions de continuité des contraintes normales totales, le déplacement des phases solide et fluide, et l'écoulement du fluide peuvent être décrits par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_1^t \cdot n &= \sigma_2^t \cdot n \\ u_1 &= u_2 \\ p_1 &= p_2\end{aligned}\tag{4.38}$$

$$\phi(U_1 \cdot n - u_1 \cdot n) = \phi(U_2 \cdot n - u_2 \cdot n)$$

en substituant les équations (4.30) et (4.31) dans (4.38), pour le milieu poroélastique 1, on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1(u_1) \cdot n &= \hat{\sigma}_2(u_2) \cdot n + \left[\phi_1 \left(1 + \frac{Q_1}{R_1} \right) - \phi_2 \left(1 + \frac{Q_2}{R_2} \right) \right] p_1 \cdot n \\ \nabla p_1 \cdot n &= \omega^2 \frac{\phi_2^2}{\phi_1^2} \cdot n + \omega^2 \left(\frac{\tilde{\rho}_{12}^{(1)} + \tilde{\rho}_{12}^{(1)}}{\phi_1^2} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^{(2)} + \tilde{\rho}_{12}^{(2)}}{\phi_2^2} \right) u_1 \cdot n\end{aligned}\tag{4.39}$$

et pour le milieu poroélastique 2 on a :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1(u_2) \cdot n &= \hat{\sigma}_1(u_1) \cdot n + \left[\phi_2 \left(1 + \frac{Q_2}{R_2} \right) - \phi_1 \left(1 + \frac{Q_1}{R_1} \right) \right] p_1 \cdot n \\ \nabla p_1 \cdot n &= \omega^2 \frac{\phi_1^2}{\phi_2^2} \cdot n + \omega^2 \left(\frac{\tilde{\rho}_{12}^{(2)} + \tilde{\rho}_{12}^{(2)}}{\phi_2^2} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^{(1)} + \tilde{\rho}_{12}^{(1)}}{\phi_1^2} \right) u_1 \cdot n\end{aligned}\tag{4.40}$$

Par comparaison des équations (4.39) et (4.40) à celles (4.20) et (4.21), les vecteurs G et L peuvent être exprimés par :

$$G_1 = -A_1 \Gamma_2 \cdot n - B_1\tag{4.41}$$

$$G_2 = -A_2 \Gamma_1 \cdot n - B_2\tag{4.42}$$

$$L_1 = -L_2 = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \\ w_1 - w_2 \\ p_1 - p_2 \end{bmatrix}\tag{4.43}$$

dans lesquels les matrices A_1 , A_2 , B_1 , B_2 sont détaillées dans l'Annexe B

IV.2 Matériaux poreux dans Comsol

Dans le chapitre 2 et 3, nous avons présenté analytiquement la valeur de l'impédance de surface donnée par Allard (Eqs 2.219, 2.221, 2.223, et 2.225), ou calculée par la méthode de la matrice de transfert (Eq 3.91), dans une condition limite arrière appliquée (mur rigide, lame d'air, ou zéro de pression). Cependant, dans l'environnement Comsol Z_s est définie comme le

rapport de la pression acoustique et la vitesse totale à la face empiétée, et peut être écrite sous la forme [HU10] :

$$\begin{aligned} Z_s(\omega) &= \frac{p}{j\omega(\phi U_3 + (1 - \phi) u_3)} \\ &= p \{j\omega [\phi^2 p_z / \omega^2 \tilde{\rho}_{22} + (1 + \tilde{\rho}_{12} / \tilde{\rho}_{22}) w]\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les propriétés acoustiques du matériau considéré sont regroupées dans le tableau (4.1).

TABLE 4.1 – Propriétés acoustiques et mécaniques de la mousse polymère [HGC12]

porosity	resistivity	tortuosity	VCL	TCL	density skeleton
ϕ	σ	α_∞	\wedge	\wedge'	ρ_0
0.97	87 KN s/m ⁴	2.52	37 * 10 ⁻⁶ m	119 * 10 ⁻⁶ m	31Kg/m ³

loss factor	Poisson coefficient	shear modulus
η	ν	N
0.055	0.3	55(1 + νj)KPa

VCL : *Longueur caractéristique visqueuse*. TCL : *Longueur caractéristique thermique*.

L'épaisseur utilisée est de l'ordre de quelques millimètres. Une des extrémités de chaque échantillon est collée à une paroi rigide, tandis que l'autre est excitée avec une incidence normale par une onde de pression monochromatique de pulsation ω . Nous avons calculé analytiquement le coefficient d'absorption (figure 4.2-a) et les parties réelle et imaginaire (figure 4.2-b) de l'impédance de surface en fonction de la fréquence. Afin de valider les résultats obtenus nous avons fait une comparaison avec les résultats calculés en utilisant COMSOL en 3D. En effet, nous avons trouvé un excellent accord entre les résultats calculés par les deux méthodes.

Etant donné que le squelette de la mousse est en mouvement qui dépend de la fréquence, l'étude du coefficient d'absorption est effectuée sur trois bandes de fréquences caractéristiques centrées autour de la fréquence de résonance du squelette, qui est la fréquence correspondant au quart de l'onde pour les matériaux collés au mur rigide. Au voisinage de cette fréquence, la rigidité du cadre peut avoir une grande influence sur le coefficient d'absorption. La phase liquide de la mousse (de l'air) est très légère et possède un module de compressibilité bien inférieur à celui du squelette, cela nous permet une estimation de cette fréquence en considérant simplement les propriétés du cadre sous vide comme suit [Dau99] :

$$fr \approx \frac{1}{4e} \sqrt{\frac{E \left(\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right)}{\rho_s}} \quad (4.45)$$

Où e est l'épaisseur de la couche poreuse (ici $e=16$ mm). ρ_s est la densité du squelette (i.e. la densité du matériau poreux dans le vide).

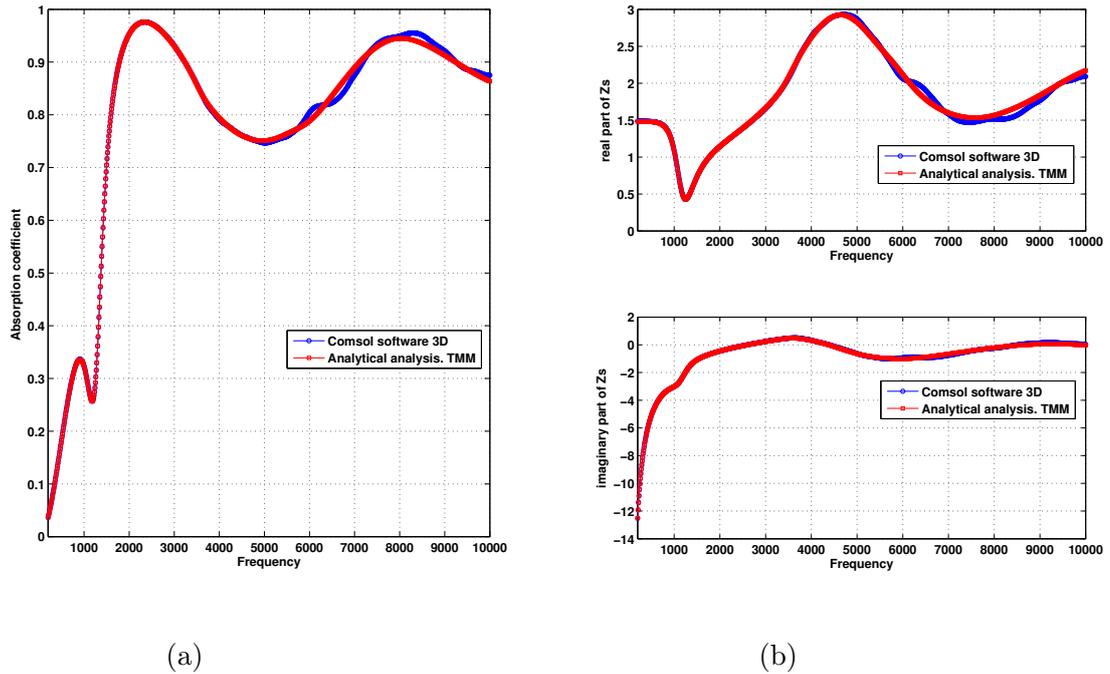


FIGURE 4.2 – Comparaison entre les résultats analytique et numérique de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption [DBA15]

L'estimation de la fréquence de résonance correspondant au quart de l'onde pour la couche de cette mousse est $f_r=1.23$ kHz.. De cette fréquence, nous pouvons trouver trois zones caractéristiques, les fréquences basses [**LF**], moyennes [**MF**], et hautes [**HF**] appartiennent respectivement à l'intervalle $[1, f_r/2]$, $[f_r/2, 2 f_r]$, et $[2 f_r, 10^4]$. La figure (4.3-a) montre que dans la zone des basses fréquences (entre 1 et 615 Hz) et celle des fréquences moyennes (entre 615 et 2462Hz) l'absorption est faible, par contre dans la zone des hautes fréquences (entre 2462 et 10^4 Hz), le coefficient d'absorption obtient une valeur maximale pour certaines fréquences et diminue légèrement à chaque fois avant d'atteindre de nouveau le maximum. Dans cette partie, nous étudions l'influence des paramètres mécaniques et acoustiques sur l'absorption acoustique. Nous montrons l'importance de la vibration de la structure de la mousse de polyuréthane sur ses propriétés d'absorption et étudions les effets des paramètres mécaniques et acoustiques sur ces propriétés. La figure (4.3-a) montre les variations du coefficient d'absorption en faisant varier le module d'Young de + 20%; Nous remarquons que cette variation se trouve autour de la fréquence de résonance; lorsque la valeur du module de Young augmente ou diminue de + 20%, l'amplitude maximale de résonance augmente et diminue d'une valeur de 0,05. On remarque aussi qu'il y a un glissement dans la fréquence de ce maximum d'une valeur de 100Hz vers les fréquences les plus élevées dans le cas où le module d'Young augmente et vers les fréquences inférieures quand il diminue, sans aucune modification dans le facteur de qualité (figure 4.3-b). De la même manière en ce qui concerne l'influence du coefficient de Poisson sur l'absorption, la

même variation a été observée (figure 4.4-a), excepté une petite augmentation de l'amplitude de résonance lorsque la valeur du coefficient de poisson augmente (figure 4.4-b). Dans la figure

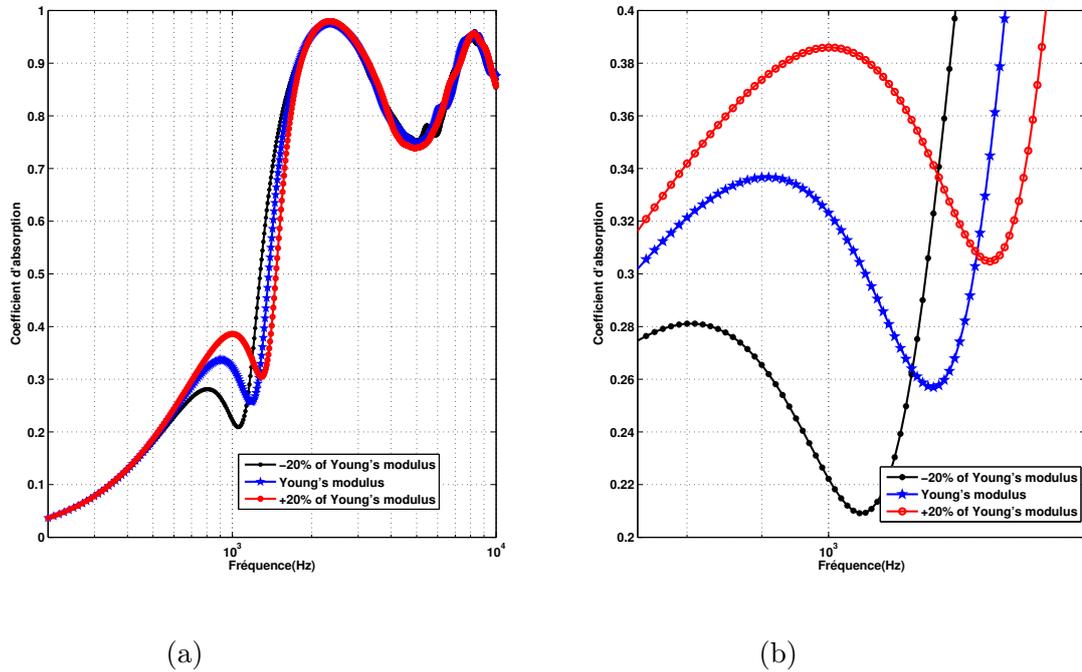


FIGURE 4.3 – a) Influence du module d'Young sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance [DBA15]

(4.6-a), une petite variation est observée au niveau de l'amplitude de résonance sans le décalage de la fréquence de résonance (figure 4.6-b), dans le cas où le facteur de perte augmente ou diminue de -20%. Les figures (4.7-a) et (4.8-a) montrent la variation du coefficient d'absorption en faisant varier les longueurs caractéristiques visqueuse et thermique. Nous remarquons qu'une petite augmentation (ou diminution) est observée de l'amplitude maximale de la résonance lorsque les valeurs des longueurs caractéristiques augmentent (ou diminuent) de 20% (figure (4.7-b) et (4.8-b)), sans aucune modification du facteur de qualité. Une influence notable est observée sur l'absorption dans la gamme des hautes fréquences (>2600 Hz). En effet dans cette gamme de fréquence la viscosité du fluide va induire des frottements entre les parois de la structure et le fluide et les échanges thermiques entre les deux phases créent un phénomène de dissipation de l'énergie acoustique dans le matériau. La même remarque concernant l'effet de la tortuosité et la porosité sur l'absorption acoustique (figure (4.9) et (4.10)).

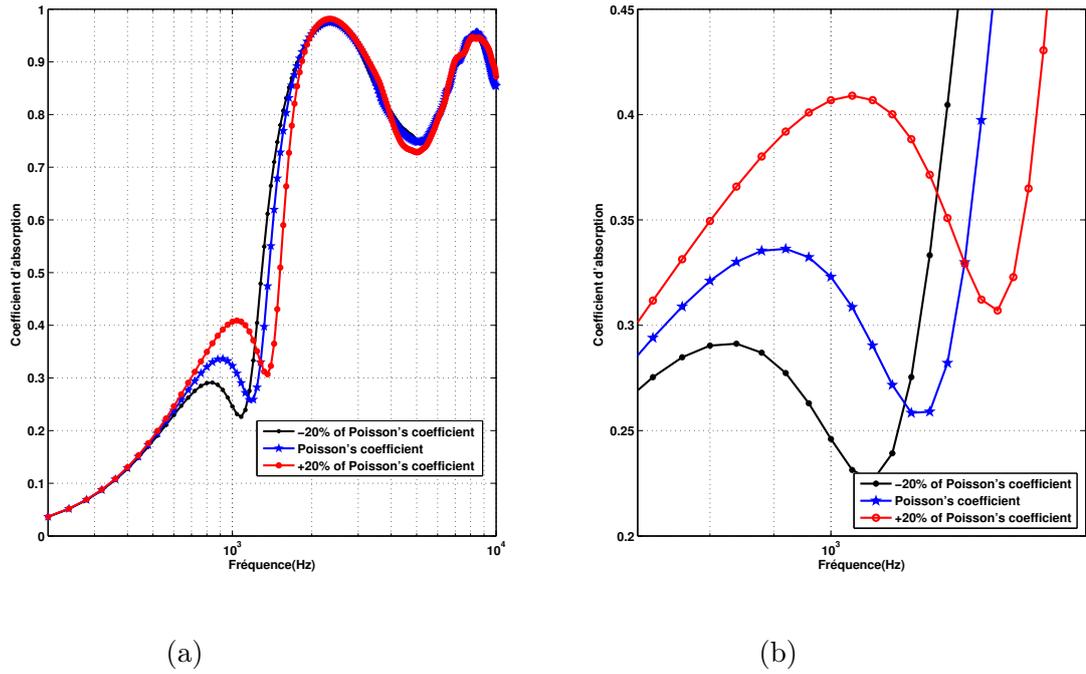


FIGURE 4.4 – a) Influence du coefficient de Poisson sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance [DBA15]

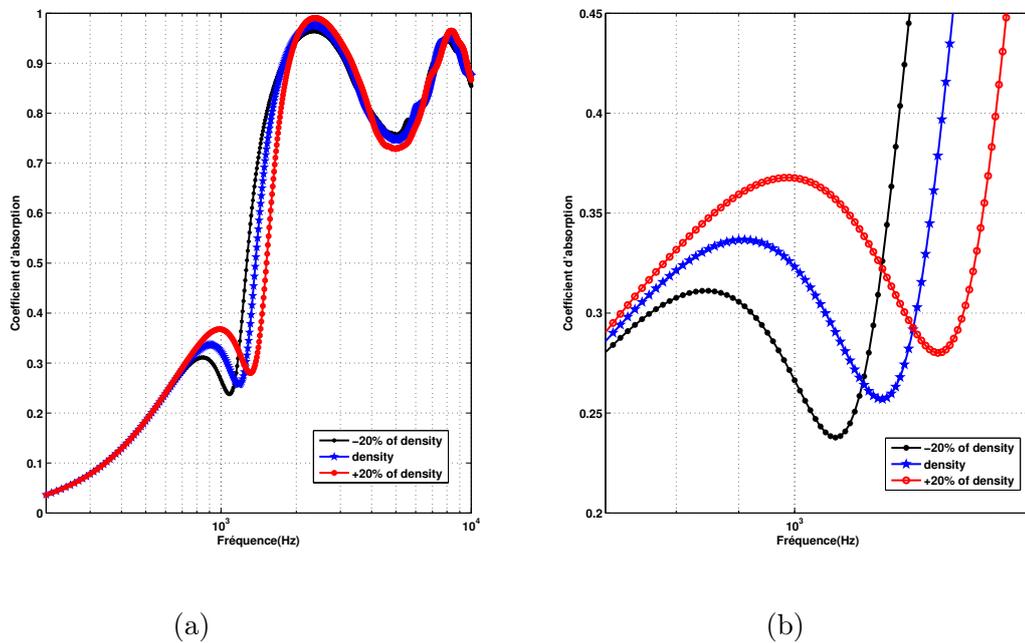


FIGURE 4.5 – a) Influence de la densité sur l'absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance [DBA15]

En ce qui concerne l'influence de la résistivité sur l'absorption, nous remarquons une augmentation (ou une diminution) notable de l'amplitude maximale de la résonance lorsque la valeur

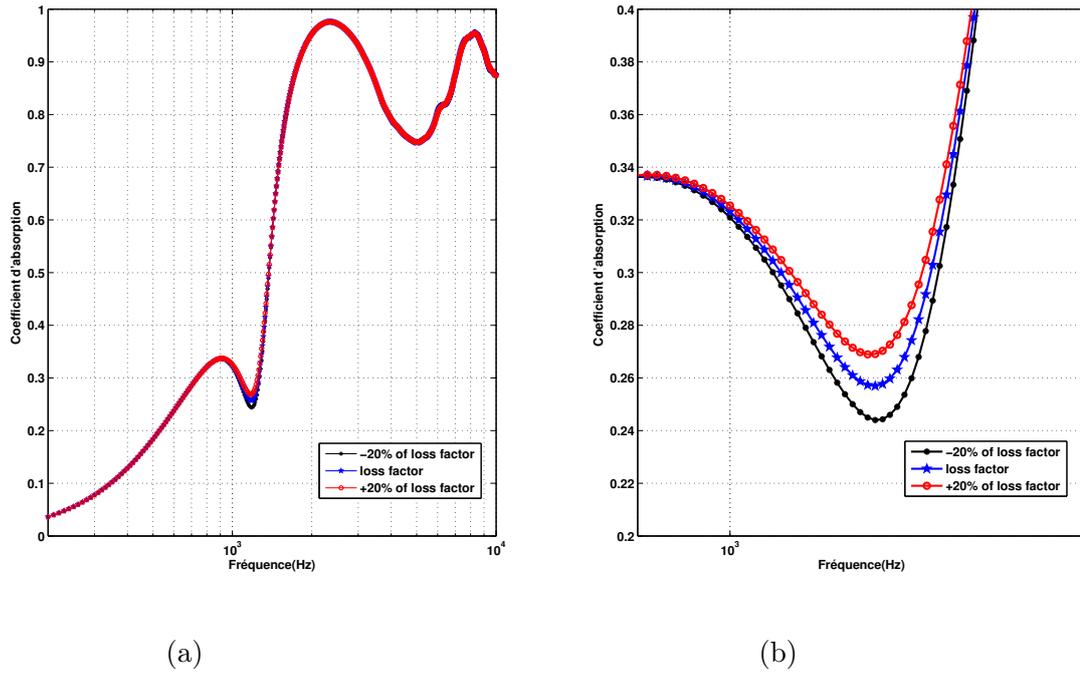


FIGURE 4.6 – a) Influence du facteur de perte sur l’absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance [DBA15]

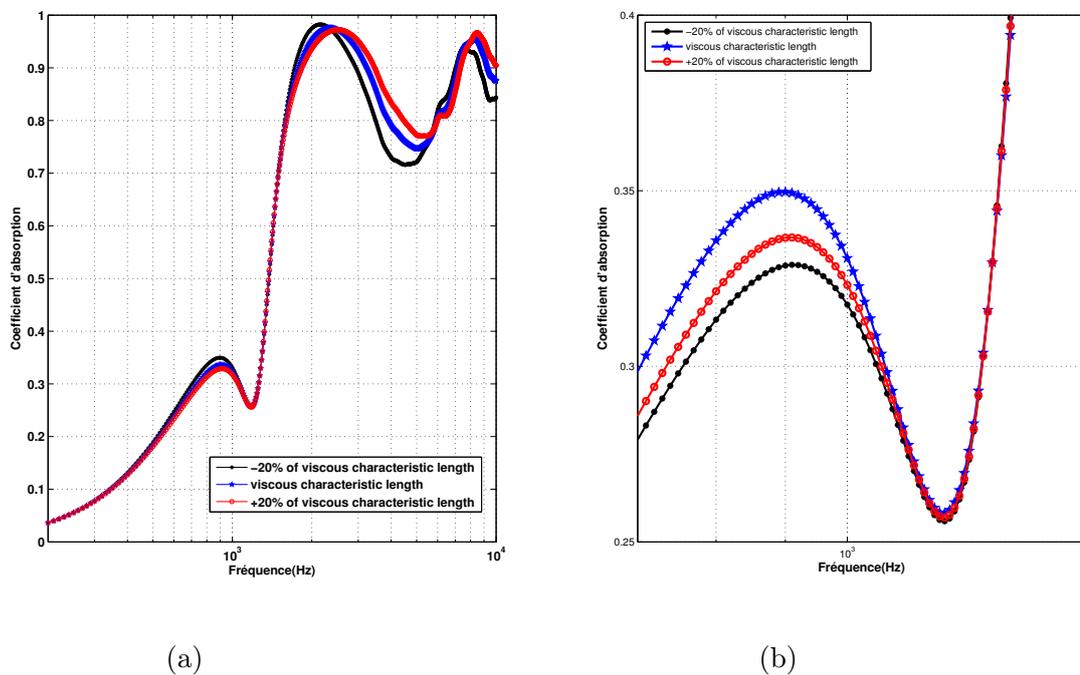


FIGURE 4.7 – a) Influence de la longueur caractéristique visqueuse sur l’absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance

de la résistivité augmente ou diminue, avec un déplacement fréquentiel de cette amplitude vers les hautes fréquences (figure 4.11).

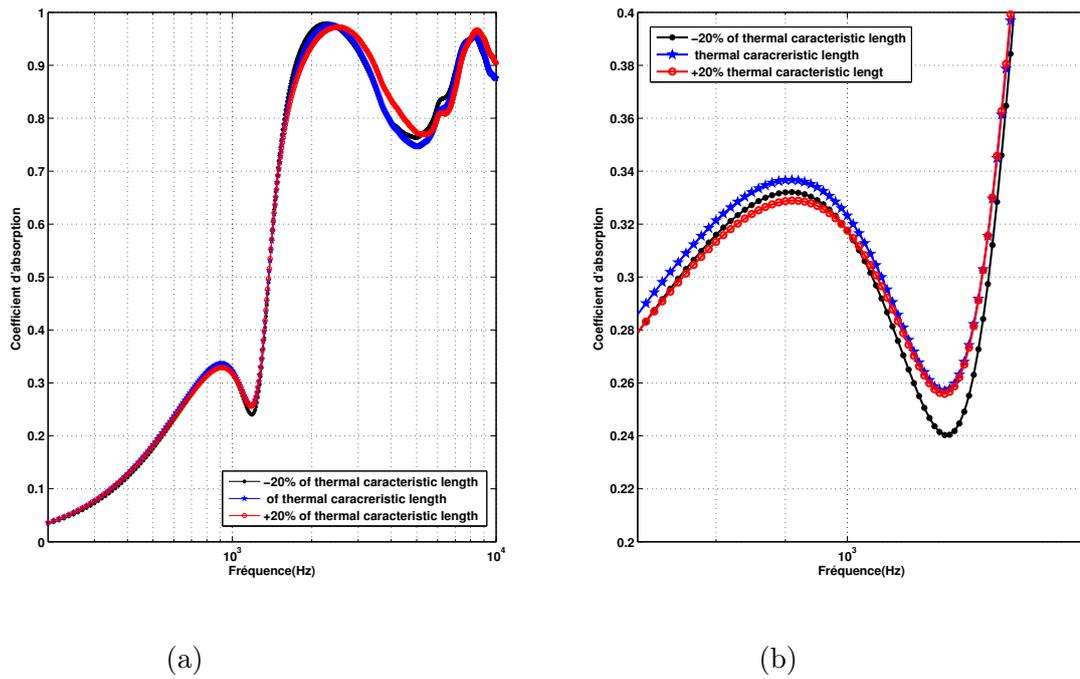


FIGURE 4.8 – a) Influence de la longueur caractéristique thermique sur l’absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance

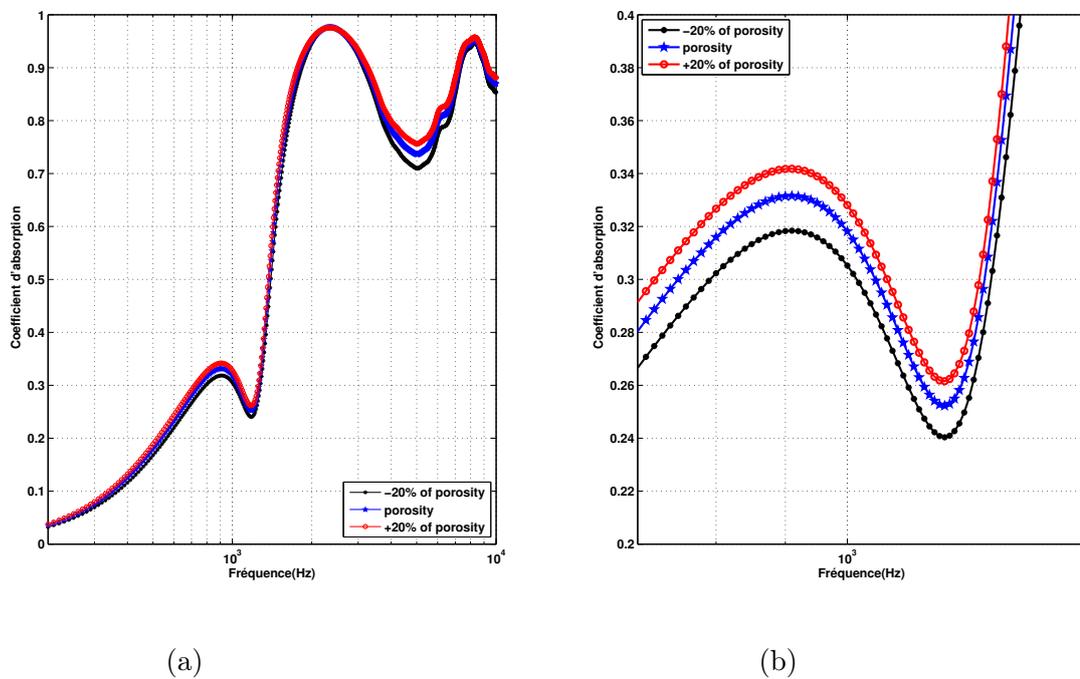


FIGURE 4.9 – a) Influence de la porosité sur l’absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance

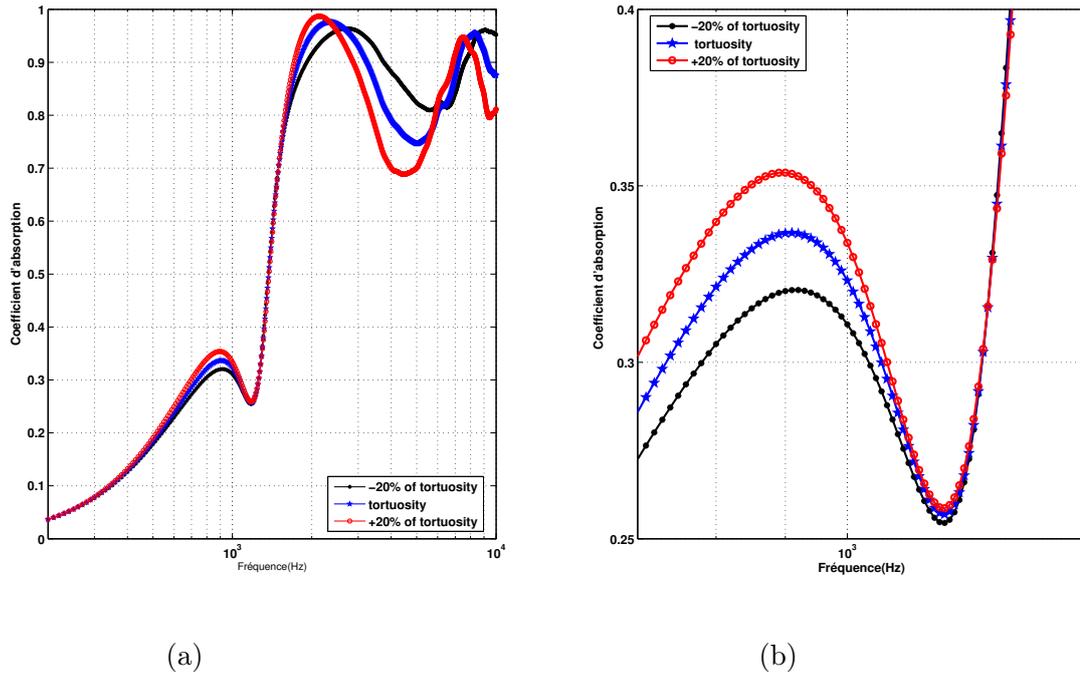


FIGURE 4.10 – a) Influence de la tortuosité sur l’absorption acoustique. b) Zoom autour de la fréquence de résonance

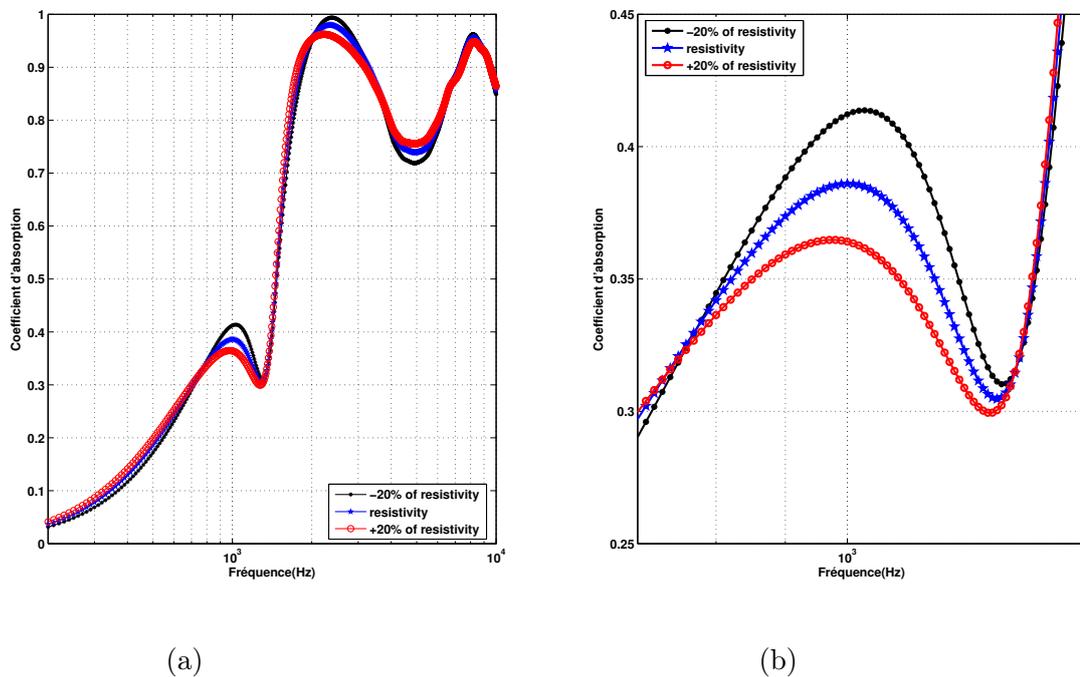


FIGURE 4.11 – Influence de la résistivité sur l’absorption acoustique

V Conclusion

Une approche numérique a été effectuée dans le dernier chapitre de ce travail. cette approche est la méthode des éléments finis. Nous avons utilisé un code de calcul basé sur cette méthode,

appelé Comsol Multiphysics. Nous avons pu implémenter les deux équations de la formulation mixte, développée à partir du modèle de Biot-Allard, dans ce code de calcul. Nous avons calculé les partie réelle et imaginaire de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption en fonction de la fréquence. Une comparaison entre les résultats obtenus par Comsol, avec ceux obtenus par la matrice de transfert, nous avons montré qu'il y a une bonne concordance. Nous avons étudié les effets des paramètres mécaniques et acoustiques sur le coefficient d'absorption. Nous avons montré qu'un effet notable du module d'Young et du coefficient de Poisson ainsi que de la densité sur l'absorption acoustique est observé autour de la fréquence de résonance, et que rien ne change pour les autres paramètres. En conclusion une étude de caractérisation de ces paramètres est essentielle pour bien prédire le comportement acoustique de ces matériaux poreux.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif essentiel de ce travail est consacré à la modélisation de la propagation des ondes sonores dans les milieux complexes en particulier poreux, dans le but de réduire le niveau de bruit dans l'environnement, parce que ce bruit crée des problèmes physiques et psychiques chez l'homme. Pour cela, ce dernier a tenté de réduire les nuisances sonores dans la vie quotidienne. Donc, l'assurance d'un confort acoustique est devenue un enjeu politique, par l'approbation d'une loi qui protège les hommes et l'environnement. Le moyen fondamental pour réaliser ce confort est l'utilisation des matériaux poreux. Deux types de structures se présentent : rigide et élastique. Cette dernière est largement utilisée comme matériau poreux absorbant le bruit de manière très efficace.

Dans ce travail nous avons effectué une recherche très riche concernant les généralités sur les milieux poreux. Nous avons pu mettre des notions de bases nécessaires à la compréhension de la structure du milieu poreux. Nous avons rappelé aussi les différentes échelles spatiales que nous pouvons rencontrer dans notre modélisation, et déterminé les différents types de dissipation d'énergie acoustique due aux comportements viscoélastique du squelette, au frottement visqueux entre les deux parois du squelette et le fluide, et à l'échange thermique entre l'air et le squelette lors du passage de l'air. Dans ce travail nous avons défini de manière très claire les paramètres de chaque phase constituant le matériau poreux, ainsi que ceux qui définissent le couplage entre les deux phases. Nous avons pu distinguer les types d'onde qui peuvent se propager dans ces milieux : les ondes volumiques et les ondes de Rayleigh.

Une partie de ce travail, nous a permis d'identifier les principaux modèles décrivant la propagation et la dissipation des ondes acoustiques et élastiques dans les milieux poreux. Deux modèles ont été retenus dans cette recherche, le premier est le modèle poroélastique de Biot-Allard et le second est le modèle de fluide équivalent de Biot-Allard. Le deuxième est en fait le cas limite (matrice rigide) du premier. Ces deux modèles tiennent compte des mécanismes de dissipations associés aux effets visqueux et aux effets thermiques par l'introduction de masse volumique dynamique complexe et d'un module de compressibilité dynamique complexe. À partir de ces grandeurs complexes, nous avons pu calculer les parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface ainsi que le coefficient d'absorption dans les trois conditions aux limites d'arrière de

milieux poreux (zéro de pression, mur rigide, et lame d'air).

Une approche analytique a été effectuée dans le troisième chapitre. C'est la méthode de la matrice de transfert qui a pour objectif de modéliser analytiquement la propagation des ondes acoustiques dans les milieux stratifiés en particulier les matériaux poroélastiques couplés avec l'air. Nous avons pu identifier à partir de cette méthode, les différentes matrices de transfert de chaque milieu ; poroélastique, fluide, solide élastique, écran perméable,..). Nous avons calculé les indicateurs acoustiques (parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface, et le coefficient d'absorption et de transmission d'un milieu stratifié composé de milieux poroélastiques couplés avec l'air et collé sur un mur rigide. Nous avons donné des exemples d'applications pour les différents matériaux poreux dans les deux cas de la structure, rigide et élastique.

Une approche numérique basée sur la méthode des éléments finis a été effectuée dans le dernier chapitre de ce travail. Nous avons utilisé un code de calcul, appelé Comsol Multiphysics. Nous avons pu implémenter les deux équations de la formulation mixte, développées à partir du modèle de Biot-Allard, dans ce code de calcul. Nous avons calculé les parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption en fonction de la fréquence. Nous avons comparé les résultats obtenus par Comsol, avec ceux obtenus par la matrice de transfert et remarqué qu'il y'a une bonne concordance. Nous avons étudié les effets des paramètres mécaniques sur le coefficient d'absorption et montré qu'un effet notable du module d'Young et du coefficient de Poisson ainsi que de la densité sur l'absorption acoustique est observé autour de la fréquence de résonance, et que rien ne change pour les autres paramètres. En conclusion une étude de caractérisation de ces paramètres est essentielle pour bien prédire le comportement acoustique de ces matériaux poreux.



CALCUL DE LA DENSITÉ EFFECTIVE ET LA COMPRESSIBILITÉ DYNAMIQUE EN UTILISANT DIFFÉRENTS MODÈLES

Les expressions de la densité effective et la compressibilité dynamique ont été développées par plusieurs modèles, mais dans cette étude, nous ne citerons que deux modèles les plus célèbres pour les milieux poreux à structure qui sont les modèles de Johnson-Allard, et de Lafarge-Allard avec une description plus fine des échanges thermiques dans le domaine des basses fréquences.

I Modèle Johnson-Allard à 5 paramètres

Dans le modèle de Johnson-Allard, les expressions générales de la densité effective et de la compressibilité dynamique sont déterminées à partir des cinq paramètres caractéristiques qui sont définis dans le chapitre 2 :

- Effets visqueux et inertiels :

$$\rho_e(\omega) = \alpha_\infty \rho_0 \left[1 - \frac{j\sigma\phi G(\omega)}{\rho_0 \alpha_\infty \omega} \right] \quad (\text{A.1})$$

avec :

$$G(\omega) = \left(1 + \frac{4j\alpha_\infty^2 \eta \rho_0 \omega}{\sigma^2 \phi^2 \Lambda^2} \right) \quad (\text{A.2})$$

- Effets thermique

$$K(\omega) = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1)H(\omega)} \quad (\text{A.3})$$

avec :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{8\eta}{j\Lambda'^2 \rho_0 P_r \omega} \left(1 + \frac{j\Lambda'^2 \rho_0 P_r \omega}{16\eta}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.4})$$

II Modèle de Lafarge-Allard à 6 paramètres

Lafarge et Allard ont introduit un paramètre supplémentaire, qui est la perméabilité thermique k'_0 , afin de modéliser plus précisément les échanges thermiques entre l'air et la structure rigide dans la gamme des basses fréquences. La perméabilité thermique est définie par analogie avec la perméabilité visqueuse dans la loi de Darcy. Ce nouveau paramètre s'exprime à partir de la constante de piégeage Γ du matériau poreux, et d'un facteur de forme M' , traduisant essentiellement l'écart au modèle de Johnson-Allard.

$$k'_0 = \frac{M'}{\Gamma} \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas de pores de forme cylindriques à section circulaire, la constante de piégeage est égale à :

$$\Gamma = \frac{8}{\phi\Lambda'} \quad (\text{A.6})$$

La densité effective n'est pas modifiée par l'introduction de la perméabilité thermique, car elle ne prend en compte que les couplages visqueux et inertiels entre le fluide saturant et le squelette. Par contre, la compressibilité dynamique prend une nouvelle forme (A. 7) incluant le paramètre k'_0 par l'intermédiaire de son facteur de forme M' .

$$K(\omega) = \frac{\gamma P_0}{\gamma - \frac{\gamma-1}{1 - j\frac{\omega'_0}{\omega} \left[1 + j\frac{M'}{2} \frac{\omega}{\omega'_0}\right]}} \quad (\text{A.7})$$

B

ELÉMENTS $[T_{ij}]$ DE LA MATRICE DE TRANSFERT $[T]$

$$T_{11} = \frac{2N\beta^2(p_2D_1 - p_1D_2) - (p_3(C_1D_2 - C_2D_1))}{\Delta} \quad (\text{B.1})$$

$$T_{12} = \frac{\alpha_2q_1 [\mu_2(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] - \alpha_1q_2 [\mu_1(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] + 2\alpha_3q_3\alpha_1\alpha_2(\mu_1 - \mu_2)}{\alpha_1\alpha_2(\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 + \alpha_3^2)} \quad (\text{B.2})$$

$$T_{13} = j\beta \frac{(\alpha_1q_2 - \alpha_2q_1)}{\alpha_1\alpha_2(\mu_1 - \mu_2)} \quad (\text{B.3})$$

$$T_{14} = \beta\omega \frac{[p_1D_2 - p_2D_1 - p_3(D_2 - D_1)]}{\Delta} \quad (\text{B.4})$$

$$T_{15} = \frac{j\omega}{N(\beta^2 + \alpha_3^2)} \left(\frac{\beta^2q_1(\mu_1 - \mu_3)}{\alpha_1(\mu_2 - \mu_1)} + \frac{\beta^2q_2(\mu_1 - \mu_3)}{\alpha_2(\mu_1 - \mu_2)} + \alpha_3q_3 \right) \quad (\text{B.5})$$

$$T_{16} = \beta\omega \left(\frac{p_2C_1 - p_1C_2 - p_2(C_1 - C_2) + 2N\beta^2(p_2 - p_1)}{\Delta} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$T_{21} = \frac{j\omega}{\Delta} \left(2N(\alpha_1q_1D_2 - \alpha_1q_1D_2) - \frac{q_3}{\alpha_3}(C_1D_2 - C_2D_1) \right) \quad (\text{B.7})$$

$$T_{21} = \frac{p_2 [\mu_1(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] - p_1 [\mu_2(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] + 2\beta^2p_3(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 + \alpha_3^2)} \quad (\text{B.8})$$

$$T_{22} = \frac{p_2 [\mu_1(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] - p_1 [\mu_2(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] + 2\beta^2p_3(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 - \alpha_3^2)} \quad (\text{B.9})$$

$$T_{23} = \frac{p_1 - p_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad (\text{B.10})$$

$$T_{24} = \frac{j\omega}{\Delta} \left(\alpha_1q_1D_2 - \alpha_1q_1D_2 + \frac{\beta^2q_3}{\alpha_3}(D_2 - D_1) \right) \quad (\text{B.11})$$

$$T_{25} = \frac{-j\beta\omega}{N(\beta^2 + \alpha_3^2)} \left(\frac{p_1(\mu_1 - \mu_3)}{(\mu_2 - \mu_1)} + \frac{p_2(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)} - p_3 \right) \quad (\text{B.12})$$

$$T_{26} = \frac{j\omega}{\Delta} \left(\alpha_1q_1(C_2 + 2N\beta^2) - \alpha_2q_2(C_1 + 2N\beta^2) - \frac{q_3\beta^2}{\alpha_3}(C_1 - C_2) \right) \quad (\text{B.13})$$

$$T_{31} = \frac{j\omega}{\Delta} \left(2N(\alpha_1\mu_1q_1D_2 - \alpha_2\mu_2q_2D_1) - \frac{\mu_3q_3}{\alpha_3}(C_1D_2 - C_2D_1) \right) \quad (\text{B.14})$$

$$T_{32} = \frac{-\mu_1p_1 [\mu_2(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] + \mu_2p_2 [\mu_1(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] + 2\beta^2\mu_3p_3(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 + \alpha_3^2)} \quad (\text{B.15})$$

$$T_{33} = \frac{\mu_1p_1 - \mu_2p_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad (\text{B.16})$$

$$T_{34} = \frac{j\omega}{\Delta} \left(-\alpha_1\mu_1q_1D_2 + \alpha_2\mu_2q_2D_1 + \frac{\beta^2\mu_3q_3}{\alpha_3}(D_1 - D_2) \right) \quad (\text{B.17})$$

$$T_{35} = \frac{-j\beta\omega}{N(\beta^2 + \alpha_3^2)} \left(p_1\mu_1 \frac{(\mu_2 - \mu_3)}{(\mu_1 - \mu_2)} + p_2\mu_2 \frac{(\mu_1 - \mu_3)}{(\mu_1 - \mu_2)} - p_3\mu_3 \right) \quad (\text{B.18})$$

$$T_{36} = \frac{j\omega}{\Delta} \left(\mu_1\alpha_1q_1(C_2 + 2N\beta^2) - \mu_2\alpha_2q_2(C_1 + 2N\beta^2) - \frac{\beta^2}{\alpha_3}\mu_3q_3(C_1 - C_2) \right) \quad (\text{B.19})$$

$$T_{41} = \frac{2N\beta}{\omega\Delta} [C_1p_1D_1 - C_2p_2D_2 - p_3(C_1D_2 - C_2D_1)] \quad (\text{B.20})$$

$$T_{42} = -j \frac{-C_1q_1\alpha_2 [\mu_2(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] - C_2q_2\alpha_1 [\mu_1(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3]}{\alpha_1\alpha_2\omega(\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 + \alpha_3^2)} - \frac{4N\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta^2q_3(\mu_1 - \mu_2)}{\alpha_1\alpha_2\omega(\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 + \alpha_3^2)} \quad (\text{B.21})$$

$$T_{43} = \frac{j\alpha_2C_1q_1 - \alpha_1C_2q_2}{\alpha_1\alpha_2\omega(\mu_1 - \mu_2)} \quad (\text{B.22})$$

$$T_{44} = \frac{-p_1C_1D_2 + p_2C_2D_1 - 2N\beta^2p_3(D_2 - D_1)}{\Delta} \quad (\text{B.23})$$

$$T_{45} = \frac{-j\beta}{\beta^2 + \alpha_3^2} \left(\frac{C_1q_1(\mu_2 - \mu_3)}{N\alpha_1(\mu_1 - \mu_2)} + \frac{C_2q_2(\mu_1 - \mu_3)}{N\alpha_2(\mu_1 - \mu_2)} - p_3\mu_3 \right) \quad (\text{B.24})$$

$$T_{46} = \frac{p_1C_1(C_2 + 2N\beta^2) - p_2C_2(C_1 + 2N\beta^2) - 2N\beta^2p_3(C_1 - C_2)}{\Delta} \quad (\text{B.25})$$

$$T_{51} = \frac{jN\beta^2}{\Delta\omega} \left(4N\alpha_1q_1D_2 - 4N\alpha_2q_2D_1 - q_3 \frac{\alpha_3^2 - \beta^2}{\beta^2\alpha_3^2}(C_1D_2 - C_2D_1) \right) \quad (\text{B.26})$$

$$T_{52} = \frac{2N\beta p_1 [\mu_2(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2\mu_3] - 2N\beta p_2}{\omega(\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 + \alpha_3^2)} - \frac{2N\beta p_3(\alpha_3^2 - \beta^2)}{\omega(\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 + \alpha_3^2)} \quad (\text{B.27})$$

$$T_{53} = \frac{-2N\beta}{\omega(\mu_1 - \mu_2)}(p_1 - p_2) \quad (\text{B.28})$$

$$T_{54} = 2jN\beta\Delta \left(\alpha_1\mu_1q_1D_2 - \alpha_2\mu_2q_2D_1 - \frac{q_3}{2} \frac{\alpha_3^2 - \beta^2}{\alpha_3}(D_1 - D_2) \right) \quad (\text{B.29})$$

$$T_{55} = \frac{2\beta^2}{\beta^2 + \alpha_3^2} \left(p_1 \frac{(\mu_2 - \mu_3)}{(\mu_1 - \mu_2)} + p_2 \frac{(\mu_1 - \mu_3)}{(\mu_1 - \mu_2)} - p_3 \frac{\alpha_3^2 - \beta^2}{2\beta^2} \right) \quad (\text{B.30})$$

$$T_{56} = \frac{-2jN\beta}{\Delta} \left[\alpha_1q_1(C_2 + 2N\beta^2) - \alpha_2q_2(C_1 + 2N\beta^2) - \frac{q_3}{2} \frac{\alpha_3^2 - \beta^2}{\alpha_3}(C_1 - C_2) \right] \quad (\text{B.31})$$

$$T_{61} = \frac{2N\beta D_1 D_2}{\omega\Delta} (p_1 - p_2) \quad (\text{B.32})$$

$$T_{62} = \frac{-j q_1 \alpha_2 D_1 [\mu_2(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2 \mu_3] - q_2 \alpha_1 D_2 [\mu_1(\alpha_3^2 - \beta^2) + 2\beta^2 \mu_3]}{\omega \alpha_1 \alpha_2 \omega (\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 + \alpha_3^2)} - \frac{4N \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta^2 q_3 (\mu_1 - \mu_2)}{\alpha_1 \alpha_2 \omega (\mu_1 - \mu_2)(\beta^2 + \alpha_3^2)} \quad (\text{B.33})$$

$$T_{63} = \frac{j}{\omega(\mu_1 - \mu_2)} \left(\frac{q_1 D_1}{\alpha_1} - \frac{q_2 D_2}{\alpha_2} \right) \quad (\text{B.34})$$

$$T_{64} = \frac{-D_1 D_2}{\Delta} (p_1 - p_2) \quad (\text{B.35})$$

$$T_{65} = -\frac{j\beta}{N(\beta^2 + \alpha_3^2)} \left(\frac{D_1 q_1 (\mu_2 - \mu_3)}{\alpha_1 (\mu_1 - \mu_2)} + \frac{D_2 q_2 (\mu_1 - \mu_3)}{\alpha_2 (\mu_1 - \mu_2)} \right) \quad (\text{B.36})$$

Dans ces expressions, les équations α_i , β_i , C_i , D_i , p_i , q_i , et Δ sont égales respectivement.

$$\alpha_i = k_{i3} \quad (\text{B.37})$$

$$\beta = k_t \quad (\text{B.38})$$

$$C_i = (P + Q\mu_i)(\beta^2 + \alpha_i^2) - 2N\beta^2 \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.39})$$

$$D_i = (R\mu_i + Q)(\beta^2 + \alpha_i^2) \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.40})$$

$$p_i = \cos k_{i3} h \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.41})$$

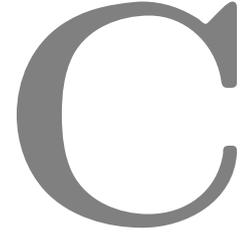
$$q_i = \sin k_{i3} h \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.42})$$

$$\Delta = D_1(2N\beta^2 + C_2) - D_2(2N\beta^2 + C_1) \quad (\text{B.43})$$

Les expressions des éléments de T_{ij} ne sont pas simples, et il peut être facile d'évaluer $[T]$ par l'utilisation de l'équation (33) de $[\Gamma(0)]$ et $[\Gamma(h)]^{-1}$ que d'écrire les expressions explicites (100-135)

$$[T] = [\Gamma(h)][\Gamma(0)]^{-1} \quad (\text{B.44})$$

Les éléments de la matrice de $[\Gamma(0)]^{-1}$ sont donnés dans Lauriks et al [64].



ELÉMENTS DES MATRICES A_1 , A_2 , B_1 , ET B_2

dans les équations (4.41) et (4.42)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \omega^2 \phi_2^2 / \phi_1^2 \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.1})$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} [\phi_1 (1 + Q_1/R_1) - \phi_2 (1 + Q_2/R_2)] p_1 \cdot n_x \\ [\phi_1 (1 + Q_1/R_1) - \phi_2 (1 + Q_2/R_2)] p_1 \cdot n_y \\ [\phi_1 (1 + Q_1/R_1) - \phi_2 (1 + Q_2/R_2)] p_1 \cdot n_z \\ \omega^2 \left((\tilde{\rho}_{12}^{(1)} + \tilde{\rho}_{12}^{(1)}) / \phi_1^2 - (\tilde{\rho}_{12}^{(2)} + \tilde{\rho}_{12}^{(2)}) / \phi_2^2 \right) (u_1 \cdot n_x + v_1 \cdot n_y + w_1 \cdot n_z) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \omega^2 \phi_1^2 / \phi_2^2 \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.3})$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} [\phi_2 (1 + Q_2/R_2) - \phi_1 (1 + Q_1/R_1)] p_2 \cdot n_x \\ [\phi_2 (1 + Q_2/R_2) - \phi_1 (1 + Q_1/R_1)] p_2 \cdot n_y \\ [\phi_2 (1 + Q_2/R_2) - \phi_1 (1 + Q_1/R_1)] p_2 \cdot n_z \\ \omega^2 \left((\tilde{\rho}_{12}^{(2)} + \tilde{\rho}_{12}^{(2)}) / \phi_2^2 - (\tilde{\rho}_{12}^{(1)} + \tilde{\rho}_{12}^{(1)}) / \phi_1^2 \right) (u_2 \cdot n_x + v_2 \cdot n_y + w_3 \cdot n_z) \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [AA09] Jean Allard and Nouredine Atalla. *Propagation of sound in porous media : modelling sound absorbing materials 2e*. John Wiley & Sons, 2009.
- [ABC85] Jean-Louis Auriault, Lionel Borne, and René Chambon. Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of darcy. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 77(5) :1641–1650, 1985.
- [Ach12] Jan Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*, volume 16. Elsevier, 2012.
- [ADN⁺90] JF Allard, C Depollier, J Nicolas, W Lauriks, and A Cops. Propriétés acoustiques des matériaux poreux saturés d’air et théorie de biot. *Journal d’Acoustique*, 3 :29–38, 1990.
- [APD98] Nouredine Atalla, Raymond Panneton, and Patricia Debergue. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *JOURNAL-ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA*, 104 :1444–1452, 1998.
- [Aur80] JL Auriault. Dynamic behaviour of a porous medium saturated by a newtonian fluid. *International Journal of Engineering Science*, 18(6) :775–785, 1980.
- [Bio41] Maurice A Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, 12(2) :155–164, 1941.
- [Bio55] M Av Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, 26(2) :182–185, 1955.
- [Bio56a] MA Biot. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, 27(5) :459–467, 1956.
- [Bio56b] Maurice A Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *The Journal of the acoustical Society of america*, 28(2) :168–178, 1956.
- [Bio56c] Maurice A Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher frequency range. *the Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2) :179–191, 1956.

- [Bio62a] MA Biot. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(9A) :1254–1264, 1962.
- [Bio62b] Maurice A Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of applied physics*, 33(4) :1482–1498, 1962.
- [BK81] Robert Burridge and Joseph B Keller. Poroelasticity equations derived from microstructure. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(4) :1140–1146, 1981.
- [BLA95] B Brouard, D Lafarge, and J-F Allard. A general method of modelling sound propagation in layered media. *Journal of Sound and Vibration*, 183(1) :129–142, 1995.
- [BLAT96] Bruno Brouard, Denis Lafarge, Jean-François Allard, and Masayuki Tamura. Measurement and prediction of the reflection coefficient of porous layers at oblique incidence and for inhomogeneous waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 99(1) :100–107, 1996.
- [Bre12] Leonid Brekhovskikh. *Waves in Layered Media 2e*, volume 16. Elsevier, 2012.
- [Bro80] Robert JS Brown. Connection between formation factor for electrical resistivity and fluid-solid coupling factor in biot’s equations for acoustic waves in fluid-filled porous media. *Geophysics*, 45(8) :1269–1275, 1980.
- [Bru98] Michel Bruneau. *Manuel d’acoustique fondamentale*. Hermes, 1998.
- [BW57] M Biot and D Willis. The theory of consolidation. *J. Appl Elastic Coefficients of the Mech*, 24 :594–601, 1957.
- [CA91] Yvan Champoux and Jean-F Allard. Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *Journal of applied physics*, 70(4) :1975–1979, 1991.
- [Cha05a] Guy Chavent. *Modélisation mathématique et numérique de la propagation d’ondes dans les milieux viscoélastiques et poroélastiques*. PhD thesis, UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE, 2005.
- [Cha05b] Guy Chavent. *Modélisation mathématique et numérique de la propagation d’ondes dans les milieux viscoélastiques et poroélastiques*. PhD thesis, UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE, 2005.
- [Cou91] Olivier Coussy. *Mécanique des milieux poreux*. Editions Technip, 1991.
- [Coy99] JP Coyette. The use of finite-element and boundary-element models for predicting the vibro-acoustic behaviour of layered structures. *Advances in Engineering Software*, 30(2) :133–139, 1999.

- [DAL88] Claude Depollier, Jean F Allard, and Walter Lauriks. Biot theory and stress-strain equations in porous sound-absorbing materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 84(6) :2277–2279, 1988.
- [Dau99] Nicolas Dauchez. *Etude vibroacoustique des matériaux poreux par éléments finis*. Université de Sherbrooke, 1999.
- [DB70] ME Delany and EN Bazley. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied acoustics*, 3(2) :105–116, 1970.
- [DB02] Luc Dormieux and Emmanuel Bourgeois. *Introduction à la micromécanique des milieux poreux*. Presses de l'École nationale des ponts et chaussées, 2002.
- [DBA15] Lyes Dib, Samia Bouhedja, and Hamza Amrani. Mechanical parameters effects on acoustic absorption at polymer foam. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2015, 2015.
- [Dou07] Olivier Doutres. *Caractérisation mécanique de matériaux fibreux en vibroacoustique*. PhD thesis, Université du Maine, 2007.
- [DSA01] Nicolas Dauchez, Sohbi Sahraoui, and Nouredine Atalla. Convergence of poroelastic finite elements based on biot displacement formulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(1) :33–40, 2001.
- [DSBA08] Olivier Dazel, Franck Sgard, François-Xavier Becot, and Nouredine Atalla. Expressions of dissipated powers and stored energies in poroelastic media modeled by $\{u, U\}$ and $\{u, P\}$ formulations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(4) :2054–2063, 2008.
- [DSLA02] Olivier Dazel, F Sgard, C-H Lamarque, and N Atalla. An extension of complex modes for the resolution of finite-element poroelastic problems. *Journal of Sound and Vibration*, 253(2) :421–445, 2002.
- [FL77] DL Folds and CD Loggins. Transmission and reflection of ultrasonic waves in layered media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 62(5) :1102–1109, 1977.
- [Gee08] Nathalie Geebelen. Structure-borne sound sensitivity of building structures—assessment of the acoustic performances of multilayered structures by simulation and measurement techniques (contactgeluidgevoeligheid van bouwconstructies—bepaling van de akoestische eigenschappen van meerlaagse structuren dmv reken-en meettechnieken). 2008.
- [GPA97] S Gorog, R Panneton, and N Atalla. Mixed displacement-pressure formulation for acoustic anisotropic open porous media. *Journal of applied physics*, 82(9) :4192–4196, 1997.

- [Gra75] Karl F Graff. *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation, 1975.
- [Hen97] Michel Henry. *Mesures des paramètres caractérisant un milieu poreux. Etude expérimentale du comportement acoustique des mousses aux basses fréquences*. PhD thesis, 1997.
- [HGC12] Y Hu, Marie-Annick Galland, and Kean Chen. Acoustic transmission performance of double-wall active sound packages in a tube : numerical/experimental validations. *Applied Acoustics*, 73(4) :323–337, 2012.
- [HU10] Ying HU. *Développement de panneaux hybrides passifs/actifs pour l'acoustique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2010.
- [JKD87] David Linton Johnson, Joel Koplik, and Roger Dashen. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of fluid mechanics*, 176 :379–402, 1987.
- [LABH09] Pierre Leroy, Nouredine Atalla, Alain Berry, and Philippe Herzog. Three dimensional finite element modeling of smart foam. *the Journal of the Acoustical Society of America*, 126(6) :2873–2885, 2009.
- [LC] Pierre Lamary and Yvon Chevalier. La méthode des éléments finis en vibro-acoustique.
- [Ler08] Pierre Leroy. *Les mousses adaptatives pour l'amélioration de l'absorption acoustique : modélisation, mise en oeuvre, mécanismes de contrôle*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2008.
- [LL59] Lev Davidovich Landau and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. Fluid mechanics. 1959.
- [LLAT97] Denis Lafarge, Pavel Lemarinier, Jean F Allard, and Viggo Tarnow. Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(4) :1995–2006, 1997.
- [LM99] Gaëlle Lefeuvre Mesgouez. *Propagation d'ondes dans un massif soumis à des charges se déplaçant à vitesse constante*. PhD thesis, 1999.
- [LMM12] Gaëlle Lefeuvre-Mesgouez and Arnaud Mesgouez. Three-dimensional dynamic response of a porous multilayered ground under moving loads of various distributions. *Advances in Engineering Software*, 46(1) :75–84, 2012.
- [LMPLH02] G Lefeuvre-Mesgouez, AT Peplow, and D Le Houédec. Surface vibration due to a sequence of high speed moving harmonic rectangular loads. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22(6) :459–473, 2002.
- [LN12] Eleonora Lind Nordgren. *A study of tailoring acoustic porous material properties when designing lightweight multilayered vehicle panels*. PhD thesis, Paris, CNAM, 2012.

- [Low95] Michael JS Lowe. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 42(4) :525–542, 1995.
- [LP92] Daniel Lévesque and Luc Piché. A robust transfer matrix formulation for the ultrasonic response of multilayered absorbing media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92(1) :452–467, 1992.
- [LWdR08] W Lauriks, A Wirgin, and Laurent de Ryck. Acoustical characterisation of macroscopically inhomogeneous porous materials. 2008.
- [Oln99] Xavier Olny. *Absorption acoustique des milieux poreux à simple et double porosité. Modélisation et validation expérimentale*. PhD thesis, 1999.
- [Pan96] Raymond Panneton. Modélisation numérique tridimensionnelle par éléments finis des milieux poroélastiques. *These, Université de Sherbrooke, Canada*, 1996.
- [SB00] Bryan H Song and J Stuart Bolton. A transfer-matrix approach for estimating the characteristic impedance and wave numbers of limp and rigid porous materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(3) :1131–1152, 2000.
- [Sch83] Kurt P Scharnhorst. Properties of acoustic and electromagnetic transmission coefficients and transfer matrices of multilayered plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 74(6) :1883–1886, 1983.
- [Sch90] Klaus Scharnhorst. On propagation of light in the vacuum between plates. *Physics Letters B*, 236(3) :354–359, 1990.
- [Sel03] Nadine Sellen. *Modification de l'impédance de surface d'un matériau par contrôle actif : Application à la caractérisation et à l'optimisation d'un absorbant acoustique*. PhD thesis, 2003.
- [SME01] S Sahraoui, E Mariez, and M Etchessahar. Linear elastic properties of anisotropic open-cell foams. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(1) :635–637, 2001.
- [TIK98] K Terada, T Ito, and N Kikuchi. Characterization of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 153(3) :223–257, 1998.
- [WR01] L Wang and SI Rokhlin. Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media. *Ultrasonics*, 39(6) :413–424, 2001.
- [ZK49] Cornelis Zwikker and Cornelis Willem Kosten. *Sound absorbing materials*. Elsevier, 1949.