
UNIVERSITÉ DE CONSTANTINE 1
FACULTÉ DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT D'ÉLECTROTECHNIQUE

Année 2016

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Contribution à l'étude du CND par Courants de Foucault de matériaux hétérogènes faiblement conducteurs à base d'éléments finis

THÈSE DE DOCTORAT
Discipline : Génie Électrique
Spécialité : Électrotechnique

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Mohamed KHEBBAB

le 03 nov 2016 à Constantine, devant le jury ci-dessous

Président	: Aissa BOUZID, Professeur	Université de Constantine 1
Rapporteurs	: Yves DU TERRAIL COUVAT, Ing de recherche-HDR Hassane MOHELLEBI, Professeur	Université Grenoble Alpes Université de Tizi-Ouzou
Examineurs	: Mouloud FELIACHI, Professeur des universités Mohamed El-Hadi LATRECHE, Professeur Yann LE BIHAN, Professeur des universités	Université de Nantes Université de Constantine 1 Université Paris-Sud

Directeur de thèse : Mouloud FELIACHI

Co-directeur de thèse : Mohamed El-Hadi LATRECHE

Laboratoire : LABORATOIRE DE ELECTROTECHNIQUE DE CONSTANTINE

Résumé

Le travail de cette thèse consiste en l'investigation de techniques de caractérisation et de contrôle électromagnétique de pièces en matériaux composites, en particulier les composites unidirectionnels à fibres de carbone (CFRP : Carbon Fibers Reinforced Polymer). Deux modèles sont alors développés. Le premier modèle qui est destiné à la caractérisation de la conductivité électrique transverse du CFRP est basé sur la percolation par réseau de résistances. Les grandeurs physiques de ce réseau sont établies à partir d'approches stochastiques (chaines de Markov). Outre la prédiction de la conductivité électrique transverse du composite, le modèle permet d'appréhender les principaux paramètres qui influencent la conductivité. Le deuxième modèle traite du contrôle non destructif par courants de Foucault de ces matériaux en adoptant une approche de résolutions parallèle des problèmes micro et macro par la méthode dite d'éléments finis hétérogènes multi échelles (FE-HMM). Ce modèle est relativement plus précis que l'approche classique qui se base sur les techniques d'homogénéisation, ce qui permet notamment de caractériser des défauts microscopiques.

Mots-clés : Conductivité électrique transverse, Percolation, CFRP, chaînes de Markov, Courants de Foucault, Contrôle non destructif (CND), Méthode éléments finis hétérogène multi-échelles (FE HMM).

Abstract

The work of this thesis consists in the investigation of characterization techniques and electromagnetic testing of composite materials, particularly the unidirectional CFRP ones (Carbon Fibers Reinforced Polymer). Two models are then developed. The first model that is intended for the characterization of the transverse electric conductivity of CFRP is based on percolation through resistor network. The physical parameters of the network make use of stochastic approaches (Markov chains). Besides predicting the transverse electrical conductivity of the material, the model allows us to understand the main parameters that influence the conductivity. The second model deals with the eddy current non-destructive testing of these materials by adopting an approach of parallel resolutions of micro and macro problems using finite element heterogeneous multiscale method FE-HMM). This model is relatively more accurate than the classical approach based on the homogenization techniques, and notably allows to characterize microscopic defects.

Keywords: Transverse electrical conductivity, Percolation, CFRP, Markov chains, Eddy current, Non destructive testing (NDT), Finite elements Heterogeneous multiscale method (FE HMM).

Remerciements

Le présent travail a été mené dans le cadre d'une cotutelle de thèse entre l'université de Nantes et l'université de Constantine 1. Ce travail a été réalisé conjointement entre l'équipe Modélisation des Dispositifs Electromagnétiques (MDE) de l'Institut de Recherche en Energie Electrique de Nantes Atlantique (IREENA) à Saint-Nazaire et Le Laboratoire d'Electrotechnique de Constantine (LEC).

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mes deux directeurs de thèse : Monsieur **Mouloud FELIACHI**, Professeur à l'Université de Nantes, pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe MDE dans le cadre d'une bourse PNE. Je lui resterai toujours reconnaissant pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués. Sa patience et la confiance qu'il m'a accordées m'ont été très utiles pour mener à bien ce travail. L'aspect scientifique et l'expertise qu'il m'a apportés, n'ont d'égal que ses hautes qualités humaines que je peux résumer en un mot "générosité" dans tout ce que ce mot peut comporter de sens. Je ne pourrais jamais le remercier assez, sa famille a été une véritable seconde famille pour moi et les miens durant notre séjour à Saint-Nazaire.

et Monsieur **Mohamed El-Hadi LATRECHE**, Professeur à l'Université de Constantine 1, qui n'a cessé de m'apporter son aide et ses encouragements dès le commencement de cette thèse et même avant, m'ouvrant toujours les portes de son bureau pour me donner de son temps et m'apporter son expertise et ses conseils, ce qui m'ont permis de m'améliorer et qui me guider le long de ma carrière.

Un grand merci à M. **Aissa BOUZID**, professeur à l'université de Constantine 1, qui m'a fait l'honneur de présider cette soutenance.

Mes vifs remerciements vont à **M. Yves Duterrail-Couvat**, ingénieur de recherche-HDR au laboratoire SIMAP, Grenoble IMP, et **M. Yann LE BIHAN**, Professeur à l'université de Paris Sud, qui ont contribué grandement au déroulement de cette thèse en assurant son suivi, et en acceptant de faire le voyage pour m'honorer de leur présence en tant que rapporteur et examinateur, respectivement.

Un grand merci aussi à M. **Hassane MOHELLBI**, Professeur à l'université de Tizi-Ouzou, pour avoir accepté de juger mon travail comme rapporteur au sein de ce jury.

Je ne voudrai pas oublier de remercier le **Ministère de l'enseignement supérieur Algérien** pour m'avoir accordé cette bourse sans laquelle ce travail n'aurait pas pu voir le jour.

Je tiens à adresser un remerciement chaleureux aux collègues du laboratoire qui ont contribué à leur manière à rendre mon séjour à Saint-Nazaire agréable ; je pense notamment à **Ahmed, Fiacre, Seddik, Nassim, Yacine** et tous ceux avec lesquels de réels liens d'amitié se sont créés.

Je voudrai dire un merci particulier à ma **mère** parce que tous les remerciements du monde ne pourront lui rendre grâce, à mes deux chères **sœurs** et mon **frère** pour leur constante présence, à ma **femme** pour ses encouragements et mes très chères filles **Lina** et **Nouha** pour leur contribution très spéciale.

Enfin je termine mes remerciements en ayant une pensée pour mon père qui je crois aurait été fier de voir un tel aboutissement.

Sommaire

Liste des figures	vi
Introduction générale	viii
1 L'État de l'art	1
2 Caractérisation de la conductivité transversale du CFRP.....	22
3 Rappel sur l'électromagnétisme et les techniques de résolution des problèmes multi-échelles	47
4 Résolution par la méthode FE-HMM des problème de CND-CF	67
Conclusions et Perspectives	81
Bibliographie.....	83

Table des matières

Liste des figures	vi
Introduction générale	viii
1 L'État de l'art	1
1.1 Introduction	3
1.2 Procédure de fabrication d'un composites à fibres	4
1.3 Différentes configurations de composites à fibres de carbone	6
1.3.1 Les Monocouches	6
1.3.2 Les composites Stratifiés ou Multicouches	7
1.3.3 Composites en sandwich	7
1.4 Différents types de défauts affectant les composites à fibres de carbone	7
1.4.1 Classement par grandeurs caractéristiques du défaut	8
1.4.2 Classement durant leurs phases de vie	8
1.5 Techniques de contrôle non destructif (CND) sur les matériaux composites	9
1.5.1 Ressuage	10
1.5.2 Méthodes ultrasonore	10
1.5.3 Shearographie	11
1.5.4 Emission acoustique (EA)	11
1.5.5 Thermographie infrarouge (IR)	12
1.5.6 Radiographie par rayon X	13
1.5.7 Tomographie	14
1.6 Contrôle par courant de Foucault :	15
1.6.1 Détection par changement d'impédance	15
1.6.2 Plan d'impédance complexe	16
1.6.3 Effet de peau	17
1.6.4 Différents types de capteurs	18
1.7 Problématique de modélisation du CND-CF sur les CFRP	19
1.7.1 Anisotropie	19
1.7.2 Hétérogénéité	19
1.7.3 Problème Multi échelles	19
1.7.4 Fréquence d'alimentation	20
1.8 Orientation données à la thèse	20
1.9 Conclusion	21

2	Caractérisation de la conductivité transversale du CFRP	22
2.1	Introduction	23
2.2	Méthode expérimentale	23
2.2.1	Mesure avec contact	23
2.2.2	Mesure Sans contact «Contrôle par courants de Foucault»	26
2.3	Modèle mathématique	29
2.3.1	Méthodes basés sur la percolation	29
2.3.2	Percolation par réseaux de résistances	29
2.4	Notre approche	33
2.4.1	Point de vue physique	37
2.4.2	Point de vue probabiliste	38
2.4.3	Analogie entre les grandeurs physiques et les quantités probabilistes	39
2.4.4	Conductance effective	39
2.4.5	Chaine de Markov pour un problème de Dirichlet	40
2.5	Implémentation de résultats de simulation	42
2.6	Conclusion	45
3	Rappel sur l'électromagnétisme et les techniques de résolution des problèmes multi-échelles	47
3.1	Introduction	49
3.2	Rappels sur l'électromagnétisme	49
3.2.1	Équations de maxwell	49
3.2.2	Relations constitutives	50
3.2.3	Complexe de DeRham	50
3.2.4	Les conditions d'interface et condition aux limites	52
3.2.5	Formulation en potentiel des équations de Maxwell	53
3.3	Formulation magnétodynamique utilisée pour le CND	54
3.3.1	Formulation en " \mathcal{T} "	55
3.3.2	Formulation en " \mathcal{A} "	55
3.4	Méthode de résolution pour les problèmes classiques	56
3.5	Approche pour résoudre les problème multi-échelle	58
3.5.1	Approche série "Homogénéisation"	58
3.5.2	Approche parallèle "Techniques multi-échelles"	63
3.6	Conclusion	65
4	Résolution par la méthode FE-HMM des problème de CND-CF	67
4.1	Introduction	68
4.2	Méthode d'élément finis Multi échelles	70
4.2.1	Principe	70
4.2.2	Formulation du problème	70
4.2.3	Résolution sur le domaine macro	71
4.2.4	Résolution sur le domaine micro	72
4.2.5	Reconstitution de la solution	73

4.3	Implémentation	73
4.3.1	Calcul des entrées des matrices : rigidité, masse et source	75
4.4	Résultats	76
4.4.1	Calcul de l'impédance	77
4.4.2	Caractérisation du taux de remplissage	77
4.4.3	Contrôle par Courant de Foucault	79
4.5	Conclusion	80
	Conclusions et Perspectives	81
	Bibliographie	83
	Bibliographie	88

Liste des figures

1.1	Principaux éléments d'un composite	3
1.2	Procédé de fabrication des fibres de carbone	5
1.3	Différentes dispositions des fibres	6
1.4	Architecture de composite	7
1.5	Principaux défauts pouvant affecter un CFRP	9
1.6	Principe de contrôle par ultrason	11
1.7	Principe de contrôle par émission acoustique	12
1.8	Principe de contrôle par thermographie	13
1.9	Principe du contrôle par rayon X	14
1.10	Principe de la tomographie	14
1.11	Principe de contrôle par courant de Foucault	15
1.12	Influence des différents paramètres sur le plan d'impédance pour des fréquences variables	17
1.13	Illustration de l'aspect multi-échelle	20
2.1	Mesure de la résistivité longitudinale et transversale d'un CFRP unidirectionnel	24
2.2	Représentation avec une orientation des fibres du CFRP unidirectionnel et l'angle de référence Θ	25
2.3	Transverse Electromagnetic Cell radiale	26
2.4	Schéma électrique représentant TEM Cell radiale	26
2.5	Stratifié avec des rayures sur les axes transversal et longitudinal aux fibres.	27
2.6	Déplacement de la sonde sur les axes transversal et longitudinal aux fibres.	27
2.7	Réseau électrique en deux dimensions.	30
2.8	Dimension d'un pli.	31
2.9	Disposition des points de contacts.	32
2.10	Réseau de résistances en 3D.	32
2.11	Section transversale d'un CFRP avec des contacts plausibles entres fibres.	33
2.12	Vue réelle des fibres dans le sens longitudinale.	34
2.13	Génération de fibres de manière ordonnée pour une coupe 2D transversale.	35
2.14	Démarche suivie pour modéliser un composite unidirectionnel sous forme de réseau d'impédances.	35
2.15	Modélisation d'un composite unidirectionnel par un réseau d'impédances pour différents taux de remplissage.	36
2.16	Réseau de résistance en 3D sur lequel les chaines de Markov seront appliquées	36
2.17	Connexion entre différents nœuds voisins.	37

2.18	Organigramme de résolution d'un réseau de résistances	43
2.19	Variation de la conductivité électrique transverse en fonction du taux de remplissage	44
2.20	L'effet de la distance moyenne entre deux contact sur la conductivité électrique transverse d'un CFRP.	45
3.1	Structure de Rham.	52
3.2	Domaine d'étude.	55
3.3	Principe d'homogénéisation.	59
3.4	Synthèse de l'approche multi-échelles série.	63
3.5	Principe de Multi-scale FEM.	64
3.6	Synthèse des techniques utilisées pour modéliser les composites.	65
4.1	Illustration des maillage micro et macro de la méthode FE-HMM	72
4.2	Dispositif de CND-CF avec le maillage du domaine macro et des domaines échantillons	76
4.3	Réponse homogénéisée	77
4.4	Plan d'impédance complexe	78
4.5	Technique de la bande géométrique	79
4.6	Réponse d'un capteur au-dessus de la zone de défaut comportant différents taux de remplissage du domaine échantillon	80

Introduction

De tous temps l'homme a associé des matériaux avec des propriétés physiques et mécaniques différentes pour en avoir d'autres. Cela a commencé par le mélange de l'argile et de la paille pour construire des maisons, ensuite, utilisant la même philosophie pour élaborer des structures plus sophistiquées telles que les fuselages d'avions, ou les constituants de trains ou de voitures, ...etc., développant de nouveaux types de matériaux appelés communément les composites. Les composites sont par définition un mélange d'au moins deux matériaux qui se complètent l'un l'autre, disposés selon une certaine organisation géométrique qui permet d'avoir des propriétés meilleures que celles des constituants pris séparément. Ces matériaux composites ne cessent de prendre de l'ampleur. En particulier, dans les domaines où le besoin d'avoir des structures avec des performances mécaniques élevées qui s'allient à un faible poids, et ce dans le but de satisfaire des contraintes technico-économiques de plus en plus sévères dans des secteurs exigeants tels que l'aérospatial, le transport, le génie civil ou même l'industrie des sports et des loisirs. Trois grandes familles de composites fibreux peuvent être citées :

- Les fibres de verre
- Les fibres d'aramides (Kevlar)
- Les fibres de carbone

Si la fibre de verre a commencé à être utilisée dès les années 30, les matériaux à fibres de carbone n'ont vu le jour que vers les années 50 avec le début de la conquête spatiale. Depuis la production des composites n'a cessé d'augmenter. A titre d'exemple, on prévoit une production de 169 300 tonnes de composite à fibres de carbone à l'horizon 2020 [MW10]. Cette standardisation de l'utilisation de ce type de matériaux, ainsi que leur application dans des domaines où la sécurité est vitale, a poussé la communauté scientifique à rechercher des techniques de contrôle et de caractérisation de plus en plus efficaces, et ceci tout le long de leur cycle de vie, de la production au formage, et jusqu'à l'assemblage et l'exploitation. L'une des manières d'évaluer ou d'inspecter ce type de matériaux sera de passer par l'étude de sa conductivité électrique. Cette conductivité est tributaire de celle des fibres, ainsi que leurs dispositions à l'intérieur de la résine isolante. Cette disposition conditionnera les chemins empruntés par les courants électriques et par la même les techniques et les modèles qui seront utilisés pour connaître cette conductivité. De ce fait, il a été établi que la conductivité électrique des composites à polymère à renfort de fibres de carbone ou CFRP (Carbon Fiber Reinforced Polymere) est différente selon le sens où elle est mesurée. La conductivité le long de la fibre est nettement supérieure à celle qui est dans le sens transverse. Si l'évaluation de la conductivité longitudinale peut être faite par le biais de simples lois de mélange, la conductivité transverse est plus difficile à calculer, vu l'aspect aléatoire qui régit la disposition des contacts. La première partie de la thèse va traiter de ce problème et proposer un modèle originale pour caractériser un CFRP

unidirectionnel. Pour l'aspect contrôle, plusieurs techniques de contrôle non destructif (CND) peuvent être envisagées. Cependant, malgré leur efficacité, elles nécessitent un matériel de contrôle coûteux qui ne peut être utilisable qu'à grande échelle (rayon X, tomographie,...etc.) ; d'où la recherche de procédés moins onéreux. De récentes expériences ont démontré l'efficacité du CND par Courants de Foucault (CF) et sa capacité à détecter les défauts dans les matériaux composites avec un coût moindre, avec adaptation des équipements du CND-CF traditionnels. Malgré ces résultats encourageants, le CND-CF se heurte à des problèmes de modélisation dus essentiellement à l'hétérogénéité, la forte anisotropie ainsi qu'à la grande disparité entre les échelles des phases qui constituent ces composites. Si la résolution des modèles mathématiques qui décrivent le contrôle par Courants de Foucault, sur des matériaux classiques homogènes, se base essentiellement sur les méthodes de discrétisation classiques : différences finies, Volumes finis, éléments finis ...etc., ces méthodes exigent une discrétisation complète du domaine d'étude avec une taille d'éléments adaptés pour prendre en charge les variations des paramètres physiques (conductivité électrique) des différents sous-domaines. Ces méthodes trouvent leurs limites d'applications pour des matériaux avec des hétérogénéités se situant à des échelles différentes, comme c'est le cas des composites à fibres de carbone. Pour surmonter ce problème de modélisation, on s'est donné pour travail dans la deuxième partie de cette thèse, de faire une analyse multi échelles pour déterminer avec précision le comportement des composites lors d'un contrôle par Courants de Foucault, ceci en adoptant une approche basée sur un couplage instantané des échelles microscopique et macroscopique, ce qui conduit à un calcul numérique du champ électromagnétique plus précis. Notre apport est lié au développement de cette approche. Cette approche va définir, d'une part le comportement global du CND CF sur les composites, et d'autre part simuler différents défauts dans les pièces à tester tout en estimant les caractéristiques physiques (conductivité électrique) de notre matériau. L'ensemble de notre travail sera organisé comme suit :

- Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur les composites à fibres de carbone. Nous nous intéresserons à leurs caractéristiques et aux défauts qui peuvent les affecter. Nous présenterons les différentes techniques de contrôle en accordant une attention particulière au contrôle par courants de Foucault et aux problèmes qui peuvent se poser lors de la modélisation.
- Le deuxième chapitre sera consacré aux techniques de caractérisation de la conductivité électrique des composites à fibres de carbone. On fera un état de l'art des techniques expérimentales et celles qui se basent sur la théorie de la percolation pour caractériser cette conductivité. On terminera ce chapitre par le modèle proposé, et qui permet de déduire la conductivité transverse d'un CFRP unidirectionnel.
- Dans le troisième chapitre, on présentera un rappel des équations de Maxwell et leurs différentes formulations. On traitera des principales méthodes déjà utilisées lorsque les paramètres des équations aux dérivés partielles dépendent de plusieurs échelles. Ainsi on justifiera le choix de la méthode adoptée, et qui sera appliquée au contrôle par courants de Foucault.

- Le dernier chapitre sera consacré essentiellement au développement de la méthode hétérogène multi échelle (FE HMM), son implémentation pour un problème de CND-CF et la présentation des principaux résultats de simulation obtenus.

CHAPITRE 1

L' État de l'art

Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur les composites à fibres de carbone c'est à dire : leurs spécificités, les défauts qui peuvent les affecter ainsi que les différentes techniques pour les contrôler et les problèmes qui peuvent se poser lors de leur modélisation.

1.1	Introduction	3
1.2	Procédure de fabrication d'un composites à fibres	4
1.3	Différentes configurations de composites à fibres de carbone	6
1.3.1	Les Monocouches	6
1.3.2	Les composites Stratifiés ou Multicouches	7
1.3.3	Composites en sandwich	7
1.4	Différents types de défauts affectant les composites à fibres de carbone	7
1.4.1	Classement par grandeurs caractéristiques du défaut	8
1.4.2	Classement durant leurs phases de vie	8
1.5	Techniques de contrôle non destructif (CND) sur les matériaux composites	9
1.5.1	Ressuage	10
1.5.2	Méthodes ultrasonore	10
1.5.3	Shearographie	11
1.5.4	Emission acoustique (EA)	11
1.5.5	Thermographie infrarouge (IR)	12
1.5.6	Radiographie par rayon X	13
1.5.7	Tomographie	14
1.6	Contrôle par courant de Foucault :	15
1.6.1	Détection par changement d'impédance	15
1.6.2	Plan d'impédance complexe	16
1.6.3	Effet de peau	17
1.6.4	Différents types de capteurs	18
1.7	Problématique de modélisation du CND-CF sur les CFRP	19
1.7.1	Anisotropie	19
1.7.2	Hétérogénéité	19
1.7.3	Problème Multi échelles	19
1.7.4	Fréquence d'alimentation	20
1.8	Orientation données à la thèse	20
1.9	Conclusion	21

1.1 Introduction

Les récents progrès obtenus en matière de conception de structures sont dus en grande partie au développement et l'utilisation de nouveaux matériaux présentant des caractéristiques supérieures. Parmi ces nouveaux matériaux, les composites occupent une place importante. Par définition un matériau composite désigne un matériau solide et hétérogène, formé de plusieurs composants distincts. Leur association confère à l'ensemble des propriétés qu'aucun des composants considéré ne possède séparément [Jon75]. Il convient de rappeler que cette philosophie qui consiste à associer différents matériaux est ancienne, et que les développements que nous observons actuellement se démarquent par une capacité d'intégration de fibres de taille micrométrique, voire nanométrique, donnant lieu à des matériaux nouveaux, ouvrant des perspectives intéressantes pour de nombreux domaines. Malgré leur grande diversité, on peut voir qu'ils partagent tous la même technique d'association, à savoir , un renfort et un agent de liaison (interface) tel que présenté sur la figure 1.1

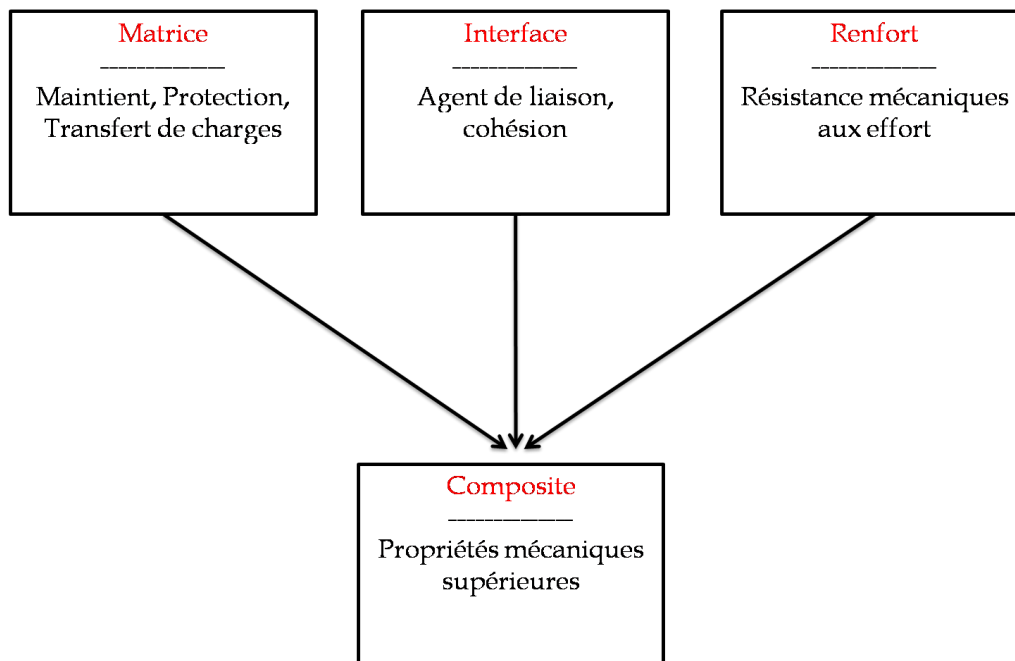


Figure 1.1 – Principaux éléments d'un composite

L'interface : appelée aussi *agent de liaison* est constituée généralement par des charges et des additifs sous forme d'éléments fragmentaires, poudres ou liquides qui permettent de rendre la matrice et le renfort compatibles entre eux pour former un matériau solidaire.

La matrice : elle désigne la matière solide qui entoure les renforts pour former une masse compacte. Son premier rôle est de maintenir l'ensemble dans une forme compacte et de conférer une configuration voulue au produit final. Elle sert également à les protéger

contre l'abrasion et les environnements agressifs et assurer le transfert de charges entre les fibres. Les solides formant la matrice peuvent être de nature :

- Organiques (polymère *) ;
- Métalliques ;
- Céramiques.

Les matrices qui nous intéressent sont celles qui sont électriquement isolantes telles les matrices organiques. Trois grandes catégories sont utilisées :

- Elastomère : c'est un polymère présentant des propriétés élastiques ;
- Thermodurcissable (TD) : Il s'agit d'une matière formée d'un réseau tridimensionnel de macromolécules. Cette structure peut être rigide ou souple ;
- thermoplastique (TP) : Il s'agit d'une matière formée de macromolécules linéaires capables de devenir mobiles entre elles lorsqu'on élève leur température.

Les renforts se présentent sous forme de grenaille ou de fibres (continues ou discontinues). Leur rôle est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. L'arrangement des fibres et leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure [Gor08]. Parmi ces renforts, ceux à fibres semblent donner des perspectives très prometteuses. Dans la recherche du meilleur renfort quatre grandes familles sont privilégiées :

- **Les fibres de verre** : elles sont les moins chères à fabriquer et par conséquent les plus utilisées ;
- **Les fibres de basalte** : elles possèdent de meilleures propriétés physico-mécaniques que la fibre de verre. Elles sont utilisées généralement là où la résistance au feu est requise ;
- **Les fibres d'aramides (Kevlar)** : ce sont des fibres synthétiques qui présentent de bonnes propriétés mécaniques (sauf à la compression). Elles se présentent comme un substitut de l'amiante ;
- **Les composites à fibres de carbone** : elles constituent l'objet principal de notre intérêt et seront présentées plus en détail dans la section qui suit.

1.2 Procédure de fabrication d'un composites à fibres

Les composites dont il est question sont généralement composés de résine isolante (thermodurcissable ou bien thermoplastique) dans laquelle on noie des fibres soit de carbone ou bien de graphite, donnant ce qu'on appelle des matériaux polymère à renforts de fibres de carbone (PRFC), en anglais Carbon Fibers Reinforced Polymere (CFRP). L'ajustabilité des paramètres mécaniques, thermiques et électriques ajoute un attrait supplémentaire à leurs utilisations. Ceci est rendu possible par l'ajustement des paramètres

*. Un polymère peut être défini comme un enchaînement d'unités structurales répétitives, l'unité de répétition dans le polymère étant le monomère (molécule composée principalement de carbone et d'hydrogène).

des constituants de base, à savoir la conductivité de la matrice ou le taux de remplissage du renfort. Le renfort, c'est à dire les fibres, est obtenu à partir de fibres organiques dites précurseurs (PAN : polyacrylonitrile) qu'on fait passer par une phase d'oxydation à l'air sous une température entre 200°C et 300°C, suivie d'une autre phase dite de carbonisation qui se fait à haute température (entre 1000°C et 1500°C) sous gaz inerte. A la fin, on obtient des fibres en carbone constituées de :

- 90-97% de carbone ;
- moins de 10% d'azote ;
- et environ 1% d'hydrogéné.

Les fibres de graphites sont obtenues par un traitement supplémentaire (2500-3000°C), pour avoir une pureté de carbone maximale de l'ordre de 99%. Les diamètres nominaux des fibres obtenues se situent entre 5 et 15 μm [LUY94]. Après obtention des fibres, un traitement consiste à déposer un agent de liaison. Ce dernier permet de diminuer le phénomène d'abrasion et facilite les manipulations ultérieures des fibres lors du tissage évitant ainsi la formation de charges électrostatiques. Cette procédure est représentée dans la Figure 1.2.

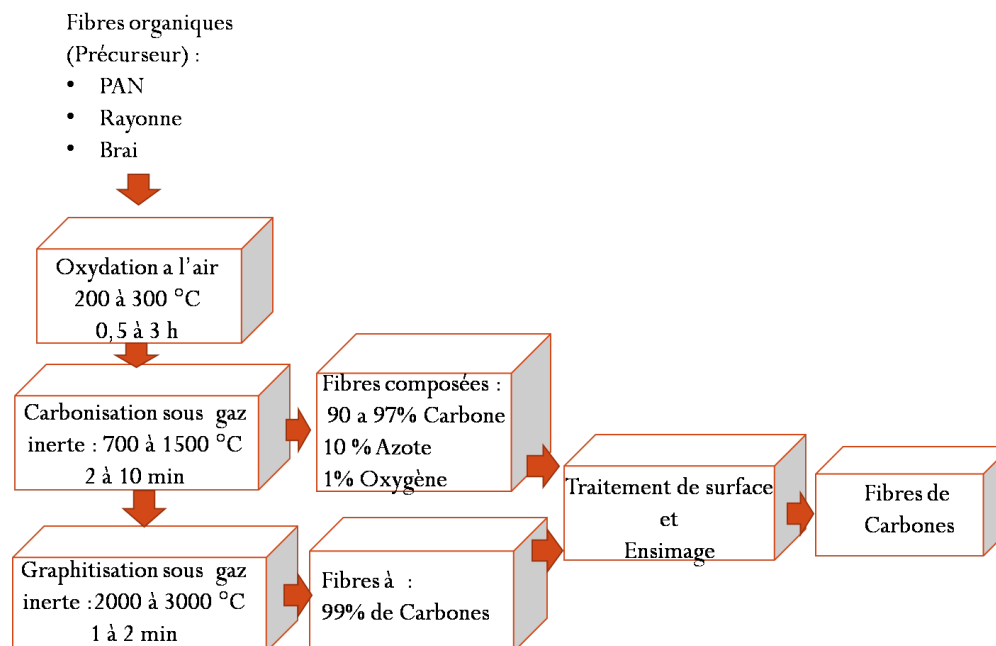


Figure 1.2 – Procédé de fabrication des fibres de carbone

1.3 Différentes configurations de composites à fibres de carbone

Les fibres qui composent le CFRP peuvent être courtes ou longues ; ce sont elles qui vont donner les caractéristiques mécaniques principales du matériau. Quant à la matrice isolante, son rôle est d'assurer la cohésion de l'ensemble Figure 1.3

- **Les fibres courtes** peuvent être disposées de manière aléatoire dans la matrice. Ceci leur donne la propriété de ne privilégier aucune direction de l'effort mécanique. Elles donnent une bonne résistance mécanique avec un faible coût de revient ;
- **Les fibres longues** : donnent aux structures qu'elles composent une propriété dite *orientée* dans le cas où elles sont disposées de manière unidirectionnelle, ou *non-orientées* lorsque les fibres sont tissées.

Ces structures unidirectionnelles ou tissées vont former ce qu'on appelle un pli, avec une épaisseur qui avoisine 0.2 mm. Empilés, ces derniers vont nous donner des stratifiés. Différentes architectures peuvent être obtenues :

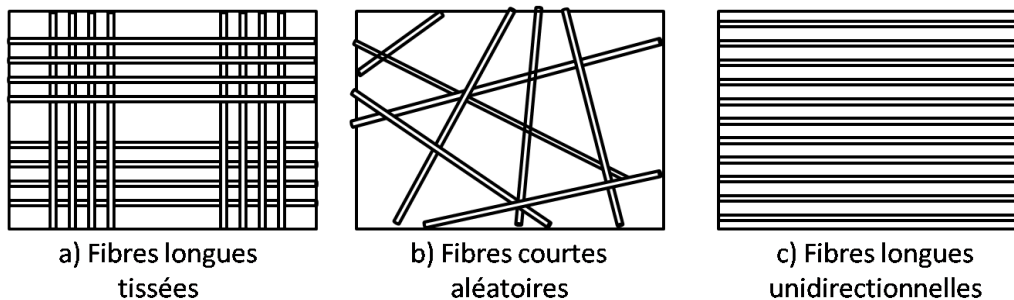


Figure 1.3 – Différentes dispositions des fibres

1.3.1 Les Monocouches

Ils sont constitués de plusieurs plis identiques de faible épaisseur. Selon la structure des fibres on peut distinguer :

- Plis à structure unidirectionnelle : les fibres ont toutes la même direction ;
- Plis à structure tissée : les fibres s'orientent selon deux directions perpendiculaires ;
- Plis à structure aléatoire ou encore appelés *mat* où les fibres n'ont aucune orientation préférentielle.

1.3.2 Les composites Stratifiés ou Multicouches

C'est un ensemble de couches empilées et orientées selon un drapage. Le drapage est défini comme l'orientation des couches selon un référentiel donné. Par exemple on peut avoir un drapage de 0° , 45° , 90° ; il peut être :

- équilibré : autant de plis orientés $+\vartheta$ que $-\vartheta$;
- symétrique par rapport au pli central ;
- orthogonal une suite de plis 0° et 90° .

Il est à noter que dans les matériaux d'ingénierie classiques, les propriétés mécaniques ne varient pas beaucoup avec la direction considérée. Tandis que les matériaux composites à renfort de fibres auront une résistance et une rigidité mécanique élevée le long de l'axe principal de l'armature par rapport autres directions ; d'où l'intérêt du recours à l'empilement avec différentes orientations.

1.3.3 Composites en sandwich

Ce sont des composites constitués de deux peaux de grande rigidité avec une faible épaisseur renfermant un cœur (*âme*) de forte épaisseur et de faible conductivité (voir Figure 1.4). Cette configuration donne l'avantage d'avoir des structures très légères idéales pour la construction de grandes structures tels les coques de bateaux.



Figure 1.4 – Architecture de composite

1.4 Différents types de défauts affectant les composites à fibres de carbone

Dus à leurs processus de fabrication et aux conditions dans les quelles ils se trouvent lors de l'exploitation, des défauts peuvent affecter les CFRP (Figure 1.5) et peuvent être classés comme suit :

1.4.1 Classement par grandeurs caractéristiques du défaut

Contrairement aux matériaux classiques (massifs) où les microfissures locales amorcent de plus gros défauts, les composites à fibre ont la spécificité d'être moins sensibles à ce type de phénomène, du fait de la présence de la matrice. La rupture de certaines fibres ne se propage pas à l'ensemble de la structure, cependant les défauts qui endommagent les composites ne se situent pas seulement à l'échelle microscopique, ils sont répartis sur différentes échelles [Mer06].

- Echelle microscopique : ces défauts sont à l'échelle des constituants de base, tels que : décohésion fibres/matrice, ruptures de fibres, microporosités.
- Echelle méso-scopique : les défauts sont à l'échelle du pli. On citera les fissures intera-laminaires dues à la mauvaise répartition des fibres.
- Echelle macroscopique : ces défauts se trouvent à l'échelle du stratifié. On peut citer les délaminages qui sont une séparation locale entre deux couches liées et les déformations surfaciques dues à des impacts ou bien à des brûlures

1.4.2 Classement durant leurs phases de vie

Les composites à fibres de carbone peuvent être obtenus par différents procédés de fabrication. Ces derniers visent à allier les fibres à leur matrice de polymère, pour qu'ensuite on puisse les empiler et avoir la structure finale. Durant cette phase des défauts peuvent apparaître, qu'on appellera défauts de fabrication ; d'autres défauts se manifesteront lors de la phase d'exploitation [Smi09]

La phase de conception

On peut citer les défauts par ordre d'importance :

- **Porosités** : dus principalement à la nature volatile de certains composants de la résine ou bien un mauvais contrôle de l'air (mise sous vide) lors de la phase de durcissement de la résine.
- **Impureté** : due à l'introduction d'un corps étranger ;
- **Mauvais taux de remplissage** : dus à un excès ou manque de résine dans certains endroits de la pièce. Même si en pratique le taux de remplissage est différent d'un endroit à un autre de la pièce, une grande disparité risque de fragiliser la structure ;
- **Défaut de liaison entre plis** : ce défaut se produit lors de l'assemblage du stratifié.
- **Mauvais alignement de fibres** : qui se manifeste par une variation du taux de remplissage à certains endroits de la pièce ;
- **Mauvais alignement des plis** : du à une mauvaise séquence lors de l'empilement du stratifié, ce qui va modifier la rigidité globale de la pièce ;
- **Ondulation des fibres** : un taux d'ondulation élevé des fibres aura pour conséquence la diminution de la résistance mécanique longitudinale ;

- **Délaminage** : c'est un décollement entre plis du stratifié ; il est à noter que ce défaut reste rare lors de la phase de fabrication ;
- **Défauts sur les fibres** : c'est un défaut qui vient de la phase de fabrication des fibres c'est à dire la pyrolyse. Les fibres défectueuses dans ce cas peuvent être à l'origine d'autres défauts tel que la rupture des fibres qui conduisent à l'apparition de fissure.

Phase d' exploitation

Lors de la phase d'exploitation, les structures en matériaux composites peuvent subir des dégradations ; ces dégradations dépendent fortement de l'environnement où ces structures sont utilisées. Même si les mécanismes qui les provoquent diffèrent (surcharge statique, impact, effet hygrothermique, foudre, surchauffe, etc...) les défauts résultants sur composites restent les mêmes :

- Délaminage ;
- Fissures ;
- Infiltration de liquides ;
- Rupture de fibres ;
- Décohésion fibres/matrice.

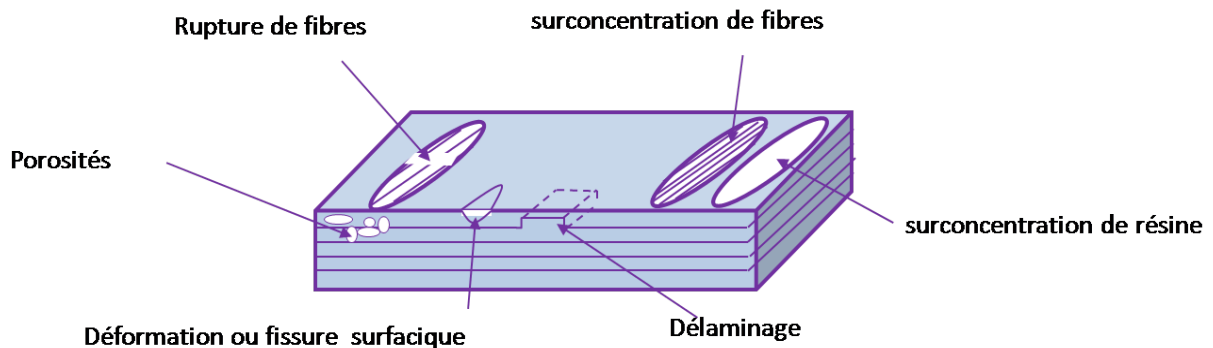


Figure 1.5 – Principaux défauts pouvant affecter un CFRP

1.5 Techniques de contrôle non destructif (CND) sur les matériaux composites

Les méthodes de CND ont été initialement développées vers le milieu du vingtième siècle pour les structures métalliques classiques. On qualifie de *contrôle non destructif* une technique qui permet de contrôler une pièce sans qu'il y ait une altération de ses caractéristiques. Ces méthodes restent encore couramment utilisées dans différentes industries. Cependant l'émergence progressive de nouveaux matériaux et le désir d'améliorer

la précision des contrôles ont stimulé la recherche dans le sens de leur adaptation, ou bien leur couplage dans le but d'avoir de nouvelles techniques plus performantes. Ne pas concevoir une instrumentation spécifique, en se contentant seulement des méthodes de caractérisation et de contrôle qui ont déjà fait leurs preuves avec les matériaux classiques, permet d'ajouter une attractivité supplémentaire à ce type de matériaux. En effet, plusieurs méthodes peuvent être réadaptées, notamment :

1.5.1 Ressuage

Cette méthode est exclusivement dédiée à la détection de défauts surfaciques (manque de matière, éraflure, . . .). Elle reste très utilisée et consiste à appliquer à la surface à contrôler préalablement nettoyée et séchée, un liquide d'impression coloré ou fluorescent. Le liquide pénètre par les capillarités et dans les ouvertures du défaut. Après le temps nécessaire à la pénétration du liquide d'impression, la pièce est lavée et séchée puis soumise à un révélateur du liquide. Un éclairage approprié (qui dépend du liquide utilisé) permet d'observer visuellement le défaut. Toutefois, cette technique ne révèle pas les défauts débouchant et ne donne pas la géométrie du défaut.

1.5.2 Méthodes ultrasonore

Le contrôle ultrasonore est basé sur la propagation d'ondes ultrasonores dans un matériau. L'évaluation des défauts se fait par l'analyse des perturbations du signal provenant de la surface du défaut. La méthode la plus classique pour effectuer un contrôle ultrasonore est d'utiliser des transducteurs. Deux types de configurations peuvent être utilisés :

- **Cas du Mono-élément** : deux techniques sont généralement utilisées : l'échographie ou la technique de transmission. Dans l'échographie, le transducteur émet et reçoit le signal ultrasonore, par contre dans la technique de transmission l'émission et la réception du signal se fait par des transducteurs distincts. Les types de défaut détectés par ces techniques sont : délaminages, porosités ou inclusions [LaR07]
- **Cas du Multi-éléments (phasedarray)** : le principe repose sur l'utilisation de transducteurs décomposés en éléments individuels pouvant être pilotés indépendamment. Ceci permet un balayage plus rapide par rapport au mono-élément. Ainsi la résolution se trouve augmentée et les zones non contrôlées sont réduites. Cette technique permet de déceler les délaminages, les fissures, les décohésions fibre/matrice, les manques de fibres, la corrosion et les dommages dus à un impact [BGS⁺08].

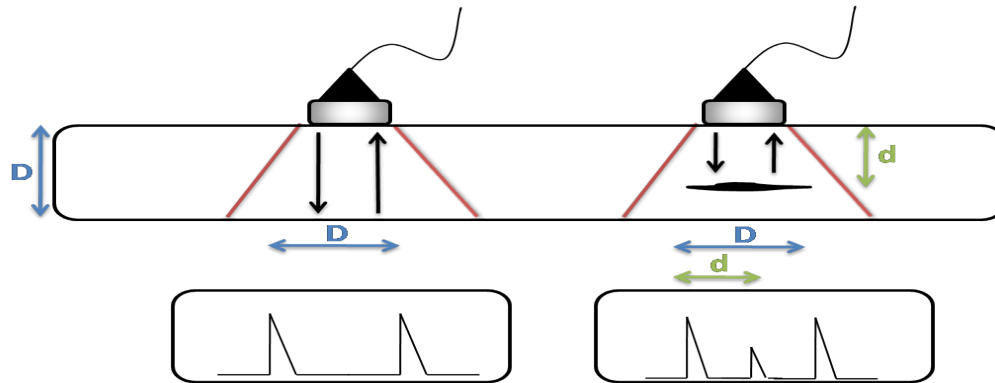


Figure 1.6 – Principe de contrôle par ultrason

1.5.3 Shearographie

La shearographie est une méthode interférométrique (interférence entre deux ondes) utilisant la lumière laser comme source lumineuse. Une mise sous contraintes thermiques, vibratoires ou pneumatiques engendre une variation de la phase entre l'état de référence et un état post déformation. Cet état est fonction de la dérivée du déplacement hors plan de l'objet, ce gradient est mesuré puis analysé et présenté sous forme d'une cartographie des déformations de la surface [Cle07].

1.5.4 Emission acoustique (EA)

C'est une technique expérimentale permettant de détecter en temps réel l'amorçage ou la propagation d'un défaut dans un matériau sous sollicitation mécanique. Selon AFNOR † « le phénomène d'émission acoustique correspond à un phénomène de libération d'énergie élastique sous forme d'ondes élastiques transitoires au sein d'un matériau ayant des processus dynamiques de déformation » (Vocabulaire utilisé en émission acoustique). Cette libération d'énergie sous forme acoustique sera détectée par des capteurs résonnants ou large bande disposés à la surface de la structure et permettent d'enregistrer le signal émis [Bea83], comme montrer dans la Figure 1.7. Auparavant, le contrôle par EA était destiné aux structures en matériau conventionnel soumises à des contraintes mécaniques, telles que les réservoirs ou bien les canalisations pour détecter l'évolution des microfissures et anticiper d'éventuelles fuites de liquide ou une ruine de la structure. L'utilisation des composites dans ces structures avec leurs caractères anisotropes complique l'identification des micro-défauts, sachant que ces derniers peuvent être différents (ruptures de fibres, décohésion fibres/matrice, délaminages), d'où la nécessité d'associer d'autres techniques [RKEK97]. On trouve deux types d'émission :

†. Association Française de Normalisation

- **Emission discrète** : lorsque chaque phénomène donne lieu à une salve discriminable du bruit de fond dans le temps ;
- **Emission en continu** : lorsque la superposition des événements donne lieu à un signal unique.

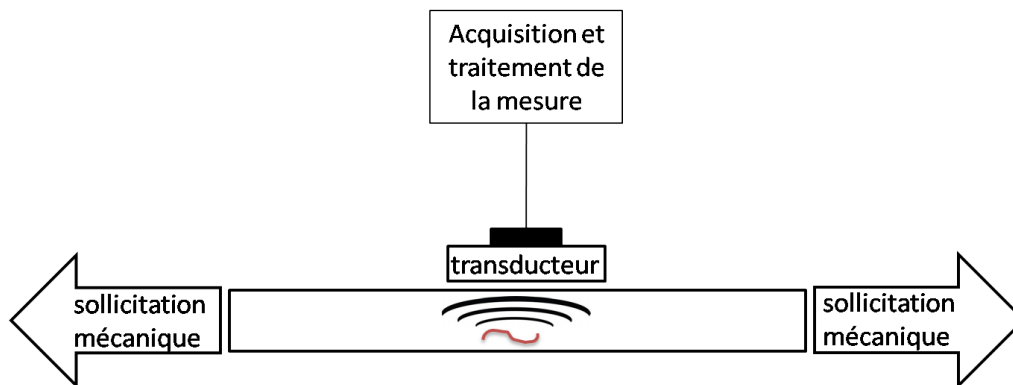


Figure 1.7 – Principe de contrôle par émission acoustique

1.5.5 Thermographie infrarouge (IR)

Cette méthode repose sur la mesure d'un flux thermique ou le rayonnement électromagnétique émis dans l'infrarouge de tous corps chauds. Cela se fait après l'application d'une source de chaleur (faisceau laser, air chaud,...) sur la cible. Le rayonnement émis sera lié à la distribution de la température, elle-même est fonction des propriétés thermiques et géométriques. Tout défaut sera rendu visible par une caméra à infrarouge qui mesure ce rayonnement thermique (Figure 1.8). Selon l'excitation thermique deux techniques peuvent se trouver :

- **Thermographie pulsée** : la source utilisée peut être des lampes flashes avec une durée d'impulsion de quelques microsecondes ou bien des lampes halogènes avec des impulsions de l'ordre du dixième de seconde. Les principaux défauts détectés par cette méthode sont les délaminages et les porosités sur des composites de faibles épaisseurs [SSL06] ;
- **La thermographie Lock-in** : est basée sur la génération d'une onde thermique grâce à une excitation périodique (modulation sinusoïdale de l'excitation thermique). Elle permet la mesure de la phase de l'onde thermique qui est fonction de sa propagation. La fréquence de modulation étant inversement proportionnelle à la profondeur d'inspection du matériau [Mal01], il est possible d'évaluer la profondeur d'un défaut.

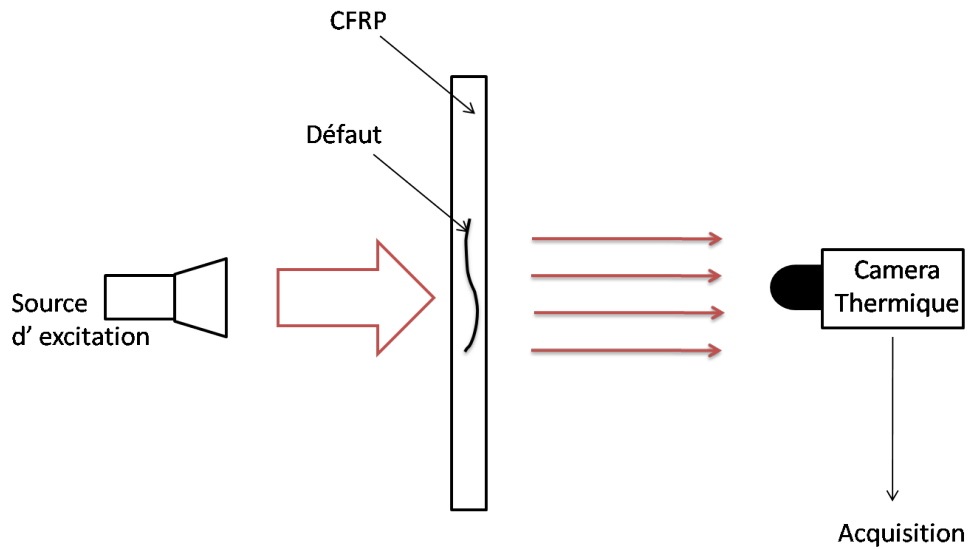


Figure 1.8 – Principe de contrôle par thermographie

1.5.6 Radiographie par rayon X

La méthode consiste à faire traverser la plaque de composite par un rayonnement électromagnétique de très courte longueur d'onde (rayon X) et de recueillir les modulations d'intensité du faisceau sous forme d'une image (voir Figure 1.9). La plaque de composite soumise au test doit être préalablement traitée par un opacifiant au rayon X. Ce type de contrôle permet de visualiser directement les fissures et d'estimer la taille des délaminages [AC88].

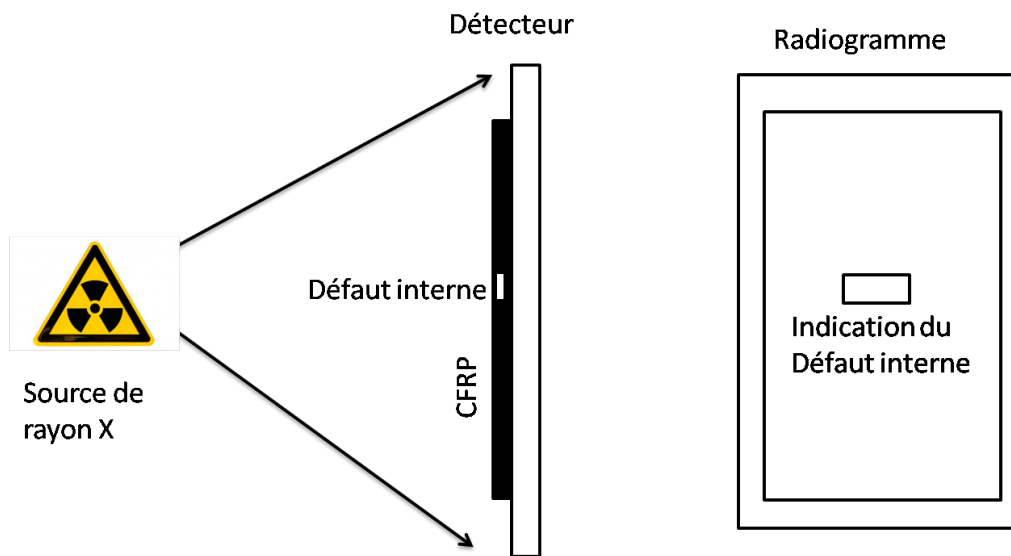


Figure 1.9 – Principe du contrôle par rayon X

1.5.7 Tomographie

La technique de radiographie par rayon X permet de n'obtenir que des images en 2D, pour remédier à cet inconvénient, la tomographie par rayon X est utilisée. Le principe consiste à faire différents clichés de la pièce à tester en la faisant tourner sur 360°. Une fois ces images obtenues, une reconstitution d'une image 3D sera réalisée, ceci est schématisé Figure 1.10. La résolution dépendra de la distance entre le spécimen et la source des rayons.

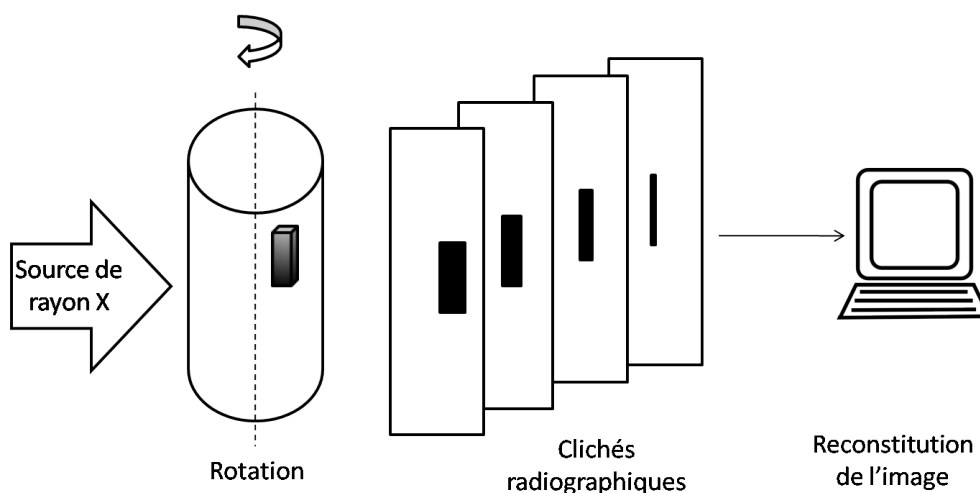


Figure 1.10 – Principe de la tomographie

1.6 Contrôle par courant de Foucault :

Dans le cadre de cette thèse, nous allons traiter de l'interaction du champ électromagnétique avec des matériaux faiblement conducteurs d'électricité. Dans notre cas ce seront les composites à fibres de carbone. De récentes expériences ont démontré l'efficacité de ce type de contrôle à détecter les défauts dans ces matériaux. Ceci est possible en adoptant des équipements traditionnels du CND-CF. Le principe de cette méthode, consiste à soumettre une pièce électriquement conductrice à l'action d'un champ magnétique variable dans le temps à l'aide d'une bobine (excitatrice), parcourue par un courant électrique variable. Ceci va créer des courants induits dans la pièce à contrôler. La trajectoire de ces courants est déterminée par la géométrie et par les caractéristiques internes de la pièce, et toute apparition de défaut va perturber la trajectoire de ces courants. Ces courants vont créer à leur tour un champ magnétique qui va s'opposer au champ initial d'excitation en vertu de la loi de Lenz, ce principe est illustré Figure 1.11 Le champ résultant sera fonction :

- Du signal d'excitation ;
- De la conductivité électrique ;
- De la perméabilité magnétique ;
- De la géométrie de la cible ;
- De la distance capteur-cible (lift-off).

Une mesure directe de ce champ ou de l'une de ses grandeurs dérivées (F.E.M, impédance) permettra de caractériser la cible. En pratique c'est la mesure d'impédance qui est souvent utilisée.

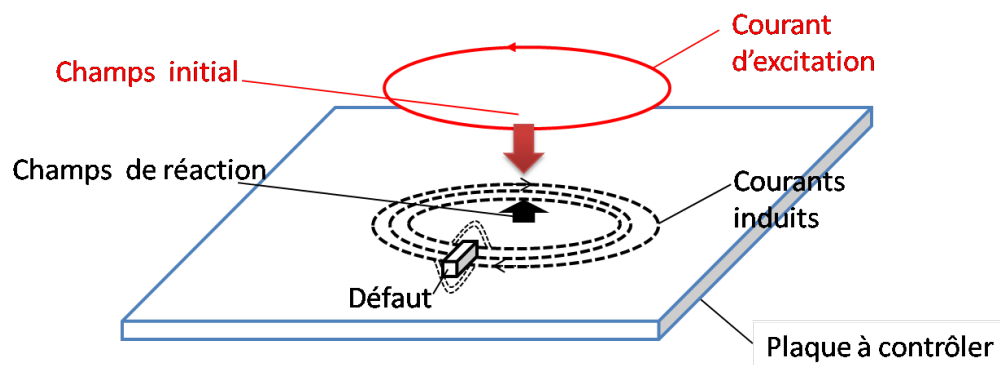


Figure 1.11 – Principe de contrôle par courant de Foucault

1.6.1 Détection par changement d'impédance

Lorsqu'une bobine alimentée en tension alternative est proche d'un matériau électriquement conducteur comme le CFRP, le champ magnétique alternatif primaire pénètre dans le matériau et génère des courants circulaires. Ces courants induits circulent à l'in-

térieur de la pièce à tester engénérant un champ magnétique secondaire qui a tendance à s'opposer au champ magnétique primaire, comme représenté sur Figure 1.11 Ce champ a un effet d'affaiblissement sur le champ magnétique primaire. En effet, la nouvelle partie imaginaire de l'impédance de la bobine diminue proportionnellement lorsque l'intensité du courant de Foucault dans la pièce à tester augmente [PD92]. Les courants de Foucault contribuent également à l'augmentation de la dissipation de puissance qui modifie la partie réelle de l'impédance de la bobine. La mesure de cette variation d'impédance peut révéler des informations spécifiques relatives à ce matériau.

1.6.2 Plan d'impédance complexe

Comme cité plus haut, lorsque une bobine interagit avec un matériau électriquement conducteur, un changement d'impédance de cette dernière se produit. Cette variation est souvent représentée dans ce qu'on appelle *le plan d'impédance normalisé*. En l'absence de pièce de test à proximité de la bobine, son impédance a une valeur complexe Z_0 :

$$Z_0 = R_0 + jX_0 \quad (1.1)$$

R_0 et X_0 représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de l'impédance à vide Z_0 . Si la bobine s'approche de la pièce à tester, des courants induits se créent et le champ qu'ils génèrent va s'opposer au champ initial. La nouvelle impédance devient :

$$Z_c = R_c + jX_c \quad (1.2)$$

R_c et X_c représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de l'impédance Z_c . Elles peuvent être représentées sur ce qui est appelé *un plan d'impédance*. Dans ce plan, on va reporter la partie réelle de l'impédance sur l'axe des abscisses, et la partie imaginaire sur l'axe des ordonnées [TLBJ95]. Pour ne conserver que les variations dus à la présence de la cible, on préfère ramener cette représentation dans un plan normalisé où les valeurs de la partie réelle et imaginaire sont calculées par :

$$R_{cn} = \frac{R_c - R_0}{X_0} \quad (1.3)$$

$$X_{cn} = \frac{X_c}{X_0} \quad (1.4)$$

R_{cn} et X_{cn} sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire normalisées. En procédant à cette normalisation, la mesure devient indépendante des caractéristiques propres de la bobine excitatrice (nombres de spires, pertes à vide) et de l'accroissement de la réactance en fonction de la fréquence ($X = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$). Elle va dépendre uniquement des paramètres de la structure : la fréquence d'excitation f , la géométrie du capteur ainsi que des paramètres de la cible (géométrie, conductivité électrique σ , perméabilité magnétique μ) et la distance capteur/cible (lift-off). L'étude de la variation de Z_n s'effectue dans le plan d'impédance normalisé en traçant R_n en fonction de X_n [Ouk97].

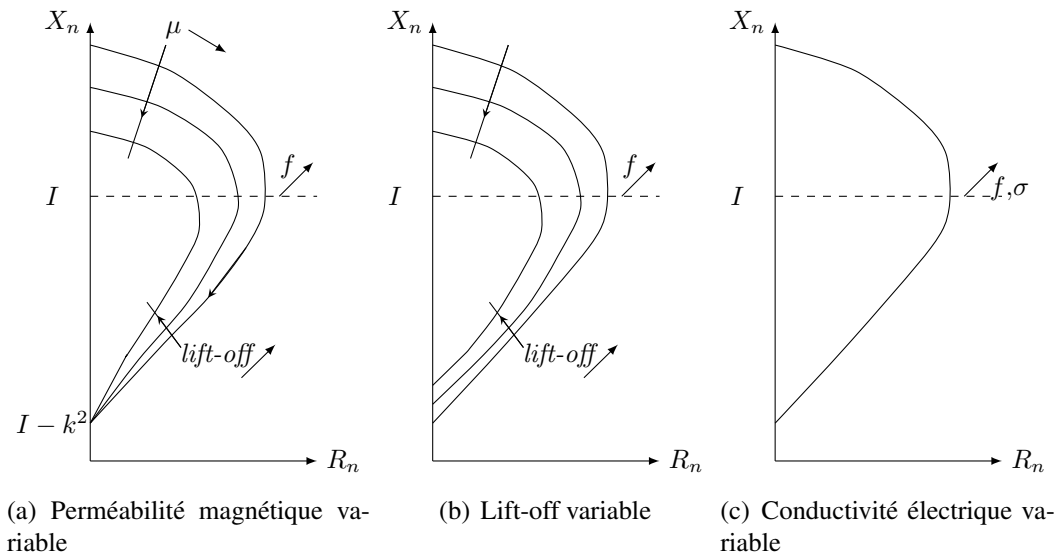


Figure 1.12 – Influence des différents paramètres sur le plan d'impédance pour des fréquences variables

1.6.3 Effet de peau

Les courants de Foucault se développent principalement sur la surface de la pièce à contrôler. Leur densité décroît rapidement à l'intérieur de la cible (effet de peau). Ce phénomène d'origine électromagnétique apparaît dans tous matériaux conducteurs parcourus par un courant électrique alternatif ou soumis à un champ électromagnétique variable dans le temps. Dans le cas du contrôle non destructif, les courants induits dans la pièce commencent à décroître d'une manière exponentielle à partir de la surface (équation(1.6)). La grandeur caractéristique de ce phénomène est la profondeur de pénétration donnée par :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \sigma}} \quad (1.5)$$

Avec :

f : la fréquence d'alimentation en hertz [Hz].

μ_r : la perméabilité magnétique relative du matériau en [H/m].

μ_0 : la perméabilité magnétique du vide en [H/m].

σ : la conductivité électrique en [S/m].

La profondeur de pénétration est donc inversement proportionnelle à la fréquence du champ et aux propriétés physiques du matériau. Si on considère une cible plane semi infinie excitée par un champ magnétique extérieur et parallèles au plan de la cible, le module de la densité de courant est régi par la relation suivante :

$$J(z) = J_0 \cdot e^{-z/\delta} \quad (1.6)$$

z : la profondeur considérée à l'intérieur de la cible en mètre [m].

$J(z)$: le module de la densité de courant en fonction de la profondeur en $[A/m^2]$.

J_0 : densité de courant à la surface en $[A/m^2]$.

δ : profondeur de pénétration ou épaisseur de peau.

1.6.4 Différents types de capteurs

La réponse d'une cible à une excitation est recueillie par un élément sensible à une grandeur électromagnétique, dans la majorité des cas, il s'agit de mesurer une impédance ou une différence de potentiel (d.d.p) représentative de la variation d'un flux. Cette mesure s'effectue par l'intermédiaire d'une bobine (capteur). La structure du capteur s'impose en fonction de l'application visée. On distinguera :

Capteur à double fonction

Ce type de capteurs est très utilisé dans les applications type courant de Foucault sinusoïdaux. C'est un capteur dans lequel les fonctions d'excitation et de réception sont assurées par la ou les mêmes bobines. L'exploitation se fait par la mesure de l'impédance équivalente de la bobine dans son environnement. Ce type de capteurs favorise la détection de grandeurs à évolution lente.

Capteurs à fonctions séparées

La détection des défauts profonds exige une augmentation des dimensions de la bobine d'excitation. Cependant, cet accroissement de la taille de l'émetteur se fait au détriment de la résolution spatiale du capteur. Il est donc nécessaire d'établir un compromis sensibilité/résolution. Ce compromis est facilité par l'adoption de capteurs à fonctions séparées. C'est un type de capteurs où les fonctions d'excitation et de réception sont assurées par des éléments distincts. La réception peut alors se faire à un endroit différent de la position de l'émetteur. L'élément de mesure peut être une bobine plus petite aux bornes de la quelle on mesure la d.d.p ou la variation d'impédance.

Capteurs différentiels

Ils sont constitués d'au moins deux éléments de mesure rigidement liés dans le capteur. Dans le cas d'un capteur à deux éléments, la mesure différentielle équivaut à comparer deux mesures effectuées simultanément en deux emplacements voisins. Ce type de capteur est particulièrement utilisé pour détecter des discontinuités lors de son déplacement le long d'une pièce en s'affranchissant des perturbations induites par une variation d'épaisseur ou de conductivité.

1.7 Problématique de modélisation du CND-CF sur les CFRP

Le contrôle non destructif par courants de Foucault peut être appliqué aux différentes architectures de composites citées précédemment. Vu que la structure la plus répandue est celle des stratifiés avec des plis unidirectionnels, nous nous sommes orientés naturellement vers cette dernière. Malgré des résultats expérimentaux encourageants du CND-CF sur ce type de structure, il se heurte à des problèmes de modélisation dus essentiellement à l'aspect particulier et complexe. Les principales difficultés à surmonter lors de la modélisation sont présentées dans les paragraphes suivants.

1.7.1 Anisotropie

Les fibres de carbone sont noyées dans une matrice en polymère. Il existe une conductivité le long de la fibre noté $\sigma_{longitudinale}$. Le fait que les fibres se touchent et quelles ne sont pas complètement couvertes par la résine va engendrer une conductivité transversale notée $\sigma_{transversale}$. Cette dernière sera fonction du taux de remplissage et du diamètre des fibres. Sachant qu'il existe des composites empilés sur plusieurs couches cela va engendrer une troisième composante de la conductivité c.-à-d. une conductivité entre couches.

1.7.2 Hétérogénéité

La présence de deux matériaux de propriétés physiques différentes, l'un isolant (résine) et l'autre conducteur (fibres de carbone) dans la constitution des CFRP donne cet aspect hétérogène. Cette hétérogénéité est volontaire, elle est dictée par la philosophie de conception même du matériau composite. Il devient intéressant de chercher une conductivité équivalente pour pouvoir modéliser et voir le comportement global de la structure de ce composite. Cependant d'autres hétérogénéités peuvent s'intégrer mais d'une manière involontaire et seront considérées comme des défauts, telles que les porosités ou les impuretés. Ils viennent principalement des procédés de fabrication. La prise en charge de ces défauts dans un modèle et leur impact seront plus difficile à modéliser.

1.7.3 Problème Multi échelles

Dans une modélisation, il faut prendre en compte le domaine d'étude global *macroscopique* qui sera pour nous un dispositif du CND-CF c'est à dire les bobines excitatrices et la pièce à contrôler. L'épaisseur de la pièce varie entre 1mm et 1cm pour une longueur d'une dizaine de centimètres. Cependant la partie conductrice, c'est à dire les fibres de carbone ont un diamètre compris entre 5 et 15 μm (voir Figure 1.13), avec un taux de remplissage qui peut dépasser les 60%. Ceci pose un problème de maillage lors de l'utilisation des méthodes de discrétisation (éléments finis ou autre), qui vont conduire à des systèmes d'équations de grande taille avec un temps de calcul prohibitif. Il est difficile de trouver un modèle mathématique qui peut prendre en charge des grandeurs aussi dispersées.

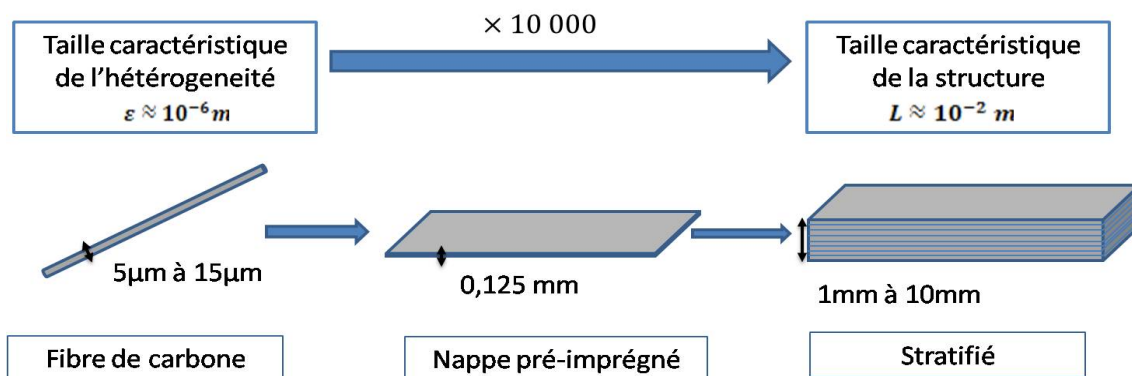


Figure 1.13 – Illustration de l'aspect multi-échelle

1.7.4 Fréquence d'alimentation

Le choix approprié de la fréquence d'excitation dépendra de l'épaisseur de la pièce à contrôler et aussi du type de défaut recherché (interne) et ceci afin d'adapter la fréquence d'excitation à la profondeur de peau désirée. Les CFRP sont composés d'un faisceau de fibres partiellement séparés par une résine généralement isolante. Cette spécificité leur confère, pour les fréquences utilisées dans le CND-CF, un comportement réactif. Lors de contrôle à faibles fréquences (KHz), l'effet capacitif devient relativement faible, par conséquent, les courants induits passent par conduction le long des fibres. Pour les tests à fréquences plus élevées (MHz) la réactance inter-fibre devient comparable à la résistance le long des fibres et aussi de fibre à fibre par effet capacitif.

1.8 Orientation données à la thèse

Au vu des problématiques mentionnées plus haut, nous nous proposons d'apporter notre contribution, dans le cadre de cette thèse, à l'étude de deux problématiques principales :

- La modélisation d'un matériau CFRP par une approche basée sur la percolation par réseaux de résistances qui permet de identifier la conductivité électrique transversale à partir d'une distribution aléatoire des fibres ;
- La résolution d'un problème de CND-CF pour un matériaux multi-échelles par un traitement parallèle des problèmes micro et macro, sans faire appel aux techniques d'homogénéisation. Sachant que pour la résolution des modèles mathématiques qui décrivent le contrôle par Courants de Foucault sur des matériaux classiques homogènes se base essentiellement sur les méthodes de discrétisation classique (différences finies, volumes finis, éléments finis, etc...). Ces méthodes exigent une discrétisation complète du domaine d'étude avec une taille d'élément adaptée pour prendre en charge les variations des paramètres physiques (conductivité électrique

et perméabilité magnétique) des différents sous-domaines. Elles trouvent leurs limites d'applications pour des matériaux avec des hétérogénéités se trouvant sur des échelles différentes, comme c'est le cas des composites à fibres de carbone.

Pour surmonter ce problème de modélisation, on s'est donné pour travail dans le cadre de cette thèse de faire une analyse multi échelles. Elle sera réalisée afin de déterminer avec précision le comportement des composites lors d'un contrôle par Courants de Foucault. Cette approche va se baser sur un couplage instantané des échelles microscopique et macroscopique afin d'avoir un calcul numérique plus précis du champ électromagnétique lors de son interaction avec la pièce à contrôler. Nous proposons d'orienter notre travail vers une telle approche qui va d'une part représenter le comportement global du CND CF des composites, et pouvoir simuler différents défauts dans les pièces à tester, et d'une autre part estimer les caractéristiques physiques (conductivité électrique) du composite. Une telle caractérisation sera intégrée dans un code 2D de calcul du champ par la méthode éléments finis hétérogène multi-échelle FE-HMM. L'objectif de l'approche sera détaillé dans le chapitre 3. L'élaboration d'un outil suffisamment précis et économique pouvant simuler un CND CF en couplant la résolution du problème micro et macro de manière simultanée.

1.9 Conclusion

Dans ce premier chapitre, une présentation générale des matériaux composites a été faite. Elle a permis de voir la procédure de fabrication de ces matériaux et de faire une synthèse des différents types de défauts qui peuvent les affecter. Par la suite, les principales techniques qui permettent la détection ont été abordées. Une attention particulière a été accordée au contrôle par courant de Foucault. Cette technique sera retenue dans le cadre de cette thèse. A cet effet on a posé la problématique qui concerne la modélisation de ce type de matériau à savoir l'hétérogénéité et l'aspect multi échelles que ce soit pour les problèmes de caractérisations ou bien de contrôle.

CHAPITRE 2

Caractérisation de la conductivité transversale du CFRP

Ce deuxième chapitre sera consacré aux techniques de caractérisation de la conductivité électrique des composites à fibres de carbone. On fera un état de l'art des techniques expérimentales ainsi que celles qui se basent sur la théorie de la percolation, et on terminera ce chapitre par le model qu'on a proposé pour déduire la conductivité transverse d'un CFRP unidirectionnel. Ce chapitre comportera les rubriques suivantes :

2.1	Introduction	23
2.2	Méthode expérimentale	23
2.2.1	Mesure avec contact	23
2.2.2	Mesure Sans contact «Contrôle par courants de Foucault»	26
2.3	Modèle mathématique	29
2.3.1	Méthodes basés sur la percolation	29
2.3.2	Percolation par réseaux de résistances	29
2.4	Notre approche	33
2.4.1	Point de vue physique	37
2.4.2	Point de vue probabiliste	38
2.4.3	Analogie entre les grandeurs physiques et les quantités probabilistes	39
2.4.4	Conductance effective	39
2.4.5	Chaine de Markov pour un problème de Dirichlet	40
2.5	Implémentation de résultats de simulation	42
2.6	Conclusion	45

2.1 Introduction

La conductivité électrique des composites à fibres de carbone a été démontrée depuis longtemps. Cette propriété a été abondamment utilisée pour concevoir des capteurs de contraintes lors des contrôles sur des structures en génie civil. La variation de cette conductivité est induite par la rupture de fibres, cette dernière nous renseigne sur la présence de contraintes mécaniques. De nos jours les composites à fibres ne sont pas utilisés seulement pour concevoir des capteurs mais ils sont devenus la matière première qui compose les structures dans différents domaines. Leurs contrôles reposent toujours sur le même principe, à savoir évaluer la conductance électrique pour détecter un éventuel défaut de délaminage ou tout autre défaut comme cité précédemment. La mesure de la conductivité électrique (ou de la résistivité) du matériau va offrir des renseignements non seulement sur les caractéristiques du composite mais aussi sur l'état d'intégrité de celui-ci. Cette mesure sera sensible à plusieurs paramètres :

- La conductivité des fibres de carbone utilisées ;
- Le type de résine utilisée isolante ou conductrice ;
- L'architecture du composite : mono ou multicouches, fraction volumétrique, procédé de fabrication, séquence d'empilement, . . . etc ;
- La méthode de mesure utilisée et la finalité voulue par cette mesure (caractérisation ou bien contrôle) car la circulation du courant dans les fibres influe grandement sur la conductivité mesurée ;
- Présence d'un défaut : principalement rupture de fibres ou délaminage.

La technique la plus appropriée sera celle qui reproduit de la meilleure manière possible, le chemin pris par les courants lors d'une excitation électrique ou électromagnétique extérieure.

2.2 Méthode expérimentale

Le principe consiste à faire circuler un courant électrique dans le matériau composite, avec ou sans contact et d'inspecter son intégrité ou bien le caractériser par une mesure du changement de conductivité électrique :

2.2.1 Mesure avec contact

Méthode Voltampère-métrique

Elle se base sur la mesure de la résistance du composite alimenté en courant continu par une source stabilisée. Le contact entre l'alimentation et la pièce à caractériser peut se faire par une métallisation de la zone de contact. La connaissance de la surface métallisée constitue une aide au contrôle de la densité du courant injecté, néanmoins on doit veiller à ce que cette zone ait la résistance la plus faible possible pour ne pas affecter la mesure.

Le positionnement des points de contacts doit évidemment se faire selon la direction à laquelle la conductivité doit être déterminée Figure 2.1 :

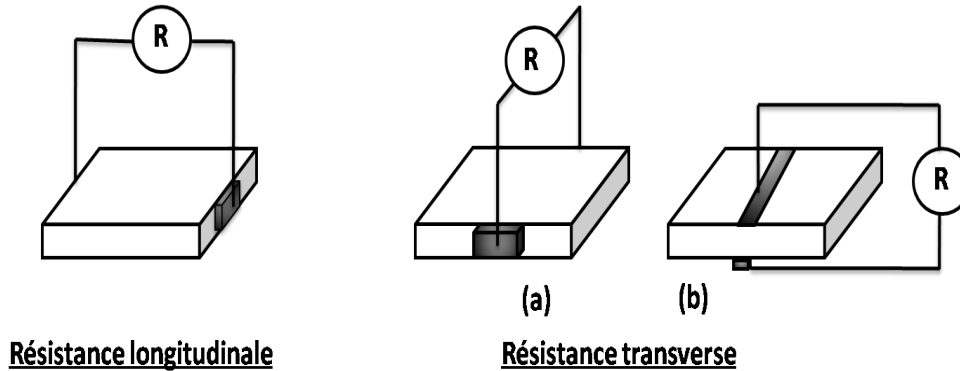


Figure 2.1 – Mesure de la résistivité longitudinale et transversale d'un CFRP unidirectionnel

Pour un milieu anisotrope, la distribution du courant ne sera pas homogène à l'intérieur de la cible, donc la conductivité mesurée dans le sens voulu sera une combinaison de cette dernière avec une autre conductivité dans un sens non désiré [Mon71]. Mesurant la chute de tension aux bornes des contacts, la résistance peut être calculée et la conductivité déduite à partir des dimensions de l'échantillon :

$$\sigma_i = \frac{l}{R \cdot S} \quad (2.1)$$

Avec :

σ_i : conductivité dans le sens voulu.

l : Longueur de l'échantillon.

S : Surface perpendiculaire au passage du courant

La mesure des variations de la conductivité électrique des composites peut donner le type de défaut mais aussi sa localisation [ABC⁺99]. On étudie le changement de la résistivité électrique longitudinale et transversale par rapport à la fraction volumique de la fibre. On a pu mesurer la résistivité orthotropique du CFRP et démontrer que sur la direction longitudinale la résistivité augmente de manière linéaire avec l'accroissement de la fraction de volume. Par contre la résistivité transversale augmente quant à selon une loi de puissance, de la même manière que le prédit la théorie de la percolation. La conductivité longitudinale peut être exprimée par la relation linéaire :

$$\rho_{long} = \tau \cdot \rho_{carb} \quad (2.2)$$

quant à la conductivité transversale, elle peut être exprimée par :

$$\rho_{trans} = (\varphi - \varphi_c)^{-t} \quad (2.3)$$

Avec :

t : Paramètre compris entre 1.6 et 1.9 [SA94].

φ_c : Taux de remplissage critique.

L'effet de la variation de la conductivité électrique mesurée en fonction de la fréquence du courant utilisé pour différentes fractions volumiques " η " a été mis en évidence par [ECR+01]. Pour ce faire, on a utilisé des fréquences allant de zéro jusqu'à 1Ghz sur deux types de composites différents :

- Granulaire : Carbone Noir (Carbon-Black :CB), Graphite (G)
- Fibreux : Fibres de Carbone.

Pour une mesure en courant continu concernant le (CB) et le (G), une proportionnalité directe est établie entre le taux de remplissage et la conductivité équivalente du spécimen. Par contre dans le cas d'une excitation en régime alternatif, une dépendance entre fréquence et conductivité est observée pour des fractions volumiques un peu plus faibles. Ceci a été expliqué par l'effet de la polarisation de la matrice isolante. Pour les composites à fibres de carbone une proportionnalité entre l'angle de l'orientation et la conductivité transverse aux fibres est établie, considérant un angle de référence "0" parallèle à l'axe "Ox" Figure 2.2. Il est à noter que la conductivité transverse aux fibres reste invariante pour des fréquences inférieures à 1MHz. Ceci est expliqué par la présence d'un réseau de fibres hautement interconnecté favorisant un passage de courant par contact.

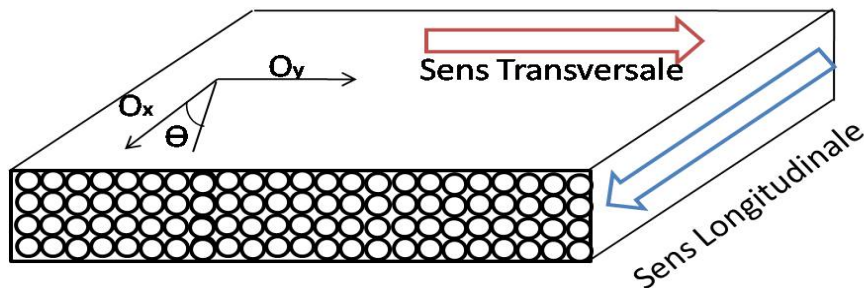


Figure 2.2 – Représentation avec une orientation des fibres du CFRP unidirectionnel et l'angle de référence Θ

TEM Cell (Transverse Electro-Magnetic)

TEM Cell est une structure coaxiale qui assure la propagation d'une onde électromagnétique plane dans des gammes de fréquences allant de 100 KHz jusqu'à quelques GHz Figure 2.3 . Initialement utilisé pour mesurer l'efficacité des blindages des circuits électroniques, elle peut aussi être utilisée pour caractériser une conductivité effective dite « radiale » d'un composite à fibres de carbone. Cette appellation vient du fait que le sens du courant généré va du rayon intérieur de la cellule vers le rayon extérieur.

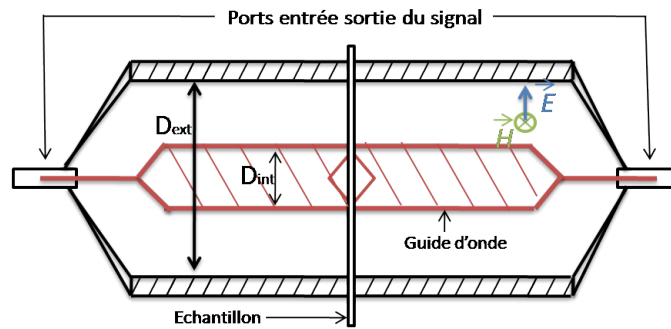


Figure 2.3 – Transverse Electromagnetic Cell radiale

En se basant sur la mesure des pertes par insertion avec et sans échantillon, la résistance « R_{CFRP} » est calculée, ce qui permet ensuite de déduire la conductivité radiale [PPR11]. L'échantillon à caractériser sera placé entre les deux conducteurs coaxiaux de la cellule faisant office de résistance parallèle (Figure 2.4).

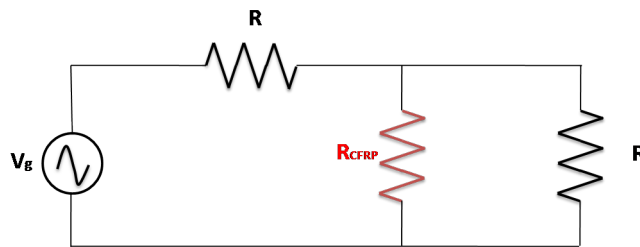


Figure 2.4 – Schéma électrique représentant TEM Cell radiale

2.2.2 Mesure Sans contact «Contrôle par courants de Foucault»

La détection de défauts par courants de Foucault sur les composites à fibres de carbone diffère de celle réalisée sur les matériaux conventionnels. En effet la forte anisotropie et la présence d'hétérogénéités peuvent interférer sur le signal utile. Plusieurs travaux ont démontré l'efficacité de ce contrôle, parmi lesquels, on peut citer [Ows76], où les auteurs ont appliqué un contrôle par courants de Foucault sur deux types de composites respectivement : à plis unidirectionnels et stratifiés. Leur étude a démontré la possibilité de détecter des rayures sur la surface et ce pour différentes orientations longitudinale et transversale aux fibres, ainsi que pour différents sens de défilement de la bobine (Figure 2.5).

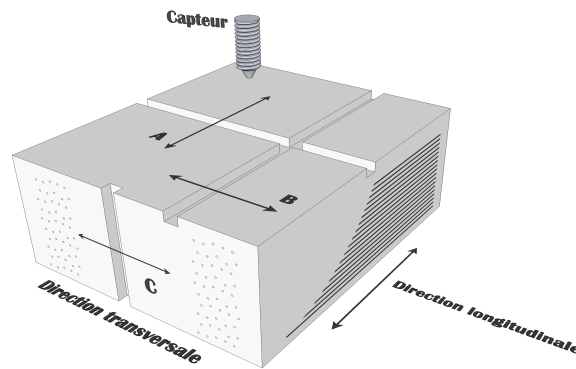


Figure 2.5 – Stratifié avec des rayures sur les axes transversal et longitudinal aux fibres.

Ils ont remarqué que la réponse du capteur sera plus importante quand les rayures coupent les fibres (rayure transversale aux fibres) pour un sens de déplacement longitudinal des capteurs (Figure 2.6). Ces bobines donnent une réponse de moindre amplitude dans la configuration inverse, d'où la déduction que le chemin pris par les courants induits est de forme elliptique, tel que le grand axe de l'ellipse est selon la direction longitudinale.

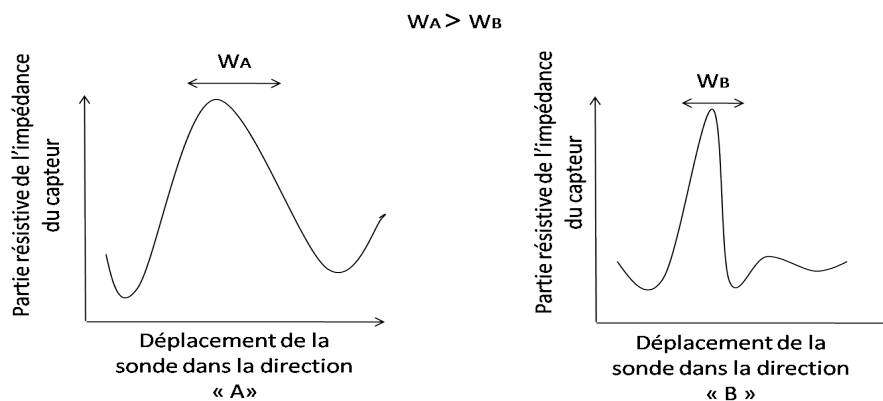


Figure 2.6 – Déplacement de la sonde sur les axes transversal et longitudinal aux fibres.

Les auteurs de cette étude se sont intéressés aussi aux défauts non débouchants, qui ont été simulés par des fentes dans la face opposée à celle contrôlée par les bobines. Ces fentes ont été créées à différentes distances de la surface de contrôle. La détection s'est faite pour différentes fréquences d'excitation. Des recommandations sur l'utilisation des fréquences de l'ordre de 100MHz pour une meilleure localisation de ces défauts dits cachés a été faite. Avec cette étude il est clairement démontré la possibilité de détecter une rupture de fibres surfacique ou interne par le CND-CF. Pour les stratifiés du type $0^\circ/90^\circ/0^\circ$, [Val90] on étudie la détection de défauts simulés par des trous à fond plat répartis sur différentes profondeurs. L'estimation de la profondeur du défaut par la mesure de l'impédance du capteur a donné de bons résultats. En outre il a été établi que même

pour un milieu fortement hétérogène, le CND-CF donne une bonne estimation des défauts de type inclusion surfacique. D'autre part [Gro95] a étudié la limite de détection de ces capteurs en réalisant plusieurs déformations surfaciques grâce à des chocs générés avec différentes énergies sur les deux surfaces du matériau. Sur la surface qui fait face au capteur, les déformations générées par des impacts d'énergie inférieure "1J" n'ont pas été détectées, et pour l'autre face ce sont les déformations d'impacts d'énergie inférieure à "2J" qui n'ont pas été détectées. La méthode proposée par [LB02] consiste à induire des courants dans la pièce et à mesurer localement le champ électrique dû d'une part au courant de conduction et d'autre part au phénomène de polarisation dipolaire de la résine. Le champ électrique local généré par " \vec{B} " est :

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}_1 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Ce champ va induire lui-même une densité de courant : " $\vec{\mathcal{J}} = \sigma \cdot \vec{\mathcal{E}}_1$ ", " σ " étant la conductivité du milieu, toute fois dans des milieux complexes (carbone + résine) " $\vec{\mathcal{J}}$ " peut s'écrire comme la somme de deux termes :

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{J}}_c + \vec{\mathcal{J}}_p \quad (2.5)$$

Avec :

$\vec{\mathcal{J}}_c$: Densité de courant de conduction

$\vec{\mathcal{J}}_p$: Densité de courant de polarisation (courant de déplacement)

Le champ total deviendra donc :

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_1 + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{\varepsilon} \quad (2.6)$$

Avec :

χ_1 : Susceptibilité électrique du milieu ;

$\vec{\mathcal{P}}$: densité de moment dipolaire ou vecteur polarisation ;

ε_r : permittivité électrique relative.

on peut écrire : $\vec{\mathcal{P}} = \chi_1 \cdot \varepsilon \cdot \vec{\mathcal{E}}_1$ et $\varepsilon_r = 1 + \chi_1$. On aura :

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}_1 + \chi_1 \cdot \vec{\mathcal{E}}_1 \quad (2.7)$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{\mathcal{J}}_c}{\sigma} + (\varepsilon_r - 1) \cdot \vec{\mathcal{E}}_1 \quad (2.8)$$

Finalement le champ " \vec{E} " calculé sera lié au changement de la conductivité électrique des fibres et de la permittivité relative " ε_r " dû à une pyrolyse par exemple. Les champs électriques générés sont très faibles, moins de $10^{-3}V/m$.

2.3 Modèle mathématique

2.3.1 Méthodes basés sur la percolation

Quand on remplit un polymère de conductivité électrique " σ_p " avec une autre matière conductrice " σ_f " ce mélange va donner lieu à un matériau composite de conductivité électrique notée " σ ". Lorsque le taux de remplissage de la matière conductrice atteint un seuil critique " φ_c " appelé « *Seuil de Percolation* » il y'aura un saut brusque de la conductivité du mélange. Cette valeur critique de la conductivité où se produit ce changement est " σ_c " au-delà duquel le mélange sera conducteur. En dessous de la valeur critique de remplissage, " σ " est presque égale " σ_p " mais au-delà de " φ_c " jusqu'au maximum du taux de remplissage possible " F " la conductivité " σ " augmente pour atteindre une valeur maximal " σ_M ". Cette variation est donnée par :

$$\sigma = (\varphi - \varphi_c)^t \quad (2.9)$$

ou bien par une relation normalisée :

$$\frac{\sigma - \sigma_c}{\sigma_M - \sigma_c} = \frac{(\varphi - \varphi_c)^t}{F - \varphi_c}$$

pour avoir :

$$\sigma = \sigma_c + (\sigma_M - \sigma_c) \cdot \frac{(\varphi - \varphi_c)^t}{F - \varphi_c} \quad (2.10)$$

Avec :

- φ_c : Taux de remplissage critique ;
- σ_c : Conductivité électrique critique ;
- σ_M : Valeur maximale de la conductivité électrique ;
- σ_c : Conductivité électrique du mélange.

$$F = \frac{V_f}{V_f + V_p} \quad (2.11)$$

Avec

- V_f : Volume occupé par la partie conductrice ;
- V_p : Volume occupé par la partie isolante.

2.3.2 Percolation par réseaux de résistances

La plupart des approches utilisent le modèle proposé par [POT03] qui modélise une cellule élémentaire d'un composite par un réseau de résistances (Figure 2.7). Dans ce modèle la notion de «Electrical ineffective length», notée " δ_{ec} " est introduite. Elle est définie comme la distance moyenne qui sépare deux contacts consécutifs entre deux fibres adjacentes. Dans [PHKD06] il est démontré que " δ_{ec} " influe grandement sur la résistance

transverse et que la distribution spatiale de ces contacts influe dans une moindre mesure sur la résistivité. De cette manière, on peut assimiler le composite à un circuit de résistances alimenté en courant continu qu'on peut résoudre par les lois de Kirchhoff.

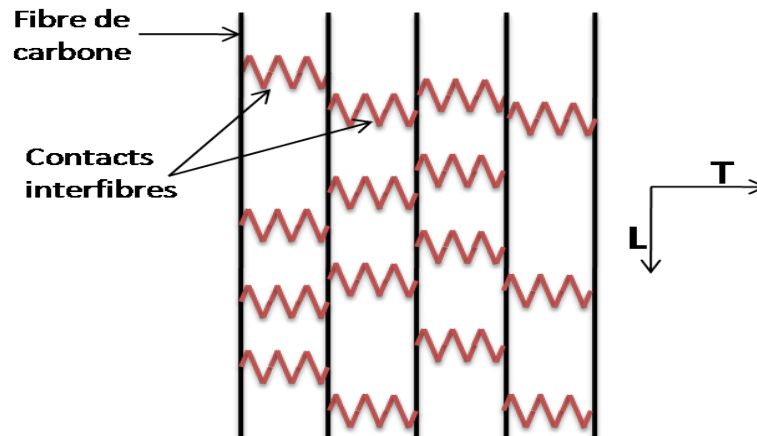


Figure 2.7 – Réseau électrique en deux dimensions.

Plusieurs variantes de ce modèle ont été utilisées pour caractériser le tenseur de conductivité. Elles diffèrent sur la manière de distribuer ces résistances de contact. Par exemple [PPR11] ont introduit la notion de macro-fibre qui regroupe plusieurs fibres en parallèle pour minimiser le nombre de résistances longitudinales dans un pli, ce qui a permis de représenter un pli par des résistances distribuées linéairement.

Un réseau en trois dimensions présente deux types d'orientation (Figure 2.8) :

- Les orientations à : " 0° " et "90°" ;
- Les orientations à : " -45° " et "+45°".

Les résistances macro sont calculées :

$$R_x = \frac{N_x}{W_x \cdot e_p \cdot \sigma_x} = \frac{N_x}{(N_x \cdot d) \cdot e_p \cdot \sigma_x} = \frac{1}{d \cdot e_p \cdot \sigma_x} \quad (2.12)$$

Avec :

R_x : La résistance macro distribuée linéairement sur l'axe "Ox" en [Ω/m] ;

N_x : Nombre de macros fibres désirés ;

d : Distance séparant deux macros fibres ;

W_x : Longueur du pli selon "Ox" ;

e_p : L'épaisseur du pli.

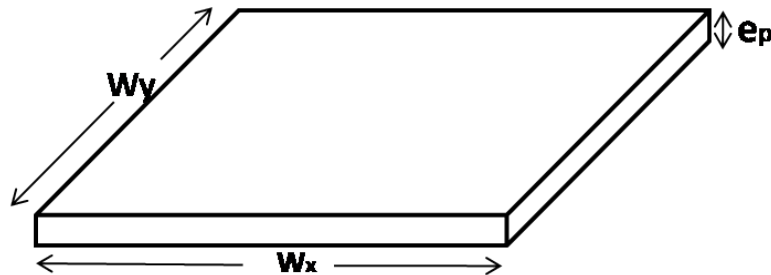


Figure 2.8 – Dimension d'un pli.

Le même raisonnement a été appliqué aux autres résistances " R_y " et " R_z " des plis ayant une orientation " 0° " et " 90° ". Pour les plis de " -45° " et " $+45^\circ$ " c'est la distance entre les macros fibres qui va changer pour être " $d = (d \cdot \sqrt{2})/2$ ". Les valeurs des résistances dépendront des valeurs des conductivités selon chaque direction, ces conductivités sont obtenues par une mesure à quatre points. Une fois ces résultats de mesure obtenus, ils sont injectés dans le modèle représenté par des résistances en 3D. Des simulations comportant un nombre plus important de plis sont réalisées. [GOMES09] Ont procédé au calcul des propriétés électriques d'un composite à fibres de carbone unidirectionnelles partant de sa microstructure. Pour cela un modèle de réseau de résistances bidimensionnel soumis à des courants électriques continus ou ayant une faible fréquence a été établi (Figure 2.9). Ce réseau électrique comporte un nombre " N_f " de fibres en parallèle de forme filaire, la distance entre ces fils représente le diamètre de la fibre. Deux types de configurations pour les contacts interfibres ont été adoptés, à savoir : une disposition aléatoire des contacts ou bien une disposition où ces derniers ont une position prédéfinie. Tous respectent une distance moyenne " δ_{ec} " de " $0.2mm$ " décrite dans [POT03]. En imposant une différence de potentiel, une résolution par éléments finis a permis d'avoir les tensions aux nœuds du réseau. Ces tensions ont été utilisées pour le calcul des résistances :

R_L : Résistance longitudinale ;

R_C : Résistance de contacts entre fibres.

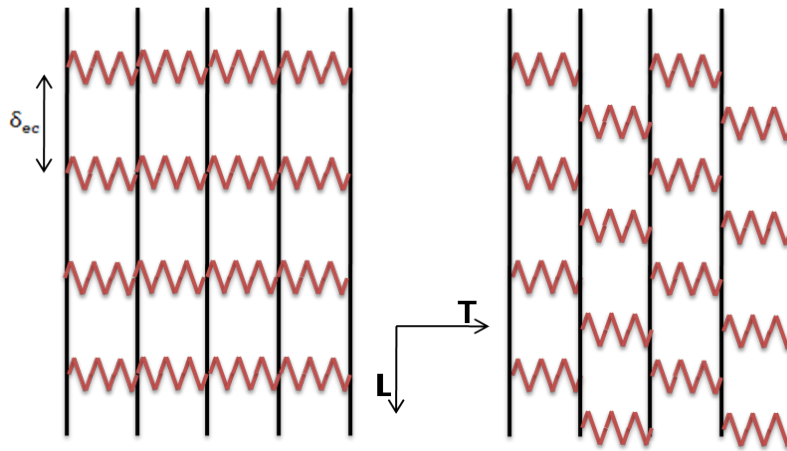


Figure 2.9 – Disposition des points de contacts.

Après obtention des valeurs des résistances, les conductivités dans les deux directions sont déduites. Une comparaison est faite avec des modèles analytiques issus de la loi des mélanges ainsi que des résultats expérimentaux. Au sein de notre laboratoire [WTRF11] a proposé un méthode pour caractériser la conductivité transverse aux fibres, ceci en représentant une cellule élémentaire par un réseau de résistances tridimensionnel (Figure 2.10), sur lequel un essai volt-ampèremétrique a été réalisé. La génération de ce réseau repose sur le fait que les fibres dans un composite ondule autour d'un axe. L'angle d'ondulation est aléatoire et un contact entre fibres peut se produire en moyenne tous les " $\delta_{ec} = 320\mu m$ ". Pour construire son réseau de résistances, les fibres sont décomposées en des segments de droite ayant des longueurs " δ_{ec} ", ces segments peuvent onduler dans des corridors avec un angle aléatoire " θ ". Chaque fois qu'il y a contact entre les fibres, on reporte une résistance " R_C " dans le réseau, sinon une résistance infinie (circuit ouvert) est placée là où il n'y a pas de contact.

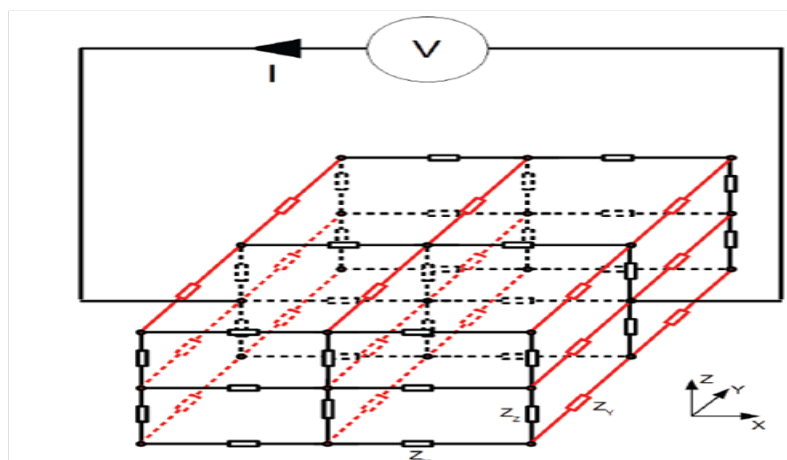


Figure 2.10 – Réseau de résistances en 3D.

2.4 Notre approche

Dans cette approche une coupe transversale d'un composite unidirectionnel sera prise comme point de départ pour former le réseau de résistances. La Figure 2.11 montre une image d'un CFRP unidirectionnel prise par microscopie électronique à balayage dans le laboratoire de GéM, Saint-Nazaire. Notre point de départ est l'existence de contacts plausibles autour d'une fibre noyée dans une matrice isolante. Partant de cette observation un réseau de résistances est construit en adoptant la technique de suppression de fibres pré-générées qu'on détaillera par la suite. Une fois le réseau obtenu, la conductivité transversale effective sera calculée.

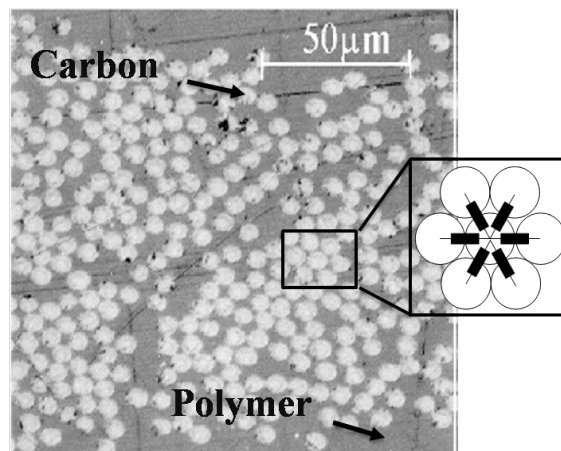


Figure 2.11 – Section transversale d'un CFRP avec des contacts plausibles entres fibres.

Avant de calculer la conductivité transversale du composite, il convient de trouver la meilleure manière de représenter une distribution aléatoire bidimensionnelle des fibres. Dans la littérature, on trouve deux techniques :

- Création aléatoire de fibres [Shi93] : la génération de fibres se fait dans un petit rectangle qu'on appelle « cellule ». Cette cellule est remplie avec des cercles de rayon « r » qui représentent la coupe des fibres. Un premier cercle avec un centre de coordonnées « x » et « y » est créé aléatoirement dans la cellule, les autres cercles de coordonnées « x_i » et « y_i » sont créés de telle sorte qu'il n'y ait pas de chevauchement entre eux (pas de points générés dans la zone des cercles déjà créés) ni sur les côtés du rectangle. Ce processus continue, jusqu'à ce que le taux de remplissage voulu soit atteint. L'inconvénient de cette méthode est que le temps pour générer une cellule peut être très long, et le taux de remplissage ne dépasse pas les 60% ;
- Suppression aléatoire de fibres pré-générées : on remplit la cellule de fibres de manière ordonnée puis on supprime les cercles aléatoirement jusqu'à ce que le taux de remplissage voulu soit atteint. Outre sa simplicité et la rapidité, la procédure a l'avantage de pouvoir simuler des taux de remplissage supérieur à 60%.

C'est cette dernière technique qui sera exploitée pour développer notre méthode de percolation par réseau de résistances. Le calcul de la conductivité longitudinale ne pose pas de problème particulier, et peut être donné par :

$$\sigma_{long} = \tau' \cdot \sigma_{Carb} \quad (2.13)$$

avec $\tau' = \frac{1}{\tau}$, tel que :

τ : Le taux de remplissage ;

σ_{Carb} : La conductivité du Carbone en $[S/m]$

On peut considérer un composite à fibres de carbone comme un empilement de plusieurs couches qu'on considère comme étant unidirectionnelles avec des fibres ordonnées. En réalité, les fibres ne sont pas disposées de cette manière, elles ondulent et créent des contacts de manière aléatoire comme le montre la Figure 2.12.

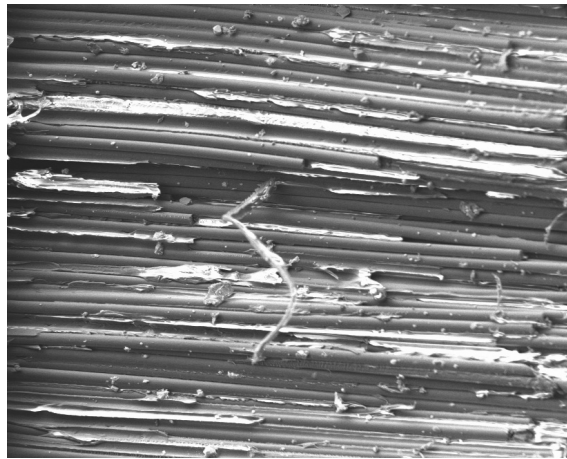


Figure 2.12 – Vue réelle des fibres dans le sens longitudinale.

Dans notre approche le choix s'est porté sur la suppression aléatoire de fibres pré-générées. On commence par un pré remplissage de la cellule de manière ordonné tel que montré dans la Figure 2.13

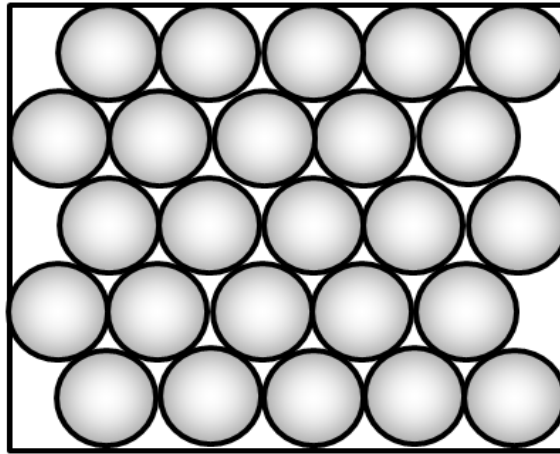


Figure 2.13 – Génération de fibres de manière ordonnée pour une coupe 2D transversale.

Chaque fois qu'un courant traverse transversalement une fibre il rencontrera une résistance " R ". Les fibres seront représentées par des cercles, chaque cercle sera en contact au maximum avec six autres. La Figure 2.14 illustre le raisonnement suivi pour aboutir à notre réseau de résistances :

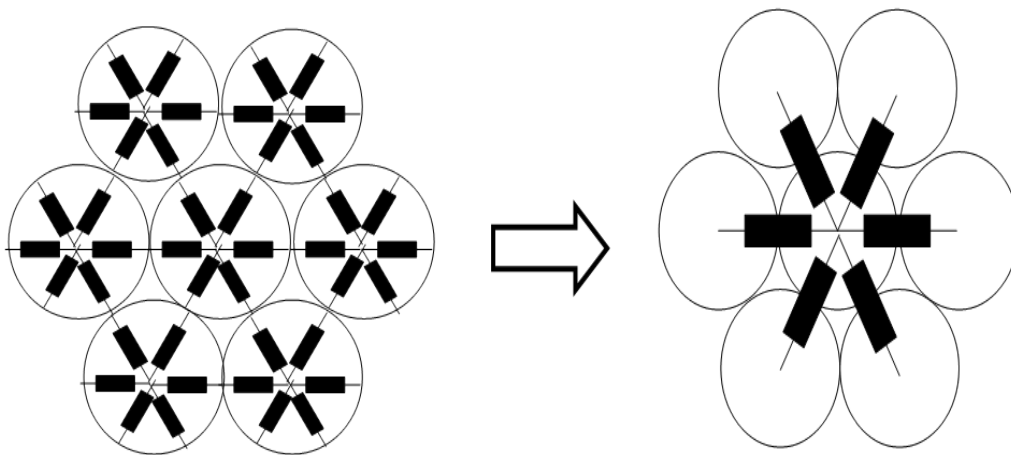


Figure 2.14 – Démarche suivie pour modéliser un composite unidirectionnel sous forme de réseau d'impédances.

Une fois que les résistances au niveau d'une fibre sont établies, on peut généraliser notre raisonnement à l'ensemble de la cellule choisie. La figure 2.15 donne un aperçu pour une cellule complètement remplie et une autre avec un taux de remplissage de 75%. Evidemment cette figure est donnée à titre indicatif ; le nombre de fibres peut être beaucoup plus important.

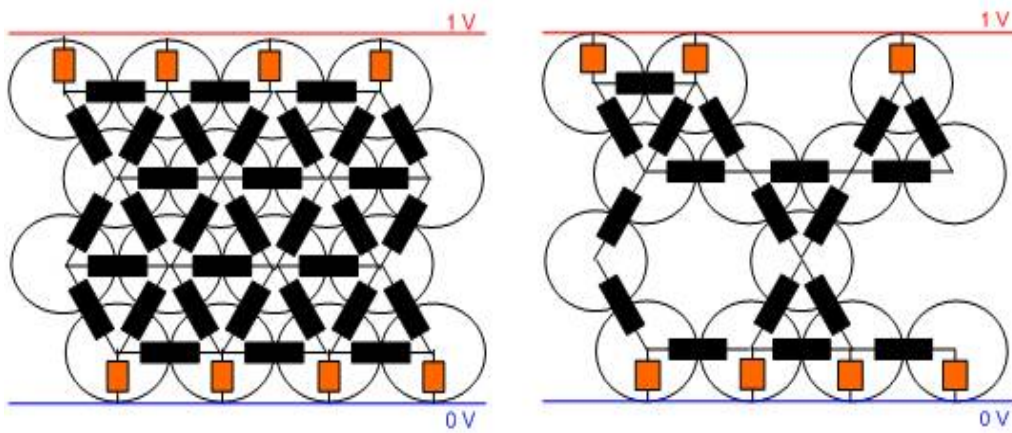
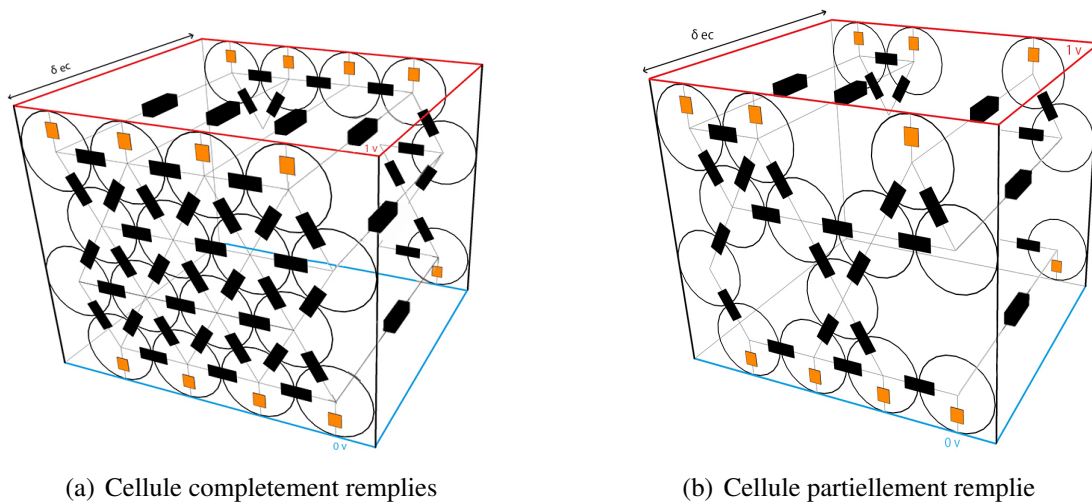


Figure 2.15 – :Modélisation d'un composite unidirectionnel par un réseau d'impédances pour différents taux de remplissage.

Pour simuler un test volt- ampèremétrique, on impose une différence de potentiel entre le haut et le bas de la cellule. Ceci revient à résoudre le système par les chaînes de Markov avec des conditions aux limites sur les frontières de type Dirichlet. La cellule en 3D de la Figure 4.3 sera prise comme étant notre réseau de résistances sur lequel le test volt-ampèremétrique sera simulé :



(a) Cellule complètement remplies

(b) Cellule partiellement remplie

Figure 2.16 – Réseau de résistance en 3D sur lequel les chaînes de Markov seront appliquées

Dans la section qui suit on va décrire les relations qui permettent de résoudre un tel système en s'appuyant sur une approche probabiliste des grandeurs physiques, que sont la tension et la conductivité équivalentes d'un circuit [DS84]. Tout d'abord les relations

usuelles de l'analyse des circuits électrique vont être rappelées pour pouvoir faire une analogie avec une approche probabiliste de résolution d'un tel système.

2.4.1 Point de vue physique

Un circuit électrique peut avoir un nombre de nœuds quelconque " N ". Certains d'entre eux vont servir comme point d'alimentation du circuit, on va les désigner par " A " et " B " comme étant les nœuds connectés à la surface d'équipotentielle. Les électrodes du générateur de tension vont délivrer une tension de 1V à leurs bornes. On va noter " V_x " le potentiel au point " x "; n'importe quelle paire de nœuds " x_i " et " y_i " sera liée par une résistance « r_{xy_i} »

Le nœud " x " peut être connecté à une multitude de nœuds voisins " y_i " avec « $i = 1, 2, \dots, n$ » à travers des résistances " r_{xy_i} " ou bien des conductances " c_{xy_i} ".

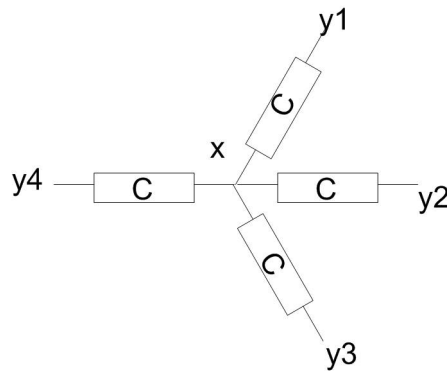


Figure 2.17 – Connexion entre différents nœuds voisins.

Si " x " est lié à " N " nœuds, la loi de Kirchhoff pour les courants s'écrit :

$$\sum_{i \in N} I_{xy_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i \in N} \frac{V_x - V_{y_i}}{r_{xy_i}} = 0 \quad (2.14)$$

la tension au nœud " x " c.-à-d. " V_x " n'est pas concernée par la somme :

$$V_x \cdot \sum_{i \in N} \frac{1}{r_{xy_i}} = \sum_{i \in N} \frac{V_{y_i}}{r_{xy_i}} \quad (2.15)$$

Si on note :

c_{xy_i} : la conductance électrique entre " x ", et " y_i "

c_x : la somme de toutes les conductances liées au nœud « x »

Alors :

$$c_x = \sum_{i \in N} \frac{1}{r_{xy_i}}$$

Donc l'équation 2.15 devient :

$$V_x = \sum_{i \in N} \frac{C_{xy_i}}{C_x} V_{y_i} \quad (2.16)$$

L'équation 2.16 nous donne la valeur du potentiel " V_x " à n'importe quel nœud du circuit connaissant les potentiels des nœuds qui lui sont connectés et les conductances qui lui sont liées " c_{xy} ". Il est à noter que le potentiel " V_x " est une fonction harmonique c.-à-d. :

- Pour le cas continu une fonction harmonique peut être dérivable deux fois donc satisfaire l'équation de Laplace ($\Delta V_x = 0$);
- Pour le cas discret, elle possède la propriété des moyennes. Ce qui implique que chaque tension se calcule par une moyenne des tensions des nœuds voisins. Les poids seront les conductances liées au nœud en question. La tension " V_x " sera écrite alors sous forme de moyenne pondérée comme l'atteste l'équation (2.16).

2.4.2 Point de vue probabiliste

Oublions toutes les lois physiques qui régissent un circuit électrique (loi d'Ohm, Kirchhoff, ... etc.), et considérons l'électron comme simplement « *un promeneur qui choisit son chemin d'une manière aléatoire dans une intersection de routes* (Figure 2.17) ». Considérons un électron au nœud " x " du circuit, ce nœud est connecté à plusieurs autres, la probabilité que cet électron passe de " x " à " y " est par définition :

$$P_{x \rightarrow y} = \frac{C_{xy}}{C_x} \quad (2.17)$$

c_{xy} : Le chemin qui lie « x » à « y »

c_x : La somme de tous les chemins possibles entre « x » et « y » qu'on peut noter aussi

$$c_x = \sum_{y \in N} c_{xy}$$

Si nous sommions toutes les probabilités, alors on obtient :

$$\sum_{y \in N} P_{x \rightarrow y} = \sum_{y \in N} \frac{c_{xy}}{c_x} = 1 \quad (2.18)$$

La probabilité que l'électron bouge de son point initial à un nœud voisin est de 100%, c'est à dire qu'il n'y a pas d'accumulation de charge dans les nœuds.

Maintenant, si on définit la probabilité « N_x » comme la probabilité que l'électron se déplace du nœud « x » pour atteindre le nœud « A » « borne + du générateur » avant qu'il touche le nœud « B » « borne – du générateur », cette probabilité peut aussi s'écrire comme le produit de deux probabilités : Probabilité de déplacement de l'électron du nœud « x » vers le nœud « y » notée $P_{x \rightarrow y}$ fois la Probabilité de déplacement du nœud « y » pour atteindre « A » avant de toucher « B » qu'on note " N_y " en faisant la somme pour tous les points « y ». L'écriture de cette probabilité sous forme de produit est rendu possible parce

que la transition de l'électron d'un nœud à un autre est indépendante (une probabilité non conditionnée).

$$N_x = \sum_{y \in N} P_{x \rightarrow y} \cdot N_y \quad (2.19)$$

$$N_x = \sum_{y \in N} \frac{c_{xy}}{c_x} \cdot N_y \quad (2.20)$$

N_x : Probabilité d'atteindre le point «A» avant le point «B» partant de «x»

N_y : Probabilité d'atteindre le point «A» avant le point «B» partant de «y»

2.4.3 Analogie entre les grandeurs physiques et les quantités probabilistes

En comparant les équations 2.16 et 2.20 on remarque une analogie parfaite, y compris pour les points spéciaux «A» et «B» (bornes du générateur) :

1. Au point «A»
 - Tension au nœud $V_A = 1V$: on peut la voir comme une tension normalisée ;
 - Probabilité au nœud " N_A " : la probabilité qu'un électron au nœud «A» atteigne le nœud «A» avant qu'il atteigne «B» est de : 1 (il y est déjà).
2. Au point «B» :
 - Tension au nœud $V_B = 0V$: la masse de notre circuit ;
 - Probabilité au nœud $N_A = 0$: la probabilité qu'un électron qui se trouve au nœud «B» atteigne le nœud «A» avant qu'il atteigne «B» est nulle.

Donc la définition de la tension d'un point de vue probabiliste sera la probabilité qu'un électron atteigne la borne positive «P» avant de toucher la borne négative «N».

Écrire les équations de la circuiterie classique sous forme probabiliste, donne pour le calcul des réseaux de résistances une nouvelle méthode pour trouver les grandeurs tensions et courants dans n'importe quelle branche, surtout pour les circuits de grande taille présentant une complexité pour le calcul de la conductivité équivalente. On peut combiner deux méthodes pour résoudre les circuits obtenus :

- Les méthodes de Monte Carlo (marche aléatoire sur un circuit électrique) ;
- Les chaînes de Markov absorbante.

2.4.4 Conductance effective

Si on impose une différence de potentiel entre les nœuds «A» et «B» tel que : $v_A = v$ et $v_B = 0$ alors le courant qui sort du générateur et entre par «A» sera :

$$i_a = \sum_{x \in N} i_{ax} \quad (2.21)$$

Sa valeur dépendra de la **Conductance Effective** que lui offre le circuit :

$$C_{eff} = \frac{i_a}{v_a} \quad (2.22)$$

Cette conductance ne dépend que du rapport du courant sur la tension, on peut interpréter la conductance de manière probabiliste comme étant **la probabilité d'échappement**.

$$i_a = \sum_{y \in N} (V_a - V_y) \cdot C_{ay} \quad (2.23)$$

$$i_a = \sum_{y \in N} (V_a - V_y) \cdot C_a \cdot \frac{C_{ay}}{C_a} \quad (2.24)$$

$$i_a = C_a V_a - \sum_{y \in N} V_y P_{ay} C_a \quad (2.25)$$

Pour un $V_a = 1$:

$$i_a = C_a (1 - \sum_{y \in N} V_y P_{ay}) \quad (2.26)$$

On définit la probabilité d'échappement :

$$P_{esc} = 1 - \sum_{y \in N} V_y P_{ay} \quad (2.27)$$

Alors :

$$i_a = C_a P_{esc} \quad (2.28)$$

On calculera donc la conductance effective du circuit par :

$$C_{eff} = C_a P_{esc} \quad (2.29)$$

2.4.5 Chaîne de Markov pour un problème de Dirichlet

Nous allons décrire dans ce qui suit l'approche « chaînes de Markov », et voir comment elle peut être utilisée pour résoudre un problème de circuiterie, une chaîne de Markov finie est un type spécial d'un processus de chance qu'on peut décrire par :

- Ayons un groupe de nœuds (état) $S = s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ avec un processus de chance qui lie le mouvement d'un nœud à un autre.
- Si un marcheur se trouve à un nœud s_i la probabilité qu'il va au nœud s_j est P_{ij} .
- Toutes les probabilités de transition pour les nœuds se trouvant dans le groupe S sont stockées dans une matrice dites "*Matrice Transition*" qu'on notera " P " et sera de dimension " $n \times n$ ".

- On dit qu'un état " r " est absorbant si le marcheur atteint ce point et qu'il a une possibilité nulle de le quitter c.-à-d. s'il atteint ce point la marche s'arrête, ces points seront les bornes "+" ou "-" de notre générateur.
- On dit qu'un état " s " est non absorbant si le marcheur passe par ces points et continue sa marche.

Considérons une chaîne de Markov associée à notre circuit, " P " sa matrice de transition ayant " r " comme état absorbant et " s " état non absorbant, on organise la matrice de transition pour lui donner sa forme canonique telle que :

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

O : Matrice rectangulaire de zéro, taille " $r \times s$ ", la probabilité de transition d'un point absorbant à un point non absorbant ($P = 0$).

I : Matrice identité carrée de taille " $r \times r$ ", la probabilité de rester dans un point absorbant ($P = 1$)

R : Matrice rectangulaire de taille " $s \times r$ ", donne les probabilités de transition d'un point non absorbant vers un point absorbant.

Q : Matrice carrée de taille " $s \times s$ ", donne les probabilités de transition entre points non absorbants.

On introduit " N " la matrice fondamentale de la matrice " P " tel que :

$$N = (I - Q)^{-1} \quad (2.31)$$

Chaque élément « N_{ij} » donne le nombre espéré de fois que la chaîne démarre en " s_i " et visitera l'état " s_j " avant absorption. Si on regarde le développement en série entière :

$$(I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots \quad (2.32)$$

Les éléments de Q^k notés $q_{ij}(k)$ qui représentent la probabilité que la chaîne commence en " s_i " est atteint " s_j " en " k " étape. Si on représente un vecteur de même taille que le nombre de points non absorbants " $s \times 1$ " contenant des "1", on a : Le vecteur " t " est le nombre espéré de pas avant absorption pour chaque état puisque :

$$t_i = \sum_{j=1}^s N_{ij} \quad (2.33)$$

I : est évidemment augmentée à la taille de " Q " pour pouvoir faire la soustraction. Et on peut calculer la matrice des solutions " B " par :

$$B = N \cdot R \quad (2.34)$$

B : Les termes " i, j " de cette matrice donnent la probabilité de finir à l'état absorbant " j " partant de l'état non absorbant " i ".

2.5 Implémentation de résultats de simulation

La simulation a été réalisée sur un réseau initial de 100 fibres, on modifie le circuit par suppression de fibres, le choix des fibres à enlever sera aléatoire. Chaque fois que nous enlevons des fibres nous aurons une configuration particulière, et donc une conductivité équivalente pour ce taux de remplissage. Il est à noter que pour un même taux de remplissage plusieurs configurations du circuit sont possibles, et par conséquent autant de conductivités équivalentes. Plusieurs tirages seront nécessaires pour un même nombre de fibres enlevées ceci va permettre de faire une moyenne de la conductivité équivalente du circuit. L'algorithme qui a permis de résoudre ce système est implémenté sous MATLAB, les principales étapes sont décrites dans l'organigramme qui suit :

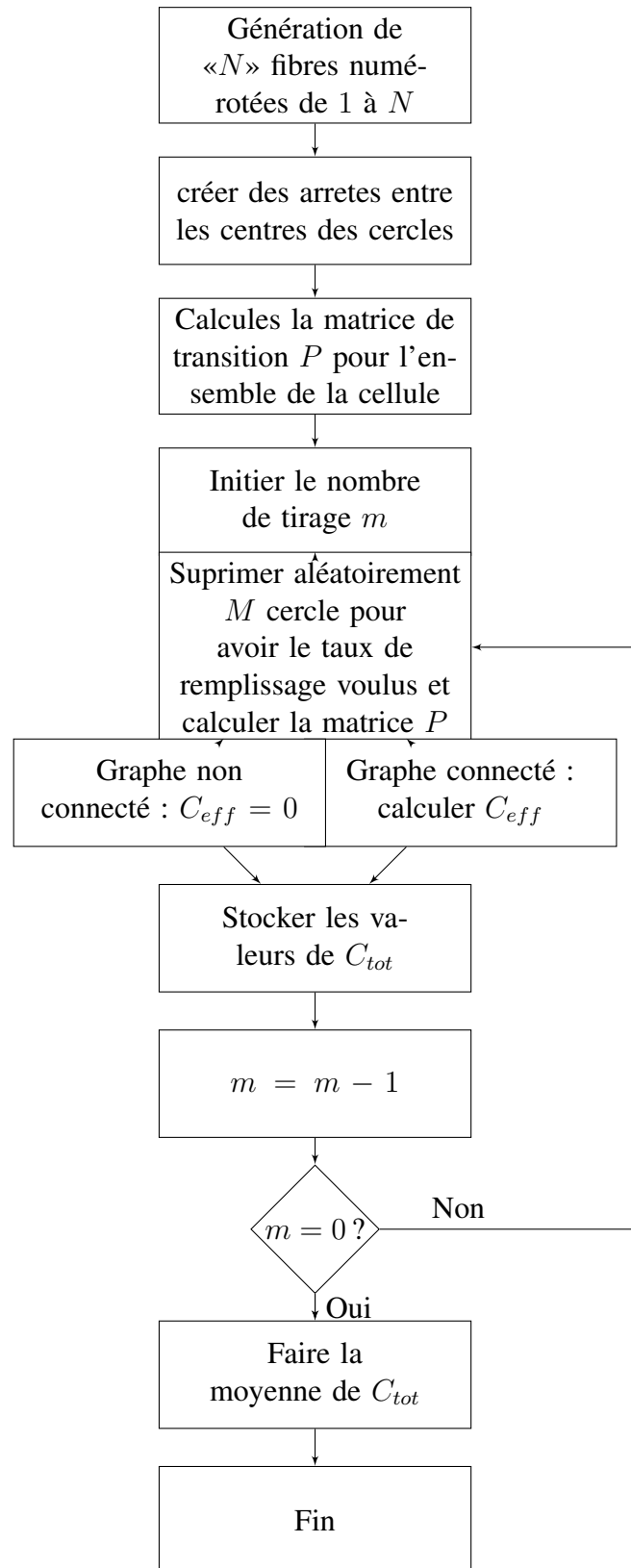


Figure 2.18 – Organigramme de résolution d'un réseau de résistances

La Figure 2.19 donne une comparaison entre les résultats obtenus par la théorie de la percolation et ceux utilisant un réseau de résistances basé sur la résolution avec les chaînes de Markov. Les valeurs numériques sont relativement proches de celle obtenues par les autres méthodes.

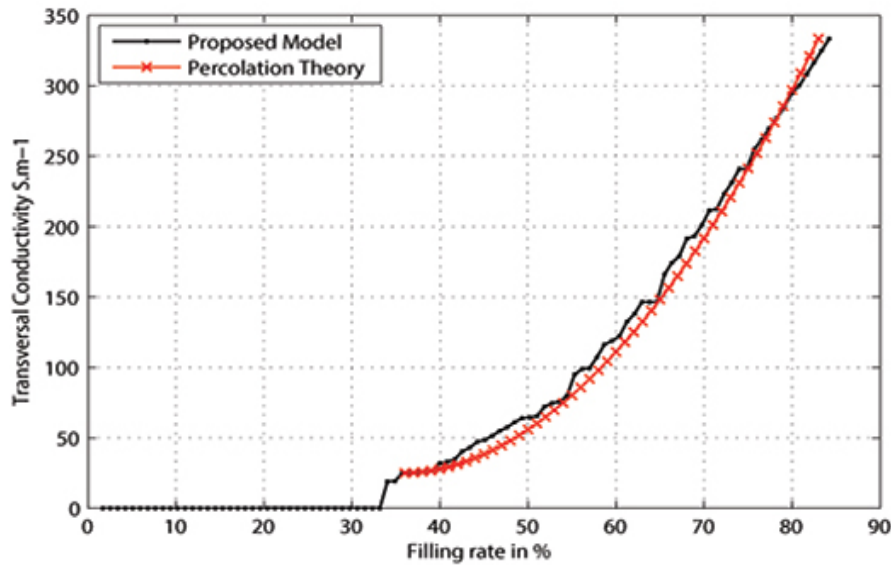


Figure 2.19 – Variation de la conductivité électrique transversale en fonction du taux de remplissage

Comme expliqués précédemment, les modèles qui se basent sur la théorie de la percolation nécessitent la détermination expérimentale du seuil de percolation et la conductivité maximale critique qu'on peut atteindre. Dans notre approche on se base sur des considérations simples, ces considérations prennent en compte le chemin aléatoire que peuvent prendre les courants et les résistances rencontrés dans ce parcours. Notre modèle prédit une conductivité électrique entre 140 – 160[S/m] pour un taux de remplissage d'environ 60% pour un CFRP unidirectionnel, ce qui correspond bien avec les valeurs obtenues expérimentalement données dans [PRP⁺09].

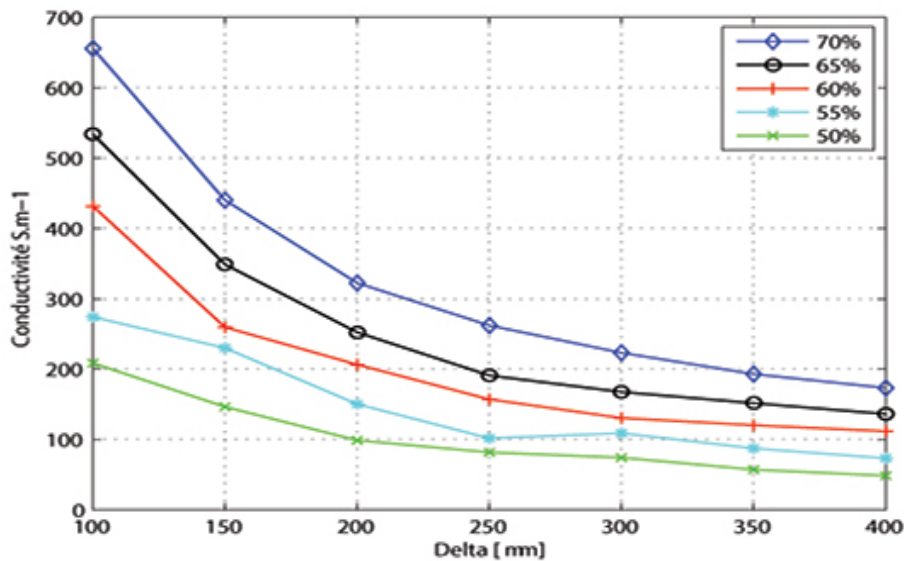


Figure 2.20 – L'effet de la distance moyenne entre deux contact sur la conductivité électrique transverse d'un CFRP.

Hormis le taux de remplissage des fibres, la distance moyenne " δ " est un paramètre très important, son influence est très significative sur la conductivité transversale du CFRP. La Figure 2.20 montre que la conductivité transverse est proportionnellement inverse à la distance moyenne entre deux contacts. Cette proportionnalité est d'autant plus importante que le taux de remplissage des fibres dans la matrice est élevé.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude bibliographique abordant les différentes méthodes de caractérisation des composites à fibres de carbone a été réalisée. Cette recherche a permis de comprendre que l'extraction de la conductivité électrique du point de vue expérimentale ou bien modélisation requiert une bonne compréhension de la circulation des courants dans le composite. Cette circulation des courants dépendra de la manière dans celui-ci sera excité. Si la conductivité longitudinale peut facilement être déduite par une simple loi de mélange calculé à partir des taux de remplissage et la conductivité des fibres utilisées ce n'est pas le cas les conductivités transversales aux fibres. Pour caractériser cette conductivité nous avons développé notre propre modèle qui a eu comme points de départ une observation la répartition des fibres dans la résine et les éventuels points de contact entre les fibres adjacentes. Ceci a permis de construire un réseau de résistance à partir duquel la conductivité transverse a été calculée en exploitant la méthode des chaînes de Markov absorbantes pour le calcul des tensions aux nœuds du réseau et la notion de probabilité d'échappement pour la conductance équivalente. Les résultats obtenus ont montré une bonne concordance avec ceux trouvés dans la littérature. L'exploitation de notre modèle

a permis de voir l'influence des principaux paramètres sur cette conductivité. Cependant, comme pour les autres modèles qui se basent sur la percolation par réseau de résistances, ce modèle ne prend pas en compte certains aspects liés aux défauts qui peuvent affecter le composite. Ces aspects seront abordés dans les prochains chapitres.

CHAPITRE 3

Rappel sur l'électromagnétisme et les techniques de résolution des problèmes multi-échelles

Dans ce chapitre on discutera essentiellement de l'interaction du champ électromagnétique avec le matériau CFRP. Un bref rappel des formulations des équations en électromagnétisme et les principaux travaux réalisés dans ce domaine seront exposés, puis on traitera des principales méthodes utilisées lorsque les paramètres des équations aux dérivés partielles dépendent de plusieurs échelles, et on justifiera le choix de la méthode adoptée pour être appliquée au contrôle par courants de Foucault. Ce chapitre présentera les points suivants :

3.1	Introduction	49
3.2	Rappels sur l'électromagnétisme	49
3.2.1	Équations de maxwell	49
3.2.2	Relations constitutives	50
3.2.3	Complexe de DeRham	50
3.2.4	Les conditions d'interface et condition aux limites	52
3.2.5	Formulation en potentiel des équations de Maxwell	53
3.3	Formulation magnétodynamique utilisée pour le CND	54
3.3.1	Formulation en " \mathcal{T} "	55
3.3.2	Formulation en " \mathcal{A} "	55
3.4	Méthode de résolution pour les problèmes classiques	56
3.5	Approche pour résoudre les problème multi-échelle	58
3.5.1	Approche série "Homogénéisation"	58
3.5.2	Approche parallèle "Techniques multi-échelles"	63
3.6	Conclusion	65

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on discutera essentiellement de l'interaction du champ électromagnétique avec notre milieu d'étude (CFRP). Pour ce faire, un bref rappel sera fait sur les notions de bases de l'électromagnétisme et les principales formulations utilisées pour la résolution des problèmes liés à l'induction électromagnétique. Puis, on exposera les principaux travaux réalisés dans le domaine du contrôle des CFRP par des techniques électromagnétiques. On traitera par la suite, des principales méthodes utilisées dans le cas où les paramètres des équations aux dérivées partielles dépendent de plusieurs échelles. on justifiera le choix de la méthode adoptée qui sera appliquée au contrôle par courant de Foucault.

3.2 Rappels sur l'électromagnétisme

Pour comprendre les phénomènes liés à l'électromagnétisme et pouvoir les étudier en vue de leur exploitation dans des applications industrielles, on aura besoin de connaître avec précision la répartition des champs magnétique et électrique dans les dispositifs à étudier. Cela passera forcément par la résolution (par apport au temps et l'espace) des équations différentielles aux dérivées partielles « EDP », et dont on va faire un bref rappel.

3.2.1 Équations de Maxwell

Tous les phénomènes électromagnétiques sont régis par des équations appelées "équations de Maxwell". Ces équations sont écrites en terme de champs sous forme d'EDP :

$$\text{Equation de Maxwell-Ampère : } \quad \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \quad (3.1a)$$

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday : } \quad \nabla \times \mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \quad (3.1b)$$

$$\text{Conservation du flux magnétique : } \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0, \quad (3.1c)$$

$$\text{Equation de Maxwell-Gauss : } \quad \nabla \cdot \mathcal{D} = \rho. \quad (3.1d)$$

A ces quatre équations on rajoute l'équation de la continuité qui spécifie la conservation des charges

$$\nabla \cdot \mathcal{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

Avec :

\mathcal{H} : le champ magnétique [A/m];

\mathcal{J} : la densité de courant [A/m^2];

\mathcal{D} : l'induction électrique [C/m^2];

\mathcal{E} : le champ électrique [V/m];

\mathcal{B} : l'induction magnétique [T].

ρ : la densité volumique de charge électrique [C/m^3].

Trois de ces cinq équations sont indépendantes (eq-3.1a,eq-3.1c et eq-3.2. Ces équations peuvent s'écrire sous forme d'intégrales sur des domaines on utilisant les théorèmes de la divergence et Stokes.

3.2.2 Relations constitutives

On sait que les inductions " \mathcal{B} " et " \mathcal{D} " dépendent des valeurs des champs " \mathcal{H} " et " \mathcal{E} ", mais également d'autres caractéristiques liés à la matière. On exprime généralement cette liaison par des relations dites relations constitutives. Ces relations nous donnent la réponse d'un milieu à une excitation électromagnétique. Dans les milieux conducteurs, la densité de courant est reliée au champ électrique par la loi d'Ohm :

$$\mathcal{J}_e = \sigma \cdot \mathcal{E} \quad (3.3)$$

où " σ " est la conductivité du milieu en [S/m], elle peut dépendre de diverses autres propriétés (température, tensions mécaniques, ...). Elle prend une forme tensorielle pour les milieux anisotropes tels que les CFRP. La relation liant " \mathcal{B} " et " \mathcal{H} " est exprimée par :

$$\mathcal{B} = \mu_0 \cdot \mathcal{H} + \mathcal{M} = \mu \cdot \mathcal{H} \quad (3.4)$$

Avec :

\mathcal{M} : vecteur d'aimantation pour certains matériaux

et " μ " la perméabilité magnétique en [H/m] comme déjà mentionné, Cette relation n'est pas biunivoque (phénomène d'hystérésis). de même, pour l'induction électrique :

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathcal{E} + \mathcal{P} = \varepsilon \cdot \mathcal{E} \quad (3.5)$$

Et comme déjà mentionné, la permittivité diélectrique du milieu matériel est notée " ε " donnée en [F/m], et " \mathcal{P} " le vecteur de polarisation.

3.2.3 Complexe de DeRham

C'est une structure mathématique continue qui accueille naturellement les champs décrits par les équations de Maxwell [Bos88]. Sans vouloir faire une description exhaustive, nous allons voir les relations qui lient les différentes grandeurs décrites dans les formulations qui seront présentées par la suite. Le complexe de DeRham va faire le lien entre quatre espaces vectoriels à travers trois opérateurs différentiels linéaires : Les espaces sont notés F^0 , F^1 , F^2 et F^3 , répartis en deux sous espaces : $L^2(F^0$ et $F^3)$ et $L^2(F^1$ et $F^2)$ tel que :

L^2 : Espace de fonctions vectorielles de carrés intégrables (fonctions qui peuvent être intégrées deux fois) dans un domaine Ω ;

L^2 : espace de fonctions scalaires de carrés intégrables dans un domaine Ω .

En électromagnétisme, on distingue principalement trois opérateurs différentiels qui sont des **grad** ($\nabla \cdot$ scalaire), **rot** ($\nabla \times$ vecteur) et **div** ($\nabla \cdot$ vecteur), ces derniers sont définis de manière à satisfaire les relations :

$$\text{grad}(F^0) \subset F^1 \text{rot}(F^1) \subset F^2 \text{div}(F^2) \subset F^3 \quad (3.6)$$

- $F^0 = \{u \in L^2, \text{grad}(u) \in L^2\}$ donc u appartient à L^2 (espace scalaire) et qui passe à un espace vectoriel L^2 par l'opérateur **gradient** ;
- $F^1 = \{u \in L^2, \text{rot}(u) \in L^2\}$: donc u appartient à L^2 (espace vectoriel) et passe à un autre espace vectoriel L^2 par l'opérateur **rotationnel** ;
- $F^2 = \{u \in L^2, \text{div}(u) \in L^2\}$: donc u appartient L^2 (espace vectoriel) et passe à un autre espace vectoriel L^2 par l'opérateur **Divergence**.

$$F^0 \xrightarrow{\text{grad}} F^1 \xrightarrow{\text{rot}} F^2 \xrightarrow{\text{div}} F^3$$

Les opérateurs liants les espaces vectoriels de cette manière sont appelés *complexes*. Pour les équations de Maxwell, les champs et les potentiels sont séparés en deux groupes (deux complexes) faisant paraître la notion de dualité. L'un regroupe les champs de type " \mathcal{E} - \mathcal{B} " (à gauche) et l'autre ceux de type " \mathcal{D} - \mathcal{H} " (à droite). Les opérateurs spatiaux (*grad*, *rot* et *div*) opèrent verticalement, tandis que les lois constitutives quant à elles opèrent horizontalement et effectuent ainsi le lien entre les deux groupes [Zac12], figure-3.1.

On observe que ce sont les intégrales de type circulation qui ont un sens physique pour les entêtes appartenant à F^1 . En effet, la circulation de " \mathcal{E} " (respectivement " \mathcal{A} " et " \mathcal{H} "), le long d'un contour " C " fournit une tension électrique U (respectivement un flux magnétique " Φ " et un courant " I "). Ce ne sont pas les champs et les potentiels en eux-mêmes qui ont une signification physique.

De même, ce sont les intégrales de type flux qui ont un sens dans F^2 : le flux de " \mathcal{B} " (resp. " \mathcal{D} " et " \mathcal{J} ") au travers d'une surface S donne un flux magnétique " Φ " (resp. une charge électrique nette " Q " et un courant " I "). Les champs scalaires de F^0 (v et φ) et F^3 (ρ) sont quant à eux destinés, respectivement à être évalués localement ou à être intégrés sur un volume " V " (pour donner une charge électrique " Q " dans le cas de " ρ "). Ces constatations sont capitales dans la mesure où elles vont conditionner la manière dont les champs et les potentiels seront approchés par la méthode des éléments finis.

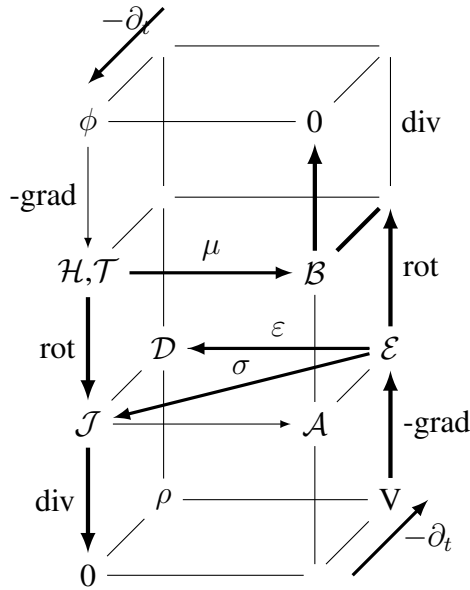


Figure 3.1 – Structure de Rham.

3.2.4 Les conditions d'interface et condition aux limites

Les équations de Maxwell forment un système d'équations avec une infinité de solutions. Pour résoudre un tel système il faudra assurer l'unicité de la solution (moyennant une jauge) pour une configuration donnée. Il faut spécifier les valeurs du champ sur les bornes du domaine d'étude ainsi que les valeurs initiales pour les problèmes dynamiques (dépendant du temps). On doit ajouter à cela les conditions que les champs doivent satisfaire lors de passage entre deux milieux différents constituant le domaine d'étude :

Conditions d'interface

Pour deux milieux " Ω_i " et " Ω_j " de frontière " Γ_{ij} " orienté de " i " vers " j " et " n " vecteur normal sur cette frontière, les conditions sur les champs sur la frontière doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$n \times (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j) = 0, \quad (3.7a)$$

$$n \times (\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_j) = \mathcal{J}_{surf}, \quad (3.7b)$$

$$n \cdot (\mathcal{D}_i - \mathcal{D}_j) = \rho_{surf}, \quad (3.7c)$$

$$n \cdot (\mathcal{B}_i - \mathcal{B}_j) = 0. \quad (3.7d)$$

ρ_{surf} : La densité de charge surfaciques présentes sur la frontière

\mathcal{J}_{surf} : la densité de courant surfaciques présentes sur la frontière.

Dans le cas quasi-statique on ajoute la condition :

$$n \cdot (\mathcal{J}_i - \mathcal{J}_j) = 0 \quad (3.8)$$

Conditions aux limites

Lors de la modélisation d'un dispositif électromagnétique on délimite le domaine d'étude " Ω " par une frontière " $\Gamma = \partial\Omega$ ", qui n'est d'autre qu'une interface avec un domaine externe sur lequel les valeurs du champ (tangentes ou normales) sont déjà connues conditions (Dirichlet, Neumann ou bien Lorentz).

3.2.5 Formulation en potentiel des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell décrites précédemment sont des EDP de premier ordre pour les champs " \mathcal{H} ", " \mathcal{E} ", " \mathcal{B} " et " \mathcal{D} ". Ces dernières sont dites formulations en champs. Dans ces formulations, les équations sont exprimées en termes de " \mathcal{E} " et " \mathcal{H} " ou bien de " \mathcal{D} " et " \mathcal{B} " et ceci par l'utilisation des relations constitutives. Une autre alternative est d'écrire les équations de Maxwell en termes de variables intermédiaires appelées potentiels (scalaire ou vecteur). Ceci est possible en transformant les EDP du premier ordre écrites en fonction de deux champs en une EDP de second ordre avec un seul champ. Cette simplification des modèles en terme de potentiels est souvent obtenues comme nous allons le voir :

Potentiel vecteur magnétique et Potentiel scalaire électrique $\mathcal{A} - V$

D'après Gauss-Maxwell la divergence de l'induction magnétique est nulle (eq-3.1c) ce qui implique qu'elle dérive d'un potentiel vecteur qu'on notera " \mathcal{A} " [BP89] :

$$\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A} \quad (3.9)$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday (eq-3.1b) :

$$\mathcal{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \quad (3.10)$$

\mathcal{A} : Potentiel vecteur magnétique ;

V : Potentiel scalaire électrique.

On voit que le champ électrique " \mathcal{E} " dérive d'une variation spatiale d'un potentiel scalaire électrique noté " V " et d'une variation temporelle d'un potentiel vecteur magnétique " \mathcal{A} ".

Potentiel vecteur électrique et Potentiel scalaire magnétique $T - \Phi$

Dans la plupart des problèmes de modélisation en électrotechnique, on considère qu'on a deux types de densité de courant :

\mathcal{J}_s : Densité de courant source en [A/m^2]

\mathcal{J}_e :densité de courant induit dans les parties conductrices du dispositif en $[A/m^2]$
 \mathcal{J}_s " est souvent prise comme une grandeur constante. Ceci nous permet de décomposer la densité du courant " \mathcal{J} " comme suit :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_e + \mathcal{J}_s \quad (3.11)$$

Sachant que les lignes de courant se bouclent sur elles mêmes (en l'absence de charges), la divergence de la densité de courant est nulle ($\nabla \cdot \mathcal{J} = 0$). On pourra déduire alors :

$$\mathcal{J} = \nabla \times \mathcal{T} \quad (3.12)$$

En appliquant l'équation Ampère-Maxwell (eq-3.1a), on aura :

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} - \nabla \Phi \quad (3.13)$$

\mathcal{T} : Potentiel vecteur électrique ;

Φ : Potentiel scalaire magnétique.

Il est à noter que lors de la résolution en formulation " $\mathcal{T} - \Phi$ ", le potentiel " \mathcal{T} " existe seulement dans les parties conductrices, tandis que le potentiel " Φ " se trouve partout dans le domaine d'étude.

Les potentiels vecteurs " \mathcal{A} " et " \mathcal{T} " ne sont pas uniques. Ils sont définis à un gradient près, sachant que d'après l'analyse vectorielle, pour qu'un vecteur soit défini, on doit connaître sa divergence et son rotationnel (théorème de Helmholtz). Dès lors, on peut choisir arbitrairement une relation scalaire appelée jauge. Souvent, on choisit la jauge de Coulomb pour le potentiel vecteur magnétique " \mathcal{A} " :

$$\nabla \cdot \mathcal{A} = 0 \quad (3.14)$$

D'autres jauges peuvent être utilisées [AR90]. De même pour le potentiel électrique " \mathcal{T} ", on peut lui fixer comme jauge :

$$\nabla \cdot \mathcal{T} = 0 \quad (3.15)$$

3.3 Formulation magnétodynamique utilisée pour le CND

La modélisation mathématique des problèmes électromagnétiques mettant en jeu des courants de Foucault comme c'est le cas du CND-CF, peut être traitée par différentes formulations en potentiels. Elle est basée sur les équations de Maxwell en régime quasi-statique. Ces formulations en potentiel sont obtenus en utilisant un potentiel vecteur ou un potentiel scalaire, ou bien une de leur combinaison. Plus de détails pourront être trouvés dans [KI08]. Parmi les formulations les plus utilisées on peut citer le " $\mathcal{A} - V$ " ou " $\mathcal{T} - \Phi$ ". Le domaine type utilisé pour représenter un problème de courants de Foucault sera

constitué d'un matériau conducteur " Ω_c ", une source de champs " Ω_s " (bobine) entouré par l'air " Ω_{air} ". Ceci est schématisé par la figure qui suit :

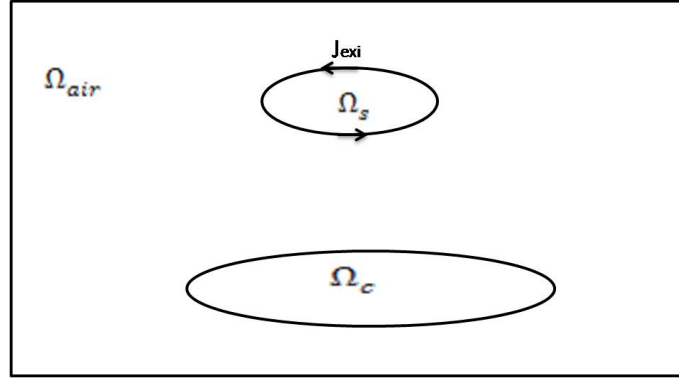


Figure 3.2 – Domaine d'étude.

3.3.1 Formulation en " \mathcal{T} "

Pour cette formulation, suivant les courants qui leur ont donné naissance, le champ magnétique est décomposé en deux parties :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_s \quad (3.16)$$

Où " \mathcal{H}_s " vient des courants de la source et " \mathcal{H}_e " vient des courants induits [Hen04]. En utilisant les équation 3.3 et 3.13 dans l'équation Maxwell-Faraday (eq-3.1b) :

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\mathcal{J}_e}{\sigma} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{T} - \nabla \Phi) \\ \nabla \times \frac{1}{\sigma} (\nabla \times \mathcal{T} - \mathcal{J}_s) &= -\mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \mu \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

En arrangeant les termes :

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma} (\nabla \times \mathcal{T}) + \mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} - \mu \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \nabla \times \frac{\mathcal{J}_s}{\sigma} \quad (3.17)$$

Pour cette équation, on utilise une méthode hybride où le terme source est calculé par la méthode de Biot et Savart [Men09].

3.3.2 Formulation en " \mathcal{A} "

On peut formuler ce problème en utilisant le potentiel vecteur magnétique " \mathcal{A} " couplé au potentiel électrique " V " puis en remplaçant l'équation 3.10 dans 3.3 :

$$\mathcal{J}_e = -\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \quad (3.18)$$

Si on considère le cas bidimensionnel, où la jauge de coulomb est naturellement satisfaite dans un régime quasi-statique c.-à-d. que les courants de déplacement sont négligés ($\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = 0$), et sachant qu'on alimente le dispositif par une source de courant ($\nabla V = 0$) et on obtient moyennant le remplacement de 3.9, 3.11 et 3.16 dans 3.1a, ce qui suit :

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathcal{A}) - \sigma \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\mathcal{J}_s \quad (3.19)$$

Il convient de noter que pour des régimes sinusoïdaux, on travaille dans le domaine fréquentiel. En remplaçant la dérivée par rapport au temps " $\frac{\partial}{\partial t}$ " par " $j\omega$ ", on obtient :

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathcal{A}) - j\omega\sigma\mathcal{A} = -\mathcal{J}_s \quad (3.20)$$

j : le nombre imaginaire

ω : la pulsation électrique qui égale à " $2\pi f$ " en [rad/s]

f : la fréquence d'alimentation du signal en [Hz]

D'autres formulations existent aussi [Kuc09]. Nous n'allons pas les détailler car elles ne seront pas utilisées dans cadre de cette thèse. Pour les deux formulations abordées, nous avons adopté la formulation en potentiel vecteur magnétique " \mathcal{A} " en régime sinusoïdal. Cette dernière est adaptée à la modélisation traitée surtout lorsque les paramètres du milieu (conductivité électrique) dépendent de plusieurs échelles comme c'est le cas pour du CFRP. Généralement, on note un paramètre (conductivité électrique, ou perméabilité magnétique) qui dépend de plusieurs échelles par " $a^\epsilon(x, x/\epsilon)$ "; il en sera de même pour la solution de l'équation qui sera notée " u^ϵ " (potentiel vecteur électrique ou magnétique). On doit comprendre que la dépendance du paramètre " a^ϵ " à la variable " x " est utilisée pour décrire le matériau dans l'échelle macroscopique. Si nous sommes dans un modèle unidimensionnel, on aura " $x = x$ ", ou bidimensionnel " $x = (x, y)$ ", ou tridimensionnel " $x = (x, y, z)$ ". tandis que la dépendance à " x/ϵ " décrit quant à elle la variation à l'échelle micro [Fre12]. Donc l'équation de la magnétodynamique (eq-3.20) peut être réécrite :

$$\nabla \times \frac{1}{\mu^\epsilon} (\nabla \times \mathcal{A}^\epsilon) - j\omega\sigma^\epsilon \mathcal{A}^\epsilon = -\mathcal{J}_s \quad (3.21)$$

3.4 Méthode de résolution pour les problèmes classiques

Une fois cette équation posée, nous allons rappeler brièvement les méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution de ces problèmes, plus précisément, celles appliquées lors de l'interaction du champ électromagnétique avec les CFRP.

Méthodes des équations intégrales :

Il existe plusieurs variantes : méthode des moments [HH96], méthode des éléments de frontière [Zhe97], Méthode PEEC "Partial Element Equivalent Circuit". Dans ces méthodes on cherche à approcher la solution par une somme de solutions élémentaires, en se

basant sur le principe de la superposition et de la linéarité, vu que les domaines considérés par ces méthodes présentent un rapport surface sur volume assez petit. Leur principe consiste à reformuler un problème régi par des EDP linéaires, sous une forme d'équations intégrales dont les supports géométriques coïncident avec la frontière du domaine. On discrétise cette intégrale à l'aide de fonctions de base et des fonctions de pondérations pour aboutir à un système équations algébriques.

Méthode des différences finies (MDF)

Elle consiste à approcher l'opérateur différentiel par une différence finie équivalente. Ceci se fait à l'aide d'un développement de Taylor tronqué. Pour ce faire on passera par trois étapes :

1. Diviser le domaine d'étude en une grille de points ;
2. Construire la différence finie en reliant la valeur de la fonction inconnue en un point à ses voisins ;
3. Résoudre le système d'équations obtenues en imposant les conditions aux limites appropriées.

Plusieurs extensions de cette méthode peuvent être envisagées : par exemple pour les systèmes dynamiques, la FDTD (Finite Difference Time Domain) ou bien pour un traitement numérique spécial pour limiter le temps de calcul la HR FDTD (High Resolution FDTD) ou la HD FDTD (High Definition FDTD).

Méthode des volumes finis (MVF)

Comme pour la MDF, elle propose une partition du domaine d'étude en éléments appelés "Volume de contrôle". Contrairement à la MDF, elle utilise une approximation de la solution en intégrant l'équation sur le volume de contrôle.

Méthode des éléments finis (MEF)

Comme pour les autres méthodes, elle est basée sur deux types de discrétisations :

1. Une première qui concerne le domaine d'étude. Sa géométrie est décomposée en éléments simples (triangle ou rectangle en 2D, tétraèdre ou prisme en 3D) ; constituant ce qui est communément appelé maillage.
2. La deuxième c'est l'approche de l'inconnue (champ ou potentiel) par une somme finie de fonctions de base (fonctions de forme) définies sur les éléments géométriques du maillage. Ces fonctions sont choisies de manière à n'être différentes de zéro que sur un nombre très restreint des éléments du maillage.

Une fois ces discrétisations opérées, elles seront introduites dans la forme intégrale de l'équation obtenue. Ceci grâce au principe variationnel ou la méthode des résidus pondérés, donnant comme résultat un système d'équations ayant pour coefficients une matrice creuse facilitant grandement le stockage, même pour un nombre élevé d'inconnues. Cependant pour des problèmes multi-échelle, le nombre d'inconnues sera impossible à prendre en charge. Comme pour les autres méthodes qui ont été citées, cette dernière repose sur le même schéma numérique, à savoir une discrétisation complète du domaine continu par nature en de petits domaines (volumes ou surfaces) sur lesquels la solution (l'inconnue elle même, sa dérivée ou son intégrale) est approximée par une expansion à l'aide de fonction et de paramètres finis. Le choix de l'une de ces méthodes dépendra de la nature du problème à résoudre, comme pour les problèmes liés aux matériaux hétérogènes multi-échelles tels que les composites à fibres. Toutes ces méthode sont déjà été utilisées (voir les citation), mais cela a nécessité le passage par une phase d'homogénéisation au préalable.

3.5 Approche pour résoudre les problème multi-échelle

Les modèles mathématiques qui décrivent une physique sur des matériaux composites mettent souvent en jeu des EDP. Ces modèles nécessitent l'application de méthodes basées sur une discrétisation du domaine d'étude comme déjà mentionné au précédant paragraphe. Si on prend " h " comme taille d'élément pour discrétiser un domaine avec des hétérogénéités de taille " l ", l'obtention d'une solution acceptable avec l'une des méthodes citées auparavant nécessitera la satisfaction de la condition :

$$h < l \tag{3.22}$$

Or pour des composites présentent des hétérogénéités de l'ordre du micron comme c'est le cas pour les fibres de carbone, avec une taille de quelques mètres pour domaine d'étude. Le recours aux méthodes classiques de résolution sera inadéquat, vu le nombre d'inconnues qui sera généré. Ainsi on doit avoir recours à d'autres approches du type homogénéisation.

3.5.1 Approche série "Homogénéisation"

L'homogénéisation est une théorie mathématique ou plus précisément une analyse asymptotique (développement limité des fonctions près de l'infini) qui tire ses origines de la science des matériaux. Elle vise à expliquer la manière dont les relations constitutives des matériaux hétérogènes (composite) seront obtenues à partir de leurs constituants de base connaissant leurs dimensions et leurs distributions. Pour pouvoir mettre en œuvre cette méthode, il convient de définir les dimensions du domaine d'étude ainsi que des hétérogénéités qui le composent. On peut distinguer trois échelles hiérarchisées qu'on va appeler [Mil02] :

- Echelle Microscopique " L_1 " : où la longueur " L_1 " représente la plus grande longueur d'une hétérogénéité présente dans le matériau composite ;
- Echelle Méso-scopique " L_2 " : une échelle intermédiaire caractérisée par une longueur " L_2 " pour laquelle le composite apparaît "statistiquement homogène" ou bien périodique et/ou le champ calculé varie lentement. Cette échelle est celle utilisée pour le calcul mathématique du Volume Élémentaire Représentatif (VER en anglais :RVE) ; ce qu'on appelle : Cell-problem ;
- Echelle Macro " L_3 " :elle est caractérisée par une longueur " L_3 " qui doit être la même que celle du matériau composite

$$L_1 < L_2 < L_3$$

L'une des difficultés qu'on peut rencontrer lors des problèmes d'homogénéisation c'est d'avoir une taille optimale du VER sur laquelle on peut calculer les propriétés effectives du matériau. Ceci repose principalement sur la structure due à l'échelle méso, celle ci peut présenter un caractère périodique, quasi périodique ou bien aléatoire. Pour les structures présentant une périodicité, la taille de la cellule doit correspondre à la période correspondante. Pour les matériaux qui présentent une distribution aléatoire des hétérogénéités, les dimensions de la cellule doivent être choisies de manière à obtenir une bonne représentabilité statistique.

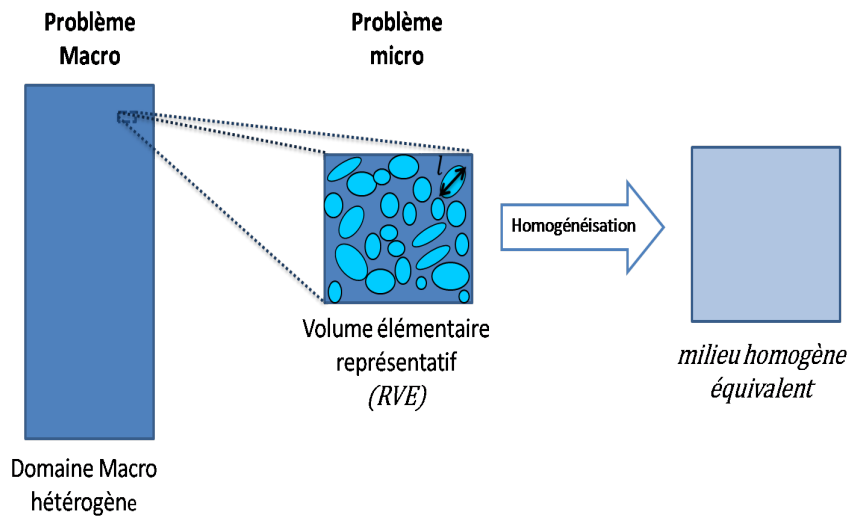


Figure 3.3 – Principe d'homogénéisation.

Techniques d'homogénéisation

D'une manière générale, les techniques d'homogénéisations ont pour but de calculer les propriétés physiques équivalentes (propriétés effectives) d'un matériau hétérogène. Ceci en découpant le domaine d'étude dit "macro domaine" en cellules élémentaires (VER). Un système d'équations qui régit la physique du macro domaine (équation magnétostatique, magnétodynamique, thermique ,...etc.) est résolu sur la cellule élémentaire.

A partir de la résolution de ce système d'équations appelé micro problème, on pourra obtenir la propriété effective qui va être utilisée dans le macro domaine pour résoudre l'équation macro. Cette procédure peut être décomposée en trois grandes étapes :

1. Représentation du domaine : description mathématique du matériau hétérogène dans le domaine RVE, décrivant les formes des hétérogénéités, leurs distributions (périodique, aléatoire) ainsi que la fraction volumique ;
2. Localisation : cette étape vise à faire le lien entre les grandeurs macro et micro (développement asymptotique, linéarisation de la solution, moyenne,...) ;
3. Calcul du paramètre effectif.

Cette approche peut être vue comme une approche série dans laquelle on doit d'abord calculer les propriétés équivalentes du matériau réel. Ces dernières seront utilisées pour avoir un matériau homogène équivalent possédant le même comportement macroscopique que le matériau réel. Après cette étape, on procède à la résolution du problème proprement dit.

homogénéisation analytique

L'homogénéisation dans l'électromagnétisme est dominée par les méthodes numériques, mais souvent, on a recourt aux méthodes analytiques pour un pré-dimensionnement des matériaux hétérogènes [Pré13]. Parmi les méthodes les plus utilisées, on trouve celles qui ont pour but de trouver les bornes supérieures et inférieures du paramètre effectif. Ces méthodes sont abondamment utilisées en mécanique pour l'obtention des bornes du tenseur de rigidité des matériaux en stratifié [Voi89] et [Reu29]. Cette idée a été transposée en électromagnétisme par [Wie12] pour les structures en stratifié telles que le CFRP. Lors du calcul de la conductivité électrique équivalente, on remarque que même si les couches qui composent le stratifié sont isotropes, le tenseur équivalent ne l'est pas forcément. Ceci est dû principalement aux différences des dimensions des couches. La composante du tenseur sur l'axe des abscisses sera calculée par une moyenne arithmétique (pondéré), et celle sur l'axe des ordonnées sera calculée par une moyenne harmonique :

$$\langle c \rangle_{arith} = \frac{\sum_1^n w_i \dot{c}_i}{\sum_1^n w_i} \quad (3.23)$$

Avec w_i les poids de la pondération qui représentent les épaisseurs des couches du stratifié.

$$\langle c \rangle_{harm} = \frac{\sum_1^n w_i}{\sum_1^n \frac{w_i}{c_i}} \quad (3.24)$$

Généralement, les composantes de la conductivité effective c_{ii}^{eq} sont limitées par ces deux moyennes, tel que :

$$c^{harm} \leq c_{ii}^{eq} \leq c^{arith} \quad (3.25)$$

Cette limite est connue par le nom de limite de *Wiener* ou bien *Voigt-Reuss*

homogénéisation numérique (approche série)

Les méthodes d'homogénéisation numériques sont principalement basées sur le calcul des champs dans une cellule unitaire par la méthode des éléments finis [NSDG12],[WTF13],[BDLBB⁺12]. Plusieurs méthodes peuvent être citées :

homogénéisation asymptotique

Cette méthode nous donne le tenseur effectif du matériau hétérogène présentant une périodicité à l'échelle microscopique. Le principe de cette méthode repose sur un développement asymptotique de l'inconnue de l'équation qui décrit la physique du système :

$$\mathcal{H}^\epsilon = \mathcal{H}_0(x, y) + \epsilon \mathcal{H}_1(x, y) + \epsilon^2 \mathcal{H}_2(x, y) + \epsilon^3 \mathcal{H}_3(x, y) + \dots \quad (3.26)$$

Avec : $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3, \dots$ des fonctions périodiques dans l'échelle micro " y ". On introduit ce développement dans l'équation qui nous concerne ; il en résulte une cascade d'équations. En égalisant les termes suivant les puissances de " ϵ ", on obtient un ensemble d'équations permettant de calculer " $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3, \dots$ etc". Dès lors les paramètres effectifs seront calculés par des intégrales appropriées sur une période donnée. Il est à noter que la méthode d'homogénéisation asymptotique exige, en plus de la séparation des dimensions du système, une séparation des échelles des grandeurs caractéristiques du phénomène physique. Par exemple dans le cas d'une onde, il faut que la longueur d'onde soit plus grande que la taille de la cellule [ABG10].

homogénéisation dynamique

Cette méthode a été beaucoup utilisée dans des travaux de thermo-inductique au sein de notre laboratoire [Tri00],[Ben06]. Elle tire profit de la différence entre la variation des grandeurs dans les deux échelles en question (micro et macro). La variation des champs dans les structure micro (dimensions du RVE) est considérée comme étant rapide contrairement à ce qui se passe à l'échelle macro (dimension globale du système) où cette dernière est considérée comme lente. Donc le champ total sera vu comme une superposition de ces deux composantes lente et rapide.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \tilde{\mathcal{H}} \quad (3.27)$$

\mathcal{H}_0 : Composante rapide du champ dans l'échelle micro ;

$\tilde{\mathcal{H}}$: Composante lente du champ dans l'échelle macro.

Un filtrage spatial du champ permet d'éliminer la composante haute fréquence. Le champ filtré " $\tilde{\mathcal{H}}$ " s'obtient par un produit de convolution entre le champ " \mathcal{H} " et un filtre passe-bas.

Homogénéisation par champ moyen

Pour pouvoir déduire le tenseur de conductivité effective, cette méthode propose de faire le lien entre la densité de courant moyen désigné par $\langle \sigma \cdot \nabla V \rangle$ qui traverse la cellule et

le champ électrique moyen $\langle \nabla V \rangle$ à l'intérieur cette cellule (qui sera mis comme constant par hypothèse). La constante de proportionnalité qui lie ces deux grandeurs est notée " C^* ". Elle désignera le tenseur homogénéisé :

$$\langle \sigma \cdot \nabla V \rangle = C^* \cdot \langle \nabla V \rangle \quad (3.28)$$

Pour déterminer " C^* ", nous devons résoudre l'équation dans l'échelle micro avec des conditions aux limites qui imposent un champ électrique constant à l'intérieur de la cellule " $\langle \nabla V \rangle = C^{ste}$ " :

$$\nabla_y(\sigma(y) \cdot \nabla_y V) = 0 \quad (3.29)$$

L'indice " y " désigne l'échelle microscopique. Une fois le potentiel " V " calculé, il nous restera la déduction de la densité de courant " $\sigma(y) \cdot \nabla_y V$ " et le champ électrique " $\nabla_y V$ " qui traverse cette cellule pour avoir " C^* ". Il est à noter que les conditions aux bords qui seront imposés sur la RVE sont appelées Dirichlet-Neumann imposant une différence de potentiel entre les deux cotés qui se font face (Dirichlet) et une densité de courant constante sur le reste

Synthèse des méthodes

Comme déjà mentionné, ces approches ont pour but de calculer le tenseur effectif du matériau avec des hétérogénéités fines, ceci en partant d'une cellule représentative prise à l'échelle micro sur laquelle le micro problème est résolu. Ce dernier est une cascade d'équations obtenues à partir de la réécriture de l'équation macro dans laquelle on remplace le champ inconnu par son développement. Ce dernier contient les deux composantes macro et micro. Une fois le tenseur effectif obtenu, il est utilisé pour voir le comportement du matériau homogénéisé soumis à des sollicitations externes. Cette approche série nécessite des hypothèses sur la périodicité (RVE) et une bonne séparation des échelles. L'un de ses inconvénients, c'est le fait qu'elle élimine la possibilité de simuler un défaut dans l'échelle micro à l'intérieur du matériau en question, vu que le matériau une fois homogénéisé l'influence de ses constituants micro n'est plus prise en compte. De ce constat, on voit que pour modéliser un contrôle par courants de Foucault sur des CFRP avec des défauts de type : manque de fibres ; inclusion, mauvais taux de remplissage,...etc., les techniques d'homogénéisation peuvent se révéler handicapantes. De ce fait on s'est orienté vers l'autre approche dite multi-échelles.

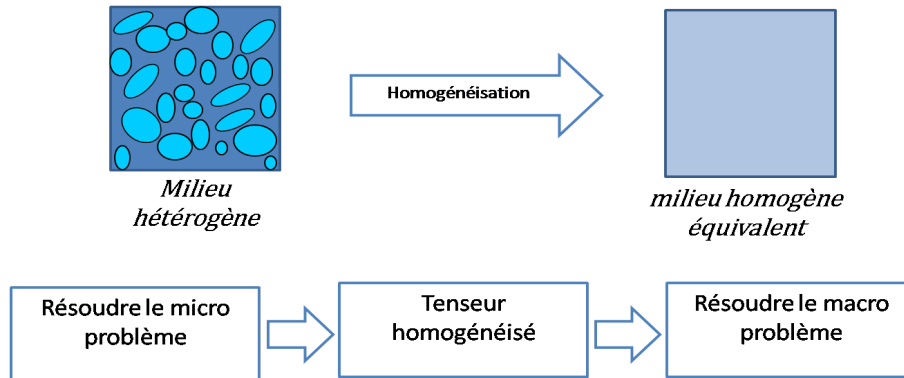


Figure 3.4 – Synthèse de l'approche multi-échelles série.

3.5.2 Approche parallèle "Techniques multi-échelles"

Pour les méthodes multi échelles adoptées dans notre travail, le choix s'est porté sur des méthodes ayant pour base la méthode des éléments finis (EF). On sait que pour modéliser le comportement macro exact, il serait impératif d'avoir un maillage qui prenne en compte l'ensemble du domaine d'étude, même si, les constituants de base de ce domaine sont trop petits. Procéder ainsi pour des hétérogénéités à l'échelle du micron (comme c'est le cas pour les fibres dans les CFRP) serait très compliqué vu les capacités de calcul des ressources informatiques dont nous disposons actuellement. Cependant quelques approches existent pour contourner ce problème :

Multi Scale-FEM (MS-FEM)

L'objectif principal de cette approche est d'obtenir la solution homogénéisée avec précision, ceci en résolvant l'équation originale avec un " ϵ " fixe, sans avoir à résoudre les micro problèmes comme c'est le cas pour les techniques d'homogénéisation. L'idée est de construire un maillage éléments finis standard avec des fonctions de bases locales calculées numériquement à l'aide d'un maillage micro. Ces fonctions de base vont prendre en compte les variations de la structure de la micro échelle pour chaque élément du maillage macro. Ces informations sur les hétérogénéités dans l'échelle fine sont utilisées pour la résolution du macro problème. Cela se fait en incorporant ces hétérogénéités dans la matrice de rigidité globale [HW97]. Les principales étapes de cette méthode sont :

1. Construire un maillage EF standard sur le domaine macro sur lequel les valeurs nodales du champ de l'inconnue sont calculées. Pour illustrer nos propos, nous prendrons comme exemple l'équation de diffusion avec des conditions aux bords, tel que :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot A^\epsilon(x) \nabla u^\epsilon = f & \text{sur } \Omega, \\ u^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.30)$$

2. Dans chaque macro-élément " K " un micro-maillage est construit. Son but est de calculer numériquement des fonctions de base " Φ_i^ϵ " appelées aussi les paramètres locaux effectifs qui contiennent les oscillations du paramètre multi échelle. Sachant qu'au même titre que la méthode des éléments finis classique, ces fonctions de bases dépendent du maillage, donc du coup elles vont dépendre aussi de la structure micro discrétisée. Il est à noter que plusieurs méthodes existent pour le calcul de ces paramètres locaux effectifs. Chacune d'elle donnera une variante de la MsFEM [AB05], [EHG⁺04]. Ce qui revient à écrire l'équation dans l'élément " K " :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot A^\epsilon(x) \nabla \Phi_i^\epsilon = 0 & \text{sur } K, \\ \Phi_i^\epsilon = x_i & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (3.31)$$

Avec " x_i " les nœuds à l'intérieur de " K ". Généralement pour réduire les erreurs de résonance résultant de la différence entre la taille du macro élément et celle de la taille caractéristique de l'hétérogénéité, on utilise des techniques dites "*Oversampling*"; ce qui implique la résolution du problème sur un domaine plus large que l'élément " K ", en ne rapportant à l'échelle macro que les solutions calculées à l'intérieur de " K ". On résout l'équation 3.30 en utilisant les fonctions de base calculées dans l'étape précédente. L'un des avantages de cette méthode, c'est quelle se prête facilement au calcul parallèle. Cependant, même si la parallélisation améliore le temps de calcul, elle ne va pas réduire la taille du problème discrétisé; surtout que la MsFEM implique une discrétisation complète du problème pour que les fonctions de base captent les détails de l'échelle fine. Par conséquent, la complexité de calcul est proportionnelle au nombre d'inconnues dans le problème à l'échelle micro. Ce qui rend cette méthode très couteuse pour les problèmes qui ne présentent pas de périodicité.

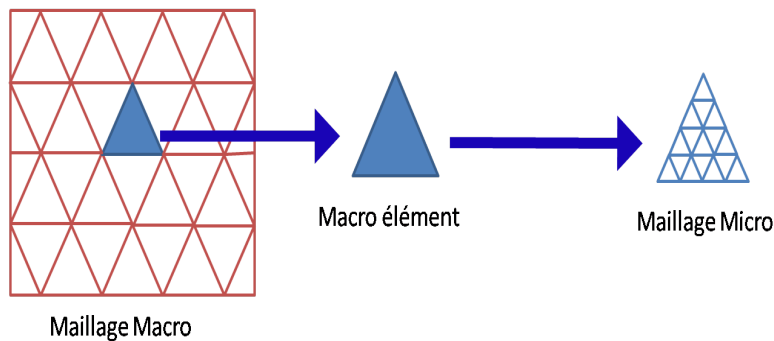


Figure 3.5 – Principe de Multi-scale FEM.

Finite elements Heterogeneous multiscale method (FE-HMM)

Comme pour la MsFEM, le but de cette méthode est le calcul de la solution homogénéisée sans calculer le tenseur homogénéisé de manière explicite, en s'appuyant seulement sur les données de l'équation qui régit le phénomène à l'échelle macro. Contrairement à la MsFEM, on aura besoin de ne connaître que le paramètre multi échelle (conduc-

tivité électrique dans notre cas) sur certains endroits à l'intérieur des éléments du maillage macro qu'on appellera domaine échantillon. Ceci va donner un avantage certain pour traiter un problème de CND-CF sur des CFRP. Sachant qu'en pratique, on n'a accès qu'à une petite partie de la structure à l'échelle fine grâce au microscope électronique ou bien à la tomographie, nous donnant ainsi une vision de la distribution des fibres à l'intérieur du polymère dans un CFRP. Ceci donne des perspectives intéressantes pour la simulation. Le développement l'application de cette méthode fera l'objet du prochain chapitre.

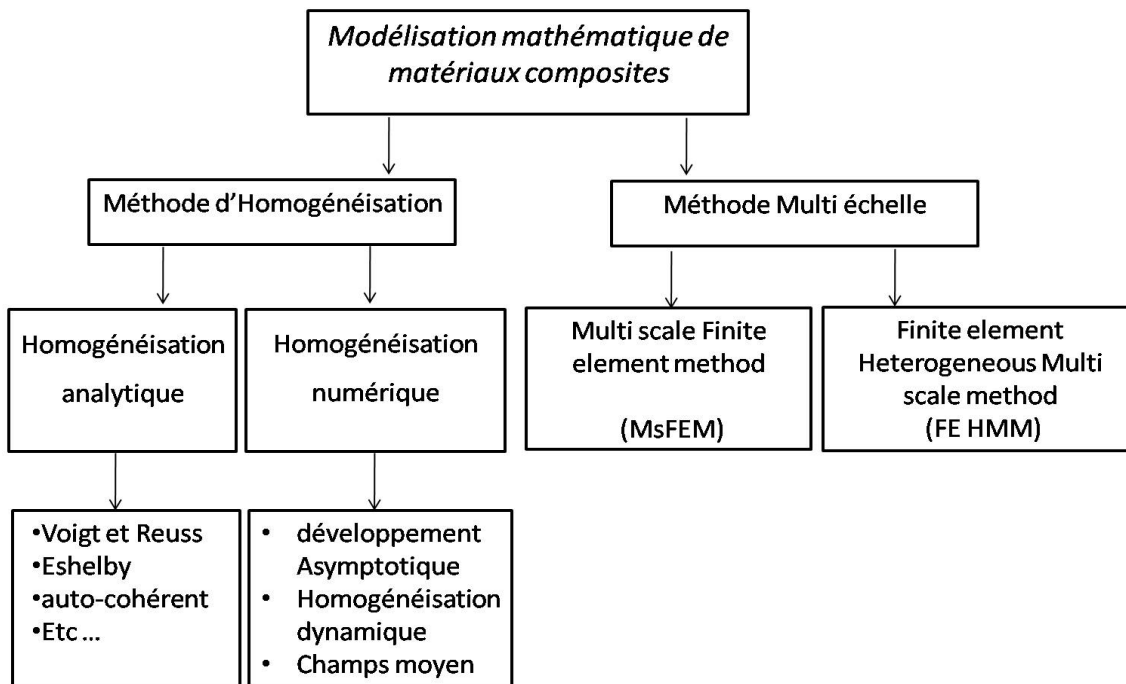


Figure 3.6 – Synthèse des techniques utilisées pour modéliser les composites.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a rappelé d'une manière générale les équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques et les formulations qui en découlent. Pour pouvoir en suite en déduire la formulation qui sert à décrire le CND par courant de Foucault sur des matériaux avec des hétérogénéités se trouvant à une échelle microscopique. Un rappel non exhaustif des méthodes les plus utilisées qui traitent de ces problèmes a permis de voir les limites d'applications des méthodes d'homogénéisation. Ces dernières ont tendance à faire disparaître la petite échelle et de ne garder que la grande, constituant un frein à la modélisation CND- CF ; spécialement, si on veut simuler des défauts à l'échelle de la fibre. Cet aspect nous a poussé à s'orienter vers des méthodes dites multi-échelles dont le but est de capter l'information des changements de la petite échelle et de voir leur influence sur la grande échelle. Donc au vu des propriétés de ces méthodes nous avons choisi de travailler avec FE HMM ,qui a notre sens est mieux adaptée à notre probléma-

tique. Le prochain chapitre sera dédié entièrement au développement et à l'application de cette méthode au contrôle non destructif par courant de Foucault.

CHAPITRE 4

Résolution par la méthode FE-HMM des problème de CND-CF

Ce chapitre abordera la méthode des éléments finis hétérogène multi-échelles et son application pour la résolution de problème de CND-CF sur des composites à fibres de carbone ayant des défauts à l'échelle microscopique.

4.1	Introduction	68
4.2	Méthode d'élément finis Multi échelles	70
4.2.1	Principe	70
4.2.2	Formulation du problème	70
4.2.3	Résolution sur le domaine macro	71
4.2.4	Résolution sur le domaine micro	72
4.2.5	Reconstitution de la solution	73
4.3	Implémentation	73
4.3.1	Calcul des entrées des matrices : rigidité, masse et source	75
4.4	Résultats	76
4.4.1	Calcul de l'impédance	77
4.4.2	Caractérisation du taux de remplissage	77
4.4.3	Contrôle par Courant de Foucault	79
4.5	Conclusion	80

4.1 Introduction

L'un des principaux défis pour une modélisation multiéchelle est de surmonter le coût de calcul que peut engendrer une simulation directe. Une des façons de contourner ce problème est de recourir aux techniques d'homogénéisation qui proposent de remplacer l'équation originale par une équation où les coefficients sont homogénéisés comme déjà expliqué dans le chapitre précédent. Cette approche a été déjà explorée par beaucoup d'auteurs au sein même de notre laboratoire. Ces chercheurs ont travaillé sur l'interaction des champs électromagnétiques avec les CFRP. Cette approche a été initiée par l'équipe Modélisation des Dispositifs Electromagnétiques MDE du laboratoire IREENA, à Saint-Nazaire. Citons tout d'abord les travaux de [Tri00] qui a étudié l'échauffement par induction électromagnétique des composites à fibres de carbone à des fins de soudage. Pour ce faire, trois méthodes d'homogénéisations ont été développées. Pour des structures présentant une périodicité, c'est la méthode dynamique et la méthode asymptotique qui ont été utilisées. Par contre pour les structures avec une distribution aléatoire des fibres c'est la méthode du problème inverse qui a été privilégiée. Toujours, dans les problèmes de chauffage par induction et afin de tenir compte des effets d'anisotropie et des faibles épaisseurs que présentent les couches des CFRP, [Ben06] a développé des modèles en 3D se basant sur les éléments coques anisotropes monocouches et multicouches pour prendre en charge respectivement les composites à structures inconnues et les composites stratifiés à structures orientées. La conductivité électrique utilisée dans ces modèles a été évaluée par une méthode d'inversion. Dans cette lancée [Ram09] a développé une nouvelle technique appelée thermo-inductive pour le contrôle non destructif des CFRP, couplant le CND par courant de Foucault et la thermographie infrarouge. Le principe consiste à chauffer la pièce par induction et une caméra infrarouge est utilisée pour détecter les défauts qui perturberont les courants induits et le champ de température à la surface de la pièce. La modélisation mathématique de cette technique s'est faite par la méthode des éléments finis 3D issue du complexe du Whitney pour voir le comportement anisotrope et non linéaire de ces matériaux. Ces mêmes éléments ont été utilisés pour modéliser d'autres matériaux présentant aussi un aspect multi-échelles comme les matériaux à poudre de fer. [Bel09] a utilisé l'approche qui consiste à prendre en compte la disposition aléatoire et la forme irrégulière de la poudre de fer à l'intérieur du volume élémentaire représentatif. Cette approche a permis de calculer la perméabilité équivalente du matériau qui a été utilisée par la suite pour la résolution de l'équation magnétodynamique en formulation $AV - \mathcal{A}$ (potentiel vecteur magnétique-potentiel scalaire électrique). Concernant la caractérisation de la conductivité électrique [Was11] a développé une méthode se basant sur les réseaux d'impédances 3D prenant en compte la distribution aléatoire des fibres dans un pli de CFRP unidirectionnel. Cette caractérisation a permis de modéliser à l'échelle macroscopique le comportement électromagnétique des plaques comportant plusieurs plis en utilisant la technique thermo-inductive. Pour les problèmes de type CND-CF, des travaux sur des matériaux conventionnels ont été menés [Hel12], proposant des stratégies basées sur les techniques d'inversion pour déceler la forme, la position et les dimension de défauts débouchant. L'auteur a opté pour une formulation $AV - \mathcal{A}$ pour le système direct.

Pour les problèmes liés au CND-CF des CFRP [KM74] a déjà démontré la faisabilité de ce contrôle sur ce type de matériaux en mettant en évidence la relation linéaire entre la résistivité électrique et " $\sin^2(\theta)$ " où " θ " est l'angle entre la direction des fibres et l'axe de référence " Ox ". Pour modéliser leurs comportements macro, on considère les fibres qui constituent le premier pli comme étant parfaitement droites et parallèles entre elles (alignées suivent le même axe) et disposées à intervalle régulier. Sous cette hypothèse le tenseur du premier pli est obtenu après une phase d'homogénéisation (travaux cités précédemment). Si on considère la cas réel la conductivité équivalente est obtenue à partir d'une mesure expérimentale. La détermination du tenseur des autres plis est obtenue par une rotation comme donné par la formule ci-après :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{long} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{trans} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{interplis} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Pour les autres plis, on utilise la matrice de rotation $[R]$:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tel que :

$$[\sigma]^{new} = [R]^{-1} \cdot [\sigma] \cdot [R] \quad (4.2)$$

Beaucoup de travaux adoptent cette approche. Dans [LYL⁺08], l'auteur a utilisé les éléments finis 3D pour simuler un contrôle sur un CFRP de deux couches, toujours sous l'hypothèse que les fibres sont droites. Le but est d'évaluer la conductivité électrique longitudinale et la détection du sens d'orientation des fibres. Deux types de bobines ont été utilisés : la première circulaire à air en mode absolu, et la seconde constituée de deux bobines rectangulaires plates avec noyau en ferrite en mode différentiel. Une fréquence fixe de 10MHz pour détecter l'orientation des fibres et des fréquences de 10KHz à 100KHz ont été adoptées pour l'estimation de la conductivité. Les résultats obtenus ont été comparés à l'expression analytique [DD68] et à celles issues de l'expérimentation. Adoptant la même hypothèse [CCM⁺09] propose une conception d'un capteur à courants de Foucault avec un noyau en ferrite pour le contrôle non destructif sur des composites à fibres de carbone $90^\circ/0^\circ/90^\circ$, et afin de déceler un défaut de délaminage. Les courants induits seront générés par une excitation sinusoïdale de fréquence " $f_{exi} = 1MHz$ " et un courant " $I_{exi} = 100mA$ ". La résolution numérique du modèle s'est faite par éléments finis pour une formulation " $\mathcal{A} - \Psi$ " ce qui a permis de voir les distorsions des lignes de champ près du défaut de forme cylindrique et ce pour différents diamètres (de 0.1 à 1mm.). Au sein de notre laboratoire, une méthode de calcul rapide basée sur un couplage entre les différences finies et les équations intégrales de volume a été réalisée [Men09]. Ceci afin de réduire le temps de calcul lors du déplacement du capteur sur la cible à contrôler, en ne maillant que les parties actives du système réduisant ainsi le nombre d'éléments stockés

dans les matrices globales ainsi que le temps de résolution du système algébrique. Ce système est résolu par l'utilisation d'une méthode itérative. La formulation qui a été utilisée se base sur le potentiel vecteur électrique et potentiel scalaire magnétique " $\mathcal{T} - \varphi$ ". Quant à la discrétisation, elle s'est faite par la méthode des différences finies et le terme source (champs magnétique " \mathcal{H}_s ") a été calculé par la méthode de Biot et Savart. En reprenant la même formulation [Li12] a utilisé la méthode des volumes finis avec maillage non conforme pour étudier la répartition des courants de Foucault et la détection de défauts surfaciques.

Nous décrivons dans ce chapitre la méthode hétérogène multi-échelle basée sur les éléments finis et sa mise en œuvre pour la simulation d'un problème de CND -CF sur un composite à fibres de carbone unidirectionnel.

4.2 Méthode d'élément finis Multi échelles

4.2.1 Principe

Cette méthode a été introduite par [WE+03] pour gérer efficacement les problèmes multi-échelles. D'un point de vue mathématique, elle a été appliquée aux équations elliptiques, paraboliques et à la propagation d'ondes [AWEVE12]. Comme déjà cité, cette méthode repose sur la résolution simultanée des deux problèmes macro et micro. Elle est donc utilisée pour une classe de problèmes où l'équation qui régit la physique à l'échelle macro est connue :

$$L(U, D) = 0 \quad (4.3)$$

L : Un opérateur différentiel ;

U : Le champ à calculer dans l'échelle macro ;

D : Désigne les données nécessaires pour que le modèle macro soit complètement défini ; ces données vont dépendre de la solution du micro-problème "u" calculée sur le domaine échantillon ou RVE, en d'autres termes " $D = D(u)$ ".

$$l(u, d) = 0 \quad (4.4)$$

l : est un opérateur différentiel qui décrit le problème micro.

d : définira les données nécessaires tirées de l'échelle macro pour résoudre le micro-problème ; en d'autres termes cela jouera le rôle des conditions aux limites du domaine échantillon. Donc les données "d" seront fonction de la solution à l'échelle macro "U" ($d = d(U)$).

4.2.2 Formulation du problème

Lors de la résolution numérique avec la méthode FE-HMM, on dispose de l'équation macroscopique (4.3), dans laquelle on ignore les coefficients multi-échelles. Pour évaluer

ces coefficients, une analyse locale à des échelles plus fines doit être faite [WEH03]. Essentiellement cette méthode repose sur deux principaux ingrédients :

- Une discrétisation du domaine macro " Ω " avec des éléments de taille " H " tel que " $H > \epsilon$ ", avec " ϵ " taille caractéristique de l'hétérogénéité ;
- Une estimation des données manquantes macro en s'appuyant sur l'échelle micro.

4.2.3 Résolution sur le domaine macro

Dans cette discrétisation, des éléments finis linéaires de classe C^0 peuvent être utilisés qu'on notera " K " appartenant au domaine discrétisé T_H . Ce qui permet d'utiliser un mailleur triangulaire éléments finis standards, sur lequel on va définir ces fonctions de base qu'on notera $\{\Phi_1^H, \Phi_2^H, \Phi_3^H\}$ avec l'exposant " H " en majuscule pour désigner le macro domaine. Les données qu'on doit estimer dans cette échelle sont incluses dans la forme bilinéaire macro (matrice de rigidité), tel que :

$$B(\Phi_i^H, \Phi_j^H) = K_{i,j} = \int_{\Omega} \Phi_i^H(x) \cdot A_{eff}(x) \cdot \Phi_j^H(x) d\Omega \quad (4.5)$$

Avec " A_{eff} " le paramètre effectif dans l'échelle macro. Une fois ce paramètre évalué les entrées de la matrice de rigidité seront facilement calculées par une quadrature qui approche l'intégrale (eq-4.5) tel que :

$$K_{ij} = \sum_{K \in T_H} |K| \sum_{x_K \in K} \omega_l(\Phi_i^H(x_l) \cdot A_{eff}(x_l) \cdot \Phi_j^H(x_l)) \quad (4.6)$$

Avec :

$\{x_l\}$: Les points de quadrature à l'intérieur du macro élément ;

$\{\omega_l\}$: Les poids de quadrature ;

$|K|$: La surface du macro élément.

Pour un problème multi-échelles où le coefficient " A_{eff} " est non spécifié, une approximation de sa valeur autour des points de quadrature $\{x_l\}$ sera alors nécessaire. Ceci va se faire par la résolution du micro problème sur des domaines échantillons qu'on notera " δ_K " de frontière " $\partial\delta_K$ ". On définira : " $\delta_K = x_l \pm \delta_I$ " tel que " $\delta > \epsilon$ " et " $I = (-1/2, 1/2)^2$ ". Il est à noter que, dans le cas où le maillage est constitué d'éléments Lagrangien, chaque macro élément " K " de " T_H " aura un seul point de quadrature qui sera le barycentre du triangle.

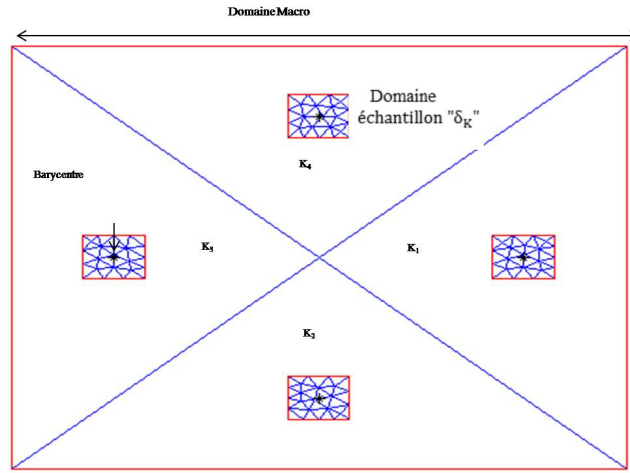


Figure 4.1 – Illustration des maillages micro et macro de la méthode FE-HMM

4.2.4 Résolution sur le domaine micro

Pour la résolution du problème micro, on définit un micro-maillage triangulaire pour notre cas, sur lequel on définira des fonction de base micro notées $\{\Psi_1^h, \Psi_2^h, \Psi_3^h\}$. Les variations du coefficient multi-échelle " \mathcal{A}^ϵ " seront nécessaires seulement en certains endroits c.à.d. dans " δ_K ", l'équation à résoudre sera :

$$-\nabla \cdot A^\epsilon \nabla v^\epsilon = 0 \quad \text{sur } \delta_K \quad (4.7)$$

Avec des conditions aux limites qui vont faire le couplage entre les deux échelles micro et macro. La solution " v^ϵ " est appelée *micro-fonction*. Elle contribuera au calcul de la matrice élémentaire de chaque macro élément " K ", pour qu'ensuite être assemblée dans la matrice de rigidité globale. On préférera réécrire l'équation (4.7) sous sa forme variationnelle et introduire les conditions aux limites sur les bords du domaine échantillon " $\partial\delta_K$ " sous forme de contraintes pour un problème de minimisation [AN09], tel que le nouveau problème à résoudre sera :

$$v^h = \operatorname{argmin} \int_{\delta_K} \nabla \Psi^h(x) \cdot A^\epsilon(x) \cdot \nabla \Psi^h(x) dx \quad (4.8)$$

Différents types de conditions peuvent être appliqués [MZ⁺05] :

– Conditions de Dirichlet :

$$v^h(x) = \Phi_{lin}^H(x) \quad \text{sur } \partial\delta_K \quad (4.9)$$

– Conditions de Neumann :

$$A^\epsilon \nabla v^h(x) = \lambda \cdot n \quad \text{sur } \partial\delta_K \quad (4.10)$$

n : le vecteur normal aux frotières et " λ " Multiplicateur de Lagrange multiplier pour imposer des contraintes : $\langle \nabla v^h \rangle_{\delta_K} = \langle \Phi^H \rangle_{\delta_K}$.

– Conditions Periodique :

$$v^h = \Phi_{lin}^H \quad sur \quad \partial\delta_K - periodique \quad (4.11)$$

Avec $\Phi_{lin}^H(x)$ la fonction macro de base linéarisée aux points de quadrature du macro élément, qui a pour expression :

$$\Phi_{lin}^H(x) = \Phi_{K_l}^H(x_l) + (x - x_l) \cdot \nabla \Phi_{lin}^H(x_l) \quad (4.12)$$

4.2.5 Reconstitution de la solution

Une fois le micro-problème avec les conditions aux limites sur $\partial\delta_K$ résolu, on peut approcher l'expression (4.7) par :

$$\Phi_i^H(x_l) \cdot A_{eff}(x_l) \cdot \Phi_j^H(x_l) \cong \frac{1}{|\delta_K|} \int_{\delta_K} v^h(x_l) \cdot A^\epsilon(x_l) \cdot w^h(x_l) dx \quad (4.13)$$

Ce qui permettra de calculer les entrées de la matrice de rigidité.

4.3 Implémentation

Pour l'implémentation de cette méthode nous avons procédé à la discrétisation des deux domaines macro qu'on notera " T_H " et micro noté " T_h ". Le domaine macro contient la géométrie du dispositif qui inclut : l'air, la bobine et la plaque de CFRP. On adoptera un maillage non conforme utilisant des éléments triangulaires linéaires de taille " H " tel que " $H \gg \epsilon$ ". Pour chaque macro élément nous allons définir :

- x_l : les coordonnées des points de quadrature en " (x, y) ";
- δ_K : représentele domaine échantillon qui englobe la micro géométrie (fibres + la matrice isolante);
- $|\delta_K|$: est la surface de ce domaine tel que : $\delta_K = x \pm \delta I$ et $I = (-1/2, 1/2)^2$;
- ω_l : Les poids de la quadrature.

Pour reproduire la distribution aléatoire du paramètre " $\sigma_\epsilon(x)$ " dans le CFRP, la méthode suppression aléatoire de fibre pré-générée dans le domaine échantillon " δ_K " a été adoptée. Cette méthode consiste à remplir le domaine échantillon de manière ordonnée puis procéder à une suppression aléatoire afin d'obtenir le taux de remplissage voulu. Ceci permet d'avoir des taux de remplissages légèrement différents d'un domaine échantillon à un autre ce qui correspond mieux à la réalité. Cette micro géométrie, une fois générée sera discrétisée avec des éléments triangulaires de taille " h " tel que " $\epsilon > h$ ", avec " ϵ " la taille caractéristique de l'hétérogénéité c'est à dire diamètres de la fibre de carbone. Cela va permettre de :

- Calculer la matrice de rigidité élémentaire $A_{[3x3]}$ et la matrice de masse élémentaire $M_{[3x3]}$ de chaque micro-élément suivant la région où il se trouve.
- Assembler les matrices élémentaires $A_{[3x3]}$ et $M_{[3x3]}$ dans une matrice globale $[A_{lm}]_{mic}$ et $[M_{lm}]_{mic}$

$$[A_{lm}]_{mic} = \sum_{T \in T_h} \int_T (\nabla \Psi_l^h \cdot \nu^\epsilon \cdot \nabla \Psi_m^h) dx \quad (4.14)$$

$$[M_{lm}]_{mic} = \sum_{T \in T_h} \int_T (\Psi_l^h \cdot \sigma^\epsilon \cdot \Psi_m^h) dx \quad (4.15)$$

- Calculer les micro fonctions v^h en résolvant le micro problème sous contrainte. Ce qui revient à imposer des conditions aux limites à la matrice de rigidité du micro maillage :

$$v^h = \underset{\delta_K}{\operatorname{argmin}} \int \nabla \Psi^h(x) \cdot \nu^\epsilon(x) \cdot \nabla \Psi^h(x) dx \quad (4.16)$$

Les conditions aux limites imposées aux micros domaines échantillon sont différentes de celles imposées par la méthode des éléments finis classique. Dans la FEM classique, on impose généralement la valeur ou la dérivée de l'inconnue ou parfois même une combinaison des deux sur les bords du domaine. La méthode FE HMM, quant à elle, calcule les micros fonctions " v^h ", qui ont la vocation de faire le lien entre les deux échelles, cela en fixant leurs valeurs sur les frontières du micro domaine comme une contrainte imposée (conditions de Dirichlet pour notre cas), tel que :

$$\begin{cases} \int_{\delta_K} (v^h - \Phi_{lin}^H) dx = 0 \\ (v^h - \Phi_{lin}^H)(x_p) = 0 \quad \text{sur } x_p \in \partial \delta_K \end{cases} \quad (4.17)$$

- Linéariser les macro fonctions de base aux points de quadrature des macro éléments (eq- 4.12) ;
- Le calcul des matrices de rigidité et de masse globale se fait comme pour la méthode des éléments finis classiques.

L'équation différentielle aux dérivées partielles, qui modélise le contrôle par courants de Foucault sur un CFRP en régime quasi-statique 2D en termes de potentiel vecteur magnétique sera donnée par :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \nu^\epsilon(x) \frac{\partial \mathcal{A}^\epsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu^\epsilon(x) \frac{\partial \mathcal{A}^\epsilon}{\partial y} \right) - j\omega \sigma^\epsilon(x) \mathcal{A}^\epsilon = -\mathcal{J}_{exc} \quad (4.18)$$

Cette équation est transformée en un système d'équations algébriques dont les coefficients correspondent à la somme de la matrice rigidité et de masse :

$$[A]_{N_{mac} \times N_{mac}} \cdot [\mathcal{A}^\epsilon]_{N_{mac} \times 1} + [M]_{N_{mac} \times N_{mac}} \cdot [\mathcal{A}^\epsilon]_{N_{mac} \times 1} = [\mathcal{J}_{exc}]_{N_{mac} \times 1} \quad (4.19)$$

N_{mac} : Le nombre de nœuds dans le domaine macro ;

$[\mathcal{A}^\epsilon]_{N_{mac} \times 1}$: Les inconnues aux nœuds du maillage macro.

Les entrées de la matrice de rigidité seront calculées :

$$A_{mac} = \sum_{K \in T_H} \frac{\omega_K}{|\delta_K|} \int_{\delta_K} \nabla v^h \cdot \nu^\epsilon(x) \cdot \nabla w^h d\Omega \quad (4.20)$$

- Pour la matrice de masse, la distribution du paramètre " $\sigma^\epsilon(x)$ " pour le CFRP sera réalisée par la suppression de fibres régénérées ;
- Résoudre le système algébrique.

Le couplage entre les deux échelles sera réalisé par la résolution du problème-micro contraint par les conditions aux limites.

4.3.1 Calcul des entrées des matrices : rigidité, masse et source

Comme pour la méthode des éléments finis classiques, une équation différentielle aux dérivées partielles est transformée en un système d'équations algébriques dont les coefficients correspondent à la somme de la matrice rigidité et celle de la masse. Pour notre cas d'étude, l'équation qui modélise un contrôle par courants de Foucault en régime quasi-statique 2D en termes de potentiel vecteur magnétique est (eq-4.18).

ν^ϵ : est la réductivité magnétique ;

ϵ : exprime la nature multi-échelle des différents paramètres " ν^ϵ ", " \mathcal{A}^ϵ ", " σ^ϵ ", ...etc.

Les entrées des matrices de rigidité de masse et celle du terme source pour la méthode FE HMM sont calculées par :

$$M_{mac} = - \sum_{K \in CFRP} \frac{\omega_K}{|\delta_K|} \int_{\delta_K} j\omega \Phi_{lin}^H(x_l) \cdot \sigma^\epsilon(x) \cdot \Phi_{lin}^H(x_l) d\Omega \quad (4.21)$$

Le terme source est considéré comme ayant des variations dans le domaine macro. Son calcul se fera par l'expression :

$$\mathcal{J}_{mac} = - \int_{\delta_K} \Phi^H(x) \mathcal{J}_{exc} d\Omega \quad (4.22)$$

La figure qui suit donne un aperçu des deux maillages micro et macro du dispositif du CND-CF étudié avec une bobine longue au dessus d'une plaque mince de CFRP. Les éléments à l'intérieur de cette plaque contiennent en leur barycentre les domaines échantillons dans lesquelles se trouvent les fibres représentées par des cercles distribués aléatoirement.

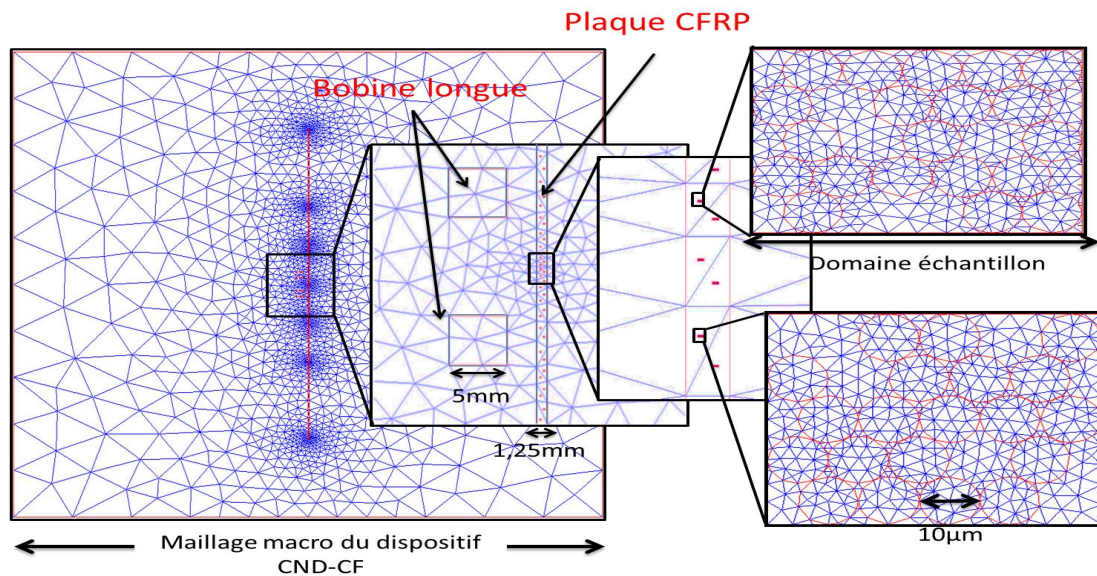


Figure 4.2 – Dispositif de CND-CF avec le maillage du domaine macro et des domaines échantillons

4.4 Résultats

On suppose qu'un CFRP unidirectionnel est constitué de micro-cylindres droits distribués aléatoirement et l'existence de contacts permet aux boucles de courant de se fermer sur la plaque à contrôler. Le contrôle se fait par une bobine longue c.à.d. que sa longueur "L" est plus grande que sa largeur "d" pour rester dans l'hypothèse 2D. On considère une plaque d'une longueur de $140[mm]$ et d'une épaisseur dix fois l'épaisseur d'un pli ($1.25[mm]$), avec des domaines échantillons de dimension $2.5 \cdot 10^3[mm^2]$. Dans la figure 4.3, les lignes de champ représentent la solution homogénéisée de l'équation 4.18 qui modélise un CND-CF sur la plaque de CFRP. Cette solution est obtenue sans passer par la phase d'homogénéisation au préalable.

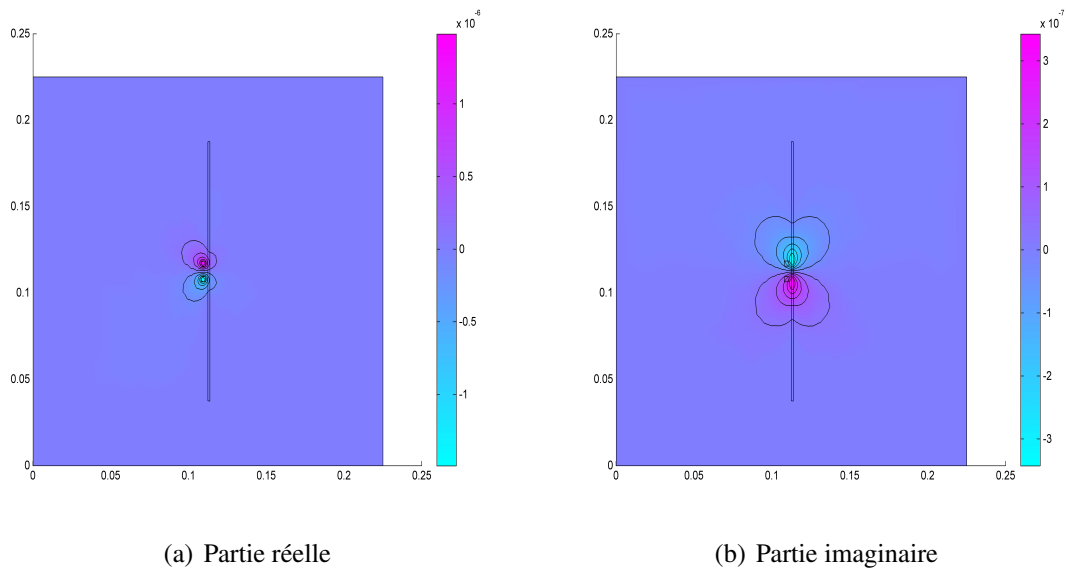


Figure 4.3 – Réponse homogénéisée

4.4.1 Calcul de l'impédance

Le calcul de la variation de l'impédance d'une bobine lors d'un contrôle par CF renseigne sur la présence éventuelle d'un défaut ou de quelconque changement de conductivité dans la pièce à contrôler. Dans le cas où on utilise une seule bobine pour faire les deux fonctions : l'excitation (génération des courants) et la mesure, ce type de fonctionnement est appelé le mode absolu. La variation de l'impédance " Z_e " sera donnée par la relation [FTT⁺97] :

$$Z_e = \frac{-j\omega N}{I} \oint \mathcal{A} dl \quad (4.23)$$

I : La densité de courant dans la bobine ;

ω : La pulsation électrique ;

N : Le nombre de spires dans la bobine ;

c : Le contour moyen d'une spire du bobinage ;

\mathcal{A} : Le potentiel vecteur magnétique.

4.4.2 Caractérisation du taux de remplissage

En dépit de la nature tensorielle de la conductivité électrique du CFRP, on a démontré que la conductivité longitudinale prédomine sur la conductivité transversale [CCM⁺09], Sachant que les fibres dans un CFRP (UD) ont une inclinaison entre 0.2° et 1° autour de leurs axe [GOMES09] ce qui permet ainsi un contact entre fibres et par conséquent la création de boucles de courants. Toutes ces observations nous ont permis d'opter pour une approche en 2D pour la modélisation du CND-CF. Les fibres de carbone dans le CFRP

(UD) seront modélisées par des cylindres droits orientés dans le même sens et les boucles de courants induits seront considérés comme étant générés par des bobines longues pour minimiser encore plus l'effet de la conductivité transverse lors d'un contrôle par CF.

Pour valider notre approche, on s'est proposé de faire une caractérisation du taux de remplissage d'un CFRP unidirectionnel. Comme cela a été démontré au chapitre 2, la conductivité électrique dépend fortement du taux de remplissage des fibres. Pour cela nous avons simulé deux dispositifs de CND-CF sur CFRP (UD) de dimension identique à la différence que :

- Pour le 1^{er} dispositif la conductivité longitudinale du composite " σ_{long} " est obtenue en faisant varier le taux de remplissage dans le domaine échantillon 0% à 65-70% par la méthode de la suppression de fibres pré-générées.
- Le 2^{me} " σ_{long} " est obtenue par la loi de mélange

Une fois ces conductivités obtenues, une simulation à l'aide de la méthode des éléments finis classique a été réalisée sur le dispositif "2" et comparée à l'impédance obtenue à partir de FE HMM sur le dispositif "1". Les impédances des bobines des deux dispositifs ont été calculées et présentées dans le plan complexe normalisé figure-4.4. Le point " P_0 " correspond à l'impédance de la bobine à vide c.à.d. pour un taux de remplissage " v " de 0%. Pour le premier dispositif, on n'a mis aucune fibre dans les micros domaines échantillons lors de la résolution par FE HMM. La conductivité du deuxième dispositif a été obtenue en utilisant un taux de remplissage " $v = 0$ " lors de l'application de la loi des mélanges. Le point " P_1 " correspond à un taux de remplissage de à 70% des micro domaines FE HMM et " $v = 70\%$ " pour la loi des mélanges

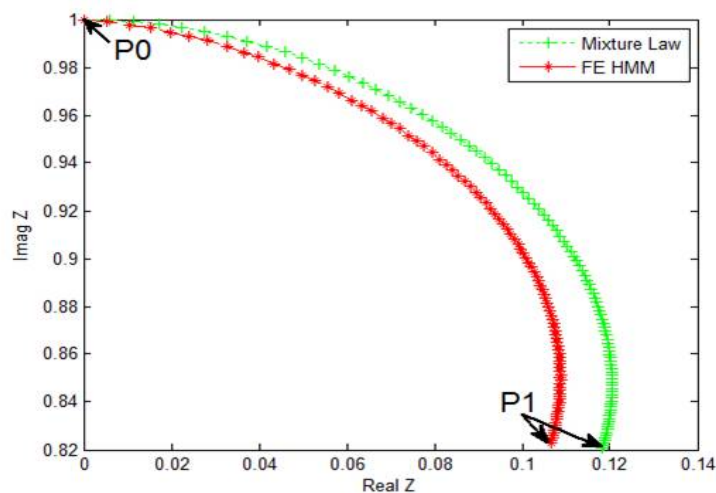


Figure 4.4 – Plan d'impédance complexe

On voit sur ce plan d'impédance que la réponse du capteur (dominée par son inductance propre) pour des taux de remplissage très faibles entre 0- 10% est presque identique

pour les deux méthodes utilisées. Elle variera très peu même pour des taux de remplissage élevés(68%) où l'erreur relative ne dépasse pas les 8.3%. On peut voir aussi que lorsque la conductivité augmente, les points dans la courbe se déplacent de " P_0 " vers " P_1 " ce qui est un résultat bien connu du CND-CF sur un matériau homogénéisé [PD92]. Pour la simulation de la réponse d'une bobine lors d'un contrôle par courant de Foucault sur un CFRP unidirectionnel endommagé, nous avons introduit une région près de la surface faisant face à la bobine dans la quelle nous avons attribué un taux de remplissage inférieur à celui du reste du CFRP. Ceci peut être considéré comme un défaut qui affecte la conductivité électrique assimilé à un manque de fibres : rupture ou un désalignement de ces fibres ou bien une surconcentration de résine isolante .

4.4.3 Contrôle par Courant de Foucault

Pour simuler un CND par CF, nous avons supposé une plaque de CFRP contenant deux régions : une région saine avec un taux de remplissage des micro domaines de 65% et une autre avec défaut ayant un taux de remplissage des micro domaines de inférieure à 65%, ce qui peut être assimilé à une surconcentration de résine, porosité , ou autre. Le déplacement des sondes a été simulé par la technique de la bande de déplacement [RF07] . Cette technique représente la zone mobile par une bande géométrique divisée en des régions élémentaires de même longueur. A ces régions nous affecterons les propriétés physiques correspondantes (conductivité, perméabilité) pour les deux domaines considérés "air" et "bobines". Après discrétisation de la géométrie, les éléments finis à l'intérieur de cette bande auront une affectation de la densité de courant différente à chaque pas de déplacement simulant ainsi le mouvement de la bobine.

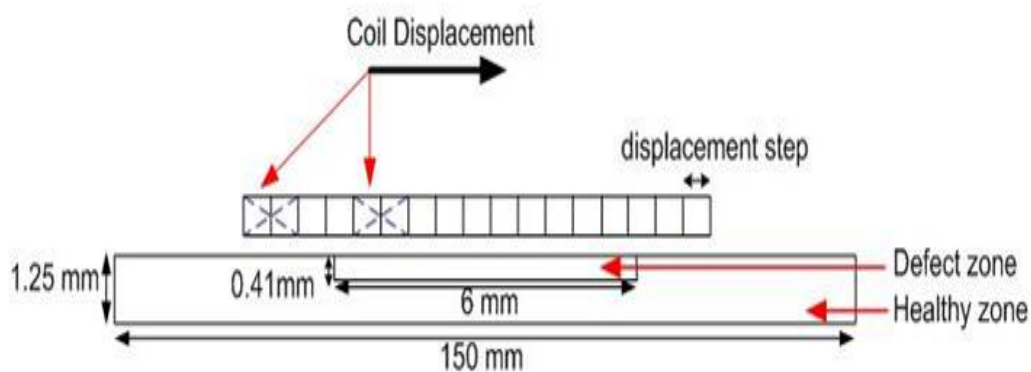


Figure 4.5 – Technique de la bande géométrique

Les résultats de simulation sont donnés dans la figure qui suit, dans un plan d'impédances normalisées. On voit que quand le taux de remplissage de la région du défaut est proche de celui de la zone saine, il n'y a pratiquement pas de variation (60% et 70%). Pour des taux de remplissage intermédiaire 30-50%, la réponse du capteur est plus visible ; ce genre de défauts peut être vu comme une rupture de fibres ou une surconcentration de

résine à cet endroit. Il est clair que ce genre de défauts est impossible à prendre en charge par les techniques classiques d'homogénéisation. Par contre pour des valeurs de 10 et 20% qui peuvent être assimilées à des déformations surfaciques, la réponse du capteur est plus importante. C'est ce genre de défaut qu'on a l'habitude de simuler pour des matériaux homogénéisés.

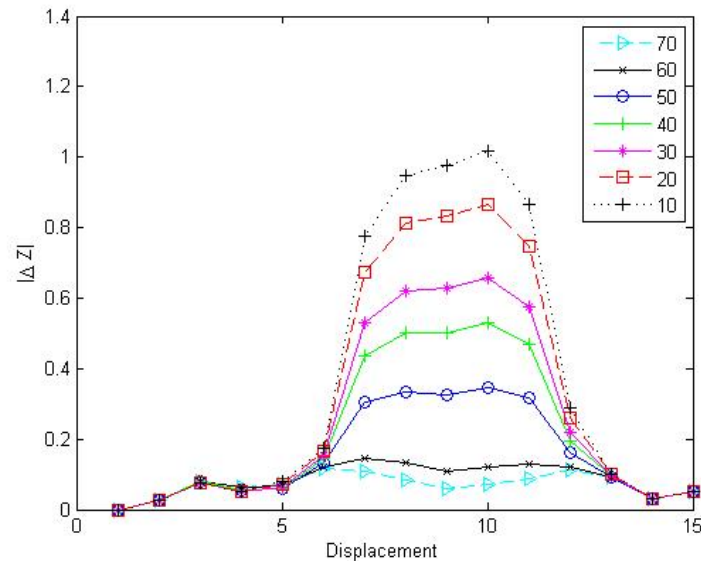


Figure 4.6 – Réponse d'un capteur au-dessus de la zone de défaut comportant différents taux de remplissage du domaine échantillon

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle de CND-CF sur CFRP unidirectionnel a été présenté en utilisant la méthode d'éléments finis Multi-échelles hétérogènes lors de la résolution des équations de champ en terme de potentiel vecteur magnétique en régime quasi statique avec des coefficients qui dépendent de l'échelle de la structure. La solution obtenue par cette méthode correspond à la réponse homogénéisée pour une excitation par champ magnétique. Ceci s'est fait en exploitant l'une des principales propriétés de la méthode FE HMM qui est de retrouver la solution homogénéisée partant exclusivement de la connaissance partielle de la structure à l'échelle fine du CFRP. Ceci a permis, d'une part la caractérisation d'une plaque de CFRP, et d'autre part la détection d'un défaut impliquant un changement de conductivité près de la surface du CFRP.

Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse rentre dans le cadre de la recherche de modèles de caractérisation et de contrôle des matériaux composites à fibres de carbone (CFRP), par les techniques électromagnétique impliquant les courants Foucault. Autour de ces techniques deux principales idées ont été développées. La première consiste à construire un modèle de caractérisation de la conductivité transversale d'un CFRP unidirectionnel, en partant d'une distribution aléatoire des fibres à l'intérieur de la résine isolante. Une fois cette distribution obtenue, un test volt-ampèremétrique sur des cellules représentatives a été simulé, en prenant en compte l'aspect aléatoire des chemins que les courants peuvent prendre à l'intérieur du volume élémentaire représentatif (VER). Cette modélisation s'est faite par la simulation d'une marche aléatoire sur un circuit électrique résolu par des chaînes Markov. Après validation, ce modèle a permis d'observer l'influence des chemins que prennent les courants dans le composite, et par la même leur effet sur la conductivité transversale. Ce modèle a permis entre autre, de voir l'influence d'autres paramètres tels que la distance moyenne qui sépare deux contacts consécutifs, ce qui est généralement utilisé dans les modélisations qui se basent sur la percolation par des réseaux de résistances. La deuxième idée était de proposer une alternative aux techniques d'homogénéisation qui se basent généralement sur une démarche série. La simulation des défauts de type rayure ou déformation surfacique donne des résultats satisfaisants. Cependant, l'approche ne permet pas d'évaluer d'autres types de défauts qui affectent les CFRP, tels que :

- Le vieillissement des fibres et/ou de la matrice, ce qui induit un changement de conductivité dans certaines parties du CFRP.
- La mauvaise distribution des fibres lors de la fabrication.
- La présence d'impureté dans le composite ... etc.

Notre contribution a été de proposer une approche parallèle où on a traité de manière simultanée l'influence de la structure au niveau micro échelle (conductivité des fibres , leur emplacement ... etc.) et le comportement global du composite, en l'occurrence sa conductivité électrique. Il est à noter qu'à l'inverse, dans les méthodes d'homogénéisations classiques, le comportement macro est obtenu à partir d'un seul VER, ce qui peut s'avérer insuffisant pour une distribution très aléatoire ou présentant un faible taux de remplissage. Quant à notre modèle, il prend en compte différents échantillons dans le même matériau avec des distributions différentes d'un VER à un autre. Cette démarche une fois implémentée, nous a permis de simuler un contrôle par courant de Foucault et de voir l'influence des micro défauts internes sur la réponse du capteur. La représentation des fibres dans les micro cellules a été faite par une suppression de fibres pré-générées, ceci afin de minimiser le temps de calcul. Au vu du travail réalisé, beaucoup de perspectives

peuvent être envisagées :

- L'utilisation d'autres types d'éléments, tétraèdre pour des dispositifs en trois dimensions ou bien des éléments d'arrête pour d'autres formulations.
- Pour une meilleure représentation des domaines échantillons, des images réelles de défauts sur CFRP provenant d'un Microscope Electronique à Balayage (MEB) peuvent être utilisées, ceci après un traitement d'images appropriées
- L'introduction d'un calcul parallèle, surtout dans la phase de calcul des matrices élémentaires et leur assemblage, apportera un gain en temps de calcul.
- Le couplage entre différents phénomènes, en l'occurrence l'effet thermique pour des simulations de contrôle thermo-inductique.

Bibliographie

- [AB05] Grégoire Allaire and Robert Brizzi. A multiscale finite element method for numerical homogenization. *Multiscale Modeling & Simulation*, 4(3) :790–812, 2005.
- [ABC⁺99] JC Abry, S Bochart, A Chateauminois, M Salvia, and G Giraud. In situ detection of damage in cfrp laminates by electrical resistance measurements. *Composites Science and Technology*, 59(6) :925–935, 1999.
- [ABG10] Jean-Louis Auriault, Claude Boutin, and Christian Geindreau. *Homogenization of coupled phenomena in heterogenous media*, volume 149. John Wiley & Sons, 2010.
- [AC88] RD Adams and PDRD Cawley. A review of defect types and nondestructive testing techniques for composites and bonded joints. *NDT international*, 21(4) :208–222, 1988.
- [AN09] Assyr Abdulle and Achim Nonnenmacher. A short and versatile finite element multiscale code for homogenization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37) :2839–2859, 2009.
- [AR90] R Albanese and G Rubinacci. Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials. *International journal for numerical methods in engineering*, 29(3) :515–532, 1990.
- [AWEVE12] Assyr Abdulle, E Weinan, Björn Engquist, and Eric Vanden-Eijnden. The heterogeneous multiscale method. *Acta Numerica*, 21 :1–87, 2012.
- [BDLBB⁺12] Adelina Bordianu, Olivier De La Barriere, Oriano Bottauscio, Mario Chiampì, and Alessandra Manzin. A multiscale approach to predict classical losses in soft magnetic composites. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(4) :1537–1540, 2012.
- [Bea83] AG Beattie. Acoustic emission, principles and instrumentation. *Journal of acoustic emission*, 2(12) :95–128, 1983.
- [Bel09] Mohamed Belkadi. *Contribution à l’homogénéisation multi-échelle des propriétés électromagnétiques des matériaux en poudre de fer*. PhD thesis, Nantes, 2009.
- [Ben06] Samir Bensaid. *Contribution à la caractérisation et à la modélisation électromagnétique et thermique des matériaux composites anisotropes*. PhD thesis, Université de Nantes, 2006.
- [BGS⁺08] A Bruma, R Grimberg, A Savin, et al. Non destructive evaluation of carbon epoxy composites using ultrasound phased array. *Evaluare nedestructivà*, pages 29–35, 2008.

- [Bos88] Alain Bossavit. A rationale foredge-elements' in 3-d fields computations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1) :74–79, 1988.
- [BP89] Oszkar Biro and Kurt Preis. On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents. *IEEE Transactions on magnetics*, 25(4) :3145–3159, 1989.
- [CCM⁺09] Matteo Cacciola, Salvatore Calcagno, G Megali, Diego Pellicano, M Versaci, and Francesco Carlo Morabito. Eddy current modeling in composite materials. *PIERS Online*, 5(6) :591–595, 2009.
- [Cle07] Y Clergent. Controle non destructif des materiaux composites. application de la shearographie. *REVUE DES COMPOSITES ET DES MATERIAUX AVANCES*, 17(2) :251, 2007.
- [DD68] CV Dodd and WE Deeds. Analytical solutions to eddy-current probe-coil problems. *Journal of applied physics*, 39(6) :2829–2838, 1968.
- [DS84] Peter G Doyle and J Laurie Snell. *Random walks and electric networks*. Mathematical Association of America,, 1984.
- [ECR⁺01] Tiberio A Ezquerro, Marco T Connor, Saibal Roy, Mareck Kulescza, J Fernandes-Nascimento, and Francisco José Baltá-Calleja. Alternating-current electrical properties of graphite, carbon-black and carbon-fiber polymeric composites. *Composites science and technology*, 61(6) :903–909, 2001.
- [EHG⁺04] Yalchin Efendiev, Thomas Y Hou, Victor Ginting, et al. Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications. *Communications in Mathematical Sciences*, 2(4) :553–589, 2004.
- [Fre12] Emmanuel Frenod. Two-scale convergence. In *ESAIM : Proceedings*, volume 38, pages 1–35. EDP Sciences, 2012.
- [FTT⁺97] Hiroyuki Fukutomi, Toshiyuki Takagi, Junji Tani, Mitsuo Hashimoto, Junri Shimone, and Yutaka Harada. Numerical evaluation of ect impedance signal due to minute cracks. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(CONF-960725–), 1997.
- [GOMES09] A Gillet, Ph Olivier, AA Maghribi, and I El-Sawi. Prediction of electrical properties of an aeronautic composite. *JNC 16, Toulouse*, 2009.
- [Gor08] Laurent Gornet. Généralités sur les matériaux composites. 2008.
- [Gro95] Xavier E Gros. An eddy current approach to the detection of damage caused by low-energy impacts on carbon fibre reinforced materials. *Materials & Design*, 16(3) :167–173, 1995.
- [Hel12] Bachir Helifa. *Contribution à la simulation du CND par courants de Foucault en vue de la caractérisation des fissures débouchantes*. PhD thesis, Université de Nantes. Faculté des sciences et des techniques, 2012.

- [Hen04] Thomas Henneron. *Contribution à la prise en compte des grandeurs globales dans les problèmes d'électromagnétisme résolu avec la méthode des éléments finis*. PhD thesis, Lille 1, 2004.
- [HH96] Roger F Harrington and Jan L Harrington. *Field computation by moment methods*. Oxford University Press, 1996.
- [HW97] Thomas Y Hou and Xiao-Hui Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of computational physics*, 134(1) :169–189, 1997.
- [Jon75] Robert M Jones. *Mechanics of composite materials*, volume 193. Scripta Book Company Washington, DC, 1975.
- [KI08] Miklós Kuczmann and Amália Iványi. *The finite element method in magnetics*. Akadémiai Kiadó, 2008.
- [KM74] RH Knibbs and JB Morris. The effects of fibre orientation on the physical properties of composites. *Composites*, 5(5) :209–218, 1974.
- [Kuc09] Miklós Kuczmann. Potential formulations in magnetics applying the finite element method. *Lecture notes, Laboratory of Electromagnetic Fields, "Széchenyi István" University, Győr, Hungary*, 2009.
- [LaR07] SG LaRivière. Introduction to ndt of composites. *Boeing Commercial Aircraft, Manufacturing, Research and Development*, 2007.
- [LB02] Michel B Lemistre and Daniel L Balageas. Health monitoring system for composite material using electromagnetic field measurement. In *NDE For Health Monitoring and Diagnostics*, pages 272–281. International Society for Optics and Photonics, 2002.
- [Li12] Yue Li. *Modélisation des phénomènes électromagnétiques caractérisant des structures composites complexes : application à l'évaluation non destructive*. PhD thesis, Université de Nantes. Faculté des sciences et des techniques, 2012.
- [LUY94] Jean LUYCKX. Fibres de carbone. *Techniques de l'ingénieur. Matériaux fonctionnels*, 2(A2210), 1994.
- [LYL⁺08] Xin Li, W Yin, Ze Liu, Philip J Withers, and AJ Peyton. Characterization of carbon fibre reinforced composite by means of non-destructive eddy current testing and fem modeling. In *17 th world conference on Nondestructive Testing*, 2008.
- [Mal01] Xavier Maldague. Theory and practice of infrared technology for nondestructive testing. 2001.
- [Men09] Hocine Menana. *Modélisation 3D simplifiée pour l'évaluation non destructive des matériaux composites anisotropes*. PhD thesis, Nantes, 2009.
- [Mer06] Julien Mercier. *Prise en compte du vieillissement et de l'endommagement dans le dimensionnement de structures en matériaux composites*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006.

- [Mil02] Graeme W Milton. The theory of composites. *The Theory of Composites*, by Graeme W. Milton, pp. 748. ISBN 0521781256. Cambridge, UK : Cambridge University Press, May 2002., page 748, 2002.
- [Mon71] HC Montgomery. Method for measuring electrical resistivity of anisotropic materials. *Journal of applied physics*, 42(7) :2971–2975, 1971.
- [MW10] F Monfort and Windels. Partie 4 : Les composites renforcés defibres de carbone, 2010.
- [MZ⁺05] Pingbing Ming, Pingwen Zhang, et al. Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems. *Journal of the American Mathematical Society*, 18(1) :121–156, 2005.
- [NSDG12] Innocent Niyonzima, RV Sabariego, Patrick Dular, and Christophe Geuzaine. Finite element computational homogenization of nonlinear multiscale materials in magnetostatics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2) :587–590, 2012.
- [Ouk97] Latifa Oukhellou. *Paramétrisation et classification de signaux en contrôle non destructif. Application à la reconnaissance des défauts de rails par courants de Foucault*. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 1997.
- [Ows76] CN Owston. Eddy current methods for the examination of carbon fibre reinforced epoxy resins. *Materials evaluation*, 34 :237–244, 1976.
- [PD92] Dominique Placko and Isabelle Dufour. Eddy current sensors for non-destructive inspection of graphite composite materials. In *Industry Applications Society Annual Meeting, 1992., Conference Record of the 1992 IEEE*, pages 1676–1682. IEEE, 1992.
- [PHKD06] JB Park, TK Hwang, HG Kim, and YD Doh. Experimental and numerical study of the electrical anisotropy in unidirectional carbon-fiber-reinforced polymer composites. *Smart materials and structures*, 16(1) :57, 2006.
- [POT03] Jae Beom Park, Tomonaga Okabe, and Nobuo Takeda. New concept for modeling the electromechanical behavior of unidirectional carbon-fiber-reinforced plastic under tensile loading. *Smart materials and structures*, 12(1) :105, 2003.
- [PPR11] Alexandre Piche, Gilles Peres, and Ivan Revel. *Experimental and numerical methods to characterize electrical behaviour of carbon fiber composites used in aeronautic industry*. INTECH Open Access Publisher, 2011.
- [Pré13] Valentin Préault. *Méthodes d’homogénéisation pour la modélisation électromagnétique de matériaux composites. Application au blindage de boîtiers d’équipement électronique*. PhD thesis, Paris 11, 2013.
- [PRP⁺09] Alexandre Piche, Ivan Revel, Gilles Peres, Francois Pons, Benjamin Lazorthes, Benedicte Gauthier, and Pierre-Henri Cadaux. Numerical modeling support for the understanding of current distribution in carbon fibers composites. In *2009 International Symposium on Electromagnetic Compatibility-EMC Europe*, pages 1–4. IEEE, 2009.

- [Ram09] Brahim Ramdane. *Contribution à la modélisation tridimensionnelle de la technique thermo-inductive de contrôle non destructif : développement d'un outil de conception, d'analyse et d'aide à la décision*. PhD thesis, Nantes, 2009.
- [Reu29] A Reuss. Calculation of the flow limits of mixed crystals on the basis of the plasticity of monocrystals. *Z. Angew. Math. Mech*, 9 :49–58, 1929.
- [RF07] M'hemed Rachek and Mouloud Féliachi. 3-d movement simulation techniques using fe methods : Application to eddy current non-destructive testing. *NDT & E International*, 40(1) :35–42, 2007.
- [RKEK97] A Rabiei, B-N Kim, M Enoki, and T Kishi. A new method based on simultaneous acoustic emission and in-situ sem observation to evaluate the fracture behavior of metal matrix composites. *Scripta materialia*, 37(6) :801–808, 1997.
- [SA94] Dietrich Stauffer and Amnon Aharony. *Introduction to percolation theory*. CRC press, 1994.
- [Shi93] Kenji Shimada. *Physically-based mesh generation : automated triangulation of surfaces and volumes via bubble packing*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1993.
- [Smi09] RA Smith. Composite defects and their detection. *Materials Science and Engineering*, 3 :103–143, 2009.
- [SSL06] K Srinivas, AO Siddiqui, and J Lahiri. Thermographic inspection of composite materials. In *Proc. National Seminar on Non-Destructive Evaluation*, volume 12, pages 7–9. Citeseer, 2006.
- [TLBJ95] Frédéric Thollon, Bruno Lebrun, Noël Burais, and Yves Jayet. Numerical and experimental study of eddy current probes in ndt of structures with deep flaws. *NDT & E International*, 28(2) :97–102, 1995.
- [Tri00] D Trichet. *Contribution à la modélisation, à la conception et au développement du chauffage par induction des matériaux composites*. PhD thesis, Thèse de doctorat, école doctorale sciences pour l'ingénieur de Nantes, 2000.
- [Val90] AR Valteau. Eddy current nondestructive testing of graphite composite materials. *Materials evaluation*, 48(2) :230–239, 1990.
- [Voi89] Woldemar Voigt. Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitäts-constanten isotroper körper. *Annalen der Physik*, 274(12) :573–587, 1889.
- [Was11] Guillaume Wasselynck. *Etude des interactions entre les ondes électromagnétiques de fréquences moyennes et les matériaux composites : application à l'assemblage par induction de ces matériaux*. PhD thesis, 2011.
- [WE⁺03] E Weinan, Bjorn Engquist, et al. The heterogenous multiscale methods. *Communications in Mathematical Sciences*, 1(1) :87–132, 2003.

- [WEH03] E Weinan, Bjorn Engquist, and Zhongyi Huang. Heterogeneous multiscale method : a general methodology for multiscale modeling. *Physical Review B*, 67(9) :092101, 2003.
- [Wie12] Otto Heinrich Wiener. *Die theorie des mischkörpers für das feld der stationären strömung. 1. abhandlung : Die mittelwertsätze für kraft, polarisation und energie*. BG Teubner, 1912.
- [WTF13] Guillaume Wasselynck, Didier Trichet, and Javad Fouladgar. Determination of the electrical conductivity tensor of a cfrp composite using a 3-d percolation model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5) :1825–1828, 2013.
- [WTRF11] G Wasselynck, D Trichet, Brahim Ramdane, and J Fouladgar. Microscopic and macroscopic electromagnetic and thermal modeling of carbon fiber reinforced polymer composites. *IEEE transactions on magnetics*, 47(5) :1114–1117, 2011.
- [Zac12] De Grève Zacharie. *Modélisation Numérique de Composants Magnétiques Multi-Enroulements Sollicités à Haute Fréquence*. PhD thesis, Université de Mons - Polytech, 2012.
- [Zhe97] Dalian Zheng. Three-dimensional eddy current analysis by the boundary element method. *IEEE transactions on Magnetics*, 33(2) :1354–1357, 1997.

ملخص

في هاته الأطروحة، اقترحنا إجراء دراسة معمقة لتقنيات التوصيف والتحقق على أجزاء من المواد المركبة (الخلاط) و بالتحديد على تلك التي تستخدم فيها ألياف الكربون أحادية الاتجاه المعززة بالبوليمر. و عليه، تم تطوير نموذجين. الأول خاص بالتوصيف، حيث استعملت طريقة الترشيح بالشبكات الكهربائية و استخدمت المقاومات لتمثيل الروابط المحتملة بين الألياف. فيما يخص المقادير الفيزيائية لهته الشبكة تم حسابها باستخدام الطرق العشوائية (سلاسل ماركوف)، هذا النموذج سمح لنا بتنبأ الموصلية الكهربائية العرضية لهذا الخليط. النموذج الثاني استخدمت فيه المحاكاة للتحقق الغير المتلف باستعمال التيارات الحثية مع انتهاج مقاربة أنية لحل المسألة الجزئية والكلية دون المرور عبر مرحلة التجانس، هذا ما سمح بمحاكاة عيوب داخلية لألياف الكربون في النطاق المجهرى.

Résumé

Dans le cadre de cette thèse, on a proposer une investigation en profondeur des techniques de caractérisation et contrôle électromagnétique sur des pièces en matériaux composites, plus précisément sur des CFRP (Carbon Fibers Reinforced Polymere) unidirectionnel . Cela a permet de développer deux modèles. Le premiers est destiné à la caractérisation de la conductivité électrique transverse du CFRP, il est basé sur la percolation par réseau de résistances, les grandeurs physiques de ce réseau ont été déduites par des méthodes stochastiques (chaines de Markov). Ceci a permet de prédire la conductivité électrique transverse du composite et de voir les principaux paramètres qui l'influence. Le deuxième model traite du control, ce dernier a permet de simuler un control non destructif par courant de Foucault sur CFRP en adoptant une approche de résolutions parallèle des problèmes micro et macro lors de l'interaction du champ électromagnétique avec le CFRP sans passer par une phase d'homogénéisation, ce qui a permet de simuler des défauts microscopique interne dans le CFRP.

Abstract

The work of the present thesis falls within characterization and electromagnetic control of composite parts, specifically of unidirectional CFRP (Carbon Fibers Reinforced Polymer). In this scope two mathematical model were developed, the first one was designed to characterize the transverse electrical conductivity of CFRP, the idea was to use a percolation resistance network to represent of the possible inter fibers contacts. The electrical quantity of the resulting network were calculated using Markov chains, which allows us to predict the transverse conductivity and the principles parameters that influence it. The second model discuss the non destructive testing using eddy currents on CFRP, the simultaneous approach coupling micro to macro coupling was adopted. This approach have the benefit of getting homogenized solution without calculating the conductivity tensor explicitly, this advantage allows us to simulate microscopic internal defect affecting the CFRP.

