

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE CONSTANTINE1  
FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

# THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences  
en ELECTRONIQUE  
Option: MICRO-ONDES

Par : *Fatima Zohra SIABAH*

*Contribution à la Modélisation de Structures Planaires  
Passives par l'Approche dans le Domaine Spectral*

Soutenue le 14/04/2013

devant le jury composé de :

|                              |  |                           |
|------------------------------|--|---------------------------|
| M. Abdelhak BENNIA           | Professeur Université Constantine1         | <b>Président</b>          |
| M. Mohamed Lahdi RIABI       | Professeur Université Constantine1         | <b>Directeur de Thèse</b> |
| M. Noureddine DOGHMANE       | Professeur Université Badji Mokhtar-Annaba | <b>Examineur</b>          |
| M. Djamel BENATIA            | Professeur Université Hadj Lakhdar-Batna   | <b>Examineur</b>          |
| M. Abdelhafid CHAABI         | Professeur Université Constantine1         | <b>Examineur</b>          |
| M. Mohamed Toufik BENHABILES | Maître de conférences Constantine1         | <b>Invité</b>             |

*Je dédie ce travail à mes parents.*

## *Remerciements*

*Ce travail a été effectué au sein de l'équipe de recherche en modélisation électromagnétique du laboratoire d'Electromagnétisme et de Télécommunications (LET) de l'université Constantine1.*

*Je tiens en premier lieu à remercier Monsieur Mohamed Lahdi RIABI, mon directeur de thèse, qui a dirigé ce travail avec beaucoup d'intérêt et de rigueur. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour sa disponibilité, son expérience et ses conseils.*

*Je voudrai très sincèrement remercier Monsieur Mohamed Toufik BENHABILES, maître de conférences à l'université de Constantine d'avoir assuré la codirection de ce travail. Sa disponibilité, son expérience, son savoir scientifique ont été déterminants dans l'aboutissement de ce travail.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur Abdelhak BENNIA, professeur à l'université de Constantine, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.*

*Je remercie sincèrement Monsieur Noureddine DOGHMANE, professeur à l'université Badji Mokhtar de Annaba, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de l'examiner.*

*Que Monsieur Djamel BENATIA, professeur à l'université Hadj Lakhdar de Batna, reçoive mes sincères remerciements pour avoir accepté de faire partie du jury.*

*Je suis profondément reconnaissante à Monsieur Abdelhafid CHAABI, professeur à l'université de Constantine, d'avoir accepté de juger mon travail.*

*J'exprime également ma profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.*

*Pour finir, je remercie du fond du cœur ceux qui m'ont toujours soutenu, qui représentent le support de ma vie: ma famille, mes amis.*

# *Table des matières*

## *Table des matières*

|  |    |
|--|----|
| <i>Introduction générale</i> .....                                   | 1  |
| <br><i>Chapitre I</i>  |    |
| <br><i>La Méthode Spectrale : Problématique et Etat de l'Art</i>     |    |
| I-1- Introduction.....   | 4  |
| I-2- Historique des lignes de transmission planaires .....           | 6  |
| I-3- La méthode spectrale.....                                       | 9  |
| I-4- l'approche générale appliquée à une ligne micro ruban suspendue |    |
| I-3-1- Détermination des équations des champs électriques.....       | 11 |
| I-5 - L'approche par immittances .....                               | 16 |
| I-5-1- Illustration de la formulation.....                           | 16 |
| I-6- La méthode de résolution .....                                  | 20 |
| I-7- Conclusion .....  | 23 |
| Références du chapitre I.....  | 24 |
| <br><i>Chapitre II</i>   |    |
| <br><i>Implantation de fonctions d'essai à décroissance rapide</i>   |    |
| II-1- Introduction.....  | 27 |
| II-2 - Méthodologie .....  | 28 |
| II-3 - Formulation du problème .....                                 | 30 |

|   |    |
|---|----|
| II-4 - Les fonctions de base par collocation..... | 32 |
| II-5 – Etude graphique de la convergence .....    | 38 |
| II-6 – Résultats et discussion.....               | 39 |
| II-7– Profils des courants .....                  | 40 |
| II-8– Conclusion .....                            | 42 |
| Références du chapitre II.....                    | 43 |

**Chapitre III**

***Conformité des Fonctions de Base à l'Equation de Continuité de la Densité de Courant***

|   |    |
|---|----|
| III-1- Introduction.....  | 45 |
| III-2- Formulation du problème.....                                   | 45 |
| III-3 - Fonctions de Base Conformes à l'Equation De Continuité.....   | 47 |
| III-4- Les Fonctions Raised Cosine Integral et Impulsion Cubique..... | 48 |
| III-5- Résultats et Discussion.....                                   | 52 |
| III-6- Profils des courants .....                                     | 54 |
| I-7- Conclusion .....   | 55 |
| Références du chapitre III.....                                       | 56 |

**Chapitre IV**

***Etude des bandes supraconductrices intégrées dans une structure multicouches***

|  |    |
|--|----|
| IV-1- Introduction .....                       | 58 |
| IV-2 Etude physique d'un supraconducteur ..... | 60 |

|  |    |
|--|----|
| IV-2- 1 Spécificité des supraconducteurs haute .....     | 61 |
| IV-2- 2 Les équations de London.....                     | 62 |
| IV-2- 3 Modèle des deux fluides .....                    | 62 |
| IV-3- Formulation du problème.....                       | 66 |
| IV-4- Impédance de surface et conductivité complexe..... | 72 |
| IV-5-Modification dans les éléments de la matrice .....  | 73 |
| IV-6- Résultats et discussions.....                      | 73 |
| IV-7- Conclusion.....                                    | 77 |
| Références du chapitre IV.....                           | 78 |
| <b><i>Conclusion générale</i></b> .....                  | 80 |
| <b><i>Annexes</i></b> .....                              | 82 |

# *Introduction générale*

## Introduction Générale

Le Thème de cette Thèse de Doctorat s'intègre dans les activités naturelles du Laboratoire Electromagnétisme et Télécommunications, LET-UMC. Il consiste à aborder sur la base d'une expérience de recherche en Modélisation des Structures Passives Microondes cumulée sur une période consistante, un thème pertinent qui fait l'objet d'une intense activité scientifique sur le plan international.

Les structures concernées par la présente recherche consistent essentiellement en composants et dispositifs passifs.

En règle générale, les modèles de CAO microondes consistent en un schéma de calcul censé reproduire de façon plus ou moins réaliste les propriétés et le comportement d'un système physique matérialisé par un composant. La modélisation permet de fournir des moyens fiables pour comprendre, décrire, expliquer, quantifier et prédire les phénomènes physiques liés au fonctionnement de ce composant.

Au delà d'une expérience considérable acquise dans le domaine de la modélisation en électromagnétisme, aussi bien dans la mise en valeur des modèles de la littérature que dans les modèles originellement développés au laboratoire LET, le thème initié dans ce projet est de reconsidérer l'apport analytique autrefois prépondérant, voire suffisant, dans les méthodes de la physique mathématique, mais qui fut relativement mis à l'arrière-plan depuis l'avènement de l'ordinateur et la tendance des modèles vers le tout numérique.

Cet état des lieux a certes sa justification objective, dans le sens où toute formulation mathématique exacte d'un schéma de calcul est assujettie à l'imperfection implicite de sa représentation sur calculateur. Néanmoins, il est important de souligner la nature variationnelle des solutions aux problèmes aux limites de l'électromagnétisme, ainsi que les progrès remarquables de la théorie de l'approximation, qui plaident en faveur d'une part

subséquente dans les modèles actuels. Du moins rejoindre le regain d'intérêt pour ses récents achèvements.

Nous pouvons aussi méditer sur le progrès mathématiques rapides acquis dans les disciplines connexes à notre sujet, notamment en théorie du signal, aujourd'hui vulgarisés par les logiciels comme Maple et Mathematica, quoique les programmes de l'état de l'art pèchent par lenteur de calcul pour une intégration sérieuse dans les simulateurs.

Ce choix ouvre de facto un champ d'investigation assez vaste constitué de deux volets distincts. Le premier volet propose un perfectionnement théorique de l'approche SDA, ainsi que son implémentation pour les structures microstrip ouvertes et la prise en charge des aspects liés à la résolution des problèmes numériques associés. Le second volet consiste à porter les avantages prouvés de cette approche en vue d'une intégration de l'effet supraconducteur dans les rubans métalliques.

Nous pouvons subdiviser le travail présenté dans cette thèse en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnerons un aperçu sur l'historique des lignes de transmissions planaires et sur des méthodes numériques qui résolvent les problèmes d'électromagnétisme Et mettre l'accent sur l'approche SDA, ainsi que son implémentation pour les structures microstrip

Dans le second chapitre, nous avons opté pour la discrétisation du domaine en cellules, ce qui nous a permis d'introduire quatre nouvelles fonctions d'essai à décroissance rapide

Dans le troisième chapitre nous allons étudier en profondeur la Conformité des Fonctions de Base à l'Equation de Continuité de la Densité de Courant

Le dernier chapitre consiste à porter les avantages prouvés de cette approche en vue d'une intégration de l'effet supraconducteur dans les rubans métalliques.

Enfin, nous terminerons par une conclusion générale et perspective

## *Chapitre I*

# *La Méthode Spectrale : Problématique et Etat de l'Art*

## **I-1- Introduction :**

Le processus de modélisation des dispositifs, phénomènes, et matériaux dans l'ingénierie microondes rejoint le plus souvent la résolution du problème aux limites inhérent aux équations aux dérivées partielles de Maxwell, qui régissent les phénomènes électromagnétiques.

L'état des connaissances propres à ce thème est énormément consistant vu l'intensité de la recherche, et il embrasse un ensemble de théories et de techniques allant du pur fondamental jusqu'au pur procédural. Autant de productions importantes de la recherche scientifique, autant de défis réussis, dont la liste est quasiment impossible à établir.

Le domaine d'intervention de cette thèse se situe à ce niveau de l'échelle d'abstraction algorithmique. Concrètement, il consiste à faire avancer ces connaissances atteintes par la recherche en intégrant des éléments de l'analyse fonctionnelle, qui seront rigoureusement adaptées aux méthodes génériques de résolution des équations de Maxwell.

L'effort de recherche perceptible à travers la littérature scientifique est jalonné par les techniques de résolution les plus disparates.

Ces méthodes sont classées en deux types:

Les méthodes analytiques, plus anciennes, utilisées dans les années 50 à 60 telles que les méthodes de transformations intégrales, les approximations statiques et quasi-statiques [2] et les techniques variationnelles, permettent d'avoir des solutions exactes mais leur domaine d'application est restreint. Les structures qui peuvent être traitées sont relativement simples.

Les techniques numériques sont largement plus sollicitées car elles sont plus conformes à la réalité physique. La solution fournie par ces méthodes est approximative (utilisation de troncatures). Elles sont réparties en deux familles selon le type de discrétisation.

Les méthodes différentielles, ou à discrétisation spatiale, pour lesquelles l'approximation de la solution se fait directement à partir des équations de l'élément de maillage et donc nécessitent l'emploi de beaucoup d'espace mémoire donc des moyens informatiques importants.

Les méthodes intégrales, ou à discrétisation spectrale, pour lesquelles l'approximation de la solution ne se fait pas directement à partir des équations de Maxwell. Un calcul analytique plus poussé est d'abord effectué avant de faire l'objet du traitement numérique, ce qui offre un gain considérable en temps de calcul. Cette formulation analytique permettra l'écriture des champs électromagnétiques sous formes canoniques.

Il est important de citer dans ce cadre, dans l'ordre chronologique de publication, les articles classiques dans lesquels les méthodes spécifiques ont paru pour la première fois, ou alors les méthodes génériques ont pour la première fois été adaptées avec succès aux structures passives micro-ondes : Méthode des Différences Finies Temporelle FDTD [3], Méthode des Moments pour les équations de l'électromagnétisme [4], Méthode des Eléments Finis pour les microondes [5], Méthode spectrale SDA [6], Méthode de Raccordement Modal [7], Méthode TLM [8], Méthode Spectrale avec Procédure de Galerkin, [9], Modèle du guide d'onde équivalent pour la ligne microstrip [10], Méthode des Lignes [11], et Méthode de la Résonance transverse [12]

Cet ensemble forme un noyau de méthodes complémentaires qui allie de façon assez harmonieuse la flexibilité des méthodes génériques et l'efficacité des méthodes spécifiques, et qui pourrait être en mesure de répondre à un vaste éventail de besoins pour caractériser les composants passifs microondes, à défaut d'une méthode de modélisation unifiée dont la conception constituerait aujourd'hui une contribution scientifique majeure.

Ces méthodes s'érigent en standards en microondes tels que leur mise en œuvre équivaut à l'application mécanisée d'une recette. Si elles présentent entre elles de notables différences du point de vue développement théorique et dans leur mise en œuvre, elles ont beaucoup en commun sur un plan pratique et du point de vue du calcul numérique pur, vu qu'elles font toutes appel aux mêmes primitives ou procédures élémentaires.

L'imperfection originelle de tout modèle réside dans l'écart qui existe entre une théorie et la réalité du phénomène physique qu'elle est supposée décrire. L'expérience de la modélisation montre que souvent afin de permettre à une théorie d'épouser les éléments de résolution connus de la physique mathématique, certaines simplifications dont la validité n'est

pas certifiée sont introduites. Autant de raisons d'imperfection qui viennent augmenter l'imprécision du modèle en sa globalité. A titre d'exemple, pour les matériaux composites, une formulation approximative des équations de Maxwell est imposée dès le départ de la chaîne de résolution.

La suite du schéma de calcul se traduit par l'élaboration d'une technique de résolution numérique du problème aux limites inhérent aux équations de Maxwell, ou plus exactement, résolution numérique d'une approximation.

## **I-2- Historique des lignes de transmission planaires**

Les lignes de transmission planaires constituent le point le plus essentiel dans les circuits MICs. Les premiers travaux concernant les lignes de transmission planaires en micro-onde ont été effectués en 1952, lorsque Grieg et Englemann [13] ont les premiers, proposé la ligne micro-ruban qui fut utilisée comme un substitut des guides d'onde non-planaires et des câbles coaxiaux. Leur structure était hautement compacte mais à très grande rugosité. Elle ne fut pas acceptée facilement pour les utilisations micro-ondes à cause de ses pertes importantes. A la fin des années soixante, avec la disponibilité de diélectriques dotés de hautes constantes diélectriques, de matériaux diélectriques à faibles pertes et avec la demande croissante de circuits micro-ondes miniaturisés pour les besoins de l'aérospatiale et des applications satellites, l'intensité de l'intérêt pour les circuits micro-rubans fut renouvelée. Il résulta le rapide développement de l'utilisation des lignes micro-rubans. A cette époque, deux autres types de lignes de transmission planaires furent aussi inventés : il s'agit des lignes à fente, et des lignes coplanaires (CPW), respectivement proposées par S. B. Cohn [14] et par C. P. Wen [15].

Ces deux configurations utilisent seulement une seule face du substrat, et permettent une réalisation aisée de terminaison de ligne en circuits fermés et une intégration facile de un ou plusieurs composants montés en parallèle. Cependant elles furent utilisées moins fréquemment que les lignes micro-rubans lors de la première phase du développement des MIC. Leurs avantages furent quelque peu effacés par la complexité de leur mécanisme de propagation, due à l'absence de mode quasi-TEM pour la ligne à fentes, et à la présence du mode de ligne à fentes, pour la ligne coplanaire.

Avec la croissance des fréquences d'opération, particulièrement dans la bande des fréquences millimétriques, l'utilisation de la ligne micro-ruban traditionnelle devint problématique à cause de l'augmentation des pertes, de la présence des modes supérieures et des couplages parasites. Dans les années 1970, de nombreux efforts ont été faits pour surmonter les inconvénients de la ligne micro-ruban. Une classe de structures guide d'onde combinant une géométrie plane et une autre non-plane, telle celle des lignes suspendues blindées ou celle des lignes à ailettes furent proposées.

La caractéristique commune de ces configurations de guide d'onde, est que l'utilisation d'un boîtier métallique enveloppant la structure guide d'onde, élimine ou adoucit les défauts propres à la ligne micro-ruban. La structure à ailette en particulier, et les lignes blindées suspendues ont été très largement utilisées pour les premiers développements de composants divers en bandes millimétriques, en technologie hybride [16,17].

### **I-3- La méthode spectrale**

Les techniques complètes de modélisation tenant compte des changements en hautes fréquences pour la simulation précise des performances d'un circuit plane ou non-plane [20], [22], sont exigées pour atteindre l'objectif de réussite en une seule conception.

Un grand nombre de méthodes telles la méthode d'adaptation modale (Mode-Matching Method), la technique de la résonance transverse, la méthode des lignes, et la méthode spectrale, ont été proposées et raffinées selon les applications [23], [24], [25]. En générale le choix de la méthode numérique est basé sur un compromis entre la précision, l'efficacité, l'adaptation à la structure étudiée, etc... , et ce choix n'est pas forcément unique.

Pour des lignes de transmission planes, simple couche ou multicouches de diélectrique [21], la méthode approuvée et utilisée est la méthode spectrale. Ce choix découle principalement de deux observations. La première est que la fonction de Green peut être obtenue analytiquement sous forme d'une paire de deux formules algébriques. Ensuite, l'utilisation de la méthode des moments et plus particulièrement de la méthode de Galerkin, permet d'obtenir un résultat précis bien que le déterminant associé à l'équation caractéristique, soit de dimension faible.

La méthode est employée en choisissant un jeu de fonctions de base qui satisfait les conditions de singularité sur le bord des conducteurs. D'un point de vue mathématique, la

méthode spectrale transforme un problème d'équation intégrale dans un domaine spatial en une équation algébrique dans un domaine spectral associé à la théorie des transformations de Fourier. Son principal avantage est la simplification du traitement analytique et numérique. La méthode spectrale conventionnelle impose les conditions frontières à l'ensemble de fonction de base dans le domaine spectral.

Ceci impose un certain nombre de restrictions concernant les domaines d'application de la méthode. Notamment, les métallisations sont considérées sans épaisseur, infiniment fines, et sans discontinuité. Dans ce contexte nous allons mettre en lumière les différentes approches qui s'appuient sur la méthode spectrale

#### I-4- l'approche générale appliquée à une ligne micro ruban suspendue

Pour expliquer le processus de formulation, on va utiliser une simple ligne micro-ruban suspendue représentée par la Fig. I.1

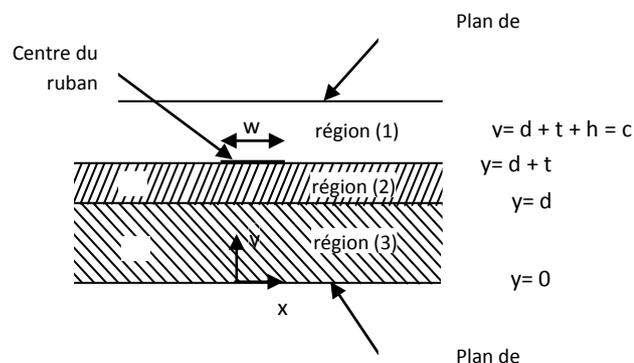


Fig.I.1 une ligne microruban

Dans un premier temps on va choisir une structure à deux couches diélectriques mais ce processus peut être généralisé et les résultats sont applicables à d'autres structures telles les finlines ou les CPWs avec une petite modification. La formulation pour une structure ouverte peut être aussi obtenue de la même manière.

Avant d'entamer ou présenter le processus de formulation en détail, on va essayer de faire une comparaison entre les types d'équations obtenues par la SDA et celles obtenues par la

formulation dans un domaine spatial. Dans l'analyse spatiale, la structure peut être étudiée par l'élaboration des deux équations homogènes (1a, et 1b), qui vont être résolues en tenant compte de la constante de propagation  $\beta$  dont la valeur est inconnue.

$$\int [Z_{zz}(x-x', y)J_z(x') + Z_{zx}(x-x', y)J_x(x')]dx' = E_z(x) \quad (1a)$$

$$\int [Z_{xz}(x-x', y)J_z(x') + Z_{xx}(x-x', y)J_x(x')]dx' = E_x(x) \quad (1b)$$

$E_z, E_x, J_z$  et  $J_x$  représentent successivement les champs électriques et les courants à la surface  $y = d + t$ , autrement dit à la surface du ruban,  $Z_{zz}$ , etc., sont les fonctions de Green, le ruban est supposé être parfaitement conducteur et les bornes d'intégration seront les bords de ce dernier.

Donc les champs électriques  $E_z(x), E_x(x)$  à cette propre surface sont nuls, les deux équations peuvent être résolues si les dyades de Green sont données, mais ces derniers ne sont pas disponible pour une telle structure non homogène, donc on doit recourir à la méthode spectrale c'est-à-dire à la transformée de Fourier, et ces équations deviennent de la forme suivante [9]:

$$\tilde{Z}_{zz}(\alpha, d+t)\tilde{J}_z(\alpha) + \tilde{Z}_{zx}(\alpha, d+t)\tilde{J}_x(\alpha) = \tilde{E}_z(\alpha, d+t) \quad (2a)$$

$$\tilde{Z}_{xz}(\alpha, d+t)\tilde{J}_z(\alpha) + \tilde{Z}_{xx}(\alpha, d+t)\tilde{J}_x(\alpha) = \tilde{E}_x(\alpha, d+t) \quad (2b)$$

Les variables notées par tildes sont la transformée de Fourier, qui est définie par la formule suivante :

$$\tilde{\phi}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{j\alpha x} dx \quad (3)$$

Le deuxième membre de l'équation (2) ne sera pas égal à zéro. Parce que la transformée de Fourier exige une intégration dont les bornes seront moins l'infini et plus l'infini, par contre dans un domaine spatial l'intégration est bornée par les bords du ruban, donc on a un système d'équation qui contient quatre inconnus  $E_z, E_x, J_z$  et  $J_x$ , mais ce problème on peut le

surmonter en appliquant la méthode de Galerkin qui va nous permettre aisément d'éliminer le deuxième membre de l'équation.

### I-3-1- Détermination des équations des champs électriques :

Dans ce paragraphe on va essayer de déduire ou bien développer les fonctions d'impédance de Green  $Z_{zz}, Z_{zx}, Z_{xz}, Z_{xx}$  qui correspondent à la structure représentée par la Fig.I.2. Les composantes des champs hybrides sont exprimées en fonction d'une superposition entre les expressions *TE* et *TM* [19] et les potentiels scalaires  $\tilde{\psi}^e$  et  $\tilde{\psi}^h$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x &= -j \frac{\alpha}{\hat{y}} \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial y} - j\beta \tilde{\psi}^h & \tilde{H}_x &= j\beta \tilde{\psi}^e - j \frac{\alpha}{\hat{z}} \frac{\partial \tilde{\psi}^h}{\partial y} \\ \tilde{E}_y &= \frac{1}{\hat{y}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \tilde{\psi}^e & \tilde{H}_y &= \frac{1}{\hat{z}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \tilde{\psi}^h \\ \tilde{E}_z &= -j \frac{\beta}{\hat{y}} \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial y} + j\alpha \tilde{\psi}^h & \tilde{H}_z &= -j\alpha \tilde{\psi}^e - j \frac{\beta}{\hat{z}} \frac{\partial \tilde{\psi}^h}{\partial y} \\ \hat{y} &= j\omega\varepsilon & \hat{z} &= j\omega\mu & k^2 &= \omega^2 \mu\varepsilon\end{aligned}\quad (4)$$

$\varepsilon$  représente la permittivité,  $\mu$  est la perméabilité,  $e^{-j\beta z}$  représente la dépendance en l'axe de propagation  $z$ , donc l'équation de Helmholtz peut être écrite dans le domaine spectral sous la forme suivante :

$$\left( -\alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) \tilde{\psi} + k^2 \tilde{\psi} = 0 \quad (5)$$

La solution de cette équation différentielle homogène est bien connue, et elle peut être décrite sous la forme suivante :

$$\tilde{\psi} = c_1 \cosh(\gamma \cdot y) + c_2 \sinh(\gamma \cdot y) \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k^2 \quad (6)$$

Avec des coefficients appropriés  $c_1$  et  $c_2$ . Lorsqu'on applique les conditions aux limites dans chaque région, les potentiels scalaires vont être écrits sous la forme suivante :

Région 1 :

$$\tilde{\psi}_1^e = A^e \cosh \gamma_1 (c - y) \quad \tilde{\psi}_1^h = A^h \sinh \gamma_1 (c - y) \quad (7)$$

Région 2 :

$$\tilde{\psi}_2^e = B^e \sinh \gamma_2 (y - d) + C^e \cosh \gamma_2 (y - d) \quad (8)$$

$$\tilde{\psi}_2^h = B^h \cosh \gamma_2 (y - d) + C^h \sinh \gamma_2 (y - d)$$

Région 3 :

$$\tilde{\psi}_3^e = D^e \cosh \gamma_3 y \quad \tilde{\psi}_3^h = D^h \sinh \gamma_3 y \quad (9)$$

Chaque indice indique la région qui lui correspond,  $A^e, A^h, \dots, D^h$  sont des coefficients inconnus.  $\gamma$  c'est la constante de propagation dans la direction  $y$ , qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$\gamma = jk_y$$

Dans le cas d'une structure ouverte la relation (7) peut être remplacée par :

$$\tilde{\psi}_1^e = A^e e^{-\gamma_1 y} \quad \tilde{\psi}_1^h = A^h e^{-\gamma_1 y} \quad (10)$$

A partir de (5), et (6) on peut déduire les relations de dispersion de chaque région :

$$k_i^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma_i^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

En remplaçant (7)-(9) dans la relation (4), on obtient les expressions des champs dans les trois régions :

$$\tilde{E}_{x1} = j\alpha\gamma_{y1} A^e \sinh \gamma_1 (c - y) - j\beta A^h \sinh \gamma_1 (c - y)$$

$$\tilde{E}_{x2} = -j\alpha\gamma_{y2} [B^e \cosh \gamma_2 (y - d) + C^e \sinh \gamma_2 (y - d)]$$

$$- j\beta [B^h \cosh \gamma_2 (y - d) + C^h \sinh \gamma_2 (y - d)]$$

$$\tilde{E}_{x3} = -j\alpha\gamma_{y3}D^e \sinh \gamma_3 y - j\beta D^h \sinh \gamma_3 y$$

$$\tilde{E}_{y1} = \frac{1}{\hat{y}_1} [\gamma_1^2 + k_1^2] A^e \cosh \gamma_1 (c - y)$$

$$\tilde{E}_{y2} = \frac{1}{\hat{y}_2} [\gamma_2^2 + k_2^2] [B^e \sinh \gamma_2 (y - d) + C^e \cosh \gamma_2 (y - d)]$$

$$\tilde{E}_{y3} = \frac{1}{\hat{y}_3} [\gamma_3^2 + k_3^2] D^e \cosh \gamma_3 y$$

$$\tilde{E}_{z1} = j\beta\gamma_{y1}A^e \sinh \gamma_1 (c - y) + j\alpha A^h \sinh \gamma_1 (c - y)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{z2} = & -j\beta\gamma_{y2}[B^e \cosh \gamma_2 (y - d) + C^e \sinh \gamma_2 (y - d)] \\ & + j\alpha[B^h \cosh \gamma_2 (y - d) + C^h \sinh \gamma_2 (y - d)] \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_{z3} = -j\beta\gamma_{y3}D^e \sinh \gamma_3 y + j\alpha D^h \sinh \gamma_3 y$$

$$\tilde{H}_{x1} = j\beta A^e \cosh \gamma_1 (c - y) + j\alpha\gamma_{z1}A^h \cosh \gamma_1 (c - y)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{x2} = & j\beta[B^e \sinh \gamma_2 (y - d) + C^e \cosh \gamma_2 (y - d)] \\ & - j\alpha\gamma_{z2}[B^h \sinh \gamma_2 (y - d) + C^h \cosh \gamma_2 (y - d)] \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_{x3} = j\beta D^e \cosh \gamma_3 y - j\alpha\gamma_{z3}D^h \cosh \gamma_3 y$$

$$\tilde{H}_{y1} = \frac{1}{\hat{z}_1} [\gamma_1^2 + k_1^2] A^h \sinh \gamma_1 (c - y)$$

$$\tilde{H}_{y2} = \frac{1}{\hat{z}_2} [\gamma_2^2 + k_2^2] [B^h \cosh \gamma_2 (y - d) + C^h \sinh \gamma_2 (y - d)] \quad (12)$$

$$\tilde{H}_{y3} = \frac{1}{\hat{z}_3} [\gamma_3^2 + k_3^2] D^h \sinh \gamma_3 y$$

$$\tilde{H}_{z1} = -j\alpha A^e \cosh \gamma_1 (c - y) + j\beta \gamma_{z1} A^h \cosh \gamma_1 (c - y)$$

$$\tilde{H}_{z2} = -j\alpha [B^e \sinh \gamma_2 (y - d) + C^e \cosh \gamma_2 (y - d)]$$

$$-j\beta \gamma_{z2} [B^h \sinh \gamma_2 (y - d) + C^h \cosh \gamma_2 (y - d)]$$

$$\tilde{H}_{z3} = -j\alpha D^e \cosh \gamma_3 y - j\beta \gamma_{z3} D^h \cosh \gamma_3 y$$

$$\gamma_{yi} = \frac{\gamma_i}{y_i} \quad \gamma_{zi} = \frac{\gamma_i}{z_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Les coefficients inconnus  $A^e, A^h, \dots, D^h$  vont être éliminés en imposant les conditions aux limites à chaque interface. Les conditions aux limites dans le domaine spatial sont :

à  $y = d + t$  :

$$E_{x1} = E_{x2} \quad -\infty < x < \infty$$

$$E_{z1} = E_{z2} \quad -\infty < x < \infty$$

$$H_{x2} - H_{x1} = \begin{cases} J_z & |x| < w/2 \\ 0 & |x| > w/2 \end{cases}$$

$$H_{z2} - H_{z1} = \begin{cases} -J_x & |x| < w/2 \\ 0 & |x| > w/2 \end{cases}$$

à  $y = d$  :

$$E_{x2} = E_{x3} \quad -\infty < x < \infty$$

$$E_{z2} = E_{z3} \quad -\infty < x < \infty$$

$$H_{x2} = H_{x3} \quad -\infty < x < \infty$$

$$H_{z2} = H_{z3} \quad -\infty < x < \infty$$

$J_z(x)$  et  $J_x(x)$  sont des distributions de courant inconnues à la surface du ruban ou  $y = d + t$ .

Les conditions aux limites dans un domaine spectral sont :

à  $y = d + t$  :

$$\tilde{E}_{x1} = \tilde{E}_{x2} \quad (13)$$

$$\tilde{E}_{z1} = \tilde{E}_{z2} \quad (14)$$

$$\tilde{H}_{x2} - \tilde{H}_{x1} = \tilde{J}_z \quad (15)$$

$$\tilde{H}_{z2} - \tilde{H}_{z1} = -\tilde{J}_x \quad (16)$$

à  $y = d$  :

$$\tilde{E}_{x2} = \tilde{E}_{x3} \quad (17)$$

$$\tilde{E}_{z2} = \tilde{E}_{z3} \quad (18)$$

$$\tilde{H}_{x3} - \tilde{H}_{x2} = 0 \quad (19)$$

$$\tilde{H}_{z3} - \tilde{H}_{z2} = 0 \quad (20)$$

Finalement, les équations algébriques sont représentées par une matrice de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{z1} \\ \tilde{E}_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{zz} & \tilde{Z}_{zx} \\ \tilde{Z}_{xz} & \tilde{Z}_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_z \\ J_x \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\tilde{Z}_{zz} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [\beta^2 \tilde{Z}_e + \alpha^2 \tilde{Z}_h]$$

$$\tilde{Z}_{zx} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} [\tilde{Z}_e - \tilde{Z}_h]$$

$$\tilde{Z}_{xz} = \tilde{Z}_{zx}$$

$$\tilde{Z}_{xx} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha^2 \tilde{Z}_e + \beta^2 \tilde{Z}_h]$$

$$\tilde{Z}_e = \frac{\gamma_{y2} Ct_3 + \gamma_{y3} Ct_2}{Ct_2 Ct_3 + Ct_1 Ct_3 \gamma_{y2} / \gamma_{y1} + Ct_1 Ct_2 \gamma_{y3} / \gamma_{y1} + \gamma_{y3} / \gamma_{y2}}$$

$$\tilde{Z}_h = \frac{\gamma_{z2} Ct_2 + \gamma_{z3} Ct_3}{\gamma_{z1} \gamma_{z2} Ct_1 Ct_2 + \gamma_{z1} \gamma_{z3} Ct_1 Ct_3 + \gamma_{z2} \gamma_{z3} Ct_2 Ct_3 + \gamma_{z2}^2}$$

$$Ct_1 = \coth \gamma_1 h$$

$$Ct_2 = \coth \gamma_2 h$$

$$Ct_3 = \coth \gamma_3 h$$

## I-5 - L'approche par immittances :

Cette approche nous permet d'obtenir facilement les dyades de Green d'une structure multicouches à la faveur de la séparation des modes TE et TM, au contraire de l'approche générale qui est assez compliquée voire hyper difficile au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de couches de la structure.

**I-5-1- Illustration de la formulation :**

Le concept de base peut être compris en observant la transformée de Fourier inverse d'un champ  $\phi$

$$\phi(x, y)e^{-j\beta z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\alpha, y)e^{-j(\alpha x + \beta z)} d\alpha$$

De cette expression, on voit clairement que toutes les composantes des champs ne sont qu'une superposition des ondes planes non homogènes (en y) qui se propagent dans la direction  $\theta$  relativement à l'axe Z, comme il est illustré dans la Fig.I.3.

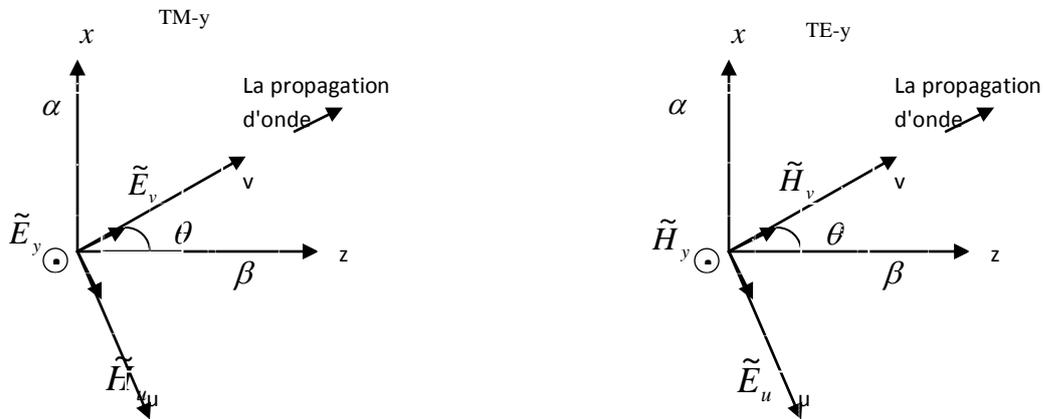


Fig. I.3 la décomposition des ondes spectrales dans le système de coordonné (u ,v)

$$\theta = \cos^{-1}[\beta/(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}]$$

Pour chaque  $\theta$ , les ondes peuvent être décomposées en TM -y ( $\tilde{E}_y, \tilde{E}_v, \tilde{H}_u$ ) et TE-y ( $\tilde{H}_y, \tilde{E}_u, \tilde{H}_v$ ) dans le système de coordonné (u , v). Les relations reliant les coordonnés (u, v) et (x , z) sont :

$$u = z \sin \theta - x \cos \theta \qquad v = z \cos \theta + x \sin \theta \qquad (22)$$

On voit bien que le courant  $\tilde{j}_v$  engendre seulement les champs TM, et d'une façon similaire  $\tilde{j}_u$  engendre que les champs TE, donc on peut déduire les circuits équivalents des champs TE et TM à partir de la symétrie de la ligne de transmission Fig.I.4. Pour TM-y on a :

$$\tilde{H}_{u1} - \tilde{H}_{u2} = \tilde{J}_v \quad \frac{-\tilde{H}_{u1}}{\tilde{E}_{v1}} = Y_1^e \quad \frac{\tilde{H}_{u2}}{\tilde{E}_{v2}} = Y_2^e$$

Et

$$\tilde{E}_v = -\tilde{Z}_e \tilde{J}_v \quad \tilde{E}_{v1} = \tilde{E}_{v2} = \tilde{E}_v \quad (23)$$

$$\tilde{Z}_e = \frac{1}{Y_1^e + Y_2^e} \quad (24)$$

$Y_1^e$  et  $Y_2^e$  sont les admittances vu par le courant.

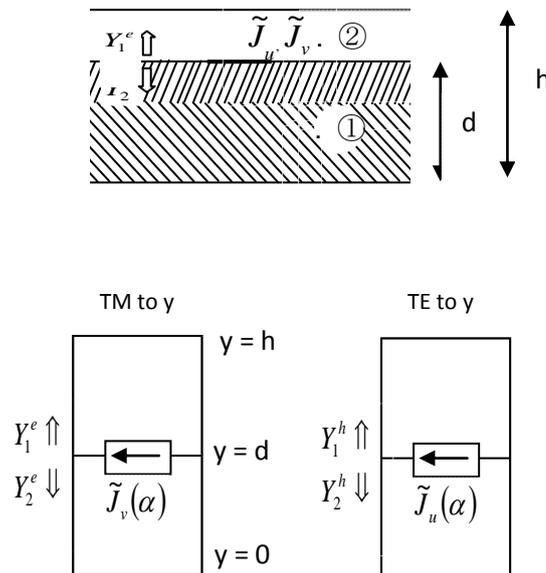


Fig.I.4 la ligne de transmission équivalente pour les modes TE et TM

Et d'une façon similaire les équations des champs TE sont :

$$\tilde{E}_u = -\tilde{Z}_h \tilde{J}_u \quad \tilde{E}_{u1} = \tilde{E}_{u2} = \tilde{E}_u \quad (25)$$

Où

$$\tilde{Z}_h = \frac{1}{Y_1^h + Y_2^h} \quad (26)$$

$Y_1^h$  et  $Y_2^h$  représentent les admittance d'entrée des ondes TE, donc à partir de  $Z_e$  et  $Z_h$  on peut définir facilement les fonctions de Green des ondes TE et TM respectivement, en faisant un changement de système de coordonnées c'est-à-dire d'aller de  $(u, v)$  vers  $(x, z)$ , en utilisant les équations (22), et on considère que  $E_x$  et  $E_z$  sont une combinaison linéaire de  $E_u$  et  $E_v$  et de la même façon pour les courants  $j_x$  et  $j_z$ , donc la nouvelle formulation sera:

$$\tilde{Z}_{zz} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta^2 \tilde{Z}_e + \alpha^2 \tilde{Z}_h) \quad (27a)$$

$$\tilde{Z}_{zx} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (\tilde{Z}_e - \tilde{Z}_h) \quad (27b)$$

$$\tilde{Z}_{xx} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha^2 \tilde{Z}_e + \beta^2 \tilde{Z}_h) \quad (27c)$$

Pour qu'on puisse trouver  $Z_e$  et  $Z_h$ , on doit tout d'abord déterminer les impédances d'entrées, on a :

$$Z_{in} = -Z_{0i} \frac{Z_L \coth y_i h_i + Z_0}{Z_0 \coth y_i h_i + Z_L} \quad (28)$$

$Z_L$  représente l'impédance de la charge,  $h_i$  est l'épaisseur de la couche, et  $Z_{0i}$  c'est l'impédance caractéristique de chaque couche, et elle est définie comme suit:

$$Z_{0_{TMi}} = -\frac{\tilde{E}_v}{\tilde{H}_u} = \frac{y_i}{j\omega\epsilon} \left( = y_{yi} \right) \quad (29)$$

$$Z_{0_{TEi}} = -\frac{\tilde{E}_u}{\tilde{H}_v} = \frac{j\omega\mu_i}{y_i} \left( = \frac{1}{y_{zi}} \right) \quad (30)$$

- pour un substrat composé d'une seule couche diélectrique, nous avons

$$\tilde{Z}_e = \frac{\gamma_{y1}\gamma_{y2}}{\gamma_{y1}ct_2 + \gamma_{y2}ct_1} \quad \tilde{Z}_h = \frac{1}{\gamma_{z1}ct_1 + \gamma_{z2}ct_2} \quad (31)$$

$$ct_1 = \coth\gamma_1(h-d) \quad ct_2 = \coth\gamma_2d$$

- pour un substrat composé de trois couches diélectriques, nous avons:

$$\tilde{Z}_e = \frac{\gamma_{y2}Ct_3 + \gamma_{y3}Ct_2}{Ct_2Ct_3 + Ct_1Ct_3\gamma_{y2}/\gamma_{y1} + Ct_1Ct_2\gamma_{y3}/\gamma_{y1} + \gamma_{y3}/\gamma_{y2}}$$

$$\tilde{Z}_h = \frac{\gamma_{z2}Ct_2 + \gamma_{z3}Ct_3}{\gamma_{z1}\gamma_{z2}Ct_1Ct_2 + \gamma_{z1}\gamma_{z3}Ct_1Ct_3 + \gamma_{z2}\gamma_{z3}Ct_2Ct_3 + \gamma_{z2}^2} \quad (32)$$

$$ct_1 = \coth\gamma_1h \quad ct_2 = \coth\gamma_2t \quad ct_3 = \coth\gamma_3d$$

Ce qui correspond aux résultats obtenus lors de l'utilisation de l'approche générale.

- pour une ligne micro-ruban ouverte avec une seule couche diélectrique, nous avons

$$\tilde{Z}_e = \frac{\gamma_{y1}\gamma_{y2}}{\gamma_{y1}ct_2 + \gamma_{y2}} \quad \tilde{Z}_h = \frac{1}{\gamma_{z1} + \gamma_{z2}ct_2} \quad ct_2 = \coth\gamma_2d \quad (33)$$

Il faut mentionner que  $ct_1 = 1$  en raison que  $d$  tend à l'infini.

## I-6- La méthode de résolution :

Dans cette section, nous allons présenter une méthode dont le but est la résolution des deux équations intégrales, qui contiennent les quatre inconnus  $\tilde{J}_z$ ,  $\tilde{J}_x$ ,  $\tilde{E}_z$  et  $\tilde{E}_x$ . Les deux derniers inconnus peuvent être éliminés en appliquant la méthode de Galerkin. Pour cela on va essayer de développer les inconnus  $\tilde{J}_z$ , et  $\tilde{J}_x$  en un ensemble de fonctions de base connues  $\tilde{J}_{zm}$ , et  $\tilde{J}_{xm}$ . Donc les nouvelles expressions de  $\tilde{J}_z$ , et  $\tilde{J}_x$  deviennent :

$$\tilde{J}_z = \sum_{m=1}^N c_m \tilde{J}_{zm}(\alpha) \quad \tilde{J}_x = \sum_{m=1}^M d_m \tilde{J}_{xm}(\alpha) \quad (34)$$

Où  $c_m$  et  $d_m$  sont des coefficients inconnus, les fonctions de base doivent être choisies d'une façon réaliste. Donc le courant doit avoir une valeur à la surface du ruban et nul ailleurs. En substituant ces dernières formules dans les deux équations, on obtient :

$$\int_{\alpha} \left[ \tilde{J}_{zk} \tilde{Z}_{zz} \sum_{m=1}^N c_m \tilde{J}_{zm}(\alpha) + \tilde{J}_{zk} \tilde{Z}_{zx} \sum_{m=1}^M d_m \tilde{J}_{xm}(\alpha) \right] d\alpha = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\int_{\alpha} \left[ \tilde{J}_{xl} \tilde{Z}_{xz} \sum_{m=1}^N c_m \tilde{J}_{zm}(\alpha) + \tilde{J}_{xl} \tilde{Z}_{xx} \sum_{m=1}^M d_m \tilde{J}_{xm}(\alpha) \right] d\alpha = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M$$

(35a-b)

Le deuxième membre de ces équations est égal à zéro en vertu du théorème de Parseval. En conséquence le produit interne des champs électriques et des courants sera écrit de la manière suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}_{zk}(\alpha) \tilde{E}_{z1}(\alpha) d\alpha = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} J_{zk}(x) E_{z1}(-x) dx = 0 \quad (36)$$

En utilisant la dernière condition aux limites on obtient :

$$\sum_{m=1}^N K_{km}^{(1,1)} c_m + \sum_{m=1}^M K_{km}^{(1,2)} d_m = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (37a)$$

$$\sum_{m=1}^N K_{lm}^{(2,1)} c_m + \sum_{m=1}^M K_{lm}^{(2,2)} d_m = 0 \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (37b)$$

Où

$$K_{km}^{(1,1)} = \int_{-\infty}^{\infty} J_{zk}(\alpha) \tilde{Z}_{zz}(\alpha, \beta) \tilde{J}_{zm}(\alpha) d\alpha \quad (38a)$$

$$K_{km}^{(1,2)} = \int_{-\infty}^{\infty} J_{zk}(\alpha) \tilde{Z}_{zx}(\alpha, \beta) \tilde{J}_{xm}(\alpha) d\alpha \quad (38b)$$

$$K_{lm}^{(2,1)} = \int_{-\infty}^{\infty} J_{xl}(\alpha) \tilde{Z}_{xz}(\alpha, \beta) \tilde{J}_{zm}(\alpha) d\alpha \quad (39c)$$

$$K_{lm}^{(2,2)} = \int_{-\infty}^{\infty} J_{xl}(\alpha) \tilde{Z}_{xx}(\alpha, \beta) \tilde{J}_{xm}(\alpha) d\alpha \quad (39d)$$

Les  $K_{km}^{(1,1)}$ ,  $K_{km}^{(1,2)}$ ,  $K_{lm}^{(2,1)}$ , et  $K_{lm}^{(2,2)}$  représentent les principaux éléments susceptibles d'engendrer la matrice générale. Maintenant il suffira de trouver la valeur de la constante de propagation  $\beta$  pour laquelle le déterminant de cette matrice soit égal à zéro. Tout d'abord on va prouver que les coefficients  $c_m$  et  $d_m$  n'ont aucun effet sur le déterminant lorsqu'il est égal à zéro, en vertu du théorème suivant concernant les propriétés du déterminant [18].

Si  $A$  est une matrice carrée, alors  $\det A^t = \det A$ , c'est-à-dire que toutes les transformations concernant les lignes d'un déterminant seront valables également pour les colonnes et vice versa. Soit  $B$  la matrice obtenue en multipliant tous les éléments de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  par un scalaire  $k$ . Comme chaque terme figurant dans le déterminant de  $B$  contient un et un seul

élément de cette  $i^{\text{ème}}$  ligne, chacun des termes possède un facteur et un seul ayant  $k$  comme coefficient, ainsi on pourra mettre  $k$  en facteur dans la somme  $\sum_p$  :

$$\det(B) = k \sum_p \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = k \cdot \det(A) \quad (40)$$

Lorsque le déterminant de la matrice  $A$  est nul on voit bien que le scalaire  $k$  n'a aucun effet sur le résultat général. Dans notre cas, on cherche la valeur optimale pour laquelle le déterminant soit nul, donc les coefficients  $c_m$  et  $d_m$  n'ont aucune influence sur la matrice, mais ces derniers représentent ce qu'on appelle le vecteur propre relatif à la valeur propre  $\beta$ .

Pour compléter le schéma général de la méthode, il faut prévoir encore deux routines numériques, l'une en vue d'évaluer l'intégrale qui dépend de la variable spectrale  $\alpha$ , l'autre pour chercher les zéros du déterminant, en d'autres termes les valeurs de la constante de propagation  $\beta$  pour lesquelles le déterminant de la matrice impédance est nul.

## I-7- Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté un aperçu sur les méthodes numériques permettant de résoudre les problèmes de l'électromagnétisme.

Nous avons également essayé, du mieux que nous jugeons dans ce contexte assez diffuses, de situer l'intérêt de la méthode spectrale, avant d'en donner une description approfondie, où dans le cours de l'exposé nous avons à chaque occurrence mis en relief ses points forts aussi bien que ses limitations.

## Références du chapitre I

- [1] Tai Tsun Wu "Theory of the Microstrip" Journal of Applied Physics Vol 28 N°3 pp299-302, March 1957
- [2] H. A. Wheeler "Transmission-line properties of parallel wide strips by a conformal-mapping approximation", IEEE trans. MTT Vol 12 N° 3, pp 280–289, May 1964
- [3] K. S. Yee "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media" IEEE trans, Vol AP-14, No 5, pp 302-307, May 1966
- [4] R. F. Harrington, "Matrix methods for field problems", *Proceedings of the IEEE* Vol 55 N°2, pp 136-149, Feb 1967
- [5] Arlett, P.L.; Bahrani, A.K.; Zienkiewicz," Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation", Proc. IEE, Vol 115 , pp 1762 - 1766 , December 1968
- [6] Denlinger, E. J. "A frequency dependent solution for microstrip transmission lines," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-19, N°1 pp. 30-39. Jan 1971
- [7] G. Kowalski, R. Pregla "Dispersion characteristics of shielded microstrips with finite thickness" Archive Elektronik Ubertragung, Vol 25, No 4, pp 193-196, April 1971
- [8] P. B. Johns, R. L. Beurle "Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix" Proc IEE, Vol 118, No 9, pp 1203-1208, Sep 1971
- [9] T. Itoh, R. Mittra, "Spectral domain-approach for calculating the dispersion characteristics of microstrip lines" IEEE trans. Vol MTT-21, pp 496-499, 1973
- [10] Kompa, G. Mehran, R. "Planar waveguide model for calculating microstrip components" *Electronics Letters*, Vol 11 N°19 pp 459 – 460, Sep 1975
- [11] U. Schulz, R. Pregla "A New technique for the analysis of the dispersion characteristics of planar wave guides" Archive Elektronik Ubertragung, Vol 34, No 4, pp 169-173, 1980
- [12] R. Sorrentino, T. Itoh "Transverse resonance Analysis of finline discontinuities" IEEE trans. Vol MTT-32, No 12, pp 1633-1638, December 1984
- [13] Grieg, D.D. et Engelmann, H.F (1952). Proc. IRE 4, 1644-1650.
- [14] Cohn, S.B. (1969) "Slot line on a dielectric substrate," IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, 17, 768-778.

- [15] Wen, C.P. (1969) "Coplanar waveguide: A surface strip transmission line suitable for non-reciprocal gyromagnetic device application," IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, 17, 1087-1090.
- [16] Chang, K. (1985) "Millimeter-wave planar integrated circuits and subsystems," Infrared and Millimeter Waves, 14, 79-187.
- [17] Menzal, W. (1985) "Integrated fin-line components for communication, radar, and radiometer application" Infrared and Millimeter Waves, 13, 77-121.
- [18] Frank Ayres Jr. "theory and problems of matrices", McGraw-Hill Inc, New York, 1973, ISBN France : 2-7042-0011-4
- [19] R. F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, new York, 1961.
- [20] A.Khodja, M. L. Tounsi, Y. Lamhene, and K. Idinarene, "Modeling of Suspended Coplanar Structure in Hybrid Mode by Integral Method", *IEEE Int. Conf. on Electronics, Circuits and Systems*, Sharjah, UAE, pp. 711-714, 2003.
- [21] R. J. Burkholder, J.-F. Lee, "Iterative Methods" in Encyclopedia of RF and Microwave Engineering, Wiley Online, 2005
- [22] J. Selmi, R. Bedira, A. Gharsallah, A. Gharbi, H. Baudrand, "Iterative Solution of electromagnetic Scattering by Arbitrary Shaped Cylinders", *ACES Journal*, vol. 25, no. 7, pp. 205 – 216, 2010.
- [23] A. I. Alhzzoury, N. Raveau, G. Prigent, O. Pigaglio, H.Baudrand, K. Al-Abdulah, "Substrate Integrated Waveguide Filter Design with Wave Concept Iterative Procedure", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 53, no. 12, pp. 2939 – 2942, 2011
- [24] A. Dziekonski, A. Lamecki, M. Mrozowski, "GPU Acceleration of Multilevel Solvers for Analysis of Microwave Components with Finite Element Method", *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 21, no. 1, pp. 1 – 3, January 2011
- [25] K. V. Srivastava, S. Awasthi and A. Biswas, "Dispersion and Attenuation Characteristics of Asymmetric Multiconductor Lines in Suspended Substrate Structure Using Full-Wave Modal Analysis", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol 48, nO 7, pp 1305-1310, July 2006.

## *Chapitre II*

### *Implantation de fonctions d'essai à décroissance rapide*

## II-1 - Introduction

L'approche spectrale SDA est une méthode numérique puissante pour la caractérisation de la ligne microstrip. Sa précision globale et son temps d'exécution sont étroitement liés à l'évaluation des produits scalaires de la matrice impédance impliqués par la procédure de Galerkin. Quand les fonctions de base classiques sont utilisées, la principale raison de l'imprécision des calculs provient du comportement asymptotique des intégrales impropres faiblement convergentes et oscillantes. Cet inconvénient est particulièrement observable dans les structures ouvertes.

La solution la plus commune adoptée jusqu'ici consiste à décomposer l'intégrale en deux parties, une partie asymptotique qui est évaluée analytiquement, et une partie relativement convergente qui est évaluée numériquement. Les références [1-4] présentent les différentes variantes d'implémentation de ce schéma.

Pour la partie évaluée numériquement, la précision de la quadrature reste tributaire de la valeur de la borne supérieure d'intégration.

La présente approche envisage d'éviter complètement le problème de l'asymptote en proposant un ensemble de fonctions de base par collocation ayant un spectre fortement décroissant de telle sorte que la convergence soit rigoureusement établie pour des bornes supérieures raisonnablement réduites.

D'autre part, les fonctions de base proposées donnent lieu à des profils de densité de courant continus dans le domaine spatial. Cette caractéristique n'est jamais assurée avec les fonctions de base par collocation classiques communément utilisées en SDA.

## II-2 - Méthodologie

Le Tableau 1 donne une vue d'ensemble de l'état de l'art des fonctions spéciales et polynômes orthogonaux appropriés à la ligne microstrip, et très largement connus pour leur efficacité numérique et leur conformité aux spécifications techniques de la SDA, à savoir:

- 1 – Former une base complète dans l'espace de Hilbert,
- 2 – Restituer une bonne approximation de la densité de courant réelle sur la ligne microstrip avec un nombre réduits de termes d'expansion,
- 3 – Remplir les conditions de bord sur le ruban métallique,

Comme il apparaît clairement dans la troisième colonne du Tableau I, les polynômes orthogonaux et les fonctions spéciales plein domaine montrent de sérieuses limitations en matière de décroissance du spectre, due à la forme abrupte de la densité spatiale de courant sur le bord du ruban. Toute alternative intéressante ne pourrait provenir que des fonctions par collocation.

Il faut aussi noter que la théorie relativement récente des ondelettes et fonctions d'échelle, aussi prometteuse fut-elle quant aux possibilités d'analyse multi-résolution, n'a apporté depuis son adoption massive en SDA qu'un seul avantage réel, qui est celui de donner lieu à des matrices impédance creuses. Mais en ce qui concerne l'objectif spécifique du présent thème, les ondelettes présentent exactement les mêmes limitations que les fonctions de base plein domaine.

Tableau 1 – Etat de l'Art des Fonctions de Base

| Plein Domaine – Modes Pairs et Impairs            |  |   |
|---|--|---|
|   | Domaine Spatial  | Domaine Spectral  |
| Fonctions Trigonométriques<br>avec Enveloppe en U | $\frac{\cos(2n\pi x/w)}{\sqrt{1-(2x/w)^2}}$  | $J_0(\alpha w/2+n\pi)+J_0(\alpha w/2-n\pi)$   |
|   | $\frac{\sin(2n\pi x/w)}{\sqrt{1-(2x/w)^2}}$  | $J_0(\alpha w/2+(n+1)\pi)-J_0(\alpha w/2-(n+1)\pi)$   |
| Polynômes de Tchebychev<br>Pondérés               | $\frac{T_n(2x/w)}{\sqrt{1-(2x/w)^2}}$  | $(-j)^n \frac{2n!}{2} J_n(\alpha w/2)$  |
|   | $\sqrt{1-(2x/w)^2} \cdot U_n(2x/w)$  | $(-j)^n \frac{\pi(n+1)}{\alpha} J_{n+1}(\alpha w/2)$  |
| Polynômes de Gegenbauer<br>Pondérés               | $\left((w/2)^2-x^2\right)^{\lambda-0.5} C_n^\lambda(2x/w) \lambda < 0.5$   | $\frac{J_{n+\lambda-0.5}(\alpha w/2)}{\alpha^{\lambda-0.5}}$  |
|   | $\left((w/2)^2-x^2\right)^{\lambda+0.5} C_n^{\lambda+1}(2x/w) \lambda > -0.5$  | $\frac{J_{n+\lambda+0.5}(\alpha w/2)}{\alpha^{\lambda+0.5}}$  |
| Plein Domaine – Modes Non Symétriques             |  |   |
| Polynômes de Jacobi Pondérés                      | $\left((w/2)-x\right)^\alpha \left((w/2)+x\right)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(2x/w)$  | $2^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha+\frac{iz}{2})\Gamma(\beta-\frac{iz}{2})}{\Gamma(\alpha+\beta+n)} {}_2F_1\left(\frac{z}{2}; \alpha, \delta-\beta+1, \gamma-\alpha+1, \beta\right)$ |
| Polynômes de Hahn Pondérés                        | $\frac{\Gamma(1+\alpha+x)\Gamma(1+\beta-x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)} h_n(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) \alpha > -1, \beta > -1$ | T F inexistante sous Forme Analytique   |
| Polynômes de Krawtchouk<br>Pondérés               | $\frac{p^x q^{1-x}}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)} K_n^p(x) p > 0, q > 0, p+q=1$  | T F inexistante sous Forme Analytique   |
| Collocation                                       |  |   |
| Impulsion Rectangulaire                           | $1 \text{ si }  x-x_\Delta  \leq \frac{\Delta}{2}$   | $\frac{\sin(\pi \Delta \alpha)}{\pi \Delta \alpha} e^{-jx_\Delta \alpha}$   |
| Impulsion Triangulaire                            | $1- x-x_\Delta  \text{ si }  x-x_\Delta  \leq \frac{\Delta}{2}$  | $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi \Delta \alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\pi \Delta \alpha}{2}\right)^2} e^{-jx_\Delta \alpha}$   |
| Ondelettes  |  |   |
| Ondelettes de Daubechies                          | Support Compact $\Psi(x)$  | $2^{-m/2} e^{-j\alpha 2^{-m} x} \Psi(2^{-m} \alpha)$  |
| Ondelettes de Battle-Lemarié                      | Décroissance Spatiale Exponentielle $\Psi(x)$  |   |

En définitif, la meilleure solution parmi les fonctions de base de l'état de l'art montre une décroissance asymptotique en  $\alpha^{-2}$ , alors que la moins décroissante parmi les fonctions que nous proposons possède une décroissance asymptotique en  $\alpha^{-3}$ .

Les fonctions de base en question sont au nombre de quatre : L'impulsion Raised Cosine, une impulsion pseudo-Gaussienne notée  $G(x)$ , une impulsion pseudo-trigonométrique bâtie sur un noyau de distributions exponentielles notée  $T(x)$ , une impulsion quadratique composée de trois segments paraboliques continus notés  $Q(x)$ .

L'impulsion Raised Cosine est très utilisée en traitement de signal [5], mais n'a jamais été expérimentée en tant que fonction de base pour la SDA. Les trois autres impulsions sont originellement construites pour les besoins du présent thème et homologuées comme fonctions de base pour la SDA.

Il est à noter que le véritable mérite réside moins dans le fait de construire de telles impulsions, que dans la rigueur à observer par la même opération les prescriptions techniques de la SDA et du schéma de Galerkin.

L'impulsion triangulaire est citée juste à titre de référence dans ce qui suit, étant donné que son spectre décroît le plus rapidement parmi les fonctions de base classiques.

### II-3 - Formulation du problème

La Fig.1 représente la géométrie de la ligne de transmission micro-ruban,  $d$  est l'épaisseur du substrat qui est supposé isotrope, sans pertes et non magnétisé. Les conducteurs sont infiniment minces et parfaitement conducteurs,  $w$  représente la largeur du ruban.

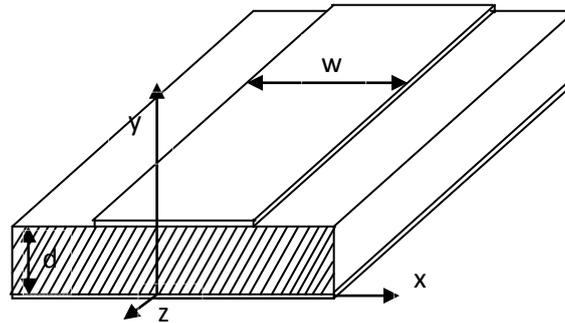


Fig.1 Ligne micro-ruban ouverte

Nous allons présenter les éléments essentiels de la méthode Spectrale avec procédure de Galerkin qui a été exposée en détail dans le premier chapitre, lorsqu'elle est appliquée à une ligne micro-ruban ouverte. Admettons que le mode qui se propage dans cette ligne est le mode fondamental, donc le courant et le champ électrique vont prendre la forme générale suivante :

$$J_z(x) = \sum_n c_n J_{zn}(x) \quad (1.a)$$

$$J_x(x) = \sum_n d_n J_{xn}(x) \quad (1.b)$$

où  $\beta(=k_o\sqrt{\varepsilon_{eff}})$  est la constante de propagation modale, lors de cette étude nous allons omettre le terme harmonique  $e^{j\omega t}$ . D'après l'équation intégrale [1] qui exprime les conditions aux limites concernant le champ électrique à la surface du ruban on a :

$$\lim_{y \rightarrow d} \int_{-w/2}^{w/2} Z_{zz}(x-x', y, y'=d; \beta) J_z(x') + Z_{zx}(x-x', y, y'=d; \beta) J_x(x') = 0 \quad (2.a)$$

$$\lim_{y \rightarrow d} \int_{-w/2}^{w/2} Z_{xz}(x-x', y, y'=d; \beta) J_z(x') + Z_{xx}(x-x', y, y'=d; \beta) J_x(x') = 0 \quad (2.b)$$

Les  $Z_{\alpha\beta}$  représentent les dyades de Green à la surface du ruban. Nous allons utiliser des fonctions de base qui visent l'approximation des courants longitudinaux et transversaux.

$$J_z(x) = \sum_{n=10}^{N_l} c_n J_{zn}(x) \quad (3.a)$$

$$J_x(x) = \sum_{n=1}^{N_t} d_n J_{xn}(x) \quad (3.b)$$

Où  $N_l$  et  $N_t$  représentent respectivement le nombre total des fonctions de base des courants, longitudinaux et transversaux,  $J_{zn}$  et  $J_{xn}$  sont des fonctions de base connues,  $c_n$  et  $d_n$  sont des coefficients inconnus. En substituant les expressions (3) dans (2) puis on applique la méthode de Galerkin [1] afin de résoudre l'équation intégrale, et on transforme l'équation résultante dans un domaine spectral on obtient :

$$\sum_{n=1}^{Nl} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} J_{zm}(\alpha) Z_{zz}(-\alpha, y=d; \beta) J_{zn}(-\alpha) d\alpha$$

$$+ \sum_{n=1}^{Nt} d_n \int_{-\infty}^{+\infty} J_{zm}(\alpha) Z_{zx}(-\alpha, y=d; \beta) J_{zn}(-\alpha) d\alpha = 0 \quad (4.a)$$

$$\sum_{n=1}^{Nl} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} J_{zxm}(\alpha) Z_{xz}(-\alpha, y=d; \beta) J_{zn}(-\alpha) d\alpha$$

$$+ \sum_{n=1}^{Nt} d_n \int_{-\infty}^{+\infty} J_{xm}(\alpha) Z_{xx}(-\alpha, y=d; \beta) J_{xn}(-\alpha) d\alpha = 0 \quad (4.b)$$

Où  $\alpha$  est la variable spectrale qui correspond à la direction spatiale  $x$ , la première équation est valide pour  $m = 1$  jusqu'à  $Nl$ , la deuxième pour  $m = 1$  jusqu'à  $Nt$ , dans l'expression (4), l'opérateur limite (lim) dans (2) a été amené sous l'intégrale. Les dyades de Green sont données (voir chapitre 1)

L'ensemble homogène des équations (4) n'a de solution que pour certaines valeurs (valeurs propres) de la constante de propagation. Dans cette étude on ne tient compte que de la solution correspondant au mode fondamental, cette solution propre va nous permettre de déduire les coefficients  $c_n$  et  $d_n$  en d'autre terme le profil des courants, longitudinal et transversal, en utilisant de la méthode de la décomposition de matrice en valeurs singulières SVD [8].

## II-4 - Les fonctions de base par collocation

Dans la méthode de collocation Galerkin et dans n'importe quelle méthode générale qui s'appuie sur l'expansion des fonctions dans l'espace de Hilbert, une base complète  $\{\psi_n\}$  peut être construite avec des répliques d'une impulsion de forme arbitraire  $\psi(x)$  de largeur  $\Delta$ , décalée d'une distance  $n\Delta/2$  partout dans le domaine de calcul. Les emplacements du centre d'impulsion sont appelés les points de collocation. L'indice  $n$  d'une fonction de base donnée, qui est un nombre entier signé, est directement lié à sa distance de décalage de l'origine de l'axe  $\psi_n(x) = \psi(x - n\Delta/2)$ , voir la Fig.2

L'emplacement occupé par une fonction de base sur l'axe est appelé une cellule. Donc dans le présent chapitre, nous allons sans équivoque assimiler l'indice de la fonction de base et l'indice de la cellule.

L'ensemble de base est complet, qui est une fonction couvrant le domaine entier de calcul complet peut être exprimé par une série de termes pris en compte à partir de cette base. Cependant, comme deux cellules successives se chevauchent sur un segment  $\Delta / 2$ , cette base n'est pas strictement orthogonale, selon les produits intérieurs suivants :

$$(5) \langle \psi_m | \psi_n \rangle \begin{cases} = 1 & \text{Si } m = n \\ \in ]0, \frac{1}{4}[ & \text{Si } m = n \pm 1 \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

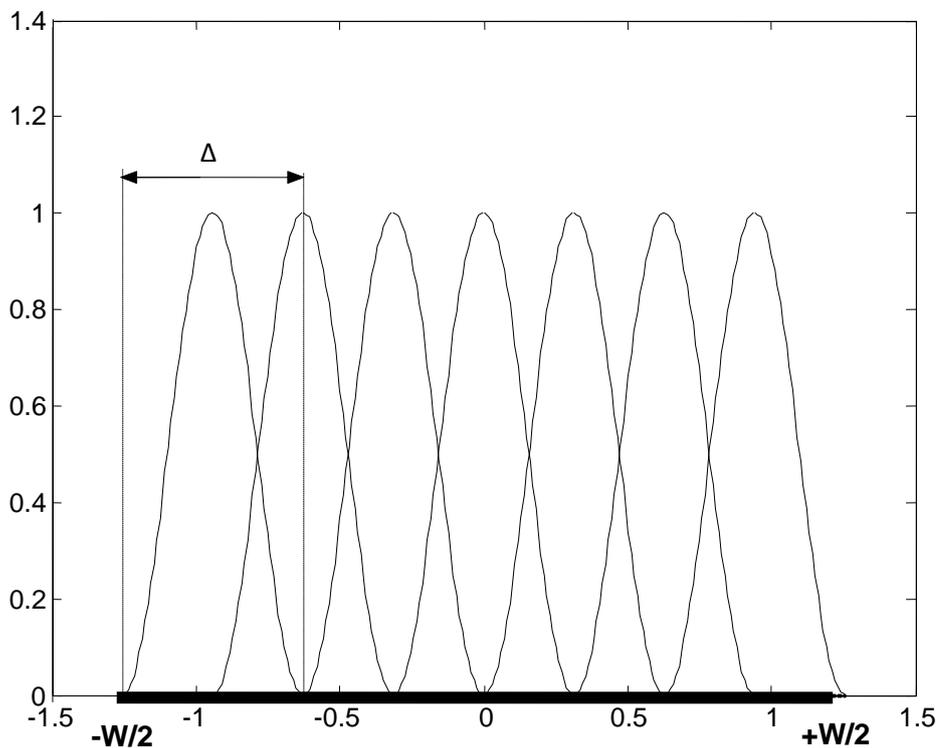


Fig.2. Fonctions de base par collocation

L'idée principale, que nous pouvons tirer à partir des quatre impulsions étudiées dans ce chapitre, suit l'observation que les propriétés de décroissance du spectre d'une impulsion de largeur finie sont étroitement liées à la régularité de l'impulsion qui tend à sa valeur zéro. Cette propriété est exprimée quantitativement par la continuité d'impulsion à  $x = \pm\Delta/2$  et l'ordre des dérivées continues qu'elle peut avoir à proximité de ce point.

Il est théoriquement établi que si  $p$  est l'ordre le plus faible de la dérivée discontinue de l'impulsion, son spectre décroît asymptotiquement comme  $\alpha^{-p-1}$ .

Plus que prospecter ou construire une telle impulsion, le défi consistait à répondre en même temps à toutes les exigences de la SDA.

La continuité et la régularité qu'on pouvait compter sur, ont été cherché parmi les formes de fonction classique: polynômes, trigonométriques et gaussien.

Il en est résulté des impulsions suivantes:

A – L'impulsion Raised Cosine

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) & \text{if } |x| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{if } |x| > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (6.a)$$

La transformé de Fourier est exprimé par

$$\tilde{f}(\alpha) = \frac{\pi^2 \sin\left(\frac{\pi\Lambda\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi\Lambda\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\pi\Lambda\alpha}{2}\right) \left(\pi^2 - (\pi\Lambda\alpha)^2\right)} \quad (6.b)$$

B – l'impulsion pseudo-Gaussienne notée G(x)

$$G(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{cx^2}{x^2 - \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}\right) & \text{Si } |x| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{Si } |x| \geq \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Avec  $c = 3 \ln 2$

La transformé de Fourier est calculé numériquement

C – l'impulsion pseudo-trigonométrique T(x)

$$T(x) = \begin{cases} \frac{\int_{-\frac{\Delta}{2}}^x \exp\left(\frac{(4t+\Delta)^2}{(4t+\Delta)^2 - \Delta^2}\right) dt}{\int_{-\frac{\Delta}{2}}^0 \exp\left(\frac{(4t+\Delta)^2}{(4t+\Delta)^2 - \Delta^2}\right) dt} & \text{Si } -\frac{\Delta}{2} \leq x \leq 0 \\ T(-x) & \text{Si } 0 \leq x \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{Si } |x| > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (8)$$

Le transformé de Fourier de la fonction G(x) est calculé numériquement

D – l'impulsion quadratique Q(x)

$$Q(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{2x}{\Delta} + 1\right)^2 & \text{Si } -\frac{\Delta}{2} \leq x \leq -\frac{\Delta}{4} \\ 1 - 2\left(\frac{2x}{\Delta}\right)^2 & \text{Si } -\frac{\Delta}{4} \leq x \leq \frac{\Delta}{4} \\ 2\left(\frac{2x}{\Delta} - 1\right)^2 & \text{Si } \frac{\Delta}{4} \leq x \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{Si } |x| > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (9.a)$$

Le transformé de Fourier est:

$$\tilde{Q}(\alpha) = \frac{\sin\left(\pi\alpha\frac{\Delta}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi\alpha\Delta}{4}\right)}{\left(\pi\alpha\frac{\Delta}{2}\right)^3} \quad (9.b)$$

Les formes des impulsions sont visualisées dans la figure 3. Les tracés en figure 4 sont les Transformées de Fourier à une échelle logarithmique RMS, en fonction du nombre d'onde normalisé à la moitié de la largeur d'impulsion.

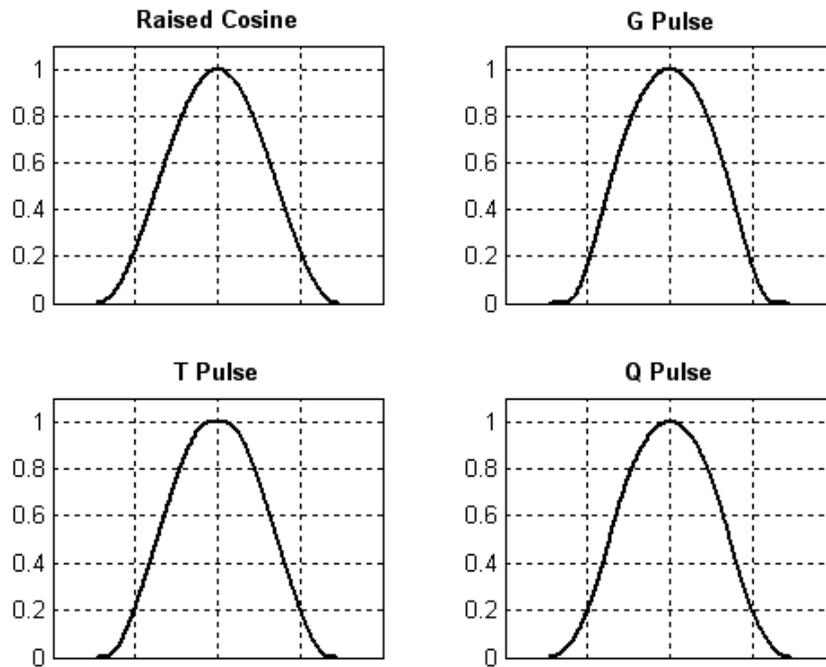


Fig. 3. La forme spatiale des différentes fonctions

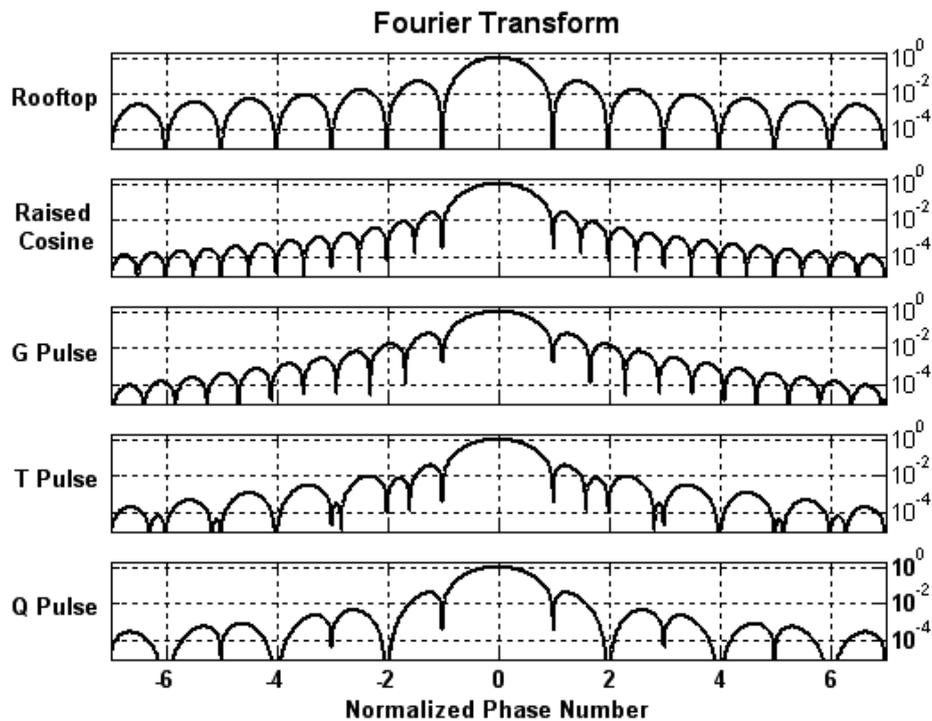


Fig. 4. Transformées de Fourier

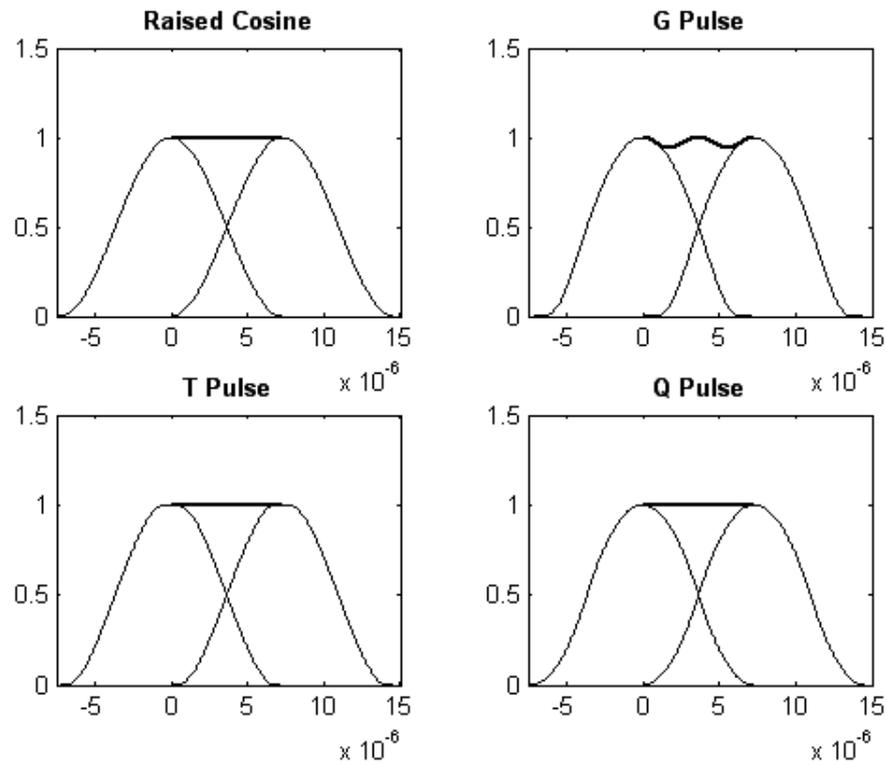


Fig.5. Sommation de deux cellules successive

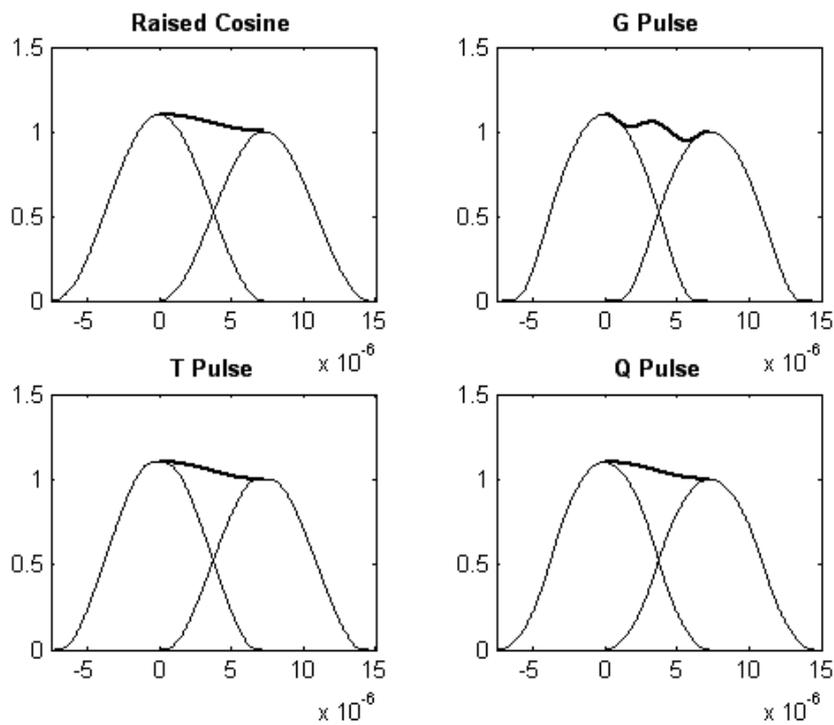


Fig .6. Sommation de deux cellules successive avec des coefficients différents

## II-5 – Etude graphique de la convergence

On va caractériser les courants, transversal et longitudinal, par quatre nouvelles fonctions de base dont le nombre est le même.

On normalise la variable spectrale  $a$  par rapport à la largeur de la cellule qui dépend elle-même du nombre de fonctions de base et de la largeur totale du ruban  $w$ .

Cette étude est faite pour les éléments les plus significatifs, en d'autres termes ceux qui comportent le décalage le plus important, et ceux sont les premières cellules en vue de leurs distances par rapport au centre du ruban. Les dernières cellules peuvent avoir le même effet en raison de la symétrie de la structure à étudier.

Le nombre choisi afin de représenter les courants, longitudinal et transversal, sera de 31 fonctions de base. Les résultats de cette étude figurent dans les courbes ci-dessous :

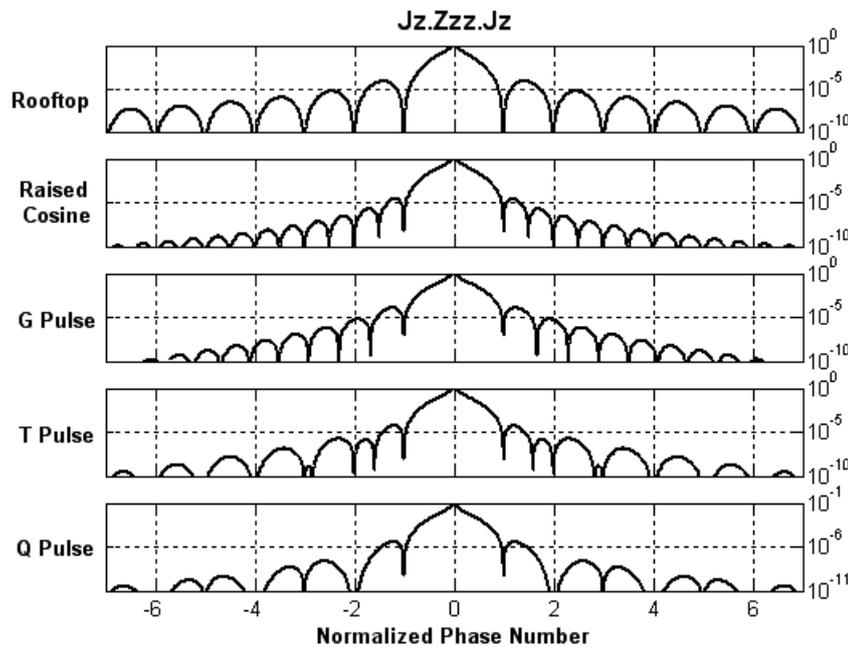


Fig .7. représentation des éléments de la matrice générale en fonction de la variable

Spectrale  $a$  normalisée par rapport à la largeur de la cellule.  $J_z Z_{zz} J_z$ .

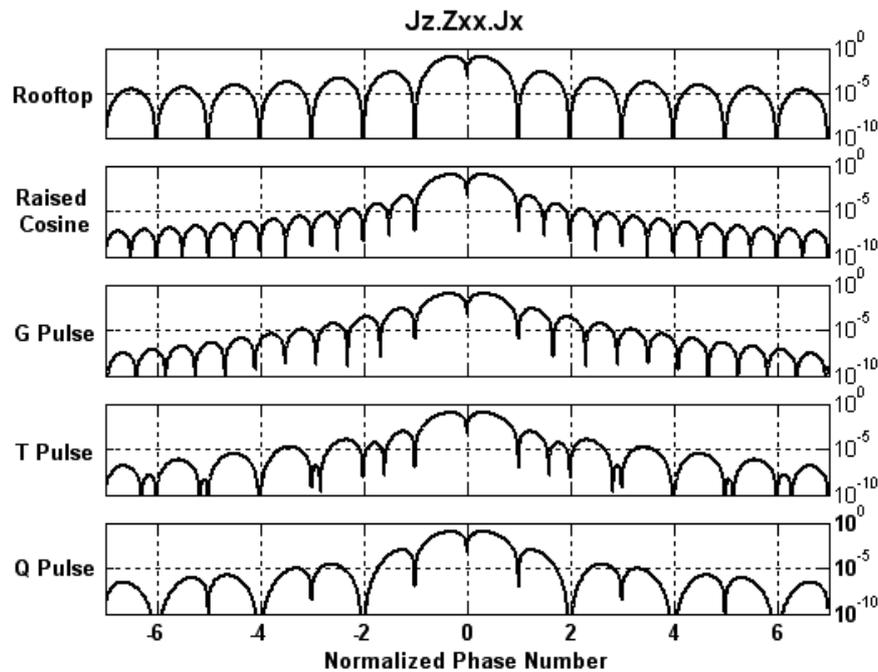


Fig .8. Représentation des éléments de la matrice générale en fonction de la variable Spectrale  $a$  normalisée par rapport à la largeur de la cellule.  $J_x Z_{xx} J_x$ .

## II-6 – Résultats et discussions

Avec les fonctions de base introduites dans la présente thèse, un seuil de sécurité pour la convergence des intégrales est vérifié pour les limites supérieures sur  $\alpha$  tel que  $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$  est situé en dessous de  $300 k_0$ . En utilisant l'impulsion Triangulaire (Rooftop) comme fonction de base et en gardant l'égalité de tous les paramètres, cette limite est supérieure à  $400 k_0$ .

Il est à souligner que les dimensions de la structure utilisée dans cette étude sont :

- $w = 3.04mm$  : la largeur du ruban
- $d = 3.17mm$  : la hauteur du substrat
- $\epsilon_r = 11.7$  : la constante diélectrique du substrat
- $f = 4 GHz$ : la fréquence du travail

le substrat en question est supposé être isotrope, sans pertes et non magnétisé. Les métallisations sont parfaitement conductrices et infiniment minces, y compris le plan de masse, en vue d'omettre leur effet. Il faut mentionner qu'il est impossible d'éviter les effets de

la métallisation lorsqu'on dépasse un certain seuil de fréquence, dans le cas des ondes millimétrique, ce problème ne se manifeste pas. Nous obtenons les résultats suivants :

TABLE II – Résultats numériques

| Fonctions de base   | Nombre des cellules | $\epsilon_{eff}$ | Borne d'Intégration $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ |
|---------------------|---------------------|------------------|--|
| Ref [6]<br>TABLE II | 99                  | 8. 8097          | 466.95 $k_o$                                     |
| RC(x)               | 31                  | 8.8071           | 270.75 $k_o$                                     |
| G(x)                | 31                  | 8.8086           | 264.66 $k_o$                                     |
| T(x)                | 31                  | 8.8093           | 257.02 $k_o$                                     |
| Q(x)                | 31                  | 8.8108           | 356.27 $k_o$                                     |

## II-7– Profils des courants

Dans ce qui suit, on va tracer les profils des courants, longitudinal et transversal, pour différents nombres de fonctions de base, en employant la méthode de décomposition en valeurs singulières [8].

Par contre pour restituer le profil du courant transversal, on doit faire une sommation de deux fonctions  $f(x)$  multipliées par leurs coefficients appropriés pour chaque cellule, cela vient du fait que chaque cellule est composée de deux segments qui se chevauchent, exception faite des cellules de bord.

Pour un nombre de fonctions de base qui représente le courant longitudinal  $N_l = 31$ , Une source d'imprécision dans le calcul avec les fonctions de base par cellule dans la SDA est la discontinuité du premier ordre de la densité du courant restitué à la cellule de transitions, ce qui est communément appelé l'aspect escalier. Le problème de transition cellule est également une source d'imprécision [9] inhérente analytique pour le calcul des paramètres de dispersion

de la ligne microruban, comme la permittivité effective. La façon courante dans la littérature pour lutter contre cet inconvénient est de recourir à des techniques d'ajustement de courbes, ce qui peut tout au plus être le moyen immédiat de réduire les écarts entre le profil de densité de courant restitué et celui du physique réel, mais dans ce cas on peut récupérer les erreurs des paramètres de dispersion. En raison de la nature des fonctions de base introduites dans le présent document, la discontinuité dans la transition cellulaire est considérablement réduite. Les tracés des courbes représentent les densités calculées des courants longitudinal et transversal en utilisant le développement basé sur la SDA.

Ces profils sont établis avec les impulsions Raised cosinus comme fonctions de base, ajoutant à cela qu'il n'y a pas de différence sensible sur ce côté de l'étude entre les quatre impulsions introduites dans la présente thèse.

Nous croyons que les profils donnés dans la Figure 9 reconstituent avec un maximum de précision la densité réelle du courant physique dans la ligne microruban. Ces profils doivent être comparés avec ceux de la référence [6] dans les figures 2, 4, 7, 8.

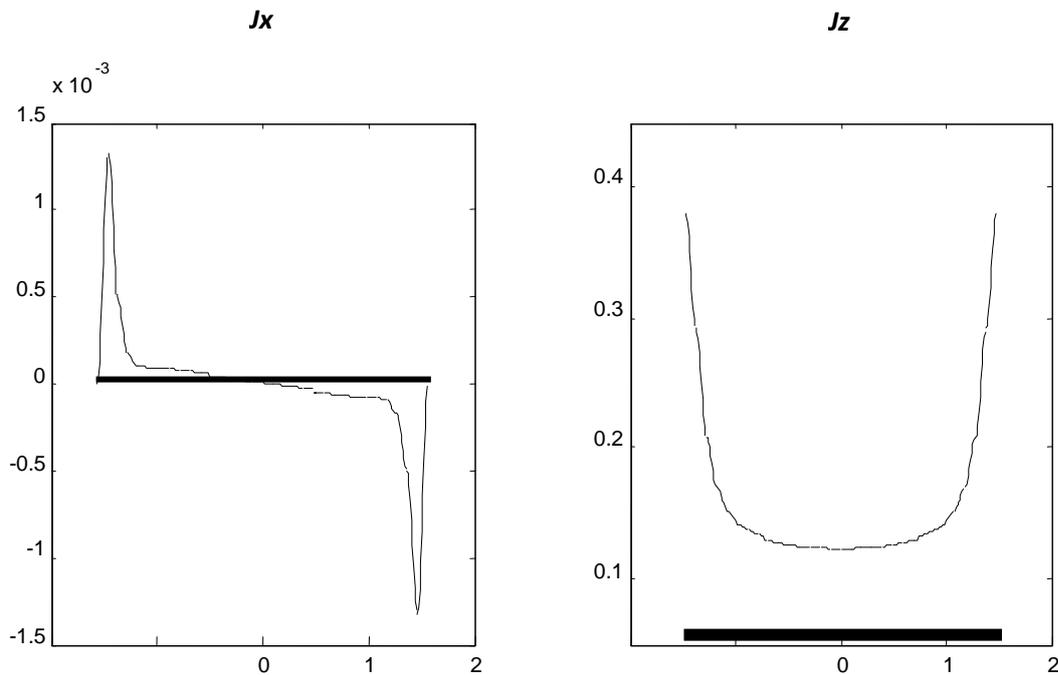


Fig. 9. Courant reconstitué.

## II-8– Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons opté pour la discrétisation du domaine en cellules, ce qui nous a permis d'introduire quatre nouvelles fonctions d'essai différentes de celles utilisées dans un domaine entier : L'impulsion Raised Cosine, une impulsion pseudo-Gaussienne notée  $G(x)$ , une impulsion pseudo-trigonométrique bâtie sur un noyau de distributions exponentielles notée  $T(x)$ , une impulsion quadratique composée de trois segments paraboliques continus notés  $Q(x)$ . Outre les avantages induits par la décroissance du spectre, les profils du courant calculés en vigueur donnent une restitution réaliste de la densité physique du courant sur la bande métallique.

## Références du chapitre II

- [1] T. Uwano, T. Itoh. Spectral domain approach. Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures. Wiley : New-York,1989.
- [2] S. O. Park, C. A. Balanis. Analytical technique to evaluate the asymptotic part of the impedance matrix of Sommerfeld-type integrals. *IEEE trans.* 1997; **AP 45 (5)**:798-805.
- [3] F. J . Demuyneck, G. A. E. Vandenbosch, A. R. Van de Capelle. The expansion wave concept – Part I: Efficient calculation of spatial Green's functions in a stratified dielectric medium. *IEEE trans.* 1998; **AP 46 (3)**: 397-406.
- [4] S. Amari, R. Vahldieck, J. Bornemann. Using selective asymptotics to accelerate dispersion analysis of microstrip lines. *IEEE trans.* 1998; **MTT 46 (7)**:1024-1027.
- [5] B. L. Ooi, P. S. Kooi, M. S. Leong. Application of Sonie-Schafheitlin formula and sampling theorem in spectral domain method. *IEEE trans.* 2001; **MTT 49 (1)**: 210-213.
- [6] Guy Coen, Niels Faché, Daniel De Zutter. Comparison Between Two Sets of Basis Functions for the Current Modeling in the Galerkin Spectral Domain Solution for Microstrips. *IEEE trans.* 1994; **MTT 42 (3)**: 505–513.
- [7] Fredric J. Harris. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. *Proceedings of the IEEE*, 1978; **66 (1)**: 51-83.
- [8] Arnaud MARTIN .L'analyse de données.Polycopié de cours ENSIETA - Ref. : 1463, Septembre 2004
- [9] Bouchaour Mounir. Implantation de fonctions d'essai à décroissance rapide dans la Méthode Spectrale par Facteurs de réflexion RF-SDA. Mémoire de magister, 2007

## ***Chapitre III***

# ***Conformité des Fonctions de Base à l'Equation de Continuité de la Densité de Courant***

### III-1- Introduction

Dans le présent chapitre, nous allons étudier en profondeur la conformité des fonctions de base introduites au chapitre précédent avec les équations de Maxwell, particulièrement avec le principe de conservation de courant qui est communément connu et formulé par l'équation de continuité. Une conséquence importante de cette conformité, qui a été démontrée sous diverses formes dans la littérature, est l'évitement des solutions parasites.

### III-2- Formulation du problème

Dans le schéma de Galerkin SDA appliqué aux structures planes, les composantes longitudinale et transversale de la densité de courant de surface sur la section droite du conducteur, généralement notée  $J_z$  et  $J_x$  en coordonnées cartésiennes, sont développées en séries de fonctions de base  $J_{zn}$  et  $J_{xn}$

Une règle de base couramment utilisée, dont le but est de répondre à certains critères de robustesse de calcul [1-3], est de choisir ces fonctions de base de telle sorte que la relation de proportionnalité suivante soit respectée :

$$J_{zn}(x) \propto \frac{dJ_{xn}(x)}{dx} \quad (1)$$

Les fonctions de base  $J_{zn}$ , dans leur représentation spatiale, varient comme la dérivée des fonctions de base  $J_{xn}$  par rapport à la variable transversale. Cette condition n'est pas une

prescription essentielle du schéma SDA, car lorsqu'elle n'est pas remplie elle n'affecte pas sensiblement le calcul des caractéristiques dans la plupart des situations pratiques. Ce chapitre est destiné à observer minutieusement, sous des aspects théoriques et pratiques à la fois, les effets de cette condition lors de l'utilisation de la classe de fonctions de base par cellules introduites au Chapitre 2.

Cette condition a été motivée en [1] par la nécessité d'améliorer la vitesse de calcul de la SDA, étant donné que les dérivées en  $x$  reviennent à une multiplication par un facteur  $\alpha$  dans la transformée de Fourier, impliquant l'évitement de la programmation de formules distinctes de  $J_{zn}(\alpha)$  et  $J_{xn}(\alpha)$ .

La même règle a été obtenue en [2] comme condition d'élimination des solutions parasites, après un développement théorique dont la preuve sous-jacente est basée sur des hypothèses trop restrictives à notre avis, donc ne pouvant pas être généralisée.

Le présent travail ne va pas remettre en question la condition (1) dans ses fondements théoriques, pour le principe qu'elle est largement reconnue, tout comme la propriété de dérivabilité et continuité des fonctions de base introduite en [3] en tant que condition d'évitement des solutions parasites dans la mise en œuvre de la SDA pour l'analyse de la ligne microruban.

Nous allons établir une raison supplémentaire quant à l'adoption de la condition (1), qui est expliquée dans ce qui suit :

L'équation de continuité de la densité de courant sur un ruban métallique d'épaisseur nulle est donnée par :

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Où  $\rho$  la distribution surfacique de charges Coulombiennes

Toutes les entités électromagnétiques ont une variation harmonique  $e^{j\omega t}$  et se propagent dans la direction  $z$  en  $e^{-j\beta z}$  avec la constante de phase  $\beta$ , on a alors

$$-j\beta J_z + \frac{\partial J_x}{\partial x} + j\omega\rho = 0 \quad (3)$$

La condition (1) sera vérifiée de façon inhérente si la densité de charge  $\rho(x)$  et la composante  $J_z(x)$  de la densité de courant aient strictement la même distribution spatiale en  $x$  le long de la section transversale de la ligne microstrip. Cette assumption peut être formulée analytiquement, il est facile de voir que si par exemple  $J_z(x) = A\rho(x)$  où  $A$  est une constante réelle, l'équation de continuité (3) s'écrit

$$j(\beta - \omega A)J_z = \frac{\partial J_x}{\partial x}$$

Qui s'applique parfaitement à la relation de proportionnalité (1)

L'hypothèse de même distribution en  $x$  de  $J_z$  et  $\rho$  est très réaliste pour la plupart des situations pratiques où l'approximation d'un ruban parfaitement conducteur sur un substrat diélectrique sans pertes est valide.

### III-3 - Fonctions de Base Conformées à l'Equation De Continuité

Dans la pratique, la relation (1) est utilisée en sens inverse de sa retranscription littérale, la base  $J_{xn}$  est générée à partir de la base  $J_{zn}$  par intégration selon  $x$ . Dans les deux articles [1] et [2], la condition (1) est appliquée uniquement au cas des fonctions de base plein domaine, donc peut être établie de façon aisée et immédiate. Par contre, dans le cas d'impulsions à support compact, l'intégration donne lieu intrinsèquement à une discontinuité du premier ordre à la borne supérieure d'intégration, de sorte que la condition de dérivabilité et continuité des fonctions de base [3] est violée.

Afin de palier à cette difficulté, nous proposons une procédure pour générer la base  $J_{xn}$  à partir des impulsions à support compact utilisées pour la base  $J_{zn}$ , en une séquence de quatre opérations, voir la Figure 1.

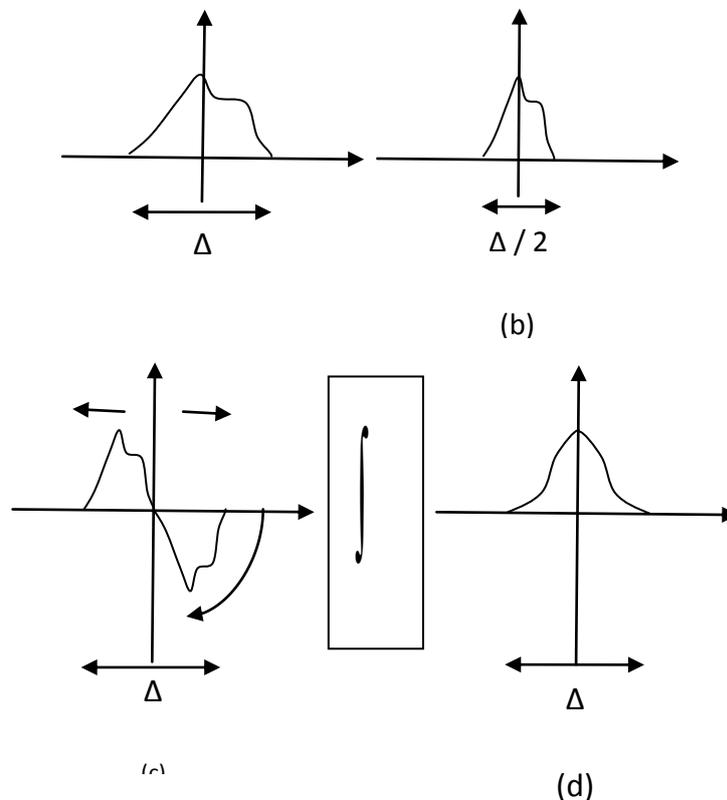
- 1/ Compression du support de l'impulsion  $J_{zn}$  par un facteur 2
- 2/ Décalage des deux côtés de l'axe des ordonnées d'un intervalle  $\Delta/2$ ,
- 3/ Inversion de l'impulsion de droite
- 4/ Quadrature, ou intégration, sur la largeur d'impulsion  $\Delta$ .

L'impulsion qui en résulte est symétrique quelque soit la forme de l'impulsion génératrice.

Si l'impulsion génératrice est symétrique, la procédure se réduit à une Compression suivie d'une Convolution avec l'impulsion rectangulaire unité de largeur  $\Delta/2$ .

La transformée de Fourier  $FI(\alpha)$  de l'impulsion construite de cette façon peut être directement obtenue à partir de celle de l'impulsion génératrice  $F(\alpha)$  en utilisant les propriétés

$$FI(\alpha) = F\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sin\left(\pi\alpha\frac{\Delta}{2}\right)}{\alpha} \quad (4)$$



**Fig. III -1.** Construction de  $J_{xn}$  à partir de  $J_{zn}$

(a) Impulsion Génératrice - (b) Compression

(c) Décalage et Inversion - (d) Quadrature

Affecter l'impulsion obtenue de cette façon à  $J_{xn}(x)$  et sa génératrice à  $J_{zn}(x)$  est par l'idée proche de la relation de dérivée qui est recherchée entre les deux. Cependant, ceci ne correspond pas à la formule stricte préconisé dans [1-2]. L'objet du présent chapitre est d'avoir une mesure de cette approche quant aux caractéristiques de calcul. D'autre part, la spécificité des fonctions de base par cellules convient à perfection pour ajouter de nouveaux éclairages sur les fondements théoriques de la condition (1).

### **III-4- Les Fonctions Raised Cosine Integral et Impulsion Cubique**

Nous reprenons les fonctions de base définies au chapitre précédent, auxquelles on applique la procédure décrite ci-dessus. Nous obtenons deux nouvelles impulsions que nous avons appelé le RAISED COSINE INTEGRAL et l'IMPULSION CUBIQUE, notées respectivement  $RCI(x)$  et  $C(x)$  et générées à partir de  $RC(x)$  et de l'impulsion quadratique  $Q(x)$ .

Les expressions spatiales de ces impulsions ainsi que leurs transformées de Fourier sont rapportés dans le tableau 1.

Ainsi nous obtenons deux variantes pour l'expansion des densités de courant, la première basée sur le Raised Cosine, la seconde sur l'impulsion quadratique pour les fonctions de base  $J_{zn}$ , et leur intégrales selon  $x$  pour leur homologues respectifs  $J_{xn}$ .

Une attention particulière doit être souligné quant comportement asymptotique en  $\alpha^{-4}$ , qui est jusqu'à ce jour la meilleure décroissance spectrale réalisé pour une fonction de base conforme à la SDA.

| Tableau 1 – Densité de Courant  |        |  |   |
|---|--------|--|---|
| Expansions  | F<br>B | Domaine spatial  | Domaine spectral  |
| - #1 -<br><br>Raised<br>Cosine<br>et<br>Raised<br>Cosine<br>Integral              | $J_z$  | $\begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) & \text{if }  x  \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{if }  x  > \frac{\Delta}{2} \end{cases}$  | $\frac{\sin(\pi \Delta \alpha)}{\alpha(1 - \Delta^2 \alpha^2)}$   |
|   | $J_x$  | $\begin{cases} 1 - 2\frac{ x }{\Delta} - \frac{\sin\left[\pi\left(4\frac{ x }{\Delta} - 1\right)\right]}{2\pi} & \text{if }  x  \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{if }  x  > \frac{\Delta}{2} \end{cases}$  | $\frac{\sin^2\left(\pi \Delta \frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha^2(4 - \Delta^2 \alpha^2)}$  |
| - # 2 -<br><br>Impulsion<br>Quadratiq<br>ue<br><br>et<br><br>Impulsion<br>Cubique | $J_z$  | $\begin{cases} 1 - 2\left(\frac{2x}{\Delta}\right)^2 & \text{if } 0 \leq  x  \leq \frac{\Delta}{4} \\ 2\left(1 - \frac{2 x }{\Delta}\right)^2 & \text{if } \frac{\Delta}{4} \leq  x  \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{if }  x  > \frac{\Delta}{2} \end{cases}$   | $\frac{\sin\left(\pi \alpha \frac{\Delta}{2}\right) \sin^2\left(\pi \alpha \frac{\Delta}{4}\right)}{\alpha^3}$  |
|   | $J_x$  | $\begin{cases} 1 - \frac{128 x ^3}{3\Delta^3} & \text{if }  x  \leq \frac{\Delta}{8} \\ \frac{5}{6} + \frac{4 x }{\Delta} - \frac{32x^2}{\Delta^2} + \frac{128 x ^3}{3\Delta^3} & \text{if } \frac{\Delta}{8} \leq  x  \leq \frac{\Delta}{4} \\ \frac{128}{3\Delta^3} \left(\frac{\Delta}{2} -  x \right)^3 & \text{if } \frac{3\Delta}{8} \leq  x  \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{if } \frac{\Delta}{2} \leq  x  \end{cases}$ | $\frac{\sin\left(\pi \alpha \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\pi \alpha \frac{\Delta}{4}\right) \sin^2\left(\pi \alpha \frac{\Delta}{8}\right)}{\alpha^4}$ |

Les formes des impulsions sont visualisées dans la Figure III.2. Les tracés de la Figure III-3 représentent les Transformées de Fourier à une échelle logarithmique RMS, en fonction de  $\alpha\Delta/2$  le nombre d'onde normalisé à la moitié de la largeur d'impulsion.

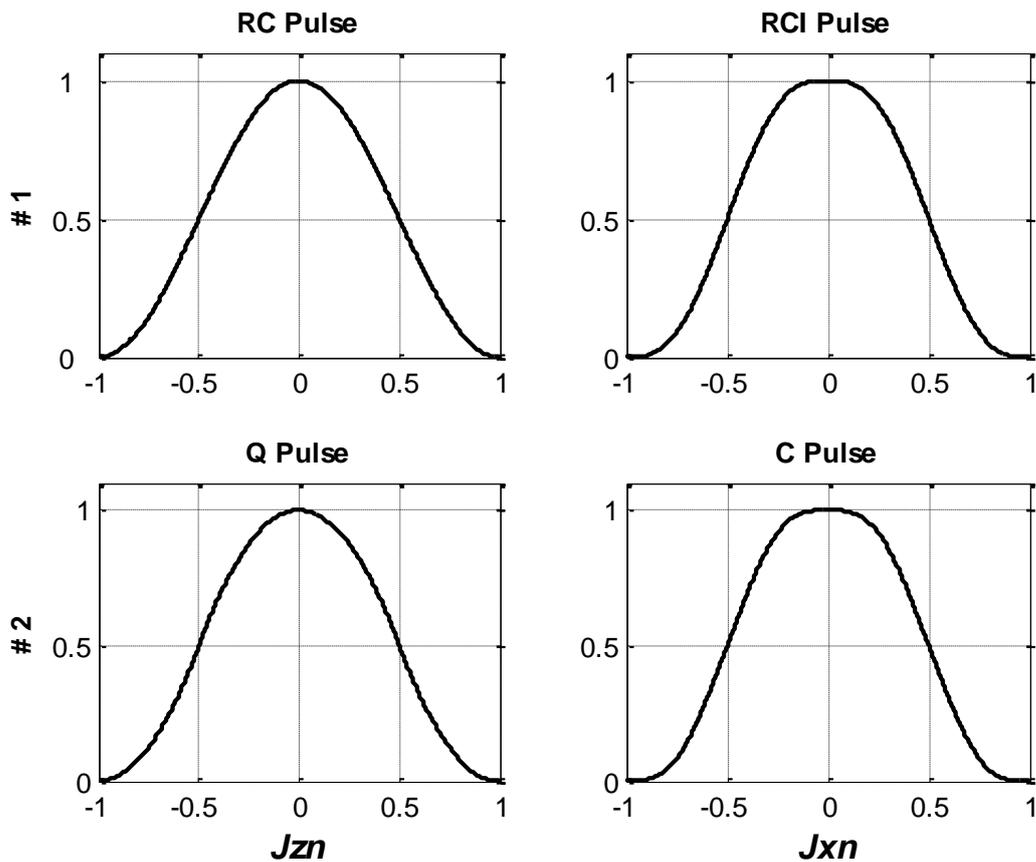


Fig. III -2. La forme spatiale des différentes impulsions

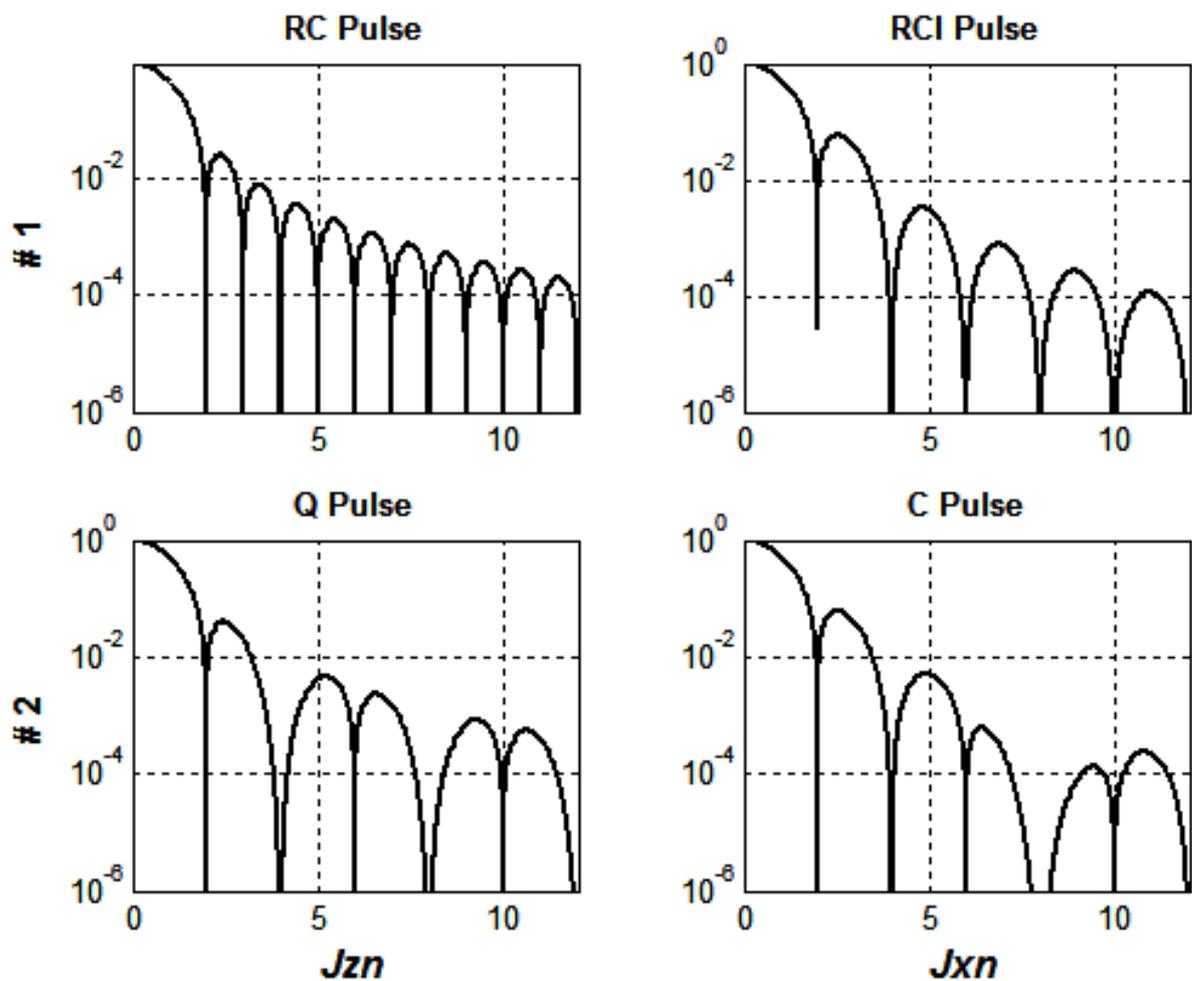


Fig. III -3. Transformées de Fourier

### III-5- Résultats et Discussion

Avec les fonctions de base introduites dans le présent chapitre, un seuil de sécurité pour la convergence des intégrales est vérifié pour les bornes supérieures sur  $\alpha$  tel que  $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$  est situé en dessous de  $264 k_0$ .

Pour l'impulsion Triangulaire (Rooftop) en gardant l'égalité de tous les paramètres, la borne supérieure d'intégration [ 4,5] est située à  $460 k_0$ .

La structure utilisée dans cette étude est semblable à celle du deuxième chapitre, dont les dimensions sont :

- $w = 3.04mm$  : la largeur du ruban
- $d = 3.17mm$  : la hauteur du substrat
- $\epsilon_{eff} = 11.7$ : la constante diélectrique du substrat
- Le substrat en question est supposé isotrope, sans perte, et non magnétisé, et les métallisations sont parfaitement conductrices et infiniment minces, y compris le plan de masse, en vue d'omettre leur effet. Il faut mentionner qu'il est impossible d'éviter les effets de la métallisation lorsqu'on dépasse un certain seuil de fréquence, dans le cas des ondes millimétrique, ce problème ne se manifeste pas.

Nous obtenons les résultats suivants :

TABLEAU II – Résultats Numériques

| Fonctions de base | Nombre des cellules | $\epsilon_{eff}$ | Borne d'Integration $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ |
|-------------------|---------------------|------------------|--|
| Ref [6-TABLE II]  | 99                  | 8. 8097          | 466.95 $k_o$                                     |
| RC et RCI         | 31                  | 8.7859           | 264.66 $k_o$                                     |
| Impulsions Q et C | 31                  | 8.8086           | 264.66 $k_o$                                     |

Sur la Figure III-4, nous présentons les variations de la constante diélectrique effective en fonction de la fréquence en utilisant les deux impulsions Raised Cosine Integral et Cubic (RCI(x) and C(x)).

Nous remarquons que l'ensemble RCI-RC présente une courbe plus régulière que l'ensemble Q-C. ceci est la preuve d'une meilleure stabilité d'implémentation qui est due à la répartition et à la forme de lobes secondaires des spectres respectifs des deux ensembles de fonctions de base

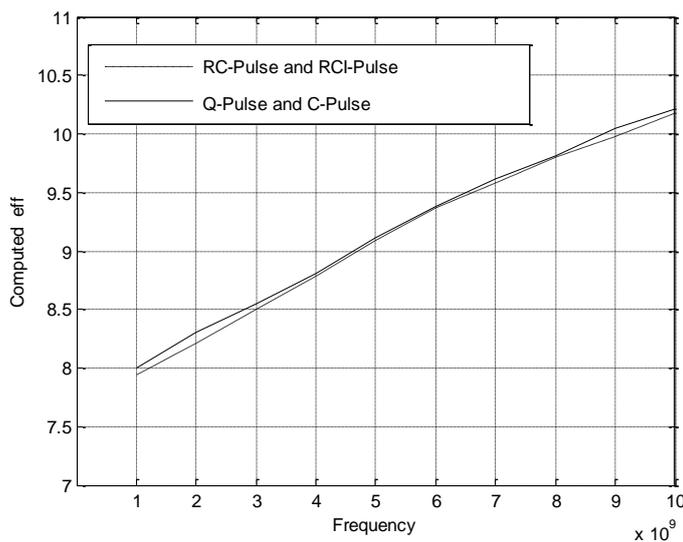


Fig. III-4. Les variations de la constante diélectrique effective en fonction de la fréquence

$$\epsilon_r = 11.7, \mu_r = 1, w = 3.17mm, d = 3.04mm$$

### III-6- Profils des courants

Les profils de la densité surfacique de courant sont présentés sur la Figure III-5, et sont établis avec les impulsions Raised Cosinus pour  $J_z$  et Raised Cosinus Integral pour  $J_x$  comme fonctions de base,

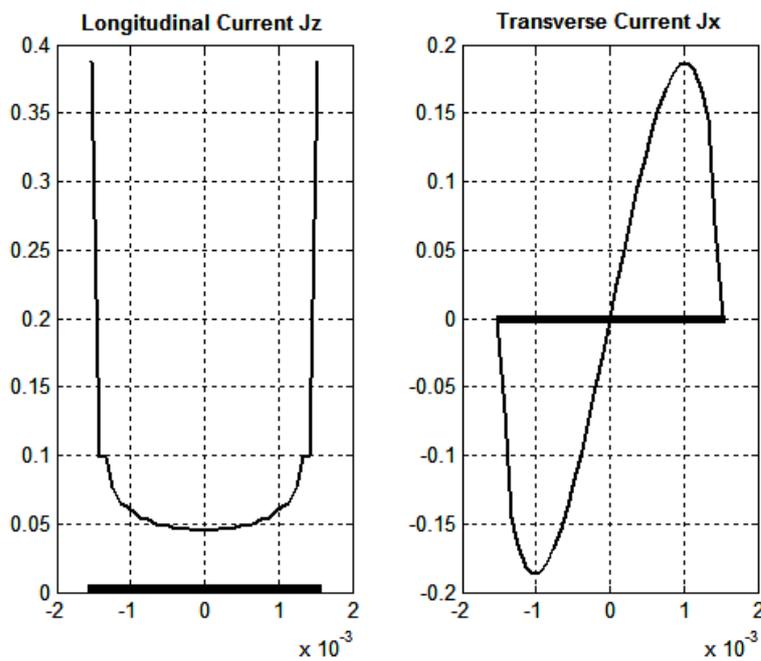


Fig. III -5. Représentation des profils de courants pour 31 fonctions de base.

### III-7- CONCLUSION

Les caractéristiques aussi bien analytiques que numériques de deux nouvelles fonctions de base par cellule ont été étudiées de façon exhaustive, en vue de leur homologation pour la SDA appliquées à la ligne microruban,

Outre les avantages induits au niveau du spectre, les profils de courant calculés donnent une restitution réaliste de la densité physique réelle sur le ruban métallique.

### Références du chapitre III

- [1] Jansen, R.H. "*High-Speed Computation of Single and Coupled Microstrip Parameters Including Dispersion, High-Order Modes, Loss and Finite Strip Thickness*" IEEE Trans MTT Vol 26, No2, pp 75-82, Feb 1978
- [2] Aubert, H., Souny, B., Baudrand, H., "*Origin and avoidance of spurious solutions in the transverse resonance method*" IEEE Trans MTT Vol 41, No3, pp 450-456, March 1993
- [3] Aksun, M. I., Mittra, R., "*Choices of Expansion and Testing Functions for the Method of Moments Applied to a Class of Electromagnetic Problems*", IEEE Trans. Vol MTT 41, No 3, pp 503-509, March 1993
- [4] F.Z. Siaba, M. Bouchaour, M.T.Benhables, M.L.Riabi "*A set of new SDA basis functions with strongly decaying properties*", PIERS 2011, 20-23 March, 2011 Marrakech, Ma
- [5] F. Z. Siabah, M.T. Benhables, M.L. Riabi "*The Spectral Domain Approach - Four Basis Functions With Strongly Decaying Spectrum*", , Vol 6, No 4, pp 203-210, International Journal of Microwaves and Optical Technology, July 2011.
- [6] Guy Coen, Niels Faché, Daniel De Zutter, "Comparison Between Two Sets of Basis Functions for the Current Modeling in the Galerkin Spectral Domain Solution for Microstrips," *IEEE trans.* Vol MTT 42, N°3, pp 505–513, March 1994

## *Chapitre IV*

# *Etude des bandes supraconductrices intégrées dans une structure multicouches*

## **IV-1- Introduction**

Les matériaux supraconducteurs à température ambiante sur film mince offrent une solution attractive pour les lignes de transmissions MMICs appliquées aux résonateurs microondes, antennes et lignes à retard.

La méthode que nous avons utilisée est l'approche RF-SDA. Ce choix découle principalement de deux observations. La première est que la fonction de Green peut être obtenue analytiquement sous forme d'une paire de deux formules algébriques. Ensuite, l'utilisation de la méthode des moments, et plus particulièrement la méthode de Galerkin, permet d'obtenir un résultat précis bien que le déterminant associé à l'équation caractéristique soit de dimension faible.

La méthode est employée en choisissant un ensemble de fonctions de base qui satisfait les conditions de singularité sur le bord des conducteurs. D'un point de vue mathématique, la

méthode spectrale transforme un problème d'équation intégrale dans le domaine spatial en une équation algébrique dans un domaine spectral associé à la théorie de la transformée de Fourier.

Son principal avantage est la simplification du traitement analytique et numérique. La méthode spectrale conventionnelle impose des conditions aux frontières à l'ensemble des fonctions de base dans le domaine spatial.

## IV-2- Etude physique d'un supraconducteur

La supraconductrice existe seulement dans un domaine limité [1] par trois grandeurs maximales : température, champ et densité de courant critiques. Si les trois grandeurs  $T$ ,  $H$  et  $J$  auxquelles est soumis le matériau sont inférieures aux grandeurs critiques, non résistif et diamagnétique (aimantation négative). Si l'une des grandeurs dépasse la valeur critique, le supraconducteur est dans l'état normal (non supraconducteur) résistif et amagnétique (aimantation nulle). Parmi ces trois grandeurs, deux sont intrinsèque ( $T_c$  et  $H_c$ ) alors que la troisième dépend des conditions d'élaboration.

### IV-2- 1 Les équations de London

La première équation de London (1) résulte de l'écriture du mouvement d'électrons accélérés par la force de Lorentz réduite, à sa composante électrique, et ne subissant aucune collision. Elle s'écrit :

$$\partial_t j = \frac{n_s q^2}{m_s} E = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} E \quad (1)$$

Puisque  $j = q n_s v$  avec  $n_s = n_s(t)$  la densité de porteurs supraconducteur,  $m_s$  leur masse effective et  $E$  le champ électrique.

On a introduit dans (4) la longueur de London en posant :

$$\frac{1}{\lambda_L^2(t)} = \frac{n_s(T) q^2}{m_s} \mu_0 \quad (2)$$

En régime harmonique, (4) s'écrit :

$$J = -j \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} E \quad (3)$$

La deuxième équation de London (4) résulte de l'introduction de (1) dans les équations de Maxwell.

En notant  $E = -\partial_t A + cst$  reporté dans (1) donne

$$j = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} A \quad (4)$$

La relation (4) considérée comme second membre de l'équation de Maxwell

$$\text{rot} B = \mu_0 J \quad (5)$$

Donne

$$-\nabla A + \mu \varepsilon \partial_t^2 A = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} A \quad (6)$$

Avec les mêmes hypothèses, on peut encore écrire :

$$\mu_0 \text{rot} J = \text{rot}(\text{rot} B) \quad (7)$$

Qui donne

$$\Delta B - \frac{1}{\lambda_L^2} B = 0 \quad (8)$$

Qui illustre l'interprétation de la longueur de London comme profondeur de pénétration du champ magnétique dans le supraconducteur et qui a pour corollaire que si B est uniforme dans le supraconducteur, il est nécessairement nul (Effet Meissner).

## IV-2- 2 Modèle des deux fluides

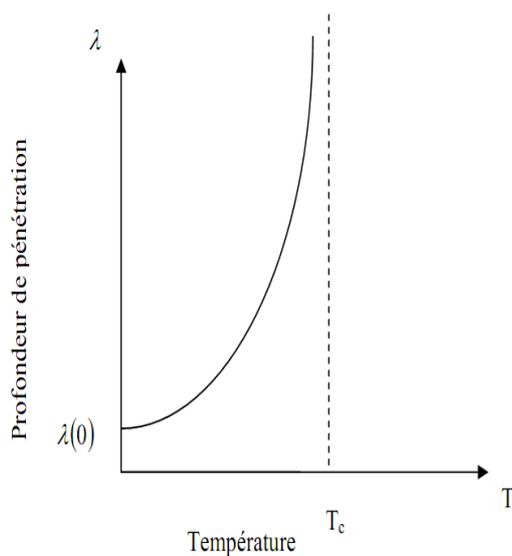
Aux équations de London, il faut poursuivre la modélisation phénoménologique, adjoindre le modèle des deux fluides. Celui-ci fait abstraction du fait que la conduction [1] se fait par paires de Cooper et cherche à modéliser le phénomène de conduction par la coexistence de

deux fluides sans interaction issus de porteurs  $n_s$  respectivement dits normaux ou supraconducteurs.

La loi d'évolution [1]  $\lambda_l$  :

$$\lambda_L = \frac{\lambda_{L0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}} \quad (9)$$

Où  $\lambda_{L0}$  est la valeur de la profondeur de pénétration à  $T=0K$ .



**Fig. IV -2.** Profondeur de pénétration  $\lambda$  en fonction de la température.

### IV-2- 3 Spécificité des supraconducteurs haute température

Il faut, pour compléter cette remarque rappeler que, tant les équations de London, tant le modèle des deux fluides ont été établis pour des supraconducteurs basse température. Les supraconducteurs haute température [1] sont de type II. Ils sont caractériser par deux champs critiques  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$  avec  $H_{c1} \ll H_{c2}$ . En dessous de  $H_{c1}$ , leur comportement est analogue à celui

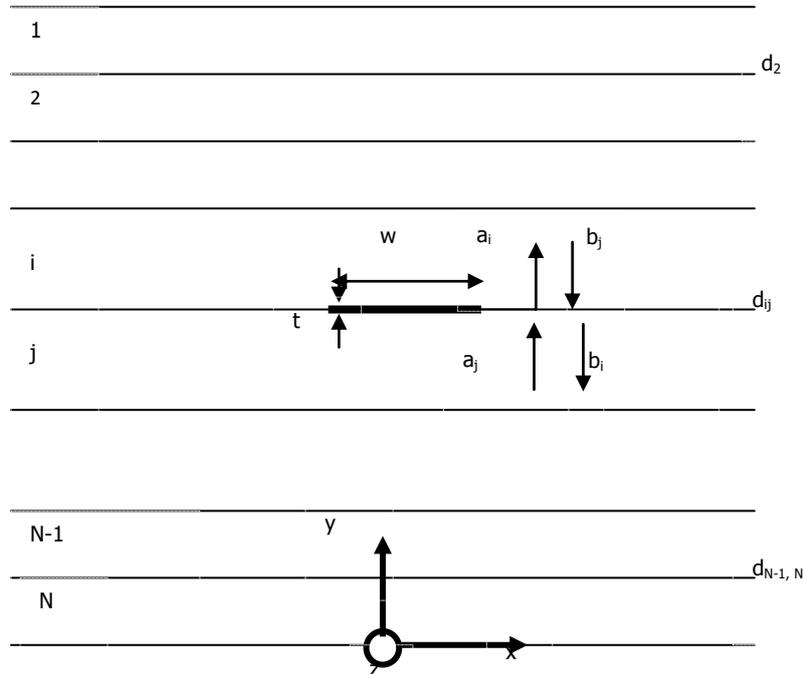
d'un supraconducteur de type I, en revanche lorsque  $H_{c1} < H_1 < H_{c2}$ , le diamagnétisme n'est parfait, le supraconducteur est alors dans un état dit 'mixte'. Elle décrit la variation spatiale de l'état supraconducteur puisque une zone supraconductrice est séparée d'une zone normale d'une distance de l'ordre de  $\xi$

La longueur de cohérence dimensionne aussi la dimension des vortex. On retiendra :

- Que pour un supraconducteur de type I,  $\xi \gg \lambda_L$  tandis que pour un supraconducteur de type II  $\xi \ll \lambda_L$ .
- que si dans un supraconducteur basse température, les propriétés de conduction dépendent peu de la nature (mono ou polycristalline) du matériau, ce n'est pas le cas pour un supraconducteur haute température où les joints de grains peuvent être de l'ordre de  $\xi$ . Tixador, dans [11] propose d'assimiler le supraconducteur à un réseau de diodes Josephson.

### IV-3- Formulation du problème

La structure qu'on va étudier, est une ligne micro-ruban multicouche ouverte, où les couches diélectriques sont supposées sans perte. Et elle est représentée par la **Fig. IV -3**.



**Fig. IV -3.** La section transversale d'une ligne microruban multicouche

Pour chaque couche diélectrique, on définit les potentiels scalaires  $\psi^e$  et  $\psi^h$  en fonction de deux ondes, une onde incidente et l'autre réfléchie tout au long de la direction transversale [7].

$$\psi_i^e = -A_i^e e^{-\gamma_i y} + B_i^e e^{\gamma_i y} \quad (10a)$$

$$\psi_i^h = A_i^h e^{-\gamma_i y} + B_i^h e^{\gamma_i y} \quad (10b)$$

En tenant compte de la dépendance harmonique  $e^{-j\beta z + j\omega t}$ , où l'indice  $i$  indique le numéro de chaque couche. L'équation de Helmholtz dans le domaine spectral est :

$$\gamma_i^2 = \alpha^2 + \beta^2 + k_i^2 \quad (11)$$

Où  $\alpha$  présente la constante de phase de la direction  $x$ ,  $k_i$  est la longueur d'onde de la propagation libre dans la  $i^{\text{ème}}$  couche, et elle est définie par la formule suivante :

$$k_i^2 = \omega^2 \mu_i \varepsilon_i \quad (12)$$

Les champs sont déduits en utilisant l'opérateur rotationnel

$$\vec{E}_i = \frac{-1}{j\omega\varepsilon_i} \nabla \times \nabla \times \psi_i^e \vec{e}_y - \nabla \times \psi_i^h \vec{e}_y \quad (13a)$$

$$\vec{H}_i = \frac{-1}{j\omega\mu_i} \nabla \times \nabla \times \psi_i^h \vec{e}_y - \nabla \times \psi_i^e \vec{e}_y \quad (13b)$$

Les immittances caractéristiques sont données par :

$$Z_{oi}^e = \frac{\gamma_i}{j\omega\varepsilon_i} \quad (14a)$$

$$Y_{oi}^h = \frac{\gamma_i}{j\omega\mu_i} \quad (14b)$$

Pour la simplicité, on pose :

$$a_i^{e,h}(y) = A_i^{e,h} e^{-\gamma_i y} \quad (15a)$$

$$b_i^{e,h}(y) = B_i^{e,h} e^{\gamma_i y} \quad (15b)$$

Dans tous les développements suivants, l'indice  $i$  indique les couches sises immédiatement au-dessus du ruban, et l'indice  $j$  indique celles situées au-dessous du ruban. Les conditions aux limites appliquées aux champs transversaux à la surface du ruban  $y = d_{ij}$  nous donnent :

$$Z_{oi}^e(a_i^e(d_{ij}) + b_i^e(d_{ij})) = Z_{oj}^e(a_j^e(d_{ij}) + b_j^e(d_{ij})) \quad (16a)$$

$$a_i^h(d_{ij}) + b_i^h(d_{ij}) = a_j^h(d_{ij}) + b_j^h(d_{ij}) \quad (16b)$$

$$j(-a_i^e(d_{ij}) + b_i^e(d_{ij})) - j(-a_j^e(d_{ij}) + b_j^e(d_{ij})) = -\frac{\beta J_z + \alpha J_x}{\alpha^2 + \beta^2} \equiv -J_v \quad (17c)$$

$$jY_{oi}^h(-a_i^h(d_{ij}) + b_i^h(d_{ij})) - jY_{oj}^h(-a_j^h(d_{ij}) + b_j^h(d_{ij})) = -\frac{\alpha J_z - \beta J_x}{\alpha^2 + \beta^2} \equiv J_u \quad (17d)$$

On va définir le facteur de réflexion au moyen des deux différentes formules, une concernant la région où se situent les couches diélectriques supérieures; l'autre celles des couches inférieures à la surface du ruban conducteur.

$$b_i^{e,h}(y) = \Gamma_i^{e,h}(y)a_i^{e,h}(y) \quad (18a)$$

$$a_j^{e,h}(y) = L_j^{e,h}(y)b_j^{e,h}(y) \quad (18b)$$

Dans la région supérieure, les coefficients de réflexion de chaque coté de l'interface diélectrique, (sans la présence d'une source de courant), où  $y = d_{n,n+1}$  sont reliés par la formule suivante, déduite des conditions aux limites :

$$\Gamma_{n+1}^{e,h} = \frac{\Gamma_n^{e,h}(d_{n,n+1})(Z_{on}^{e,h} + Z_{on+1}^{e,h}) + (Z_{on}^{e,h} - Z_{on+1}^{e,h})}{\Gamma_n^{e,h}(d_{n,n+1})(Z_{on}^{e,h} - Z_{on+1}^{e,h}) + (Z_{on}^{e,h} + Z_{on+1}^{e,h})} \quad (19a)$$

D'une façon similaire, pour la région inférieure on a :

$$L_{n+1}^{e,h} = \frac{L_{n+1}^{e,h}(d_{n,n+1})(Z_{on+1}^{e,h} + Z_{on}^{e,h}) + (Z_{on+1}^{e,h} - Z_{on}^{e,h})}{L_{n+1}^{e,h}(d_{n,n+1})(Z_{on+1}^{e,h} - Z_{on}^{e,h}) + (Z_{on+1}^{e,h} + Z_{on}^{e,h})} \quad (19b)$$

A partir de la théorie de ligne de transmission, on peut déduire la variation de phase à l'intérieur du diélectrique en vertu de la formule suivante :

$$\Gamma_n^{e,h}(d_{n,n+1}) = \Gamma_n^{e,h}(d_{n-1,n}) \exp(-2\gamma_n \cdot (d_{n-1,n} - d_{n,n+1})) \quad (20a)$$

$$L_n^{e,h}(d_{n-1,n}) = L_n^{e,h}(d_{n,n+1}) \exp(-2\gamma_n \cdot (d_{n-1,n} - d_{n,n+1})) \quad (20b)$$

Les coefficients de réflexion des deux cotés du ruban où  $y = d_{ij}$  peuvent être obtenus d'une manière récursive en utilisant ces formules. En commençant par le plan de masse dont les coefficients de réflexion sont :

$$L^{e,h}, \Gamma^{e,h} = -1 \quad (21)$$

Dans le cas d'une structure ouverte les coefficients de la dernière couche sont :

$$L^{e,h}, \Gamma^{e,h} = 0 \quad (21)$$

A la surface du ruban, les conditions aux limites peuvent être écrites sous la forme suivante, où les ondes incidentes sont exprimées en fonction des ondes réfléchies et de la densité du courant.

Les ondes TM

$$(Z_{oi}^e + Z_{oj}^e)b_i^e(d_{ij}) = (Z_{oj}^e - Z_{oi}^e)a_i^e(d_{ij}) + 2Z_{oj}^eb_j^e(d_{ij}) + jZ_{oj}^eJ_v \quad (22a)$$

$$(Z_{oi}^e + Z_{oj}^e)a_j^e(d_{ij}) = 2Z_{oi}^ea_i^e(d_{ij}) + (Z_{oi}^e - Z_{oj}^e)b_j^e(d_{ij}) + jZ_{oi}^eJ_v \quad (22b)$$

On peut même exprimer le courant  $J_v$  en fonctions des ondes, et il est donné par la relation suivante :

$$J_v = j(1 - \Gamma_i^e(d_{ij}))a_i^e(d_{ij}) + j(1 - L_j^e(d_{ij}))b_j^e(d_{ij}) \quad (23)$$

En remplaçant cette dernière dans les conditions aux limites, on obtient l'équation de la propagation TM à la surface du ruban y compris la contribution de la source du courant.

$$\begin{pmatrix} b_i^e(d_{ij}) \\ a_j^e(d_{ij}) \end{pmatrix} = (S^e) \cdot \begin{pmatrix} a_i^e(d_{ij}) \\ b_j^e(d_{ij}) \end{pmatrix} \quad (24)$$

Où :

$$S^e = \frac{1}{Z_{oi}^e + Z_{oj}^e} \cdot \begin{pmatrix} Z_{oj}^e\Gamma_i^e(d_{ij}) - Z_{oi}^e & Z_{oj}^e(1 + L_j^e(d_{ij})) \\ Z_{oi}^e(1 + \Gamma_i^e(d_{ij})) & Z_{oi}^eL_j^e(d_{ij}) - Z_{oj}^e \end{pmatrix} \quad (25)$$

En procédant de la même manière, on obtient les formules concernant le mode TE :

$$(Y_{oi}^h + Y_{oj}^h)b_i^h(d_{ij}) = (Y_{oi}^h - Y_{oj}^h)a_i^h(d_{ij}) + 2Y_{oj}^hb_j^h(d_{ij}) - jJ_u \quad (26a)$$

$$(Y_{oi}^h + Y_{oj}^h)a_j^h(d_{ij}) = 2Y_{oi}^ha_i^h(d_{ij}) + (Y_{oj}^h - Y_{oi}^h)b_j^h(d_{ij}) - jJ_u \quad (26b)$$

$$J_u = jY_{oi}^h(\Gamma_i^h(d_{ij}) - 1)a_i^h(d_{ij}) + jY_{oj}^h(L_j^h(d_{ij}) - 1)b_j^h(d_{ij}) \quad (27)$$

L'équation générale de la propagation du mode TE y compris les effets de la source à la surface du ruban est donnée par :

$$\begin{pmatrix} b_i^h(d_{ij}) \\ a_j^h(d_{ij}) \end{pmatrix} = (S^h) \cdot \begin{pmatrix} a_i^h(d_{ij}) \\ b_j^h(d_{ij}) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Où

$$S^h = \frac{1}{Y_{oi}^h + Y_{oj}^h} \cdot \begin{pmatrix} Y_{oi}^e \Gamma_i^h(d_{ij}) - Y_{oj}^h & Y_{oj}^h (1 + L_j^h(d_{ij})) \\ Y_{oi}^h (1 + \Gamma_i^h(d_{ij})) & Y_{oj}^h L_j^h(d_{ij}) - Y_{oi}^h \end{pmatrix} \quad (29)$$

En considérant l'interface du ruban comme un dispositif à deux ports, le principe de conservation d'énergie est donné par :

$$S^* S = I \quad (30)$$

Où \* dénote la matrice transposée conjuguée, et I c'est la matrice identité. En appliquant ce principe à chaque mode c'est-à-dire TE et TM, on obtient les résultats suivants :

Le mode TM

$$Z_{oi}^e (1 + \Gamma_i^e(d_{ij})) = Z_{oj}^e (1 + L_j^e(d_{ij})) \quad (31a)$$

$$a_i^e(d_{ij}) = b_j^e(d_{ij}) \quad (31b)$$

Le mode TE

$$Y_{oj}^h (1 + \Gamma_i^h(d_{ij})) = Y_{oi}^h (1 + L_j^h(d_{ij})) \quad (32a)$$

$$Y_{oi}^h b_j^h(d_{ij}) = Y_{oj}^h a_i^h(d_{ij}) \quad (32b)$$

En mettant à profit tous les résultats précédents pour exprimer les termes  $(a_i^e(d_{ij}), b_i^e(d_{ij}))$  et  $(a_i^h(d_{ij}), b_i^h(d_{ij}))$  en fonction seulement des densités du courant surfaciques, on réécrit les conditions aux limites sous la forme suivante :

$$Z_{zz} J_z + Z_{zx} J_x = 0 \quad (33a)$$

$$Z_{xz} J_z + Z_{xx} J_x = 0 \quad (33b)$$

Où

$$Z_{zz} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta^2 Z^e + \alpha^2 Z^h) \quad (34a)$$

$$Z_{zx} = Z_{xz} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (Z^e - Z^h) \quad (34b)$$

$$Z_{xx} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha^2 Z^e + \beta^2 Z^h) \quad (34c)$$

Avec

$$Z^e = [Z_{oi}^e (\Gamma_i^e(d_{ij}) + 1) + Z_{oj}^e (L_j^e(d_{ij}) + 1)]$$

$$\times [Y_{oi}^{h^2} (\Gamma_i^h(d_{ij}) - 1) + Y_{oj}^{h^2} (L_j^h(d_{ij}) - 1)]$$

$$Z^h = [Y_{oi}^h (\Gamma_i^h(d_{ij}) + 1) + Y_{oj}^h (L_j^h(d_{ij}) + 1)] \times [(\Gamma_i^e(d_{ij}) - 1) + (L_j^e(d_{ij}) - 1)]$$

(35a-b)

#### IV-4- Impédance de surface et conductivité complexe

Pour déterminer les composants de la fonction de Green qui prend en considération l'effet de supraconductivité du ruban, nous allons considérer une impédance de surface complexe  $Z_s$ . Cette dernière est déterminée à l'aide des équations de London [11] et le modèle des deux fluides de Gortet et Gasimir [6] :

$$\sigma = \sigma_n - \sigma_s \quad (36)$$

$$\sigma_n(\text{Réelle}) = \sigma_c \left( \frac{T}{T_c} \right)_s \quad (37)$$

$$\sigma_s(\text{imaginaire}) = j(1/\omega\mu_0\lambda^2(0))(1 - (T/T_c)^4) \quad (38)$$

$$\sigma = \sigma_c \left( \frac{T}{T_c} \right) - j(1/\omega\mu_0\lambda^2(0))(1 - (T/T_c)^4) \quad (39)$$

$\sigma_c$  : La conductivité normale a température  $T_c$

T : température du supraconducteur

$T_c$  : température critique du supraconducteur

$\lambda_0$  : Profondeur de pénétration (longueur de LONDON)

L'impédance complexe de surface du ruban  $Z_s$  est donnée par :

$$Z_s = \omega\mu / 2\sigma^{1/2} \quad (40)$$

#### IV-5- Modification dans les éléments de la matrice

L'impédance complexe reliant le champ électrique avec la densité du courant dans le ruban ( $y=h/2$ ) est donnée par :

$$\vec{a}_y(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s = -\left(\frac{1}{Z_s}\right)\vec{a}_y(\vec{a}_y * \vec{E}_1) \quad (41)$$

$$\vec{a}_y(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (42)$$

L'équation intégrale du champ électrique qui impose les conditions aux limites par l'équation (28) peut être discrétisée sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{zzm} & \tilde{Z}_{zx} \\ \tilde{Z}_{xz} & \tilde{Z}_{xzm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{z1} \\ \tilde{E}_{z2} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Avec

$$Z_{zzm} = Z_{zz} - Z_s \quad \text{et} \quad Z_{xzm} = Z_{xx} - Z_s$$

## IV-6- Résultats et discussions

La solution numérique du système (43) est obtenue en utilisant la technique de Galerkin dans le domaine spectral où les densités du courant sont exprimées sous forme de fonctions de base [8] satisfaisantes à leurs distributions sur le ruban. Ensuite le problème est traité par des techniques numériques : la méthode de Muler pour chercher les zéros, et l'intégrale de Gauss pour calculer l'intégrale.

Pour une fréquence fixe, nous résolvons le système d'équation (43) pour la constante de propagation  $\beta$  après avoir défini les fonctions d'essai qui nous permettent d'aboutir à des résultats appréciables.

La résolution numérique du problème est de chercher la racine (valeur de  $\beta$ ) de l'équation caractéristique du déterminant du système (43).

$$\epsilon_{eff} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{k}\right)^2 \quad (44)$$

$\lambda_g$  la longueur du guide.

$\epsilon_{eff}$  La constante diélectrique effective

Pour atteindre cet objectif, on doit déterminer la constante de propagation

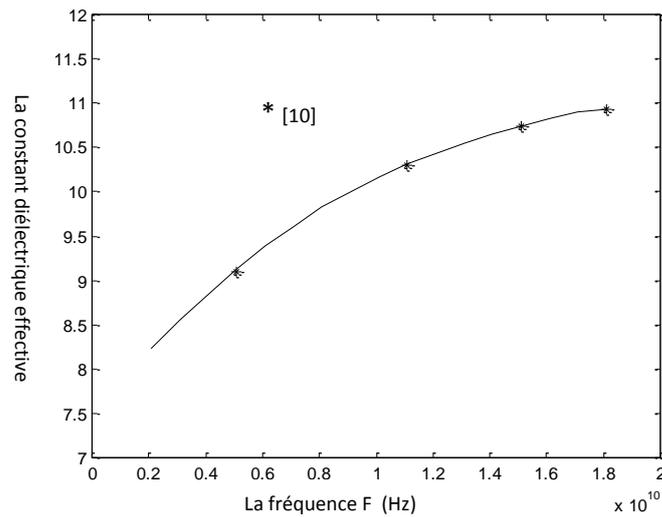
suivant la procédure décrite précédemment. Dans ce qui suit, on va faire une étude pour diverses valeurs du nombre de fonctions de base, les résultats de cette application se résume dans le tableau suivant :

| Nombre des   | Les constantes diélectriques effectives | Les constantes de propagation<br>Lors de cette étude |
|--------------|---|--|
|              | <b>8.76098902001465</b>                 | 248.150758305947                                     |
|              | <b>8.77413709197243</b>                 | 248.336894871660                                     |
| <b>nv=41</b> | <b>8.78383685868629</b>                 | 248.474124581956                                     |
|              | <b>8.79027377718038</b>                 | 248.565150565463                                     |

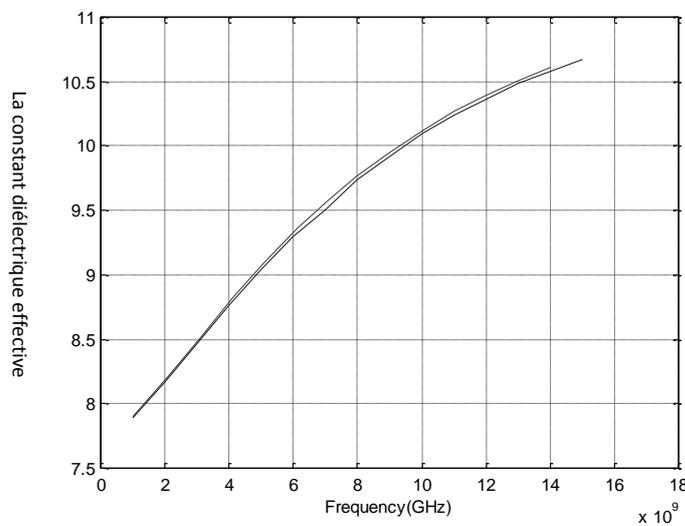
**Tableau IV-2.** Les variations de la constante diélectrique effective en  
Fonction nombre de fonctions de base pour fréquence f=4GHz

Les résultats du tableau .1 montrent clairement que La constante diélectrique effective converge bien avec les résultats de Itoh quand le nombre de fonctions de base augmente.

Pour mieux valider le programme qu'on vient d'élaborer, on l'a testé pour différentes valeurs de la fréquence. En comparant ces résultats avec ceux apparus dans la publication de Itoh [10], on voit qu'ils sont en parfait accord, disons qu'ils sont les mêmes pour certaines valeurs de la fréquence comme on le constate dans la figure ci-dessous.



**Fig. IV-4. Les variations de la constante diélectrique effective en fonction de la fréquence**



**Fig. IV -5. Les variations de la constante diélectrique effective en fonction de fréquence (avec la fonction Raised Cosine function )**

$$\epsilon_r = 11.7, \mu_r = 1, w = 3.17mm, d = 3.04mm$$

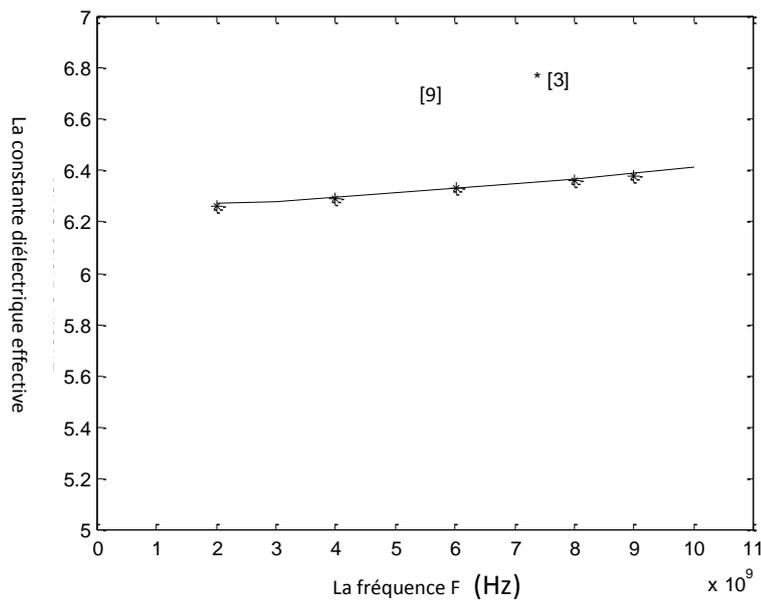
Ce programme est également valable à d'autres structures, il suffit de faire des changements adéquats, tel que les dyades de Green, où il faut trouver les impédances  $Z_{zzm} = Z_{zz} - Z_s$  et  $Z_{xxm} = Z_{xx} - Z_s$  à partir desquelles on déduit ces dyades.

La structure sur laquelle nous nous sommes basés est la suivante :

$$\varepsilon_r = 10, \mu_r = 1, w = 160\mu m, d = 500\mu m, t = 0.3\mu m$$

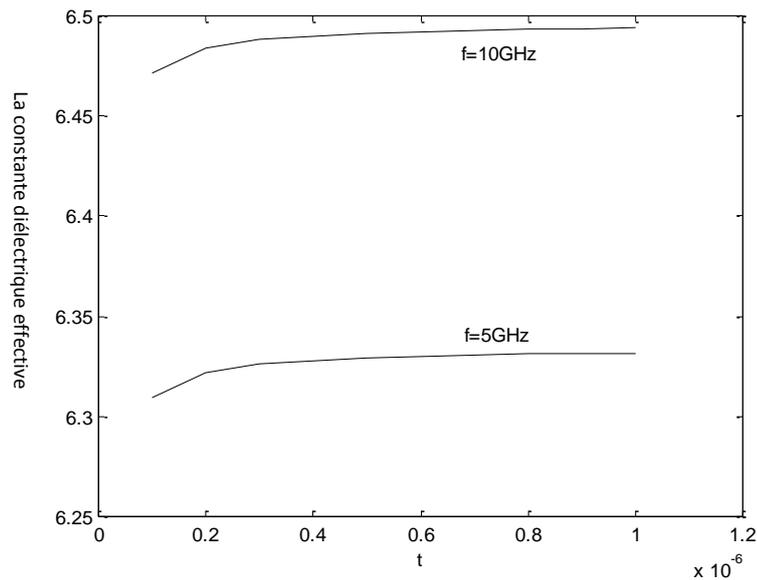
$$\sigma_c = 1.0, \lambda_0 = 0.2, T_c = 93.0, T^\circ k = 77^\circ k$$

Sur la figure, nous présentons les variations de la constante diélectrique effective en fonction de la fréquence qui sont en bon accord avec celles obtenues en [9]



**Fig. IV -6. Les variations de la constante diélectrique effective en fonction de la fréquence d'une ligne supraconductrice**

Pou mettre en évidence l'influence de l'épaisseur du ruban métallique, nous avons tracé la variation de la constante diélectrique effective en fonction de l'épaisseur. La structure sur laquelle nous nous sommes basé est la suivante :



**Fig. IV -7. Les variations de la constante diélectrique effective d'une ligne supraconductrice**

$$\varepsilon_r = 10, \mu_r = 1, w = 160\mu m, d = 500\mu m$$

$$\sigma_c = 1.0, \lambda_0 = 0.2, T_c = 93.0, T^{\circ}k = 77^{\circ}k$$

#### IV-7- Conclusion

Une analyse alternative basée sur la Méthode Spectrale avec Facteurs de Réflexion est exploitée pour le développement de fonctions de Green pour la ligne microstrip donnant lieu à des produits scalaires exempts de pôles. Des conditions aux limites supplémentaires et spécifiques au matériau supraconducteur font l'originalité et la principale contribution de ce travail, cependant ceci introduit une modification des éléments diagonaux du tenseur de Green dans le domaine spectral. Le ruban supraconducteur est traité comme une plaque à impédance de surface.

## Références du chapitre IV

- [1] Magali MENARDO «Contribution à l'analyse électromagnétisme de la surtension dans Les technologies planaires intégrées et supraconductrices» Thèse de doctorat, INP-Toulouse,1999.
- [2] Newhouse, V. L. Applied Superconductivity. New York, John Wiley and Sons, 1964
- [3] Ruggiero, Steve T. et David A. Rudman. Superconducting Devices. San Diego,Academic Press, 1990, 396 p.
- [4] Abella Bouaaddi « Ancrage et dynamique des vortex dans les couches minces de supraconducteurs à haute température critique d' $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  » Thèse présentée a la faculté des sciences d'Agadir pour l'obtention du titre de docteur. Université IBN ZOHR, AGADIR, Mars 2010.
- [5] PH. Mangin supraconductivité Ecole des Mines de Nancy/Séminaire IFR matériaux 23-24 juin 2003.
- [6] Proceedings of the thirteenth national, Radio science conference march 19-21, 1996, Cairo, Egypt.
- [7] M. T. Benhabiles and M. L. Riabi,, “A Reflection Factors Oriented Spectral Domain Approach For Polefree Integrals and its Application to Multilayered Microstrip Line,” Trans IEEE Microwave And Wireless Components letters. Vol. 14, No. 6, June 2004.
- [8] T. Itoh , “Spectral domain immittance approach for dispersion characteristics of generalized printed transmission lines,” *IEEE. Trans. Microwave Theory Tech*, vol. MTT-28, pp.733-736, July1980.
- [9] L. H. Lee, S. M. Ali, and W.G Lyons, “Full wave characterization of high-Tc superconducting transmission lines,” *IEEE. Trans. Appl. Superconduct*, vol-2, pp.49-57, June1992.
- [10] T. Itoh , R.Mitra “Spectral Domain Approach for Calculating the Dispersion Characteristics of Microstrip lines,” *IEEE. Trans. Microwave Theory Tech*, July1973.
- [11] D. TIXADOR. Les supraconducteurs. Hermes, novembre 1995

## *Conclusion générale*

## *Conclusion générale*

Il est utile de rappeler brièvement qu'un effort considérable a été consacré à la prospection de nouvelles fonctions de base à décroissance rapide, avec dispositions particulières pour le traitement de cas de figure délicats et éventuelles pathologies mathématiques pouvant surgir dans le cours du développement de la méthode, et recours à une évaluation numérique de la transformée de Fourier le cas échéant.

Il est donc moins imputable à une coïncidence qu'à une preuve de cohérence et de profondeur de vision dans la conduite de cette thèse, de constater que non seulement le travail accompli, mais surtout son niveau de réussite, a porté sur le développement ainsi que l'homologation d'un ensemble de fonctions de base à spectre fortement décroissant, qui ont apporté une amélioration qualitative tangible dans la méthode spectrale (SDA) appliquée aux lignes planaires ouvertes.

Il est à noter que l'ensemble de ces fonctions de base est inédit, et que leur conformité aux prescriptions techniques de la SDA et de la procédure de Galerkin a été démontrée sur les deux plans, théorique et numérique.

D'autre part, il a été observé que nos résultats offrent des garanties sérieuses et quantifiables de robustesse et de stabilité d'implémentation.

Parallèlement à cette réalisation, une attention particulière a été portée sur la progression de travaux répondant à la même nécessité, afin de pouvoir établir une transition bien préparée pour l'évolution future de cet axe de recherche, et permettre une suite techniquement exploitable pour la présente thèse.

# *Annexes*

## Annexe A

## Intégration par la méthode de Gauss-Legendre

Les intégrales de Gauss reposent sur un raisonnement différent de celui qui est à la base de nombreuses méthodes qui visent à calculer l'intégrale. D'une certaine façon, on cherche à optimiser les schémas d'intégration numérique en choisissant plus judicieusement les points où est évaluée la fonction  $f(x)$ . Nous allons dans un premier temps nous restreindre à l'intervalle  $[-1, 1]$ , où nous ferons tout le développement. Pour un intervalle quelconque, il suffira d'effectuer *le changement de variable* :

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{(b-a)}{2} dt \quad (1)$$

Qui envoie l'intervalle  $[-1, 1]$  sur un intervalle quelconque  $[a, b]$ . En effet, le changement de variable (1) permet d'écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt \quad (2a)$$

Où :

$$g(t) = f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) \quad (2b)$$

Il est donc toujours possible de revenir à l'intervalle  $[-1, 1]$ . de manière générale, on cherche des expressions de la forme :

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \sum_{i=1}^n \omega_i g(t_i) \quad (3)$$

Dont le degré de précision soit le plus élevé possible. L'expression (3) est appelée *quadrature de Gauss à n points*. Les  $t_i$  sont appelés les points d'intégration, tandis que les coefficients  $\omega_i$  sont les poids d'intégration. On choisit les points et les poids d'intégration de façon à ce que la quadrature (3) soit exacte dans le cas des polynômes de degré le plus élevé possible. Puisque tout polynôme de degré n peut s'écrire :

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^n c_n t^n \quad (4)$$

Il suffit que la relation (3) soit exacte successivement pour  $g(t) = t^k$ , pour  $k=0, 1, 2, \dots, n$ . On gagne à accroître le plus possible l'exposant k. Le degré maximal atteint dépend du nombre de points n. Puisqu'il y a 2n coefficients à déterminer dans l'équation (3), il est raisonnable de penser que l'on peut atteindre le degré (2n-1). La valeur de k varie donc entre 0 et 2n-1.

Sans entrer dans les détails, il est possible de déterminer des quadratures de Gauss avec un grand nombre de points. Ces quadratures sont particulièrement efficaces et sont utilisées, par exemple, dans la méthode des éléments finis et aussi dans la méthode spectrale (SDA).

On détermine les 2n coefficients  $\omega_i$  et  $t_i$  en résolvant un système non linéaire de 2n équations que l'on obtient en prenant  $g(t) = t^k$  pour  $k= 0, 1, 2, \dots, (2n - 1)$ . On peut également démontrer que les points d'intégration de Gauss sont les racines des polynômes de Legendre définis par :

$$L_0(x) = 1 \text{ et } L_1(x) = x \quad (5a)$$

Et par la formule de récurrence :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad (5b)$$

La quadrature de Gauss à  $n$  points d'intégration (3) est exacte dans le cas des polynômes de degré  $(2n-1)$ . Le degré de précision de cette quadrature est donc  $(2n-1)$ . Le terme d'erreur est donné par :

$$\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi) \text{ où } \xi \in [-1, 1] \quad (6)$$

## Annexe B

## La méthode de Muller :

Cette méthode est semblable à la méthode de la sécantes mais avec trois point, on commence par construire une parabole passant par trois points de la courbe  $M^{(0)}(x^{(0)}, f(x^{(0)})), M^{(1)}(x^{(1)}, f(x^{(1)})), et M^{(2)}(x^{(2)}, f(x^{(2)}))$  préalablement choisis et l'on cherche l'intersection de la parabole avec l'axe horizontal. Ceci donne un nouveau point  $M^{(3)}(x^{(3)}, f(x^{(3)}))$ . On recommence le processus avec  $M^{(1)}, M^{(2)} et M^{(3)}$  jusqu'à convergence. Le schéma faisant passer du triplet  $(M^{(n-2)}, M^{(n-1)}, M^{(n)})$  au triplet suivant  $(M^{(n-1)}, M^{(n)}, M^{(n+1)})$  est :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{2f(x^{(n)})}{\beta^2 \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha f(x^{(n)})}} \quad (1)$$

Où

$$\alpha = \frac{f(x^{(n-2)}) - f(x^{(n)})}{(x^{(n-2)} - x^{(n)})(x^{(n-2)} - x^{(n-1)})} - \frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})}{(x^{(n-1)} - x^{(n)})(x^{(n-2)} - x^{(n-1)})} \quad (2)$$

et

$$\beta = \frac{[f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})](x^{(n)} - x^{(n-2)})^2}{(x^{(n-1)} - x^{(n)})(x^{(n-2)} - x^{(n)})(x^{(n-2)} - x^{(n-1)})} - \frac{[f(x^{(n-2)}) - f(x^{(n)})](x^{(n-1)} - x^{(n-2)})^2}{(x^{(n-1)} - x^{(n)})(x^{(n-2)} - x^{(n)})(x^{(n-2)} - x^{(n-1)})} \quad (3)$$

Où il conviendra de choisir le signe correspondant à la solution la plus proche de la racine cherchée.

# *Résumés*

## ***Résumé :***

Le Thème de cette Thèse de Doctorat s'intègre dans les activités naturelles du Laboratoire Electromagnétisme et Télécommunications, LET-UMC. Il consiste à aborder sur la base d'une expérience de recherche en Modélisation des Structures Passives Microondes cumulée sur une période consistante un thème pertinent qui fait l'objet d'une intense activité scientifique sur le plan international. Diverses méthodes de modélisation électromagnétique des circuits en ondes millimétriques et micro-ondes ont été mises au point, dont le but est l'obtention d'un modèle électromagnétique plus précis qui permet de gagner non seulement en temps de calcul mais également en précision, éliminant ainsi d'éventuels réglages post fabrication très coûteux. Pour des lignes de transmission planaires, simple couche ou multicouches supraconductrice, la méthode approuvée et utilisée est la méthode spectrale, celle-ci est employée suivant un choix de fonctions de base qui satisfait les conditions de singularité sur le bord des conducteurs, à signaler par ailleurs que ce choix est un facteur déterminant dans le processus de convergence.

Dans le but de réaliser un compromis entre la précision et le temps de calcul et en vue de caractériser les courants, longitudinal et transversal, nous avons proposé des nouvelles fonctions d'essai à décroissance rapide.

## **Mots clés :**

Fonctions d'essai à décroissance rapide, la méthode spectrale, ligne micro-ruban.

## **Abstract:**

Various methods of electromagnetic modeling of the circuits in millimeters waves and microwaves were developed, their goal is to obtain a more precise electromagnetic model, which makes it possible to gain not only in computing times but also in precision.

For transmission lines planar, simple layer or multi-layer of dielectric, the method approved and used is the spectral method, this method is employed according to a choice of basic functions, which satisfies the conditions of singularity on the edge of the conductor, and this choice is a key factor in the process of convergence.

In order to reach a compromise between the precision and the time computing and characterize the currents, longitudinal and transverse, we proposed a new **Basis** Functions with Strongly Decaying Properties

## **Keywords :**

Galerkin Procedure, Microstrip Line, Spectral Domain Approach, Basis Functions with Strongly Decaying Properties.

## ملخص

عدة أساليب وضعت بهدف الحصول على أدق نموذج كهرومغناطيسي للدوائر المليمترية للموجات الطويلة والموجات الدقيقة والذي بدوره سيمكننا من الحصول ليس فقط على وقت حسابي قصير ولكن أيضا على نتائج عالية الدقة.

الطريقة المعتمدة والمستخدمة هي الطريقة الطيفية والتي تعتمد على اختيار الدوال الأساسية التي تستوفي الشروط الخاصة على حافة الناقل. مع العلم أن هذا الاختيار هو العامل المحدد في عملية التقارب وبهدف التوفيق بين الدقة والوقت الحسابي، ارتأينا أن نستعمل الدوال الأساسية ذات تناقص طيفي سريع

**مفتاح الكلمات:** الطريقة الطيفية, الموجات الدقيقة, الدوال الأساسية, تناقص طيفي سريع