

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

**UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE**  
**FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**  
**DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE**

**THESE**

**Présentée pour obtenir le diplôme de**

**DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité : Electronique

Option : Contrôle

Par :

**Khalfa BETTOU**

**THEME**

**ANALYSE ET REALISATION DE CORRECTEURS ANALOGIQUES  
D'ORDRE FRACTIONNAIRE**

Devant le Jury :

Président	A. BENNIA	Professeur	Université de Constantine
Rapporteur	A. CHAREF	Professeur	Université de Constantine
Examineurs	S. DJENNOUNE	Professeur	Université de Tizi-Ouzou
	B. BOUTAMINA	Maître de Conférences 'A'	Université de Constantine
	S. LADACI	Maître de Conférences 'A'	Université de Skikda

Année 2011

*A mes très chers parents qui ont tellement fait de sacrifices pour moi*

*A mes chers sœurs et frère*

*A tous mes amis*

## Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Monsieur Abdelhak BENNIA, Professeur à l'Université de Constantine, d'avoir accepté la présidence du jury de ma soutenance, ainsi que Messieurs, Saïd DJENNOUNE, Professeur à l'Université de Tizi-Ouzou, Brahim BOUTAMINA, Maître de Conférences à l'Université de Constantine, Samir LADACI, Maître de Conférences à l'Université de Skikda, qui ont accepté d'examiner mon manuscrit de thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Abdelfatah CHAREF, Professeur à l'Université de Constantine, de m'avoir encadré durant ces années de Doctorat en étant toujours disponible et encourageant, pour son aide et conseils et pour ses grandes valeurs humaines.

Mes remerciements s'adressent à Mr Fouad Mesquine, qui m'a accueilli pendant mon stage de formation au sein du département de physique, université Cadi Ayyad (Maroc).

J'adresse mes remerciements au personnel du Laboratoire de génie électrique à l'université d'Extremadura en Espagne, qui m'ont accueilli pendant mes stages de formation et notamment Mr M. Blas Vinagre pour ces encouragements et les discussions scientifiques dont elles m'ont fait l'honneur.

Mes remerciements vont aussi à Mr Maamar Bettayab qui m'a constamment aidé à améliorer mes travaux, malgré le peu de temps que lui laissaient ses responsabilités au niveau de son laboratoire à l'université de Sharjah (E.A.U).

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du laboratoire de traitement de signal, à l'université de Constantine, pour leur sympathie et l'excellente ambiance de travail qu'ils ont créée.

Enfin je ne pourrais terminer ces remerciement sans une pensée à l'ensemble des mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

# Table des matières

<b>Remerciement</b>	vi
<b>1 Introduction Générale</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction.....	1
1.2 Objectifs de la thèse.....	3
1.3 Structure de la thèse.....	4
<b>2 Calcul d'ordre fractionnaire</b>	<b>6</b>
2.1 Introduction.....	6
2.1.1 Historique.....	6
2.1.2 Applications du calcul d'ordre fractionnaire.....	7
2.2 Définitions de l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire.....	7
2.2.1 Définition de Grünwald-Letnikov.....	8
2.2.2 Définition de Caputo.....	8
2.2.3 Définition de Riemann-Liouville.....	9
2.3 Quelques propriétés de la dérivation d'ordre fractionnaire.....	9
2.3.1 Linéarité.....	9
2.3.2 Opérateur identité.....	9
2.3.3 La loi additive d'index .....	10
2.3.4 Transformée de Laplace .....	10
2.4 Équations différentielles d'ordre fractionnaires et fonctions de transfert.....	10
2.5 Méthodes d'approximation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire....	10
2.5.1 Méthode de Charef : fonction de singularité.....	11
a. <i>Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire</i> .....	11
b. <i>Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire</i> .....	15
2.6 Discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	18
2.6.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui.....	20

2.6.2	Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui.....	23
2.7	Conclusion.....	25
<b>3</b>	<b>Correcteurs d'ordre fractionnaire</b>	<b>26</b>
3.1	Introduction.....	26
3.2	Commande d'ordre fractionnaire : un aperçu.....	28
3.3	Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	29
3.3.1	Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	29
3.3.2	Chronologie des techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	35
3.4	Approximation par fonction rationnelle du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	36
3.5	Correcteur $PI^\alpha$ - $PD^\beta$ d'ordre fractionnaire.....	40
3.5.1	Correcteur PI-PD classique.....	40
3.5.2	Structure du correcteur $PI^\alpha$ - $PD^\beta$ .....	41
3.6	Approximation par fonction rationnelle du correcteur $PI^\alpha$ - $PD^\beta$ .....	44
3.7	Conclusion.....	47
<b>4</b>	<b>Réglage des correcteurs <math>PI^\lambda D^\mu</math> d'ordre fractionnaire</b>	<b>48</b>
4.1	Motivation de base.....	48
4.2	Ajustement des paramètres du correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ .....	50
4.2.1	Ajustement des paramètres $K_P$ , $T_I$ et $T_D$ .....	50
4.2.2	Ajustement des paramètres $\lambda$ et $\mu$ .....	51
	<i>a. Système sans intégrateur</i> .....	52
	<i>b. Système avec intégrateur</i> .....	53
4.2.3	Exemples de simulation.....	54
	<i>a. Exemple 1</i> .....	54
	<i>b. Exemple 2</i> .....	56
	<i>c. Exemple 3</i> .....	60
4.2.4	Test de robustesse.....	64
4.3	Considérations d'implémentation.....	66
4.4	Conclusion.....	68
<b>5</b>	<b>Réglage des correcteurs <math>PI^\alpha</math>-<math>PD^\beta</math> d'ordre fractionnaire</b>	<b>69</b>
5.1	Introduction.....	69

5.1.1 Motivation.....	69
5.1.2 Critères intégrales.....	70
5.2 Ajustement des paramètres du correcteur $PI^\alpha$ - $PD^\beta$ .....	71
5.2.1 Technique d'ajustement proposée.....	71
5.2.2 Exemples de simulation.....	74
<i>a. Exemple 1</i> .....	74
<i>b. Exemple 2</i> .....	75
5.3 Test de robustesse.....	84
5.3.1 Exemple de simulation.....	84
5.4 Conclusion .....	87
<b>6 Conclusion générale</b>	<b>88</b>
<b>Annexe</b>	<b>90</b>
A. Méthode de Hall-Sartorius.....	90
<b>Bibliographie</b>	<b>94</b>

## Liste des figures

2.1	Choix des singularités pour l'approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	13
2.2	Tracé de Bode de $\frac{1}{(1 + \frac{s}{P_r})^\beta}$ et son approximation.....	14
2.3	Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	15
2.4	Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.....	17
3.1	Système de commande à retour unitaire classique.....	30
3.2	Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	32
3.3	Un exemple du module asymptotique du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	32
3.4	Graphe d'amplitude et de phase des correcteurs PID et $PI^\lambda D^\mu$ .....	33
3.5	Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ avec les ordres fractionnaires.....	33
3.6	Changement de $K_P$ , $K_I$ et $K_D$ du correcteur PID classique.....	34
3.7	Changement de $\lambda$ et $\mu$ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	34
3.8	Tracés de Bode des correcteurs PID et $PI^{0.5}D^{0.5}$ .....	38
3.9	Tracés de Bode des correcteurs PID et $PI^{1.5}D^{0.5}$ .....	39
3.10	Tracés de Bode des correcteurs PID et $PI^{0.5}D^{1.5}$ .....	39
3.11	Tracés de Bode des correcteurs PID et $PI^{1.5}D^{1.5}$ .....	40
3.12	Le système de commande $PI^\alpha$ - $PD^\beta$ d'ordre fractionnaire.....	42
3.13	Changement de $K_P$ et $K_I$ du correcteur PI classique.....	43
3.14	Changement de $K_P$ et $K_D$ du correcteur PD classique.....	43
3.15	Changement de $\alpha$ et $\beta$ des correcteurs $PI^\alpha$ et $PD^\beta$ d'ordre fractionnaire.....	43
3.16	Tracés de Bode des correcteurs PI et $PI^{0.5}$ .....	45
3.17	Tracés de Bode des correcteurs PI et $PI^{1.5}$ .....	46
3.18	Tracés de Bode des correcteurs PD et $PD^{0.5}$ .....	46
3.19	Tracés de Bode des correcteurs PD et $PD^{1.5}$ .....	47
4.1	Tracés de Bode du système en boucle ouverte.....	55
4.2	Réponses indicielles du système en boucle fermée.....	55
4.3	Tracés de Bode du système en boucle ouverte.....	59

4.4	Réponses indicielles du système en boucle fermée.....	59
4.5	Signal de commande du système en boucle fermée.....	60
4.6	Tracés de Bode du système en boucle ouverte .....	63
4.7	Réponses indicielles du système en boucle fermée.....	63
4.8	Signal de commande du système en boucle fermée.....	64
4.9	Les réponses indicielles du système en boucle fermée.....	65
4.10	Les réponses indicielles du système en boucle fermée.....	65
4.11	Structure du correcteur PID classique.....	67
4.12	Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	67
4.13	Nouvelle structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	68
5.1	Réponse indiciale du système en boucle fermée.....	75
5.2	Tracés de Bode des systèmes en boucle ouverte.....	77
5.3	Les réponses indicielles des systèmes en boucle fermée.....	77
5.4	Signaux de commande du système en boucle fermée.....	77
5.5	Les diagrammes de Bode des systèmes en boucle ouverte.....	80
5.6	Les réponses indicielles des systèmes en boucle fermée.....	81
5.7	Les signaux de commande des systèmes en boucle fermée.....	81
5.8	Les réponses indicielles des systèmes en boucle fermée.....	82
5.9	Les signaux de commande des systèmes en boucle fermée.....	82
5.10	Les réponses indicielles du système en boucle fermée avec variations du gain.....	85
5.11	Les signaux de commande avec variations du gain.....	85
5.12	Les réponses indicielles du système en boucle fermée avec variation du gain.....	86
5.13	Les signaux de commande avec variation du gain.....	87
A.1	Système de commande à retour unitaire classique.....	90



## Liste des tableaux

4.1	Caractéristiques de performance PI et $PI^{0.95}$ .....	56
4.2	Caractéristiques de performance de PID et $PI^{0.90}D^{0.90}$ .....	60
4.3	Caractéristiques de performance PID et $PI^{0.06}D^{0.95}$ .....	62
5.1	Caractéristiques fréquentielles: Cas 1.....	78
5.2	Caractéristiques temporelles: Cas 1.....	78
5.3	Caractéristiques fréquentielles: Cas 2.....	83
5.4	Caractéristiques temporelles: Cas 2.....	83

# Chapitre 1

## Introduction Générale

### 1.1 Introduction

De nos jours, les systèmes physiques animés par une commande automatique sont très répandus dans l'industrie et ils nous côtoient également dans la vie quotidienne. Exprimé de manière très laconique, l'objectif premier de l'automatique est l'étude et la conception d'algorithmes appropriés, afin que la sortie mesurée d'un processus, appelée grandeur à commander, suive une trajectoire désirée, en dépit de perturbations éventuelles. Le développement récent de la théorie des systèmes, de moyens informatisés, des processeurs et par conséquent de la puissance de calcul, ont considérablement amplifié l'utilisation de cette science pour la commande de processus.

L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie, est celle du calcul d'ordre fractionnaire qui étend la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires (voir historique à la section 2.1.1).

La naissance du calcul d'ordre fractionnaire remonte à l'année 1695 [1], quand Leibniz a soulevé la question suivante dans une lettre à L'Hôpital, " Peut la signification des dérivés avec ordre entier  $\frac{d^n y(t)}{dt^n}$  être généralisée aux dérivés avec des ordres non entier?". L'Hôpital, a soulevé une question en réponse: " Qu'en est il si l'ordre sera  $1/2$ ? ". La réponse historique de Leibniz était, " Il mènera à un paradoxe, duquel un jour des conséquences utiles seront tirées. ".

Dans les dernières décennies un intérêt considérable a été porté au calcul d'ordre fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [2]. Beaucoup de systèmes physiques ont affiché un comportement dynamique d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes viscoélastique, la polarisation d'électrode électrolyte, polarisation d'interfaces, le comportement cardiaque [3]. Dans les dernières années, les chercheurs ont pu trouver un progrès significatif de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans la théorie des systèmes et la théorie de commande [4, 5].

Le concept de commande d'ordre fractionnaire signifie que les systèmes commandés et/ou les correcteurs sont décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ce concept d'ordre fractionnaire, le but principal est d'améliorer les performances des systèmes de commande classique par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans les algorithmes de commande (voir aperçu à la section 3.2).

Historiquement, le premier qui a vraiment présenté un correcteur d'ordre fractionnaire est Oustaloup [6]. Il a développé le correcteur de commande robuste d'ordre non entier (CRONE) et appliqué ce correcteur dans divers domaines des systèmes de commande [6]. Plus récemment, Podlubny a proposé une généralisation du correcteur PID classique, à savoir le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, qui implique une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\lambda$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\mu$  [7]. Beaucoup de chercheurs ont été intéressés à l'utilisation ou réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. L'intérêt de ce type de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a deux paramètres supplémentaires qui sont une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\lambda$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\mu$ . Ces paramètres peuvent être employés pour remplir des caractéristiques additionnelles pour l'amélioration ou l'optimisation des performances ou d'autres conditions intéressantes pour le système à commander. Ces dernières années, les chercheurs ont annoncé que les correcteurs utilisant de dérivée et d'intégrale d'ordre fractionnaire pourraient assurer des performances et une robustesse supérieure à celles obtenus avec les correcteurs classiques (d'ordre entier).

Aujourd'hui, l'intérêt de la dérivation d'ordre fractionnaire ne cesse de grandir, notamment dans le domaine de l'automatique pour la modélisation, l'identification et la commande des systèmes. Des symposiums internationaux spécialisés et des ateliers organisés par ASME et IFAC ont été tenus pour promouvoir l'échange international et la coopération de recherche dans le domaine des dérivés fractionnaires et leurs applications.

## 1.2 Objectifs de la thèse

Ce travail porte essentiellement sur la contribution au développement des techniques de la commande classique en utilisant les concepts de la théorie des dérivées, intégrales et des systèmes d'ordre fractionnaire. En effet, de nouvelles techniques de réglage des correcteurs d'ordre fractionnaire sont proposées dans ce sens, tout en montrant leurs avantages en les appliquant aux différents types de systèmes dynamiques. Les travaux de recherches de cette thèse ont été basés sur l'utilisation des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande classique pour obtenir un correcteur d'ordre fractionnaire.

Comme premier objectif de ce travail, une nouvelle méthode pour la conception des correcteurs d'ordre fractionnaire et plus concrètement pour le réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire d'un système de commande classique à retour unitaire a été proposée. La stratégie d'ajustement adoptée dans la dite méthode de réglage est basée, en premier lieu, sur la méthode de réglage de Ziegler-Nichols pour calculer les paramètres  $K_P$ ,  $K_I$ , et  $K_D$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour  $\lambda=\mu=1$  qui signifie faire la conception du correcteur PID classique. Puis, en utilisant les paramètres  $K_P$ ,  $K_I$ , et  $K_D$  obtenus dans la première étape, le critère de minimisation ISE est formulé dans le domaine fréquentiel en utilisant la méthode de Hall-Sartorius pour calculer les ordres fractionnaires  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire qui sont choisis tel que  $0 < \lambda < 1$  et  $0 < \mu < 1$ . Cette stratégie a été appliquée pour différents types de modèles des processus existants dans la littérature. Malgré que la méthode classique de Ziegler-Nichols a été employée pour le réglage des paramètres  $K_P$ ,  $K_I$ , et  $K_D$  pour  $\lambda=\mu=1$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans ce travail, notre méthode de conception proposée peut employer toutes les autres techniques classiques de réglages existantes dans la littérature. Comme les correcteurs PID classiques sont généralement les plus utilisés dans pratiquement toutes les applications industrielles de commande, notre méthode de conception du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sera très appropriée aux correcteurs PID classiques déjà réglés. Ainsi, des considérations d'implémentation des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire avec les correcteurs PID déjà existants ont été aussi présentées. Une des très importantes propriétés des méthodes de réglage des correcteurs est la robustesse contre les erreurs du modèle du processus utilisé. Dans le but d'évaluer la robustesse du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire et faire une comparaison avec le correcteur PID classique, une étude des différentes réponses a été faite.

Le second objectif concerne le réglage des correcteurs  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire. Dans cette approche nous proposons une nouvelle structure de commande d'ordre fractionnaire basée sur la structure de commande PI-PD classique existante. Cette méthode traite le réglage du correcteurs  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire dans lequel les ordres des actions d'intégration et de différentiation  $\alpha$  et  $\beta$ , respectivement, sont des nombres réels. Ce correcteur est une généralisation d'un correcteur PI-PD classique, ( $\alpha = \beta = 1$ ). La méthode de réglage est basée sur la solution d'un problème de minimisation. Le correcteur  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire a six paramètres à régler (i.e.,  $K_{PIF}$ ,  $K_{IF}$ ,  $\alpha$ ,  $K_{PDF}$ ,  $K_{DF}$ ,  $\beta$ ). Pour régler les six paramètres du correcteur  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, la méthode proposée est basée sur la minimisation de deux critères de performance, le premier est basé sur l'intégrale du carré de l'erreur, le deuxième est une combinaison linéaire de l'intégrale du carré de l'erreur et l'intégrale du carré de l'effort de commande, ceci est pour deux cas d'étude, la méthode de Hall-Sartorius est utilisée pour évaluer les critères utilisés.

La comparaison des résultats pour les deux méthodes de réglage proposées à des schémas de commande d'ordre entier classique montre une nette amélioration des performances fréquentielles et temporelles. Une bonne robustesse aux incertitudes des paramètres de la fonction de transfert des systèmes de commande est justifiée aussi.

### 1.3 Structure de la thèse

Cette thèse est organisée de la manière suivante :

**Le chapitre 2** rappelle quelques notions de base sur le calcul d'ordre fractionnaire, dans le but de simplifier la compréhension de ce qui suivra. Une présentation de la méthode de fonction de singularité est donnée pour être utilisé comme méthode d'approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire. Enfin, l'implémentation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire, ainsi que l'approximation des opérateurs d'intégration et de dérivée d'ordre fractionnaire, sont considérés en fin de chapitre.

**Le chapitre 3** est consacré à la description des correcteurs d'ordre fractionnaire dans deux structures de commande, ceci est après un aperçu sur les techniques de commande d'ordre fractionnaire. Les deux structures de commande  $PI^\lambda D^\mu$  et  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire sont illustrées ainsi que les fonctions de transfert des deux correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  et  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire. L'approximation des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  et  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire par des

fonctions de transfert rationnelles est montrée aussi pour des ordres fractionnaires variables dans l'intervalle  $[0, 2]$ .

**Le chapitre 4** est la première partie essentielle et elle est consacré à la présentation de la méthode proposée pour le réglage des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, la méthode est basée sur les paramètres des correcteurs PID classiques existants et la minimisation d'un critère de performance. Une comparaison avec la structure PID classique y est également présentée pour montrer l'intérêt des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire notamment vis à vis des variations des paramètres du système à commander.

**Le chapitre 5** est la deuxième partie essentielle et elle présente la méthode développée pour le réglage des correcteurs  $PI^\alpha - PD^\beta$  d'ordre fractionnaire par minimisation des critères de performances. Une comparaison avec d'autres structures de commande y est également présentée pour montrer l'intérêt des correcteurs  $PI^\alpha - PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, des tests de robustesse ont été présentés aussi.

**Le chapitre 6** donne les perspectives de ce travail et tire quelques conclusions.

**L'annexe A** étudie la méthode de Hall- Sartorius utilisée dans cette thèse.

# Chapitre 2

## Calcul d'ordre fractionnaire

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Historique

Le calcul d'ordre fractionnaire est le domaine des mathématiques qui traite l'étude et l'application des intégrales et dérivées d'ordre arbitraire. Il est considéré comme un ancien concept. Les graines du calcul d'ordre fractionnaire ont été plantées il y a 300 années. De nombreux mathématiciens comme, N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, J. Fourier, A.K. Grünwald, J. Hadamard, G.H. Hardy, O. Heaviside, H. J. Holmgren, P.S. Laplace, G.W. Leibniz, A.V. Letnikov, J. Liouville, B. Riemann, M. Riesz et H. Weyl ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé [8]. Cependant, on peut considérer le calcul d'ordre fractionnaire comme un nouvel axe de recherche, puisque ce n'est que depuis un peu plus d'une trentaine d'années qu'il fait l'objet de beaucoup de travaux. Le premier livre dédié au calcul d'ordre fractionnaire a été publié en 1974, il revient à K.B. Oldham et J. Spanier [2], après un travail de collaboration entamé en 1968. Sur le plan mathématique, il faut citer l'ouvrage russe de Samko, Kilbas et Marichev [3] paru en 1993, qui regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes sur le calcul d'ordre fractionnaire. Aujourd'hui, l'intérêt du calcul d'ordre fractionnaire et ces applications ne cesse de grandir, dans plusieurs domaines. A partir de 2004, un workshop, qui se déroule tous les deux ans, spécialement dédié au calcul d'ordre fractionnaire et ses applications, a été créé.

### **2.1.2 Applications du calcul d'ordre fractionnaire**

Pendant la décennie passée le calcul d'ordre fractionnaire a été appliqué à presque chaque domaine de la science, l'ingénierie, et les mathématiques. Le calcul d'ordre fractionnaire a fait un impact profond dans les domaines de viscoélasticité et rhéologie, génie électrique, électrochimie, biologie, biophysique et technologie biologique, traitement de signal et d'image, mécanique, mécatronique, physique, et théorie de commande. Bien que certaines issues mathématiques restent non résolues, la plupart des difficultés ont été surmontées, et la plupart des problèmes mathématiques principaux documentés dans le domaine du calcul d'ordre fractionnaire ont été résolues à un point où plusieurs outils mathématiques pour le calcul d'ordre entier et fractionnaire sont identiques [9].

Les livres et les monographies de Oldham and Spanier [2], Oustaloup [6, 10], Miller et Ross [4], Samko, Kilbas, et Marichev [3], Gorenflo et Mainardi [8], Podlubny [5], et Hilfer [11] ont été utiles pour l'introduction du calcul d'ordre fractionnaire aux communautés d'ingénierie, de science, d'économie et finances, de mathématiques théoriques et appliquées. Le progrès dans ce domaine continue. Quatre livres récents dans ce domaine sont édités par Petras, Podlubny, O'Leary, Dorcak, et Vinagre [12], Kilbas, Srivastava et Trujillo [13], et Magin [14].

Malgré le progrès accompli dans le domaine du calcul d'ordre fractionnaire et ses applications, beaucoup de chercheurs continuent à demander: "Quelles sont les applications de ce domaine?". La réponse peut être trouvée dans [9]. Ce livre contient des travaux de recherches sur les applications du calcul d'ordre fractionnaire. Ces travaux de recherches ont été divisés en sept catégories basées sur leurs thèmes et applications, à savoir, techniques analytiques et numériques, mécanique classique et physique de particules, systèmes diffusifs, médias viscoélastiques et désordonnés, systèmes électriques, modélisation, et commande. Les applications, les théories, et les algorithmes présentés dans [9] sont contemporains, et elles avancent l'état de la connaissance dans le domaine du calcul d'ordre fractionnaire et ses applications.

## **2.2 Définitions de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire**

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. On peut mentionner les trois définitions suivantes:



### 2.2.1 Définition de Grünwald-Letnikov

La dérivation d'ordre fractionnaire est la généralisation de la fonction de dérivation entière à des ordres fractionnaires quelconques. Une autre généralisation, basée sur la définition usuelle de la dérivation entière, est proposée par Grünwald-Letnikov [4], donnée par :

$${}_{t_0}D_t^\alpha y(t) = \frac{{}_{t_0}d_t^\alpha (y(t))}{dt^\alpha} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ Nh=t-t_0}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t-kh) \quad (2.1)$$

Où 
$$\binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, k \geq 1, t_0 < t \text{ et } \alpha \in \mathbb{C}$$

Cette définition provient de la généralisation aux ordres fractionnaires de la formule donnant la dérivée d'ordre entier supérieur  $n$  d'une fonction continue  $y(t)$ , soit :

$$D^n y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} y(t-kh), n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

Sous la condition que les dérivées  $y^{(k)}(t)$  ( $k=1,2,\dots,m+1$ ) sont continues dans  $[t_0, t]$  avec  $m \leq \Re(\alpha) < m+1$ , la définition de Grünwald-Letnikov peut être aussi donnée par [5]:

$${}_{t_0}D_t^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^m \frac{y^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-\alpha} y^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma généralisée aux nombres fractionnaires, définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

### 2.2.2 Définition de Caputo

A la fin des années 60, dans le cadre de ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation d'ordre fractionnaire [15]. L'expression mathématique de cette définition est :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f^{(r)}(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

Avec  $r$  est un entier positif vérifiant l'inégalité  $(r-1) < \alpha < r$ .

$f^{(r)}(\tau)$ , étant la dérivée d'ordre entier  $r$ , par rapport à  $\tau$ , de la fonction  $f(\tau)$ .  ${}_t^C D_t^\alpha f(t)$ , désigne la dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  entre  $t_0$  et  $t$  selon la définition de Caputo.

### 2.2.3 Définition de Riemann-Liouville

L'expression mathématique de l'intégrale de Riemann-Liouville est donnée par [5]:

**Définition 1 :** Soient  $C$  et  $R$  les anneaux des nombres complexes et réels respectivement,  $\Re(\cdot)$  symbolise la partie réelle d'un nombre complexe. Soient  $\alpha \in C$  avec  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $t_0 \in R$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty)$ . L'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par :

$${}_{RL} I_{t_0}^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d(\xi) \quad (2.5)$$

Avec  $t \geq t_0$  et  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler.

**Définition 2 :** Soient  $\alpha \in C$  avec  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $n$  un entier positif,  $t_0 \in R$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty)$ . La dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par :

$${}_{RL} D_{t_0}^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\xi)^{n-\alpha-1} f(\xi) d(\xi) \quad (2.6)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < \alpha < n$ .

## 2.3 Quelques propriétés de la dérivation d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [5]:

### 2.2.1 Linéarité

La dérivation non entière est un opérateur linéaire. Ainsi, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et  $(a, b)$  des nombres réels, on a :

$$D^{(\alpha)}(a.f + b.g) = a.D^{(\alpha)}(f) + b.D^{(\alpha)}(g) \quad (2.7)$$

### 2.2.2. Opérateur identité

Pour  $\alpha = 0$ , l'opération  $D^{(0)}$  est l'opérateur identité :

$$D^{(0)} f(t) = f(t) \quad (2.8)$$

**2.2.3. La loi additive d'index :**

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (2.9)$$

Avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels.

**2.2.4. Transformée de Laplace :**

La transformée de Laplace  $F$ , fonction de l'opérateur de Laplace  $s$ , d'une fonction  $f$ , dépendant du temps  $t$ , est définie par la relation :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^\infty f(t).e^{-s.t}.dt \quad (2.10)$$

La transformation de Laplace d'une dérivée d'ordre  $\beta$  de la fonction  $f$  est donnée par la relation :

$$L\{D^{(\beta)}[f(t)]; s\} = s^\beta .L\{f(t); s\} \quad (2.11)$$

**2.4 Équations différentielles d'ordre fractionnaires et fonctions de transfert**

Un système d'ordre fractionnaire peut être décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [12]:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (2.12)$$

Ou par une fonction de transfert continue de la forme [12]:

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.13)$$

Où  $D^\gamma \equiv {}_0D_t^\gamma$  .....;  $a_k$  ( $k=0, \dots, n$ ),  $b_k$  ( $k=0, \dots, m$ ) sont des constantes; et  $\alpha_k$  ( $k=0, \dots, n$ ),  $\beta_k$  ( $k=0, \dots, m$ ) sont des nombres réels arbitraires.

**2.5 Méthodes d'approximation analogique des opérateurs fractionnaires**

D'habitude les simulations sont effectuées avec un logiciel préparé pour traiter seulement les puissances d'ordre entier de  $s$ . Alors il est très important de trouver des approximations d'ordre entier pour des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire. Autrement dit, lorsque les simulations doivent être exécutées ou les correcteurs doivent être implémentés, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire sont remplacées par des fonctions de transfert d'ordre entier, avec un comportement assez identique à celles désirées, mais beaucoup plus

facile à manipuler. Il existe différentes méthodes pour trouver de telles approximations, les approximations disponibles dans le domaine  $s$  sont appelées des approximations analogiques ou des approximations du domaine fréquentiel. Dans la référence [12], on peut trouver un très bon résumé des méthodes d'approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire, existantes dans la littérature. Ces méthodes d'approximation analogique sont :

- Méthode EFC (Expansion Fractionnaire Continue)
- Méthode de Carlson
- Méthode de Matsuda
- Méthode d' Oustaloup
- Méthode de Charef
- Autres méthodes (Roy, Wang, Jones...)

La méthode de Charef est plus élaborée et plus pratique pour les approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire, c'est pourquoi nous l'avons utilisée pour l'implémentation de nos schémas de commande et nous la présenterons en détail dans la suite.

### 2.5.1 Méthode de Charef : fonction de singularité

Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "méthode de la fonction de singularité" développée par Charef et al. [16, 17] qui est présentée dans cette section. Cette approche repose sur une méthode graphique, elle consiste à approximer la ligne de pente fractionnaire sur le tracé de Bode de la fonction de transfert irrationnelle par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente correspondant à une alternance de pôles et de zéros.

#### *a. Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire*

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\beta} \quad (2.14)$$

Avec  $s = j\omega$  la fréquence complexe et  $\beta$  est un nombre positif tel que  $0 < \beta < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H_1(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\beta} \quad (2.15)$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$H_1(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\beta} = \frac{K_I \omega_c^\beta}{s^\beta} = \frac{1}{s^\beta} \quad (2.16)$$

Avec  $K_I = (1/\omega_c^\beta)$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure du PPF, obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  ;  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10\beta}\right)} - 1}$  où  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (2.14) et le PPF de l'équation (2.15) dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ . Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (2.15), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction de transfert rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de  $-20\beta$  dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente  $-20$  dB/dec et  $0$  dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan  $s$  tel que  $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ .

D'où l'approximation suivante :

$$H_1(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\beta} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.17)$$

Les  $p_i$  et les  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation.

En utilisant une méthode graphique simple [16], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation  $\gamma$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ . Le choix des singularités pour l'approximation en maintenant un écart constant entre la ligne à  $-20\beta$  dB/dec et les lignes droites en zig-zag est présenté par la figure Fig.2.1.

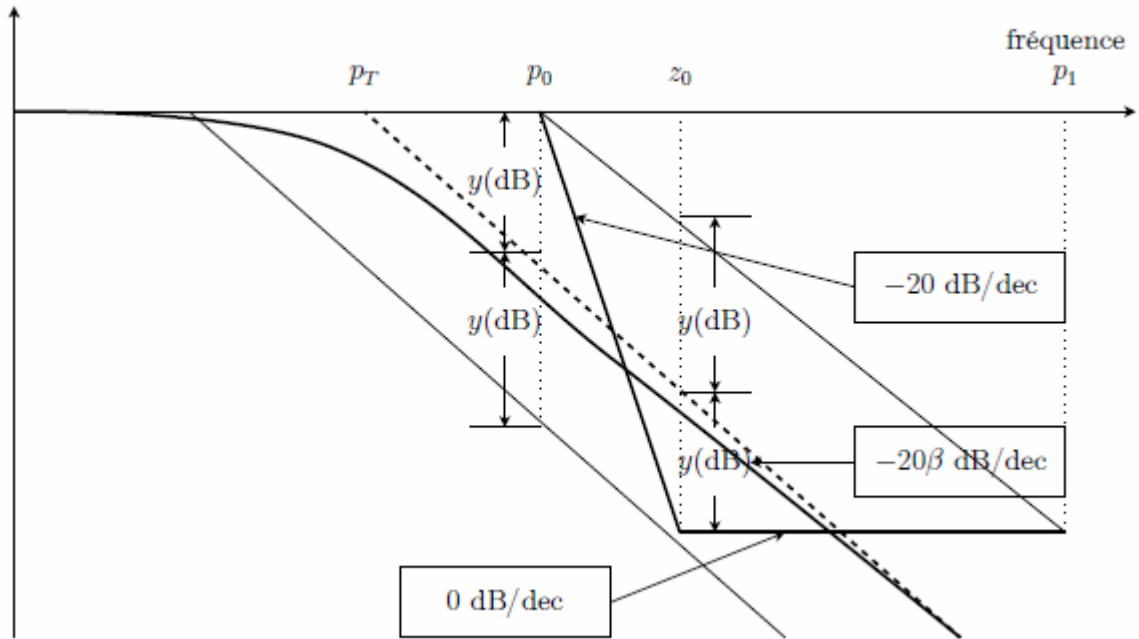


Fig. 2.1: Choix des singularités pour l'approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Pour déterminer le nombre  $N$ , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $\omega_{\max}$ " cette bande, telle que  $\omega_{\max}$  est pris 100 fois égal à  $\omega_h$  son expression est donnée par [16]:

$$N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \tag{2.18}$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0,1,\dots, N$$

$$z_i = (ab)^i ap_0, \text{ pour } i = 0,1,\dots, N-1$$

Où  $a$  et  $b$  sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de  $y$  et  $\beta$  sont donnée par :

$$a = 10^{\left( \frac{y}{10(1-\beta)} \right)}, \quad b = 10^{\left( \frac{y}{10\beta} \right)}$$

Et le premier pôle  $p_0$  et le premier zéro  $z_0$  sont donnés par [16]:

$$p_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad z_0 = ap_0$$

La figure Fig.2.2 présente le diagramme de Bode de  $\frac{1}{(1+\frac{s}{p_r})^\beta}$  avec une pente de  $-20\beta$  dB/dec et son approximation par des lignes droites en zig-zag avec des pentes individuelles de  $-20$  dB/dec et  $0$  dB/dec.

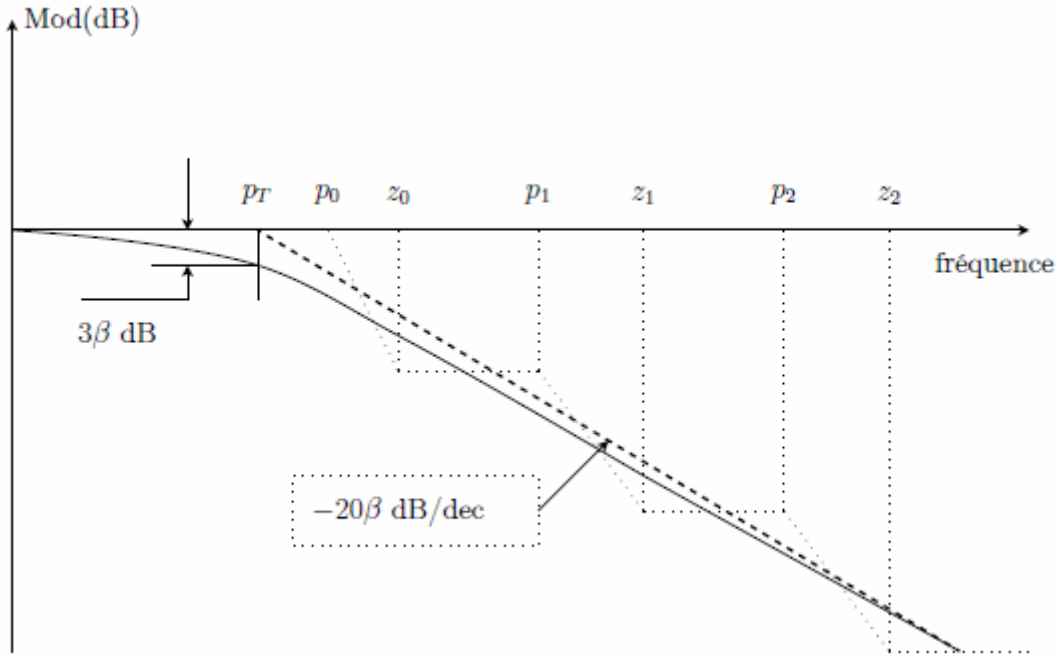


Fig. 2.2: Tracé de Bode de  $\frac{1}{(1+\frac{s}{p_r})^\beta}$  et son approximation

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_I(s) = K_I \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (2.19)$$

Où les coefficients  $h_i$  sont les résidus et qui sont déterminés par :

$$h_i = K_I \cdot \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j ap_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_I \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - (ab)^{(i-j)} \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.20)$$

Cette équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster de la 1<sup>ère</sup> forme dont le schéma est représenté dans la figure Fig.2.3 [18].

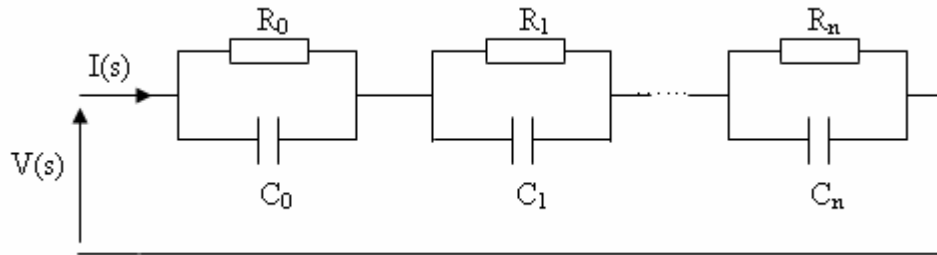


Fig. 2.3: Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

L'impédance de ce réseau est donnée par :

$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{R_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (2.21)$$

Que l'on peut faire correspondre à l'équation (2.19) en mettant :

$$R_i = h_i \quad , \quad C_i = \frac{1}{h_i (ab)^i p_0} \quad \text{Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (2.22)$$

**b. Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire**

La fonction de transfert du dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^\beta \quad (2.23)$$

Avec  $s = j\omega$  : la fréquence complexe et  $\beta$  : est un nombre réel positive tel que  $0 < \beta < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit [17]:

$$G_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^\beta \quad (2.24)$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$  , on peut écrire :

$$G_D(s) = K_D \left( \frac{s}{\omega_c} \right)^\beta = \frac{K_D}{\omega_c^\beta} s^\beta = s^\beta \quad (2.25)$$



Avec  $K_D = \omega_c^\beta$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  ;  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10 \left( \frac{\varepsilon}{10^\beta} \right) - 1}$  où  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (2.23) et le ZPF de l'équation (2.24) dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ .

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (2.24), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction de transfert rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de  $20\beta$  dB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente  $20$  dB/dec et  $0$  dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan  $s$  tel que  $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$  [16].

D'où l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^\beta \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (2.26)$$

En utilisant une méthode graphique simple [16], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ .

Pour déterminer le nombre 'N', la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $\omega_{\max}$ " cette bande, tel que  $\omega_{\max}$  est pris 100 fois égal à  $\omega_h$  son expression est donnée par [17]:

$$N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{z_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (2.27)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$p_i = (ab)^i az_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Avec :  $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$  et  $p_0 = az_0$

Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera :

$$G_D(s) = s^\beta = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\beta \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (2.28)$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on doit décomposer la fonction rationnelle  $\frac{G_D(s)}{s}$  en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} \cdot K_D \cdot \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (2.29)$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.30)$$

Avec  $G_0 = K_D$ , et

$$g_i = K_D \cdot \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(- (ab)^i az_0) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})}, \text{ Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (2.31)$$

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster de la 2<sup>ème</sup> forme, dont le schéma est représenté à la figure Fig.2.4 [17].

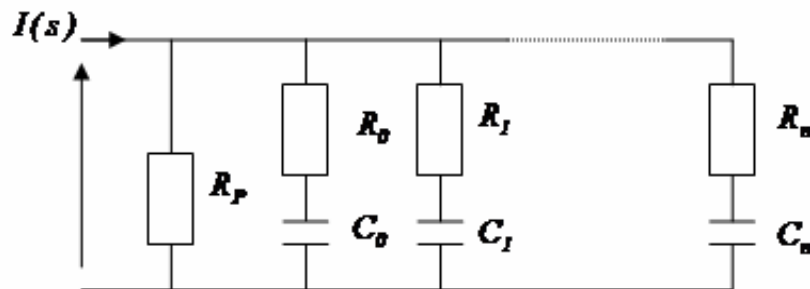


Fig. 2.4: Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

L'admittance de ce réseau est de la forme :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left( \frac{sC_i}{1 + sR_iC_i} \right) \quad (2.32)$$

Que l'on peut faire correspondre à l'équation (2.30) en mettant :

$$C_i = g_i \quad , \quad R_i = \frac{1}{g_i P_i} \quad \text{et} \quad R_p = G_0 \quad \text{Pour } i = 0,1,\dots,N \quad (2.33)$$

## 2.6 Discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire

L'étape clé dans l'implémentation numérique d'un correcteur d'ordre fractionnaire est l'évaluation numérique ou la discrétisation des dérivations d'ordre fractionnaire " $s^\beta$ ". En général, il y a deux types de méthodes de discrétisation : la discrétisation directe et la discrétisation indirecte. Dans les méthodes de discrétisation indirecte, deux étapes sont nécessaires, l'approximation analogique du dérivateur puis la discrétisation de la fonction de transfert en  $s$  obtenue. Les méthodes de discrétisation directe existantes incluent l'application du développement direct en série de puissances de l'opérateur d'Euler, le développement fractionnaire continu de l'opérateur de Tustin et les méthodes basées sur l'intégration numérique [19, 20].

Cependant, comme il est noté dans [21], le schéma de discrétisation basé sur l'opérateur de Tustin, présente de trop grandes erreurs en hautes fréquences. Un nouveau schéma mixte utilisant simultanément les opérateurs d'Euler et de Tustin est proposé, qui utilise l'opérateur dit d'Al-Alaoui [21]. Ces méthodes de discrétisation de " $s^\beta$ " sont sous forme de réponse impulsionnelle infinie (RII) [22]. D'autres méthodes ont été développées ces dernières années pour obtenir directement la différentiation numérique d'ordre fractionnaire sous forme de réponse impulsionnelle finie (RIF) [23].

Un système de commande d'ordre fractionnaire peut être décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [12]:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (2.34)$$

Ou par une fonction de transfert continue de la forme [12] :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.35)$$

Pour obtenir les modèles discrets des systèmes d'ordre fractionnaire, il est nécessaire d'utiliser des approximations discrètes des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. En faisant cela dans l'équation (2.35) de  $G(s)$ , une expression générale pour la fonction de transfert discrète du système d'ordre fractionnaire  $G(z)$ , peut être obtenue sous la forme :

$$G(z) = \frac{b_m(w(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1}(w(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0(w(z^{-1}))^{\beta_0}}{a_n(w(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1}(w(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0(w(z^{-1}))^{\alpha_0}} \quad (2.36)$$

Où  $(w(z^{-1}))$  représente l'équivalent discret de l'opérateur de Laplace  $s$ , exprimé comme une fonction de la variable complexe  $z$  ou l'opérateur de décalage  $z^{-1}$ . Comme on peut le voir dans les expressions précédentes, un système d'ordre fractionnaire possède une fonction de transfert continue irrationnelle dans le domaine de Laplace et une fonction de transfert discrète de dimension infinie dans le domaine de  $Z$ . En d'autres termes, un système d'ordre fractionnaire a une mémoire illimitée, au contraire des systèmes d'ordre entier où la mémoire est limitée. Il est évident que seulement dans le cas des systèmes d'ordre entier, on peut réaliser exactement une fonction de transfert en utilisant les éléments électriques conventionnels (résistances, inductances, et capacités dans le cas des réalisations analogiques), ou en utilisant les procédures conventionnelles (équations aux différences d'ordre fini ou filtres numériques dans le cas des réalisations discrètes). La dernière étape dans l'implémentation d'un système de commande d'ordre fractionnaire exige une forme réalisable de celui-ci, c'est pour cela que nous nous sommes intéressés aux approximations d'ordre entier discrètes des opérateurs et fonctions d'ordre fractionnaire. En effet, une difficulté majeure avec les modèles d'ordre fractionnaire est la simulation dans le domaine temporel. Souvent, l'expression analytique de la sortie d'un modèle n'est pas simple à implémenter.

Durant les 20 dernières années, des algorithmes numériques ont été développés en utilisant des modèles rationnels, soit continus ou discrets qui approximent les systèmes d'ordre fractionnaire, comme exemples, Vinagre et al. [24] ont développé une nouvelle méthode pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire en utilisant l'approche de Tustin. Ferdi [25] a récemment présenté une méthode de calcul de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire par le développement en séries de puissances et la modélisation du signal. Charef et al. [26, 27, 28] ont proposé une nouvelle méthode pour la discrétisation de l'opérateur d'ordre fractionnaire, qui est basée sur les travaux de Charef [17] et qui donne une fonction rationnelle continue, l'opérateur de Laplace  $s$  est substitué par son équivalent discret, ce dernier est calculé en utilisant de diverses méthode d'approximations, les plus récents sont Backward (Euler), Bilinéaire (Tustin), Simpson, Al-Alaoui [29, 30, 31, 32].

Nous présentons dans la suite trois méthodes classiques de discrétisation (la méthode Backward (Euler) [29], la méthode Bilinéaire (Tustin) [29], la méthode Al-Alaoui [32]). Les deux fonctions rationnelles de l'intégrateur et du dérivateur d'ordre fractionnaire obtenus par la méthode d'approximation de Charef sont données par [17]:

Pour l'intégrateur d'ordre fractionnaire :

$$H_I(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.37)$$

Pour le dérivateur d'ordre fractionnaire :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.38)$$

### 2.6.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui

L'étape de l'implémentation numérique de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire sert à la discrétisation de la fonction rationnelle  $H_I(z)$  par les trois méthodes suivantes :

**-1-** La transformation Bilinéaire est connue dans la littérature souvent sous le nom de la méthode trapézoïdale d'intégration, ou la méthode de transformation de Tustin. L'équation de la transformation bilinéaire est donnée par :

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2.39)$$

**-2-** La transformation Backward (Euler) est une méthode simple de discrétisation qui produit un filtre discret stable à partir d'un filtre analogique stable. L'équation de la transformation Backward est donnée par :

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (2.40)$$

**-3-** L'équation de la transformation Al-Alaoui est donnée par :

$$s = \frac{8}{7T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1} / 7} \quad (2.41)$$

Où  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $z = \exp(j.\omega.T)$  est une variable complexe,  $T$  est la période d'échantillonnage pour les trois méthodes de discrétisation.

Donc, les discrétisations de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par les transformations précédentes sont données par :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\beta} \Big|_{s = \frac{21-z^{-1}}{T1+z^{-1}}} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s = \frac{21-z^{-1}}{T1+z^{-1}}} \quad (2.42)$$

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\beta} \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (2.43)$$

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\beta} \Big|_{s = \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}/7}} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s = \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}/7}} \quad (2.44)$$

Elle donne le filtre RII (Réponse Impulsionnelle Infinie) suivant :

$$H_{BIL}(z) = (z+1) \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left[\left(1 + \frac{2}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{2}{Tp_i} - 1\right)\right]} \quad (2.45)$$

$$H_{BACK}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i z}{\left[\left(1 + \frac{1}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{1}{Tp_i}\right)\right]} \quad (2.46)$$

$$H_{ALA}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i (z+1/7)}{\left[\left(1 + \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} - \frac{1}{7}\right)\right]} \quad (2.47)$$

On pose:

$$\alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i} \quad \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1 \quad (2.48)$$

$$\delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i} \quad \chi_i = \frac{1}{Tp_i} \quad (2.49)$$

$$\ell_i = 1 + \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} \quad \partial_i = \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} - \frac{1}{7} \quad (2.50)$$

Par substitution des équations (2.48), (2.49), (2.50) dans les équations (2.45), (2.46), (2.47) respectivement on obtient :

$$H_{BIL}(z) = (z+1) \cdot \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{(\alpha_i \cdot z - \lambda_i)} \quad (2.51)$$

$$H_{BACK}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i \cdot z}{(\delta_i \cdot z - \chi_i)} \quad (2.52)$$

$$H_{ALA}(z) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i \cdot (z+1/7)}{(\ell_i \cdot z - \partial_i)} \quad (2.53)$$

La transformée en  $z$  inverse des équations (2.51), (2.52) et (2.53) donne les résultats suivants :

$$h_{BIL}(k) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) + \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (2.54)$$

$$h_{BACK}(k) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^k u(k) \quad (2.55)$$

$$h_{ALA}(k) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^k u(k) + \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (2.56)$$

Où  $u(k)$  est la fonction échelon unitaire.

La troncation des filtres RII de longueur infinie ou de longueur finie " $L$ " permet d'aboutir aux filtres RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) suivants :

$$H_{(RIF)BIL} = \sum_{k=0}^L h_{BIL}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^L \left[ \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) + \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \quad (2.57)$$

$$H_{(RIF)BACK} = \sum_{k=0}^L h_{BACK}(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^L \left[ \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^k u(k) \right] z^{-k} \quad (2.58)$$

$$H_{(RIF)ALA} = \sum_{k=0}^L h_{ALA}(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^L \left[ \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^k u(k) + \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \quad (2.59)$$

### 2.6.2 Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilineaire, Backward et Al-Alaoui

La discrétisation du dérivateur fractionnaire par les trois transformations précédentes suit cet acheminement :

Bilineaire:

$$G_D(s) = K_D s^\beta \Big|_{s=\frac{21-z^{-1}}{T1+z^{-1}}} \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s=\frac{21-z^{-1}}{T1+z^{-1}}} \quad (2.60)$$

Backward:

$$G_D(s) = K_D s^\beta \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (2.61)$$

Al-Alaoui:

$$G_D(s) = K_D s^\beta \Big|_{s=\frac{8-z^{-1}}{7T z+1/7}} \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \Big|_{s=\frac{8-z^{-1}}{7T z+1/7}} \quad (2.62)$$

On trouve les filtres RII suivants :

$$G_{BIL}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i(z-1)}{\left[ \left(1 + \frac{2}{Tp_i}\right)z - \left(\frac{2}{Tp_i} - 1\right) \right]} \quad (2.63)$$



$$G_{BACK}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i(z-1)}{\left[ \left( 1 + \frac{1}{Tp_i} \right) z - \left( \frac{1}{Tp_i} \right) \right]} \quad (2.64)$$

$$G_{ALA}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{8}{7T} \frac{g_i(z-1)}{\left[ \left( 1 + \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} \right) z - \left( \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} - \frac{1}{7} \right) \right]} \quad (2.65)$$

On pose:

$$\alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i} \quad \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1 \quad (2.66)$$

$$\delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i} \quad \chi_i = \frac{1}{Tp_i} \quad (2.67)$$

$$\ell_i = 1 + \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} \quad \partial_i = \frac{8}{7} \frac{1}{Tp_i} - \frac{1}{7} \quad (2.68)$$

Par substitution des équations (2.66), (2.67), (2.68) dans les équations (2.63), (2.64), (2.65) respectivement on obtient :

$$G_{BIL}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i(z-1)}{(\alpha_i z - \lambda_i)} \quad (2.69)$$

$$G_{BACK}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i(z-1)}{T(\delta_i z - \chi_i)} \quad (2.70)$$

$$G_{ALA}(z) = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{8}{7T} \frac{g_i(z-1)}{T(\ell_i z - \partial_i)} \quad (2.71)$$

La transformée en  $z$  inverse des équations (2.63), (2.64) et (2.65) donne les résultats suivants :

$$g_{BIL}(k) = K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (2.72)$$

$$g_{BACK}(k) = K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (2.73)$$

$$g_{ALA}(k) = K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\ell_i} \left( \frac{\partial_i}{\ell_i} \right)^{k-1} u(k-1) \quad (2.74)$$

Avec  $u(k)$  est la fonction échelon unité,  $e(k)$  est l'impulsion Dirac.

La troncation des filtres RII de longueur infinie ou de longueur finie "L" permet d'aboutir aux filtres RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) suivants :

$$\begin{aligned}
 G_{(RIF)BIL} &= \sum_{k=0}^L g_{BIL}(k)z^{-k} \\
 &= \sum_{k=0}^L \left[ K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i}{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \quad (2.75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{(RIF)BACK} &= \sum_{k=0}^L g_{BACK}(k)z^{-k} \\
 &= \sum_{k=0}^L \left[ K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\delta_i} \left( \frac{\chi_i}{\delta_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{(RIF)ALA} &= \sum_{k=0}^L g_{ALA}(k)z^{-k} \\
 &= \sum_{k=0}^L \left[ K_D e(k) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\ell_i} \left( \frac{\chi_i}{\ell_i} \right)^k u(k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \frac{g_i}{\ell_i} \left( \frac{\chi_i}{\ell_i} \right)^{k-1} u(k-1) \right] z^{-k} \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul d'ordre fractionnaire. Nous y répertorions quelques notions essentielles sur le calcul d'ordre fractionnaire nécessaire pour la compréhension de notre travail sur la commande d'ordre fractionnaire. Après un historique sur le calcul d'ordre fractionnaire, nous avons présenté les définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire. Les caractéristiques et les méthodes de représentation et d'approximation de ces opérateurs sont également étudiées.

# Chapitre 3

## Correcteurs d'ordre fractionnaire

### 3.1 Introduction

Malgré un éventail très large de processus existants et malgré les diverses formulations envers les exigences requises, le correcteur proportionnel intégral dérivé (PID), dont l'architecture relativement dépouillée consiste en seulement trois termes distincts, s'est imposé dans plus de 90% des boucles de contre-réaction. La prédominance incontestée de ce type de correcteur provient, outre de sa simplicité extrême, des performances qu'il peut offrir aux systèmes en boucle fermée, satisfaisant très souvent les cahiers des charges, si ses paramètres sont choisis judicieusement [33].

La possibilité de percevoir le correcteur PID sous plusieurs angles radicalement différents explique que la littérature regorge de méthodes de synthèse, offrant une complexité et des performances très variables, pour répondre aux divers problèmes rencontrés. Le correcteur PID peut être vu, très intuitivement, comme un outil dont le réglage peut être accompli en considérant indépendamment l'effet produit par chacun de ses paramètres. Un tel regard débouche sur des règles et des formules empiriques encore très appréciées actuellement. Enfin, il peut être considéré sous différents aspects plus mathématiques dans le but d'optimiser ses performances ou d'être rendu robuste.

De manière grossière, les méthodes existantes peuvent être classifiées en deux catégories: la première considère le réglage en se basant sur un modèle du système à commander, alors que la seconde propose une synthèse directe, fondée sur les données obtenues directement à partir de mesures. Bien que ces deux domaines aient été diversement étudiés dans la littérature, aucune méthode ne constitue à ce jour la panacée universelle, et tous les problèmes n'ont de loin pas encore été résolus. Preuve en sont les récentes constatations, affirmant que les correcteurs PID

sont encore souvent mal réglés dans l'industrie et qu'un gain de productivité non négligeable est ainsi sacrifié. Une cause majeure est certainement que nombre de méthodes modernes ne sont peu ou pas utilisées, car souvent restreintes à un type de système bien particulier. Leur mise en oeuvre est, de plus, régulièrement jugée trop complexe par la communauté industrielle. Enfin, certaines d'entre elles ne considèrent pas l'essence du problème, à savoir la stabilité, la robustesse ainsi que les performances temporelles.

Lorsqu'une structure en rétroaction doit être utilisée, il est légitime de se poser les questions suivantes : pourquoi utiliser un correcteur de type PID? Une telle architecture est-elle suffisante pour la commande du processus considéré ? Bien qu'à ce jour il n'existe aucune caractérisation formelle des systèmes pour lesquels l'utilisation de correcteurs PID s'avère judicieuse, des réponses partielles à ces questions peuvent être trouvées dans la littérature.

Quant à la question de savoir si un correcteur PID est suffisant pour la commande d'un système considéré, une étude qualitative est proposée en [33]. Elle souligne que, lorsque la dynamique d'un système est essentiellement du premier ordre, un correcteur PI est adéquat. C'est également le cas pour un correcteur PID, quand la dynamique dominante est du second ordre. Par contre, si l'ordre du système est plus élevé, les performances peuvent être améliorées par l'utilisation d'autres architectures de contre-réaction. Il résulte également des performances limitées lors de l'emploi de correcteurs PID avec des systèmes possédant des modes oscillants. Les systèmes dominés par un retard pur engendrent évidemment des difficultés, la prédiction linéaire de l'écart futur par le terme dérivé ne permet pas de résoudre le problème de manière satisfaisante. La structure linéaire du correcteur PID n'est pas adaptée aux systèmes fortement non linéaires. Parfois, d'excellents résultats peuvent néanmoins être obtenus avec d'autre structure de commande. Enfin, bien que plusieurs méthodes de réglage du correcteur PID soient proposées dans la littérature pour commander les systèmes instables [34, 35, 36, 37], les performances obtenues sont souvent modestes.

Notons finalement que les exigences en terme de performances sont, pour beaucoup d'applications, très élevées. Malgré toutes les techniques existantes pour le réglage des paramètres du correcteur PID, un travail continu et intensif de recherches est en cours vers le perfectionnement de la qualité de commande des systèmes et l'amélioration des performances. Une des possibilités d'améliorer le correcteur PID est d'utiliser une commande d'ordre fractionnaire avec des parties de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire.

### 3.2 Commande d'ordre fractionnaire : un aperçu

La décennie précédente a connu des efforts de recherche très remarquable reliés au calcul d'ordre fractionnaire et son application dans la théorie de commande des systèmes. Clairement, pour une boucle fermée de commande des systèmes, il existe quatre situations : (1) système d'ordre entier avec correcteur d'ordre entier, (2) système d'ordre entier avec correcteur d'ordre fractionnaire, (3) système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre entier, et (4) système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre fractionnaire. Dans la pratique de commande des systèmes, on considère uniquement le correcteur d'ordre fractionnaire. Ceci est en raison que le modèle du système peut être déjà obtenu comme un modèle d'ordre entier dans le sens classique. Du point de vue ingénierie, la signification de commande d'ordre fractionnaire est que c'est une généralisation de la théorie de commande d'ordre entier classique qui pourrait mener à une modélisation plus adéquate et des performances de commande plus robuste. En effet, l'intérêt majeur de la commande d'ordre fractionnaire est l'amélioration ou l'optimisation des performances en utilisant les concepts de la théorie des dérivées, intégrales et des systèmes d'ordre fractionnaire. Les premières tentatives d'appliquer le calcul d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes peuvent être trouvées dans [38, 39].

Du point de vue historique, ils existent dans la littérature, quatre structures principales de commande d'ordre fractionnaire [40]:

La première structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) [6], était proposé par Alain Oustaloup au début des années 1990, et il a démontré la supériorité des performances du correcteur proposée en comparaison avec le correcteur PID classique. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce correcteur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, en imposant un gabarit fractionnaire au système de commande en boucle fermée. La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variantes de cette commande ont vu le jour (1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> générations) et des applications aussi bien en laboratoire qu'en industrie ont été développées, à titre d'exemple la commande de la suspension de voiture [41].

La deuxième structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire [7], proposé par Igor Podlubny en 1999, ce correcteur est une généralisation du correcteur PID, comprenant une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\lambda$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\mu$ . Il a aussi démontré la meilleure réponse de ce type de correcteurs, en comparaison avec le correcteur PID classique, pour la commande des systèmes d'ordre fractionnaire.

La troisième structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur TID [42], ce correcteur a une structure semblable à un correcteur PID classique, mais la composante proportionnelle est remplacée d'un composant ayant une fonction de transfert  $\frac{T}{s^{1/n}}$ , où  $T$  est une constante du correcteur et  $n$  est un nombre réel non nul, de préférence entre 2 et 3. La fonction de transfert du correcteur TID rapproche plus étroitement la fonction de transfert optimale de la boucle définie par Bode, réalisant de ce fait l'amélioration des performances de commande en rétroaction. De plus, par rapport aux correcteurs PID, le correcteur TID assure un meilleur rejet de perturbation, et de plus légers effets des variations de paramètres du système sur la réponse en boucle fermée. L'objectif du correcteur TID est de fournir un correcteur amélioré de la boucle de rétroaction ayant les avantages du correcteur PID, mais fournissant une réponse qui est plus proche de la réponse optimale théorique [42].

La quatrième structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire, étudié dans [43] et [44], ce correcteur est une généralisation du correcteur avance-retard de phase classique, une technique d'auto-réglage est donnée dans [44]. Le correcteur avance-retard de phase classique est une méthode de conception populaire des boucles de commande, le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire devrait avoir son valeur égale comparée aux correcteurs CRONE et  $PI^\lambda D^\mu$ . Cependant, des méthodes systématiques de conception plus intuitives sont nécessaires.

### 3.3 Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

#### 3.3.1 Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Aujourd'hui, le correcteur PID est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement sont des correcteurs PID. Généralement, le correcteur PID classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure Fig.3.1. Où  $u(t)$  désigne le signal de commande et  $e(t)$  l'écart résultant de la différence entre la consigne  $r(t)$  et la grandeur à commander  $y(t)$ ,  $C(s)$  est la fonction de transfert du correcteur,  $Gp(s)$  est la fonction de transfert de système.

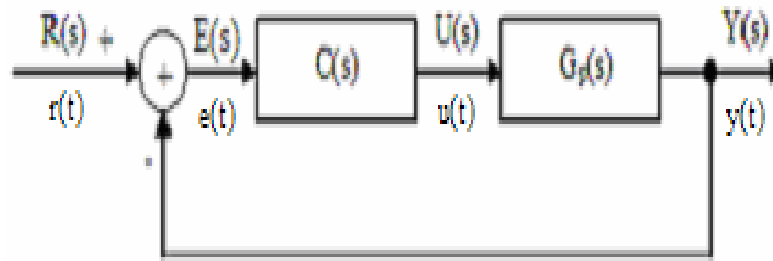


Fig. 3.1: Système de commande à retour unitaire classique

Le correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique est basée sur le présent (P), le passé (I) et le future (D) de l'erreur de commande  $e(t)$ , son comportement peut être décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (3.1)$$

Les paramètres du correcteur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel  $K_p$ , la constante d'intégration  $T_I$  et la constante de dérivation  $T_D$ . Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire.

La partie proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, multiplié par le gain  $K_p$ . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart. D'un autre côté, un correcteur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un correcteur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation du terme intégral. Ce dernier génère, à partir d'un moindre signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur. Mais il engendre un effet déstabilisant. Au contraire, l'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée du terme dérivé est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition [33].

Afin d'améliorer le comportement du correcteur PID, on propose la version du correcteur d'ordre fractionnaire. La forme la plus commune d'un correcteur d'ordre fractionnaire est le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire [7], impliquant un intégrateur d'ordre  $\lambda$  et un différentiateur d'ordre  $\mu$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont n'importe quels nombres réels.

L'équation de la sortie du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme:

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_I} D^{-\lambda}(e(t)) + T_D D^\mu(e(t)) \right) \quad (3.2)$$

$\lambda$  est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration tel que  $0 < \lambda < 1$  et  $\mu$  est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation tel que  $0 < \mu < 1$ .

L'algorithme du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire tel que décrit en équation (3.2) peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (3.3)$$

Une expression équivalente, où les paramètres apparaissent de manière linéaire, est souvent plus appréciée pour les calculs analytiques. Une telle formulation est donnée par la forme parallèle :

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad (3.4)$$

Les gains d'intégration  $K_I$  et de dérivation  $K_D$  sont liés aux paramètres de la forme standard par les relations suivantes :

$$K_I = \frac{K_p}{T_I} \quad (3.5)$$

$$K_D = K_p T_D \quad (3.6)$$

La figure Fig.3.2, présente la structure interne du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, elle consiste on la connexion parallèle des parties proportionnelle, intégrale d'ordre fractionnaire et dérivée d'ordre fractionnaire.



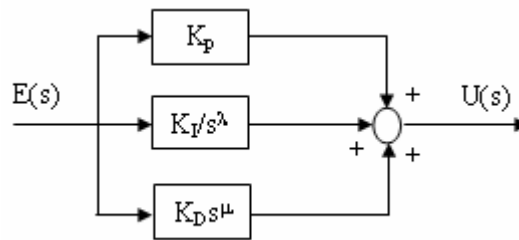


Fig. 3.2: Structure du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire

En tenant compte de la discussion précédente, le tracé asymptotique de Bode du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire de l'équation (3.4) peut être obtenu dans la figure Fig.3.3. On peut observer les pentes de  $-20\lambda \text{ dB/dec}$  et  $20\mu \text{ dB/dec}$  des parties intégrale et dérivée, respectivement, du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

Les tracés exacts du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire (amplitude et phase) sont représentés dans la figure Fig.3.4. Par comparaison avec celles du correcteur PID, on peut observer l'effet des ordres fractionnaires sur les pentes des parties intégrale et dérivée, du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

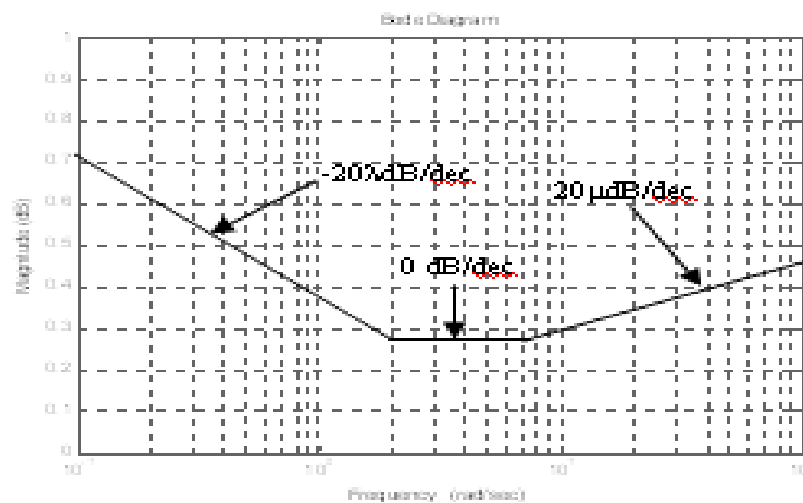


Fig. 3.3: Un exemple du module asymptotique du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire

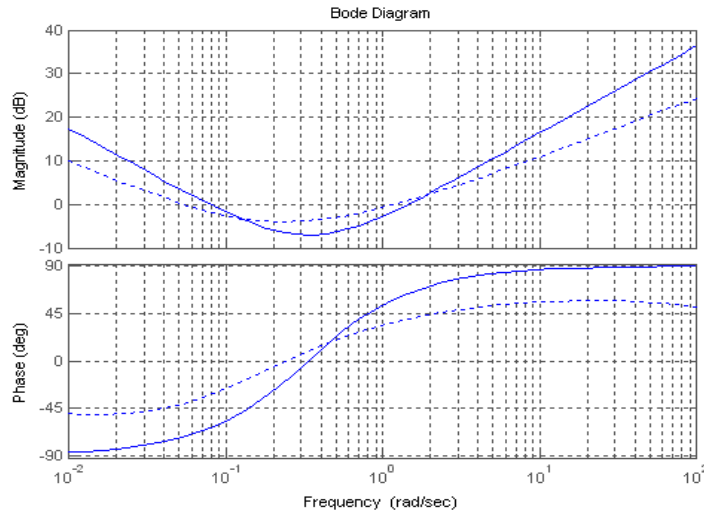


Fig. 3.4: Tracés d'amplitude et de phase : (\_\_\_ : PID et ... :  $PI^\lambda D^\mu$  pour  $\lambda=0.8$  et  $\mu=0.7$ )

Comme indiqué dans la figure Fig.3.5, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire généralise le correcteur PID classique et l'étend du point à un plan. Cette expansion pourrait fournir beaucoup plus de flexibilité dans la conception de commande PID. Clairement, choisissant  $\lambda = 1$  et  $\mu = 1$ , un correcteur PID classique peut être récupéré. Utilisant  $\lambda=1$  et  $\mu=0$ , et  $\lambda=0$  et  $\mu=1$ , respectivement, correspond à des correcteurs PI et PD classiques. Tous ces types de correcteurs PID classiques sont les cas spéciaux du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire donné par l'équation (3.4).

Pour un exemple,  $K_p=0.309$ ,  $K_I= 4.5$  et  $K_D=0.0006$  sont choisis comme paramètres de base d'un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Par comparaison des figures Fig.3.6 et Fig.3.7, on peut voir que l'utilisation des parties intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire peut ajuster les réponses fréquentielles du correcteur PID classique d'une manière beaucoup plus significative que de changer les coefficients  $K_p$ ,  $K_I$ , et  $K_D$ . Le changement des réponses en fréquence est également plus prévisible.

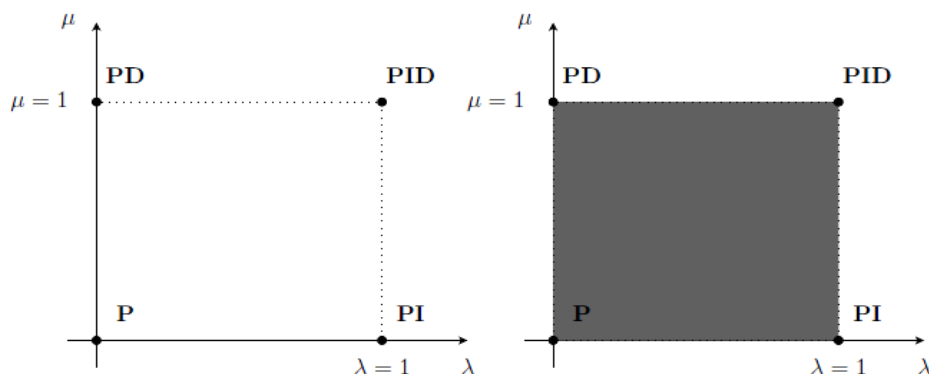
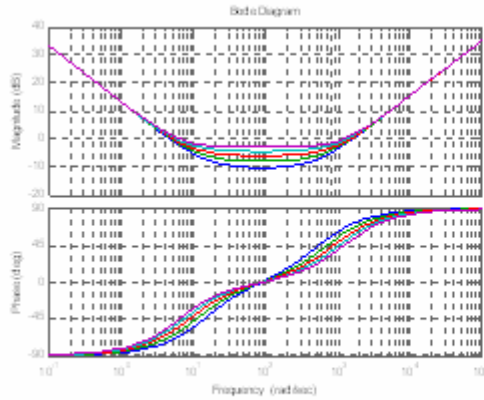
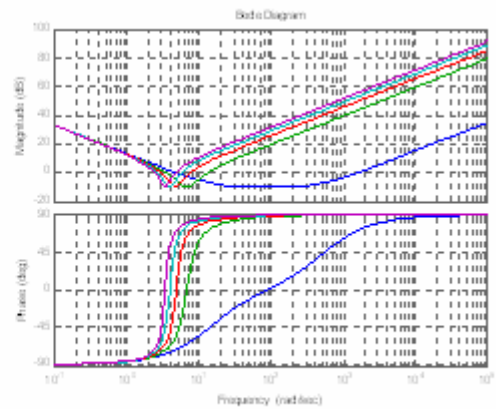


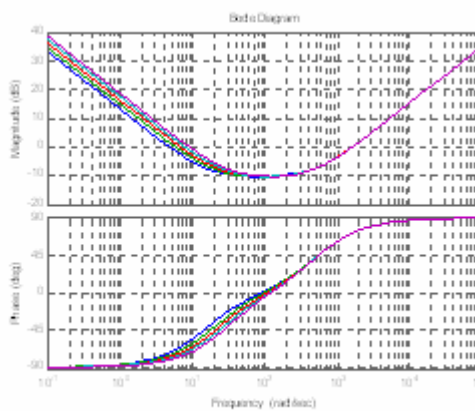
Fig. 3.5: Correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  avec les ordres fractionnaires



(a) Changement de  $K_p$  avec intervalle de 0.1

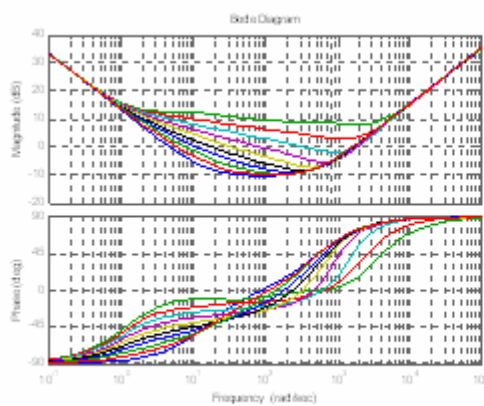


(c) Changement de  $K_i$  avec intervalle de 0.1

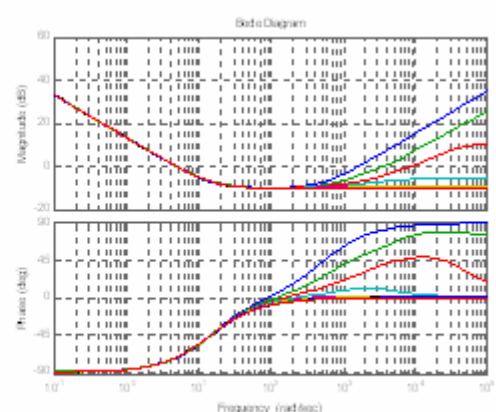


(b) Changement de  $K_d$  avec intervalle de 1

Fig. 3.6: Changement de  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  du correcteur PID classique



Changement de  $\lambda$  de 0.1 à 1



Changement de  $\mu$  de 0.1 à 1

Fig. 3.7: Changement de  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire

Un des avantages les plus importants du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est sa possibilité de bien commander la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Un autre avantage se trouve dans le fait que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont moins sensibles aux changements des paramètres d'un système commandé, ce qui donne une amélioration de la robustesse. Ceci est parce que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire ayant deux degrés de liberté supplémentaires pour mieux ajuster les propriétés dynamiques de systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Puisque les ordres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels arbitraires, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est plus flexible et donne l'avantage de mieux régler les propriétés dynamiques des systèmes [7]. Des activités de recherche sont dirigées pour définir de nouvelles techniques de réglage des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par l'extension de la théorie de commande classique.

### 3.3.2 Chronologie des techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Afin d'améliorer les performances des systèmes de commande et assurer les spécifications désirées, plusieurs structures de commande utilisant l'idée de correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire ont été étudiées par les chercheurs. Dans [45], l'extension de dérivation et d'intégration de l'ordre entier à l'ordre fractionnaire fournit une stratégie de réglage plus flexible et donc un accomplissement plus facile d'exigences de commande par rapport aux correcteurs classiques.

Un correcteur PID optimal d'ordre fractionnaire basé sur des marges de phase et de gain spécifiées avec optimisation de l'intégrale du carré de l'erreur est conçu dans [46]. La variation des ordres fractionnaires des parties intégrales et dérivées des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire et leurs effets sur les systèmes de commande d'ordre fractionnaire ont été principalement étudiés par une analyse qualitative et étude de simulation [47]. Une autre approche est l'utilisation d'une nouvelle stratégie de commande pour les systèmes du premier ordre avec un long temps de retard [48]. Une contrainte de robustesse intéressante est considérée dans ce dernier travail, en forçant la phase du système en boucle ouverte d'être plate à la fréquence de coupure. Dans [49], le réglage des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire a été mis en oeuvre comme une boucle QFT (Quantitative Feedback Theory). Cette vue du problème de réglage étend les techniques de réglage existantes pour considérer les problèmes de commande robuste, où l'incertitude des systèmes est donnée dans la forme du modèle QFT (incluant, par exemple, l'incertitude paramétrique). Dans [50], deux ensembles de règles d'ajustement des paramètres des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, qui dépendent uniquement des mêmes données de la réponse temporelle du système utilisée par les règles de Ziegler-Nichols pour les

correcteurs PID classique, ont été présentées. Dans ce cas-là, aucun modèle du système n'a été nécessaire; seulement une réponse temporelle a été utilisée. Dans [51], le processus de réglage optimal des paramètres en utilisant l'algorithme d'optimisation par essaim particulaires (PSO) a été utilisé pour ajuster les paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. L'idée du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  adaptatif d'ordre fractionnaire est étudiée dans [52], elle a pour but d'améliorer les performances des systèmes de commande adaptative classique par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans les algorithmes de commande. Dans [53], l'auteur a proposé une nouvelle méthode de dimensionnement du correcteur IP d'ordre fractionnaire par l'utilisation des algorithmes génétiques (GA).

Quelques méthodes de conception des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont basées sur une extension de la théorie de commande PID classique, la conception des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordres fractionnaires basée sur des méthodes d'optimisation est une des tendances intensivement développées. Une grande contribution à ce secteur a été les travaux de [54], avaient orienté vers la conception basée sur l'optimisation, ils existent plusieurs critères de qualité de commande pour évaluer les performances de correcteurs et concevoir les paramètres de correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par optimisation. Dans [55], le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire a été conçu pour accomplir quelques spécifications du système de commande, tels que la robustesse aux incertitudes du modèle et le bruit de haute fréquence. En plus, les auteurs ont proposé une méthode d'autoréglage pour ce type de correcteur. Cette liste est tout à fait loin de viser l'état complet, en manquant de mentionner des centaines d'autres textes publiés rattachés au calcul d'ordre fractionnaire et ses applications. La raison principale pour laquelle ils ne sont pas mentionnés ici, est que leurs sujets ne sont pas pertinents pour le but de cette thèse.

### 3.4 Approximation par fonction rationnelle du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

L'implémentation des correcteurs d'ordre fractionnaires nécessite de remplacer les fonctions de transfert d'ordre fractionnaires par des fonctions de transfert d'ordre entier avec un comportement assez similaire à celui désiré, mais beaucoup plus facile à manipuler. Ils existent plusieurs méthodes pour trouver une telle approximation, une très bonne révision des méthodes d'approximations continues et discrètes des systèmes d'ordre fractionnaire est donnée dans [12, 56].

Dans le but d'implémenter le correcteur d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande présenté dans cette thèse, nous utiliserons la méthode appelée "méthode de la

fonction de singularité" développée par Charef et al. [16, 17], présentée dans la section 2.5.1. L'approximation des opérateurs d'intégration et de dérivée d'ordre fractionnaires est donnée par :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\beta} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.7)$$

$$H_D(s) = s^\beta \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.8)$$

Selon les variations des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  dans l'intervalle  $[0, 2]$ , ils existent quatre cas pour obtenir l'approximation de la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire :

**Cas 1:  $0 < \lambda < 1$  et  $0 < \mu < 1$ :** L'approximation de la fonction  $C(s)$ , dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$ , est donnée comme :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{K_I}{T_I} \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} \left(1 + \frac{s}{z_{Ii}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_I} \left(1 + \frac{s}{p_{Ii}}\right)} + T_D K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{z_{Di}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{p_{Di}}\right)} \right) \quad (3.9)$$

**Cas 2:  $1 < \lambda < 2$  et  $0 < \mu < 1$ :** L'approximation de la fonction  $C(s)$ , dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$ , est donnée comme :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{K_I}{s T_I} \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} \left(1 + \frac{s}{z_{Ii}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_I} \left(1 + \frac{s}{p_{Ii}}\right)} + T_D K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{z_{Di}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{p_{Di}}\right)} \right) \quad (3.10)$$

**Case 3:  $0 < \lambda < 1$  et  $1 < \mu < 2$ :** L'approximation de la fonction  $C(s)$ , dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$ , est donnée comme :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{K_I}{T_I} \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} \left( 1 + \frac{s}{z_{Ii}} \right)}{\prod_{i=0}^{N_I} \left( 1 + \frac{s}{p_{Ii}} \right)} + T_D s K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left( 1 + \frac{s}{z_{Di}} \right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left( 1 + \frac{s}{p_{Di}} \right)} \right) \quad (3.11)$$

**Case 4:  $1 < \lambda < 2$  et  $1 < \mu < 2$ :** L'approximation de la fonction  $C(s)$ , dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$ , est donnée comme :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{K_I}{s T_I} \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} \left( 1 + \frac{s}{z_{Ii}} \right)}{\prod_{i=0}^{N_I} \left( 1 + \frac{s}{p_{Ii}} \right)} + T_D s K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left( 1 + \frac{s}{z_{Di}} \right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left( 1 + \frac{s}{p_{Di}} \right)} \right) \quad (3.12)$$

Les figures Fig.3.8, Fig.3.9, Fig.3.10 et Fig.3.11 présentent les tracés de Bode des fonctions rationnelles du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour différentes valeurs des ordres fractionnaires  $\lambda$  et  $\mu$ , on peut constater l'effet de changement de  $\lambda$  et  $\mu$  sur les pentes des actions intégrale et dérivée du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

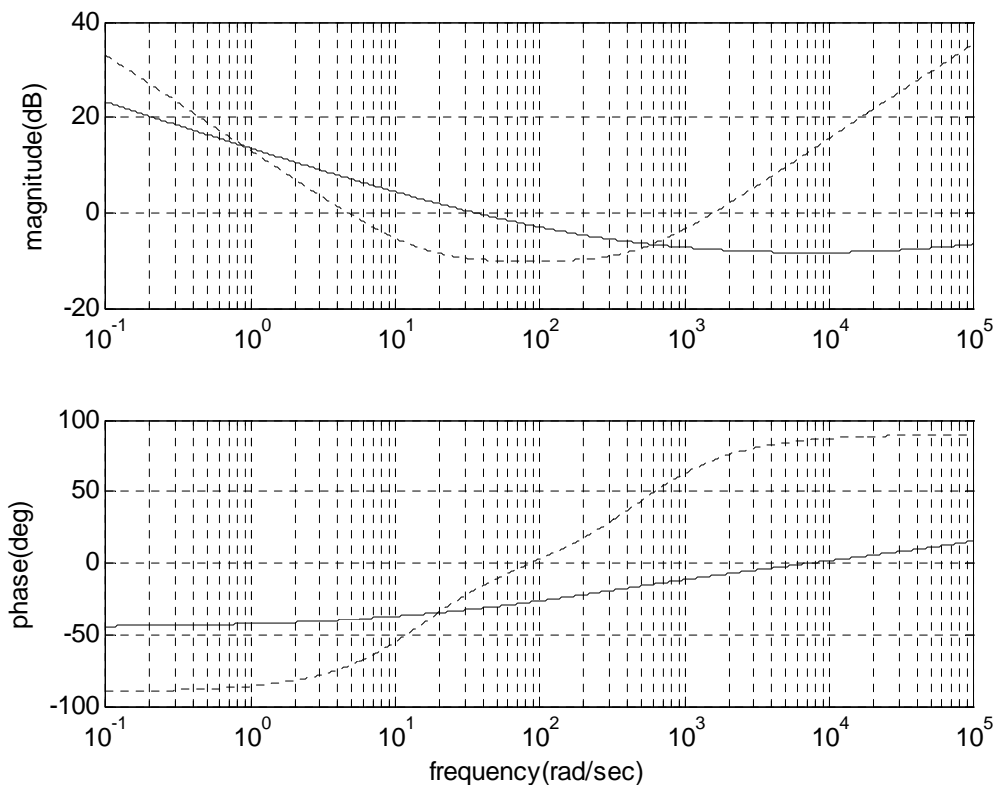


Fig. 3.8: Tracés de Bode des correcteurs : (---: PID, \_\_\_: PI<sup>0.5</sup>D<sup>0.5</sup>)

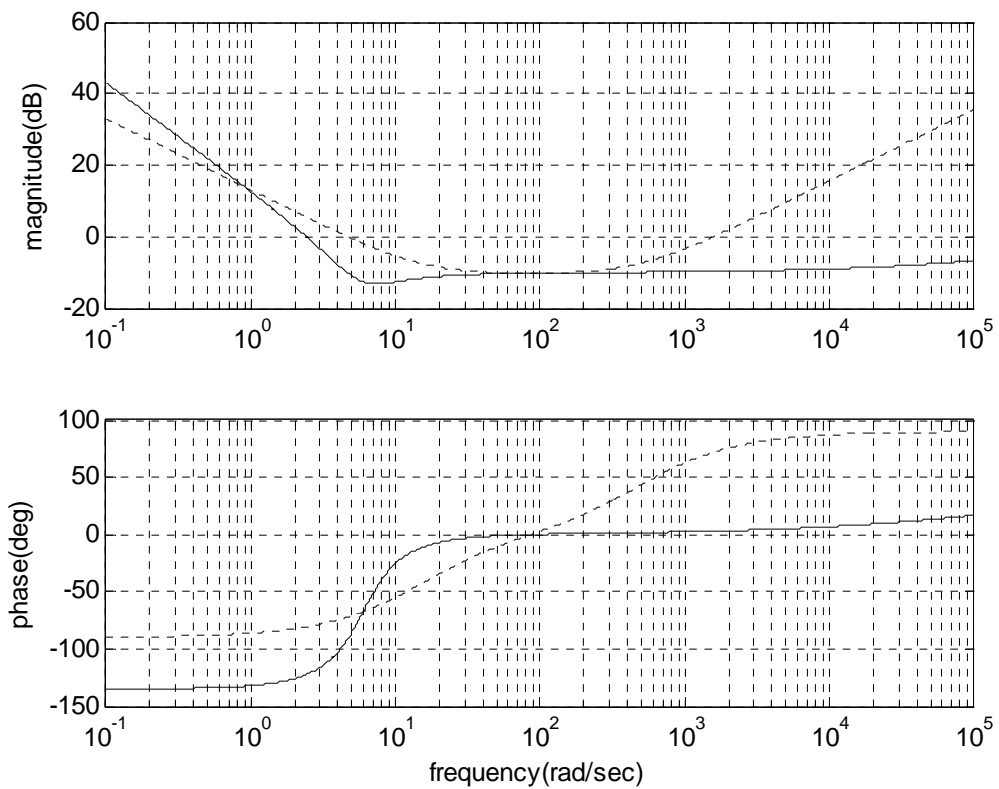


Fig. 3.9: Tracés de Bode des correcteurs : (---: PID, \_\_\_:  $PI^{1.5}D^{0.5}$ )

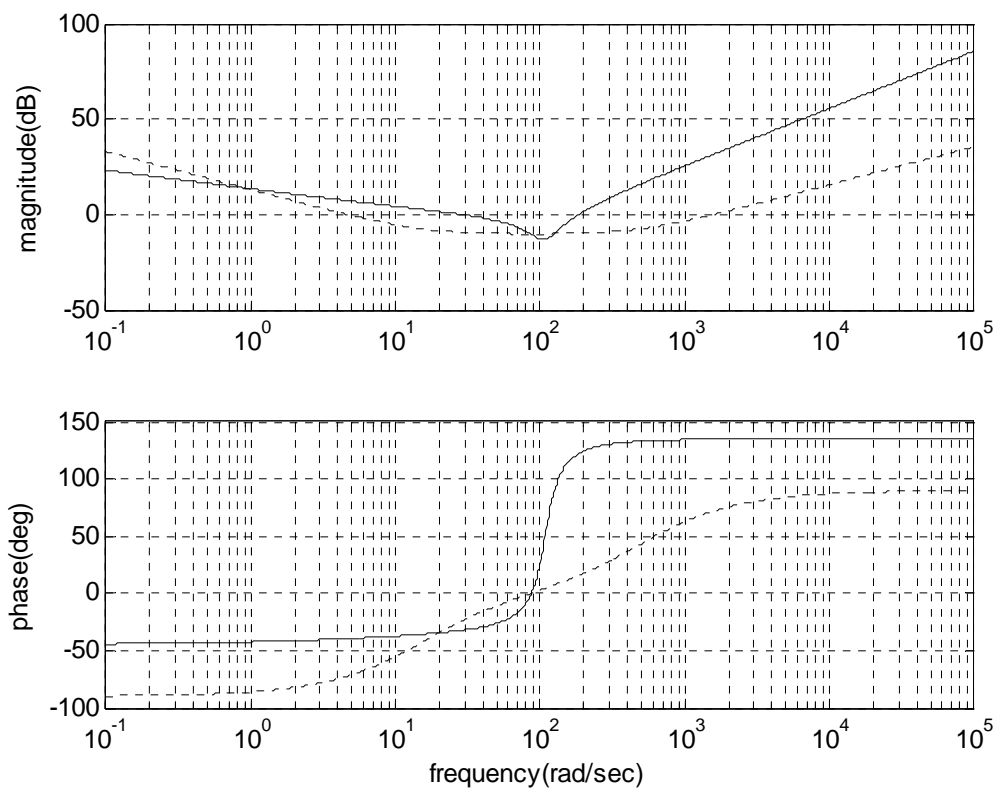


Fig. 3.10: Tracés de Bode des correcteurs : (---: PID, \_\_\_:  $PI^{0.5}D^{1.5}$ )



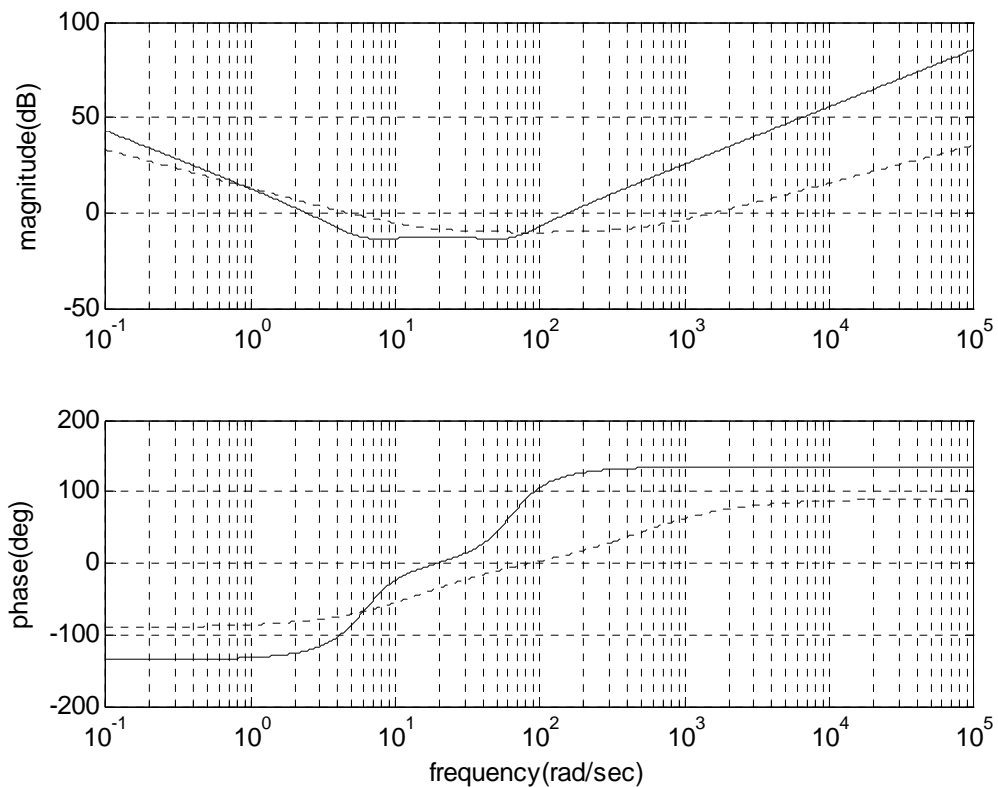


Fig. 3.11: Tracés de Bode des correcteurs : (---: PID, \_\_\_:  $PI^{1.5}D^{1.5}$ )

### 3.5 Correcteur $PI^{\alpha}$ - $PD^{\beta}$ d'ordre fractionnaire

#### 3.5.1 Correcteur PI-PD classique

Malgré les événements significatifs des années récentes dans la théorie de commande, le correcteur PID est le plus industriellement employé comme algorithme de commande. On peut expliquer cela par sa simplicité et la capacité de résoudre la plupart des problèmes de commande [33]. Cependant, la conception de commande des systèmes avec résonance, des fonctions de transfert avec intégration ou instables, est souvent face aux difficultés [57].

Historiquement, Benouarets [58] était le premier qui a mentionner la structure de commande PI-PD classique, cette structure utilise une boucle de réactions intérieure. Malheureusement, le vrai potentiel du correcteur PI-PD n'a pas été identifié parce qu'il était employé pour commander des systèmes avec des fonctions de transfert de pôles simple et stable où ses avantages sont relativement mineurs.

Plus tard, [59] et [60] utilisent une structure de commande PID-P classique pour la commande des systèmes instables et avec intégration. En outre, ils emploient un correcteur proportionnel seulement pour obtenir la stabilité des systèmes instables ou avec intégration de la boucle ouverte et puis employer le correcteur PID pour une commande efficace du système

global. Il vaut mieux d'employer une boucle de rétroaction intérieure avec un correcteur PD à la place d'un correcteur P seulement, ceci assure non seulement la stabilité des systèmes instables ou avec intégration de la boucle ouverte mais garantit également un placement approprié des pôles.

Le correcteur PI-PD proposé par Majhi [61] est une forme modifiée du correcteur PID. Le correcteur PI-PD, qui correspond à la commande PI de la fonction de transfert du système changée par le retour de la commande PD, peut produire une commande améliorée dans plusieurs situations. De plus loin, le correcteur PD dans la boucle de réaction intérieure peut permettre le placement des pôles de la boucle ouverte dans des positions appropriées, fournissant ainsi la bonne qualité de commande des systèmes ayant des fonctions de transfert en boucle ouverte instable, avec intégration ou résonance [62].

### 3.5.2 Structure du correcteur $PI^\alpha$ - $PD^\beta$

Les objectifs d'une telle structure de commande sont le perfectionnement de la qualité de commande des systèmes et l'amélioration des performances. Dans ce contexte, nous proposons une généralisation du correcteur PI-PD, à savoir le correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, impliquant une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\alpha$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\beta$ . L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a encore deux paramètres qui sont l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration  $\alpha$  et l'ordre fractionnaire  $\beta$  de l'action de différentiation. Ces paramètres peuvent être employés pour accomplir des spécifications complémentaires pour la conception ou d'autres exigences intéressantes pour le système à commander. La présence de six paramètres à régler fait la tâche de conception du correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire plus stimulante que du correcteur PI-PD classique, aussi que d'autres correcteurs d'ordre entier et fractionnaire.

Le correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire est implémenté dans deux étapes: la première est pour la sortie du correcteur  $PI^\alpha$  d'ordre fractionnaire et la seconde pour la sortie du correcteur  $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire. Le correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire final combine l'ensemble de ces deux correcteurs individuels d'une façon appropriée comme indiqué dans la figure Fig.3.12.

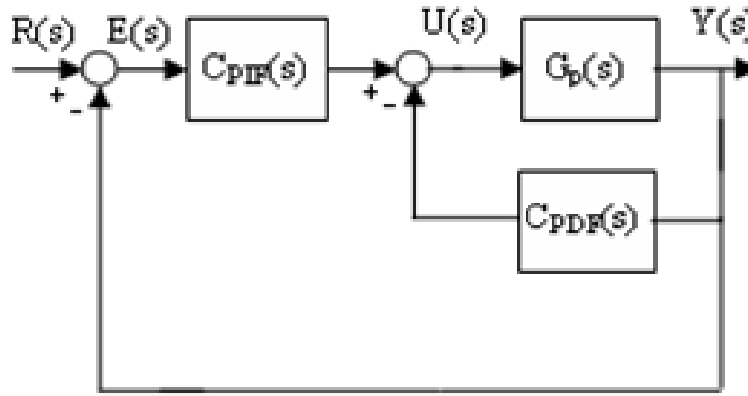


Fig. 3.12: Le système de commande PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert du correcteur PI<sup>α</sup> d'ordre fractionnaire est donnée comme:

$$C_{PIF}(s) = (K_{PIF} + \frac{K_{IF}}{s^\alpha}) \tag{3.13}$$

Où  $K_{PIF}$  et  $K_{IF}$  sont les gains proportionnel et intégral, respectivement,  $\alpha$  est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration, avec  $0 < \alpha < 1$ .

La fonction de transfert du correcteur PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire est donnée comme:

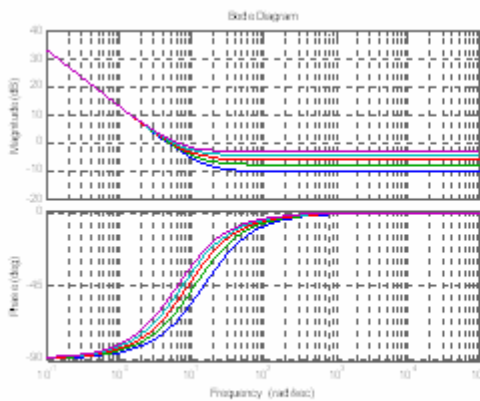
$$C_{PDF}(s) = (K_{PDF} + K_{DF}s^\beta) \tag{3.14}$$

Où  $K_{PDF}$  et  $K_{DF}$  sont les gains proportionnel et dérivée, respectivement,  $\beta$  est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation, avec  $0 < \beta < 1$ .

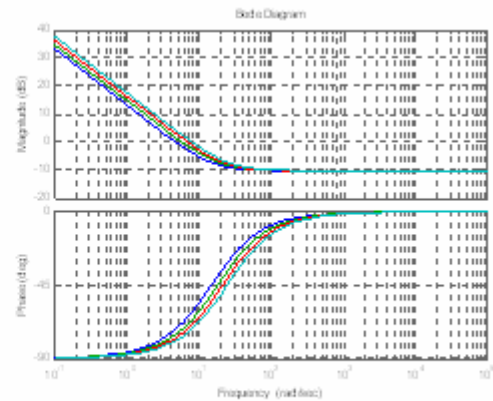
La fonction de transfert du signal de sortie du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire est donnée par:

$$U(s) = (K_{PIF} + \frac{K_{IF}}{s^\alpha})E(s) - (K_{PDF} + K_{DF}s^\beta)Y(s) \tag{3.15}$$

Prenons,  $\alpha=1$  et  $\beta=1$ , nous obtenons le correcteur PI-PD classique. Si  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$ , nous obtenons le correcteur PI-P. Si  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ , nous obtenons le correcteur P-PD. Tous ces types de correcteurs PI-PD classiques sont des cas particuliers du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire. Pour un exemple,  $K_{PIF}=0.309$ ,  $K_{IF}=4.5$ ,  $K_{PDF}=0.309$  et  $K_{DF}=0.0006$  sont choisis comme paramètres de base d'un correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire. Par comparaison des figures Fig.3.13, Fig.3.14 et Fig.3.15 on peut voir que l'utilisation des parties intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire peut ajuster les réponses fréquentielles des correcteurs PI et PD d'une manière beaucoup plus significative que de changer les coefficients  $K_{PIF}$ ,  $K_{IF}$ ,  $K_{PDF}$  et  $K_{DF}$ . Le changement des réponses en fréquence est également plus prévisible.

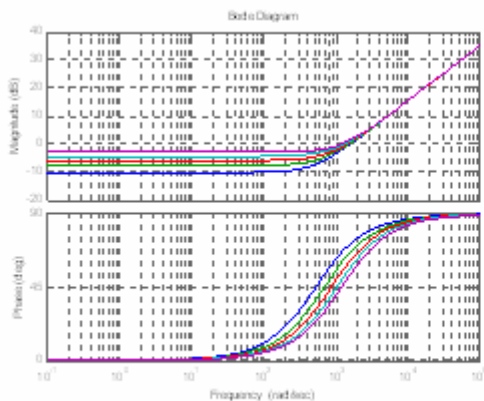


(a) Changement de  $K_p$  du correcteur PI

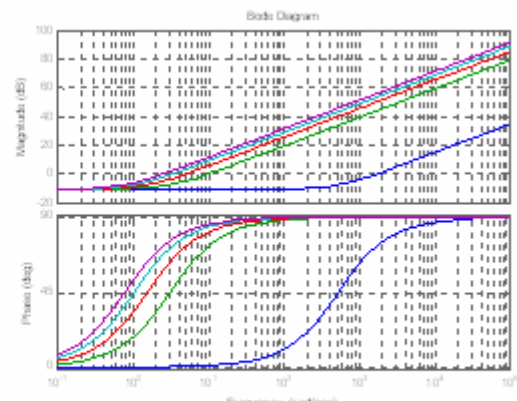


(b) Changement de  $K_i$  du correcteur PI

Fig. 3.13: Changement de  $K_p$  et  $K_i$  du correcteur PI classique

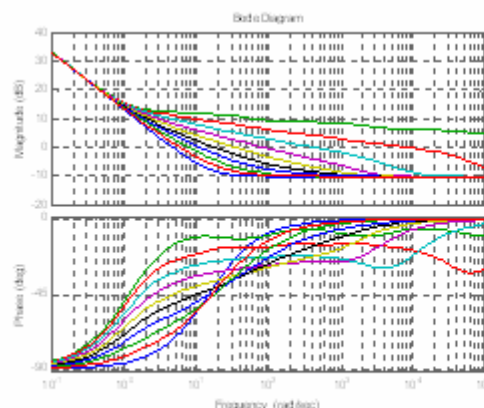


(a) Changement de  $K_p$  du correcteur PD

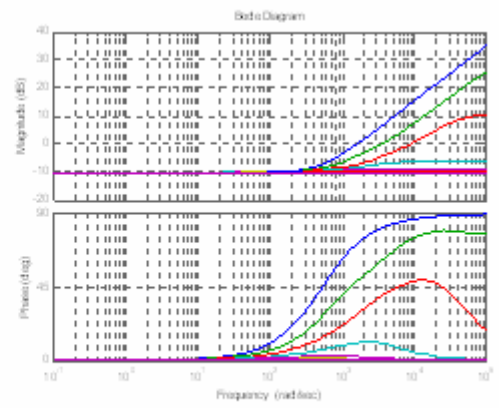


(b) Changement de  $K_d$  du correcteur PD

Fig. 3.14: Changement de  $K_p$  et  $K_d$  du correcteur PD classique



(a) Changement de  $\alpha$  du correcteur  $PI^\alpha$



(b) Changement de  $\beta$  du correcteur  $PD^\beta$

Fig. 3.15: Changement de  $\alpha$  et  $\beta$  des correcteurs  $PI^\alpha$  et  $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire

### 3.6 Approximation par fonction rationnelle du correcteur $PI^\alpha$ - $PD^\beta$

Dans le but d'implémenter le correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande présenté dans cette thèse, nous utiliserons la méthode appelée "méthode de la fonction de singularité" développée par Charef et al. [16, 17], qui est présentée dans la section 2.5.1. L'approximation des opérateurs d'intégration et de dérivée d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\beta} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{N_I} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.16)$$

$$H_D(s) = s^\beta \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.17)$$

Selon les variations des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'intervalle  $[0, 2]$ , ils existent quatre cas pour obtenir la fonction de transfert du signal de sortie du correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire:

**Cas 1:  $0 < \alpha < 1$  et  $0 < \beta < 1$ :** L'approximation de la fonction du signal  $U(s)$ , dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$ , est donnée comme :

$$U(s) = K_{PIF} E(s) + \left( \frac{K_I \prod_{i=0}^{N_I-1} \left(1 + \frac{s}{z_{Ii}}\right)}{K_{IF} \prod_{i=0}^{N_I} \left(1 + \frac{s}{p_{Ii}}\right)} \right) E(s) - K_{PDF} Y(s) - \left( K_{DF} K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{z_{Di}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{p_{Di}}\right)} \right) Y(s) \quad (3.18)$$

**Cas 2:  $1 < \alpha < 2$  et  $0 < \beta < 1$ :** L'approximation de la fonction du signal  $U(s)$ , dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$ , est donnée comme :

$$U(s) = K_{PIF} E(s) + \left( \frac{K_I \prod_{i=0}^{N_I-1} \left(1 + \frac{s}{z_{Ii}}\right)}{sK_{IF} \prod_{i=0}^{N_I} \left(1 + \frac{s}{p_{Ii}}\right)} \right) E(s) - K_{PDF} Y(s) - \left( K_{DF} K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{z_{Di}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{p_{Di}}\right)} \right) Y(s) \quad (3.19)$$

**Case 3:  $0 < \alpha < 1$  et  $1 < \beta < 2$ :** L'approximation de la fonction du signal  $U(s)$ , dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$ , est donnée comme :

$$U(s) = K_{PIF} E(s) + \left( \frac{K_I \prod_{i=0}^{N_I-1} \left(1 + \frac{s}{z_{Ii}}\right)}{K_{IF} \prod_{i=0}^{N_I} \left(1 + \frac{s}{p_{Ii}}\right)} \right) E(s) - K_{PDF} Y(s) - \left( K_{DF} s K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{z_{Di}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{p_{Di}}\right)} \right) Y(s) \quad (3.20)$$

**Case 4:  $1 < \alpha < 2$  et  $1 < \beta < 2$ :** L'approximation de la fonction du signal  $U(s)$ , dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$ , est donnée comme :

$$U(s) = K_{PIF} E(s) + \left( \frac{K_I \prod_{i=0}^{N_I-1} \left(1 + \frac{s}{z_{Ii}}\right)}{s K_{IF} \prod_{i=0}^{N_I} \left(1 + \frac{s}{p_{Ii}}\right)} \right) E(s) - K_{PDF} Y(s) - \left( K_{DF} s K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{z_{Di}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{p_{Di}}\right)} \right) Y(s) \quad (3.21)$$

Les figures Fig.3.16, Fig.3.17, Fig.3.18 et Fig.3.19 présentent les tracés de Bode des fonctions rationnelles des correcteurs  $PI^\alpha$  et  $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, on peut constater l'effet de changement des ordres fractionnaires  $\alpha$  et  $\beta$  sur les pentes des actions intégrale et dérivée.

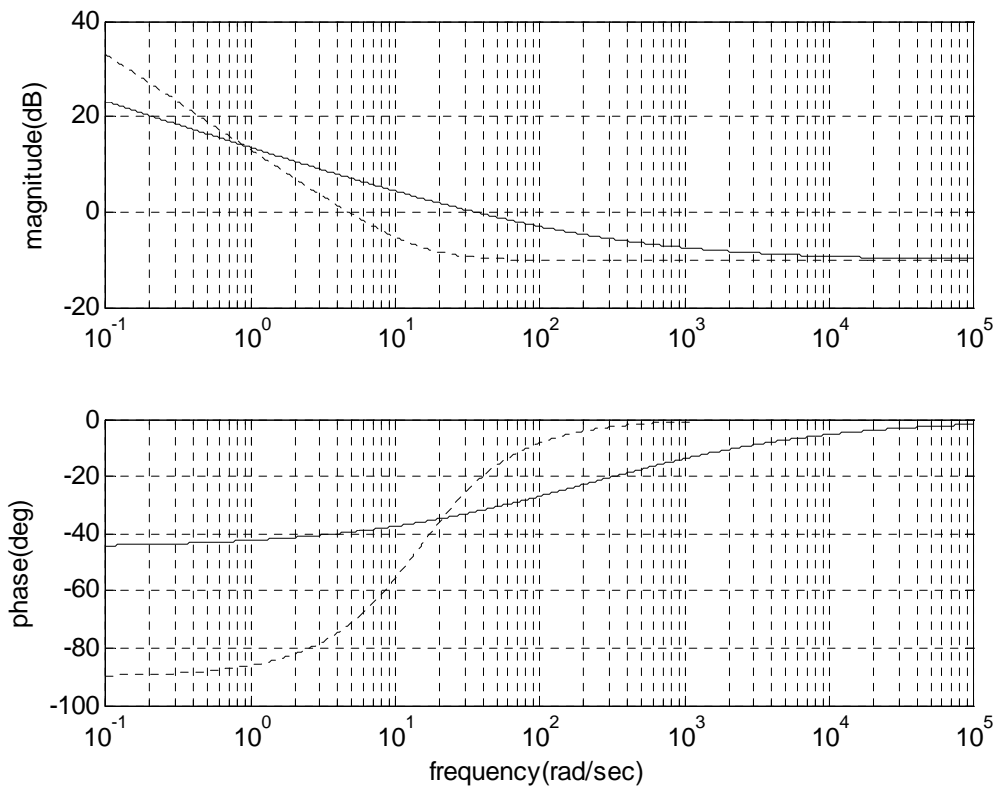


Fig. 3.16 : Tracés de Bode des correcteurs : (---: PI, \_\_\_: PI<sup>0.5</sup>)

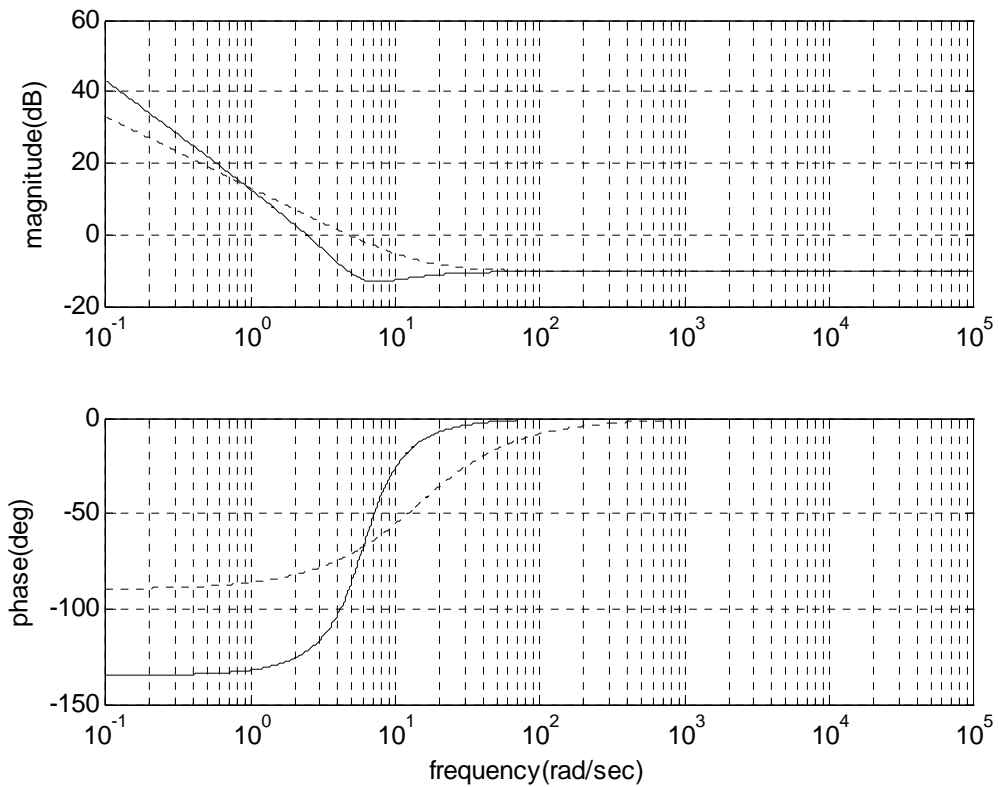


Fig. 3.17 : Tracés de Bode des correcteurs : (---: PI, \_\_\_:  $PI^{1.5}$ )

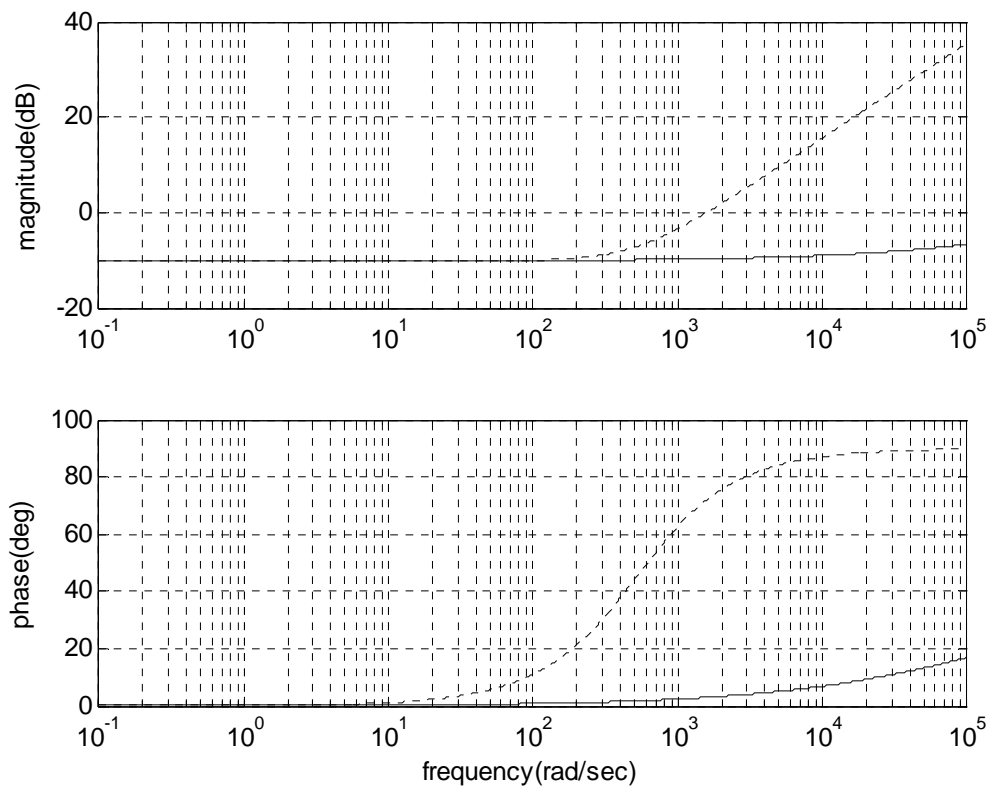


Fig. 3.18 : Tracés de Bode des correcteurs : (---: PD, \_\_\_:  $PD^{0.5}$ )

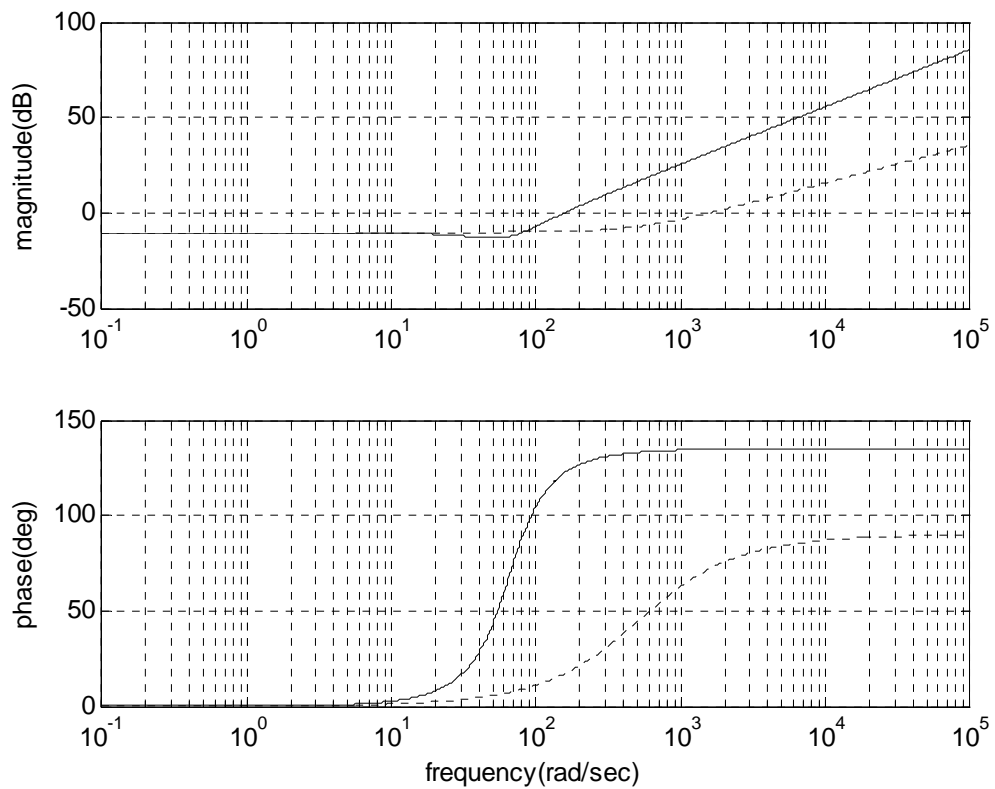


Fig. 3.19 : Tracés de Bode des correcteurs : (---: PD, \_\_\_:  $PD^{1.5}$ )

### 3.7 Conclusion

Ce chapitre est une présentation des deux structures de commande d'ordre fractionnaire proposées. La première concerne le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, et la deuxième concerne le correcteur  $PI^\alpha - PD^\beta$  d'ordre fractionnaire. Après un aperçu sur la commande d'ordre fractionnaire, nous avons présenté, pour différents cas, les fonctions de transfert rationnelles des correcteurs proposées.



# Chapitre 4

## Réglage des correcteurs $PI^{\lambda}D^{\mu}$ d'ordre fractionnaire

### 4.1 Motivation de base

Une précision insuffisante, une stabilité trop relative (instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important, sont des qualités qui peuvent être inacceptables au regard d'un cahier des charges. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservis un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans bien sûr le faire au détriment des autres. Si l'on souhaite améliorer les caractéristiques de précision, stabilité, rapidité du système il est nécessaire d'introduire un correcteur dans la boucle de commande. Ces correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié. Les correcteurs PID étaient les plus populaires du siècle passé. Ils resteront dominants à cause de leur remarquable efficacité, simplicité de mise en œuvre et la large applicabilité. Bien qu'ils soient devenus commercialement disponibles dans les années 1930, l'intérêt à leur conception reste très haut même aujourd'hui.

Les méthodes d'ajustement fondées sur les mesures trouvent leur origine au début des années 1940 avec la méthode de Ziegler-Nichols [63]. Ils ont proposé deux approches expérimentales destinées à ajuster rapidement les paramètres des correcteurs P, PI et PID. La première, dite la méthode de Ziegler-Nichols en boucle ouverte, nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle du système à commander seul, alors que la deuxième, dite méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée, demande d'amener le système en boucle fermée à sa limite de stabilité. Cette méthode nécessite de boucler le système sur un simple correcteur proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à amener le système à osciller de manière permanente ; on se trouve ainsi à la limite de stabilité du système. Le choix des paramètres du correcteur est alors donné par des formules d'essence empirique. Ces règles, très appréciées pour leur simplicité, sont aussi

connues pour leurs résultats souvent modestes en termes de robustesse et de performances en poursuite de trajectoire.

En [33], la méthode dite de Kappa-Tau, de nature empirique, propose de simples lois d'ajustement qui attribuent à un système inconnu approximativement une valeur donnée pour la norme infinie de la fonction de sensibilité. La méthode de Cohen-Coon [64], est basée sur un modèle de premier ordre avec temps de retard du procédé est son critère principal est le rejet de perturbation. Elle pourrait être considérée aussi dans la classe des méthodes de placement des pôles. Les correcteurs PI et PID prennent en compte la minimisation de l'intégrale de l'erreur. Les paramètres du correcteur PID ont été déduits par des règles de nature empirique. Cette méthode donne pourtant un coefficient d'amortissement trop faible, ce qui signifie une boucle fermée mal amortie et une haute sensibilité.

Les méthodes empiriques de réglage sont largement référencées parce qu'elles sont basées sur la caractérisation de la dynamique de processus par quelques paramètres et des équations simples pour les paramètres du correcteur et ils donnent un bon réglage seulement dans des situations limitées. Un effort énorme et continu a été dépensé dans la conception des correcteurs PID pour l'amélioration de qualité de commande des systèmes et l'amélioration des performances.

Une des possibilités d'améliorer les correcteurs PID est d'utiliser les correcteurs d'ordre fractionnaire. Le premier qui a vraiment présenté le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, une généralisation du correcteur PID classique, impliquant une action d'intégration d'ordre  $\lambda$  et une action de différentiation d'ordre  $\mu$  était Igor Podlubny [7, 65]. Beaucoup de chercheurs ont été intéressés par l'utilisation et la conception de ce type de correcteur. L'intérêt de ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a encore deux paramètres à régler, qui sont l'ordre fractionnaire  $\lambda$  de l'action d'intégration et l'ordre fractionnaire  $\mu$  de l'action de différentiation. Ces deux paramètres peuvent être employés pour accomplir des spécifications complémentaires pour la conception ou d'autres exigences intéressantes pour le système à commander.

Différemment au correcteur PID classique, il n'y a aucune méthode de réglage systématique existant pour le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Donc, la motivation de base dans notre méthode de conception du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est le développement de règles empiriques de réglage qui sont presque aussi simples que les règles de Ziegler-Nichols pour améliorer la qualité de commande des systèmes comparée au correcteur PID classique. Autrement dit, exprimer les cinq paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire en fonction des caractéristiques du système à commander.

Dans ce travail nous proposons une nouvelle méthode de conception du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire d'un système de commande à retour unitaire classique, montré dans la figure Fig.3.1, la méthode de réglage de Ziegler-Nichols sera utilisé pour l'ajustement des trois paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour  $\lambda = \mu = 1$ .

Pour cela, la fonction de transfert  $G_p(s)$  du système à commander est un système de premier ordre avec ou sans temps de retard :

$$G_p(s) = \frac{K_0}{(1 + \tau s)} e^{-Ls} \quad (4.1)$$

Ou un système premier ordre avec un intégrateur avec ou sans temps retard:

$$G_p(s) = \frac{K_0}{s(1 + \tau s)} e^{-Ls} \quad (4.2)$$

Avec  $K_0$  est le gain statique,  $\tau$  est la constante de temps et  $L$  est le temps de retard qui peut être zéro. La fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (4.3)$$

Avec  $K_p$  est la constante proportionnel,  $T_I$  est la constante d'intégration,  $T_D$  est la constante de différentiation,  $\lambda$  est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration tel que  $0 < \lambda < 1$  et  $\mu$  est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation tel que  $0 < \mu < 1$ .

## **4.2 Ajustement des paramètres du correcteurs $PI^\lambda D^\mu$**

La méthode proposée pour l'ajustement des paramètres du correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  est composée de deux étapes, la première sert à ajuster les paramètres  $K_p$ ,  $T_I$  et  $T_D$  d'un correcteur PID classique pour  $\lambda = \mu = 1$ , la deuxième sert à ajuster les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ .

### **4.2.1 Ajustement des paramètres $K_p$ , $T_I$ et $T_D$**

Dans la première étape de notre méthode de conception nous avons utilisés les règles de la méthode de Ziegler-Nichols pour l'ajustement des paramètres  $K_p$ ,  $T_I$  et  $T_D$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire donné par l'équation (4.3), avec  $\lambda = \mu = 1$ , ce qui signifie l'ajustement des paramètres d'un simple correcteur PID classique.

Notre méthode de conception peut être généralisée par l'utilisation des paramètres  $K_p$ ,  $T_I$  et  $T_D$  ajustés par d'autres méthodes de conception qui existent dans la littérature.

### 4.2.2 Ajustement des paramètres $\lambda$ et $\mu$

Par l'utilisation des paramètres  $K_p$ ,  $T_I$  et  $T_D$  obtenus dans la première étape de conception, la deuxième étape sert à ajuster les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  minimisant un critère de performance. Dans notre travail, l'intégrale du carrée de l'erreur (ISE) est utilisé comme critère de performance, la méthode de Hall-Sartorius [66], est utilisée pour calculer la valeur de ce critère pour un système de commande à retour d'unité classique présenté par la figure Fig.3.1, pour une entrée échelon unité.

L'intégrale du carrée de l'erreur (ISE) est donné par:

$$J = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [r(t) - y(t)]^2 dt \quad (4.4)$$

Où  $e(t)=[r(t)-y(t)]$  est le signal d'erreur.

De l'équation (4.4), l'intégral complexe  $J(\lambda, \mu)$  est défini par:

$$J(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(s)E(-s)ds \quad (4.5)$$

De la figure Fig.3.1, le signal de l'erreur  $E(s)$  est obtenu comme:

$$E(s) = \left( \frac{1}{1 + C(s)G_p(s)} \right) R(s) = \left( \frac{1}{1 + C(s)G_p(s)} \right) \left( \frac{1}{s} \right) \quad (4.6)$$

Pour calculer l'intégral complexe  $J(\lambda, \mu)$  par l'utilisation de la méthode de Hall-Sartorius présentée dans l'Annexe. A, le signal de l'erreur  $E(s)$  doit être une fonction rationnelle. Mais la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire  $C(s)$  donné par l'équation (4.3) est une fonction irrationnelle et la fonction de transfert du système  $G_p(s)$  est aussi une fonction irrationnelle, si elle est avec temps de retard  $e^{-Ls}$ .

Pour régler ce problème, le temps de retard  $e^{-Ls}$  de la fonction de transfert du système  $G_p(s)$  est remplacé par une fonction rationnelle, obtenue par la méthode d'approximation de Padé du premier ordre définie par :

$$e^{-Ls} = \frac{\left( 1 - \frac{L}{2}s \right)}{\left( 1 + \frac{L}{2}s \right)} \quad (4.7)$$

Ainsi, la fonction de transfert du système  $G_p(s)$  devient une fonction rationnelle et elle sera définie dans le contexte suivant par :

$$G_p(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad (4.8)$$

La fonction de transfert irrationnelle du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire de l'équation (4.3) est approximée par une fonction rationnelle en utilisant la méthode présentée dans la section 2.5.1.

La fonction de transfert du système  $G_p(s)$  peut être avec ou sans intégrateur, pour cela, nous considérerons deux manières pour l'approximation de la fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire:

**a. Système sans intégrateur**

Quand la fonction de transfert du système  $G_p(s)$  est sans intégrateur, l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $\frac{1}{s^\lambda}$  doit être implémenté comme  $\frac{1}{s^\lambda} = \frac{1}{s} s^{1-\lambda}$  pour assurer la convergence de l'algorithme de Hall-Sartorius employé pour calculer la valeur du critère ISE. Par conséquent, la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire  $C(s)$  sera :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) = K_p \left( 1 + \frac{s^{1-\lambda}}{T_I s} + T_D s^\mu \right) \quad (4.9)$$

La fonction  $C(s)$  a maintenant deux différentiateurs d'ordre fractionnaire  $s^{(1-\lambda)}$  et  $s^\mu$ , donc par l'utilisation de la fonction rationnelle du différentiateur d'ordre fractionnaire donnée dans la section 2.5.1, nous pouvons approximer la fonction irrationnelle  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire de l'équation (4.3) par la fonction rationnelle suivante:

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{s^{1-\lambda}}{T_I s} + T_D s^\mu \right) = K_p \left( 1 + \frac{\bar{K}_D}{T_I s} \frac{\prod_{i=0}^{\bar{N}_D} \left( 1 + \frac{s}{\bar{z}_{Di}} \right)}{\prod_{i=0}^{\bar{N}_D} \left( 1 + \frac{s}{\bar{p}_{Di}} \right)} + T_D K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left( 1 + \frac{s}{z_{Di}} \right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left( 1 + \frac{s}{p_{Di}} \right)} \right) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (4.10)$$

**b. Système avec intégrateur**

Dans le cas d'une fonction de transfert du système  $G_p(s)$  avec intégrateur, la convergence de l'algorithme de Hall-Sartorius employé pour calculer la valeur du critère ISE est assurée. Par conséquent, nous pouvons approximer la fonction de transfert irrationnelle  $C(s)$  de l'équation (4.3) du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle comme montré dans la section 3.4 :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) = K_p \left( 1 + \frac{K_I}{T_I} \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} \left( 1 + \frac{s}{z_{Ii}} \right)}{\prod_{i=0}^{N_I} \left( 1 + \frac{s}{p_{Ii}} \right)} + T_D K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left( 1 + \frac{s}{z_{Di}} \right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left( 1 + \frac{s}{p_{Di}} \right)} \right) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (4.11)$$

Pour les deux manières d'approximation du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle, l'approximation est faite dans une bande de fréquence d'intérêt pratique  $[\omega_L, \omega_H]$  choisie autour de la fréquence de coupure du gain unité  $\omega_u$  de la fonction de transfert en boucle ouverte  $C(s)G_p(s)$ , avec  $C(s)$  est le correcteur PID classique, pour  $\lambda=\mu=1$ , et la bande  $[\omega_L, \omega_H]=[\omega_L=0.1\omega_u, \omega_H=10\omega_u]$ .

Alors, pour les deux manières d'approximation de la fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle, le signal d'erreur  $E(s)$  devient une fonction rationnelle donné par :

$$E(s) = \left( \frac{1}{1 + \frac{N_c(s) N_p(s)}{D_c(s) D_p(s)}} \right) \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{D_c(s) D_p(s)}{D_c(s) D_p(s) + N_c(s) N_p(s)} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{N_E(s)}{D_E(s)} \quad (4.12)$$

Par conséquent, l'intégrale complexe  $J(\lambda, \mu)$  peut être calculée comme montré dans [66]:

$$J(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{N_E(s) N_E(-s)}{D_E(s) D_E(-s)} ds = \frac{(-1)^{(n-1)}}{2} \frac{\det(\Delta_n^N)}{\det(\Delta_n^D)} \quad (4.13)$$

L'objectif de l'ajustement de l'ordre fractionnaire  $\lambda$  de l'action d'intégration et l'ordre fractionnaire  $\mu$  de l'action de différentiation consiste à trouver le couple  $(\lambda, \mu)$  qui réduisent au minimum l'index  $J(\lambda, \mu)$  de l'équation (4.13). Pour la tâche de minimisation, nous avons changer les valeurs des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  de 0 à 1 avec un pas de 0,05 et pour chaque valeur des

couples  $(\lambda, \mu)$  nous calculons l'index correspondant  $J(\lambda, \mu)$  de l'intégrale du carré de l'erreur (ISE). Avec une comparaison simple de tout les index  $J(\lambda, \mu)$  calculés, nous pouvons obtenir l'index minimum  $J(\lambda, \mu)$  et l'ajustement des deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

### 4.2.3 Exemples de simulation

Dans cette section, nous présenterons trois exemples de simulation pour montrer l'efficacité de la méthode proposée pour le réglage des paramètres de correcteurs  $PI^\lambda/PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans une boucle de commande à retour unitaire.

#### *a. Exemple 1: Système du premier ordre avec temps de retard [67]*

La fonction de transfert du système est donnée par [68]:

$$G_p = \frac{K_0}{(1 + \tau s)} e^{-Ls} = \frac{1}{(1 + s)} e^{-0.5s} \quad (4.14)$$

Dans [68], le correcteur PI classique ( $\lambda = 1, \mu = 0$  et  $T_D=0$ ) est utilisé pour la commande du système précédant. Par l'utilisation des règles de la méthode de Ziegler-Nichols, les paramètres  $K_P, T_I$  du correcteur PI classique trouvés sont  $K_P=0.73$  et  $T_I=0.69$ .

De là, la fonction de transfert  $C_1(s)$  du correcteur PI classique obtenue est :

$$C_1(s) = 0.73 \left( 1 + \frac{1}{0.69s} \right) \quad (4.15)$$

Par l'utilisation des paramètres  $K_P, T_I$  trouvés pour le correcteur PI classique, la fonction de transfert  $C_2(s)$  du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire est donnée alors par :

$$C_2(s) = 0.73 \left( 1 + \frac{1}{0.69s^\lambda} \right) \quad (4.16)$$

Le plus petit index  $J$  du critère ISE de l'équation (4.13) est obtenu pour le paramètre  $\lambda = 0.95$ . Alors la fonction de transfert  $C_2(s)$  du correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire demandée est donnée par :

$$C_2(s) = 0.73 \left( 1 + \frac{1}{0.69s^{0.95}} \right) \quad (4.17)$$

La figure Fig.4.1 présente les tracés de Bode de la fonction de transfert  $C(s)G_p(s)$  en boucle ouverte pour les deux correcteurs, PI classique  $C_1(s)$  et  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire  $C_2(s)$  dans sa forme en fonction rationnelle.

La figure Fig.4.2 présente les réponses indicielles du système en boucle fermée quant  $C(s)$  est le correcteur PI classique  $C_1(s)$  et quant  $C(s)$  est le correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire  $C_2(s)$  dans sa forme en fonction rationnelle.

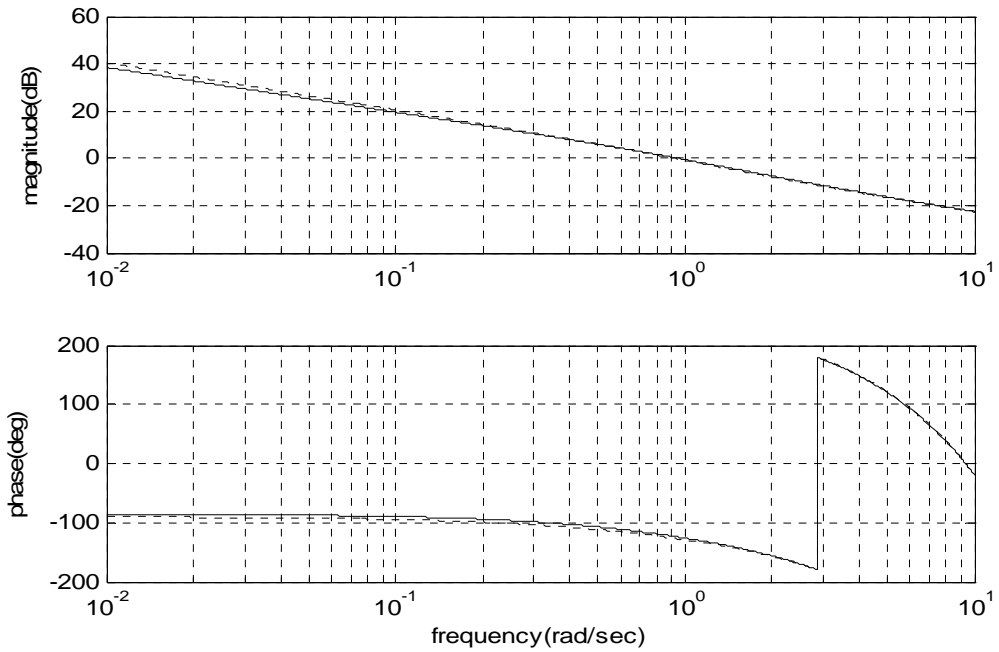


Fig. 4.1: Tracés de Bode du système en boucle ouverte : (... : PI, \_\_ :  $PI^{0.95}$ )

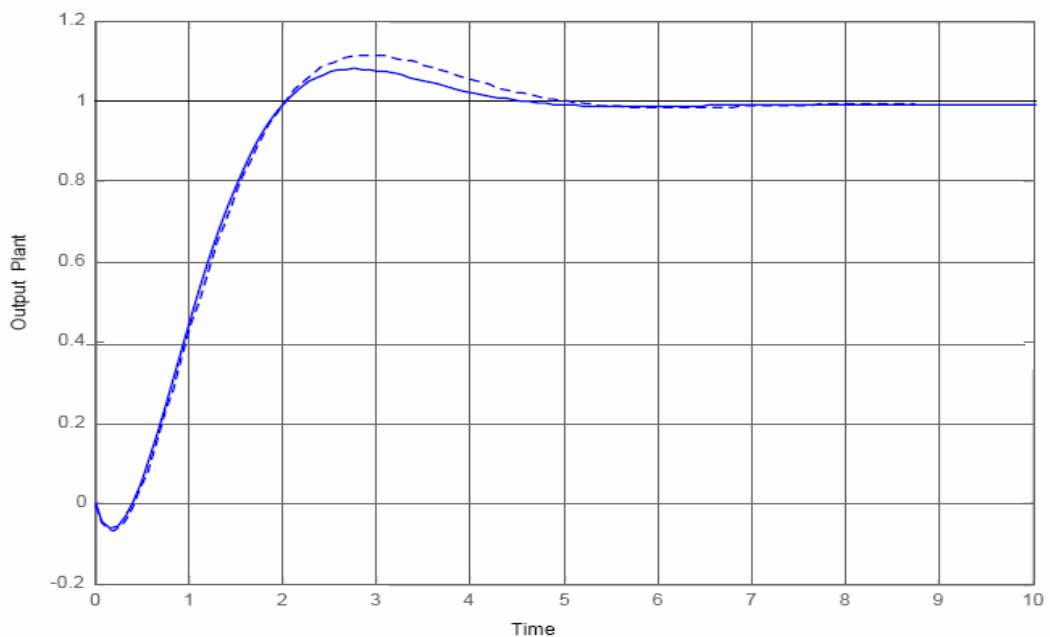


Fig. 4.2: Réponses indicielles du système en boucle fermée: (... : PI, \_\_ :  $PI^{0.95}$ )



Pour la comparaison de l'amélioration des performances du système de commande, quelques caractéristiques de performance pour le système de commande avec les deux correcteurs, quant  $C(s)$  est le correcteur PI classique  $C_1(s)$  et quant  $C(s)$  est le correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire  $C_2(s)$  dans sa forme en fonction rationnelle, sont récapitulés dans la table Tab.4.1, en terme de fréquence de coupure à gain unité  $\omega_u$ , marge de phase  $PM$ , marge de gain  $GM$ , temps de réponse  $t_s$ , et dépassement  $P$ .

Les résultats de comparaison sont donnés comme suit :

- La fréquence de coupure à gain unité a été changée de 1.51%.
- La marge de phase du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^{0.95}$  d'ordre fractionnaire a augmenté de 6.19% et la marge de gain a diminué de 4.44%.
- Le temps de réponse du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^{0.95}$  d'ordre fractionnaire est 16.26% plus petit que celui avec le correcteur PI classique.
- Le dépassement du système de commande de retour unitaire avec le correcteur  $PI^{0.95}$  d'ordre fractionnaire est 33.33% plus petit que celui avec le correcteur PI classique.

Tab. 4.1: Caractéristiques de performance des correcteurs PI et  $PI^{0.95}$

Correcteur $C(s)$	$\omega_u$ (rad/s)	$PM$ (deg)	$GM$ (dB)	$t_s$ (s)	$P$ (%)
PI	0.922	53.8	13.5	4.12	12
$PI^{0.95}$	0.936	57.2	12.9	3.45	8

**b. Exemple 2: Système du premier ordre avec temps de retard [69]**

Dans cet exemple, la fonction de transfert du système est considérée comme [70] :

$$G_p(s) = \frac{1}{(1+20s)} e^{-5s} \tag{4.18}$$

Pour l'ajustement des paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire nous considérons  $\lambda = \mu = 1$ , ce qui signifie le cas d'un correcteur PID classique.

Par l'utilisation des règles de la méthode de Ziegler-Nichols, les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  s'avèrent  $K_P = 4.0588$ ,  $T_I = 9.2500$ ,  $T_D = 2.3125$ .

Pour ce cas, les tracés de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte sont montrés sur la figure Fig.4.3. La fréquence de coupure à gain unité est  $\omega_{ci} = 0.198$  rad/s.

Une fois les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  sont ajustés, la fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire devient :

$$C(s) = 4.0588 \left( 1 + \frac{1}{9.25s^\lambda} + 2.3125s^\mu \right) \quad (4.19)$$

Pour ajuster les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  en utilisant la méthode de conception proposée, le temps de retard  $e^{-5s}$  de la fonction de transfert  $G_p(s)$  du système et la fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire doivent être rationnelles.

Ainsi, le temps de retards est approximé par une fonction rationnelle obtenue par l'approximation de Padé du premier ordre et le correcteur  $C(s)$  est approximé par une fonction rationnelle définie dans la section 3.4.

Puisque la fonction de transfert  $G_p(s)$  du système est sans intégrateur, l'intégrateur  $\frac{1}{s^\lambda}$  d'ordre fractionnaire doit être implémenté comme  $\frac{1}{s^\lambda} = \frac{1}{s} s^{1-\lambda}$  pour assurer la convergence de l'algorithme Hall-Sartorius utilisé pour calculer la valeur du critère ISE.

Par conséquent, la fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sera :

$$C(s) = 4.0588 \left( 1 + \frac{s^{1-\lambda}}{9.25s} + 2.3125s^\mu \right) \quad (4.20)$$

Dans notre cas l'intégrateur et le différentiateur d'ordre fractionnaire de  $C(s)$  sont approximés dans la bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H] = [0.1\omega_u, 10\omega_u] = [0.0198 \text{ rad/s}, 1.98 \text{ rad/s}]$  avec une erreur d'approximation  $y=0.75dB$  et une fréquence  $\omega_{max}=100\omega_H=198.00 \text{ rad/s}$ .

D'après les résultats de simulation, le plus petit index  $J(\lambda, \mu)$  du critère ISE obtenu correspond à un couple  $(\lambda, \mu) = (0.90, 0.90)$ .

Donc, la fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire requis est donnée par:

$$C(s) = 4.0588 \left( 1 + \frac{1}{9.25s^{0.90}} + 2.3125s^{0.90} \right) = 4.0588 \left( 1 + \frac{s^{0.10}}{9.25s} + 2.3125s^{0.90} \right) \quad (4.21)$$

Ainsi, la fonction rationnelle de l'approximation du correcteur  $PI^{0.90}D^{0.90}$  d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$C(s) = 4.0588 \left( 1 + \frac{0.058}{s} \frac{\prod_{i=0}^6 \left( 1 + \frac{s}{0.00469(6.809)^i} \right)}{\prod_{i=0}^6 \left( 1 + \frac{s}{0.00569(6.809)^i} \right)} + 0.0086 \frac{\prod_{i=0}^3 \left( 1 + \frac{s}{0.0024(46.422)^i} \right)}{\prod_{i=0}^3 \left( 1 + \frac{s}{0.0759(46.422)^i} \right)} \right) \quad (4.22)$$

En plus du tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $C(s)G_p(s)$  pour le correcteur PID classique de la première étape d'ajustement, la figure Fig.4.3 présente aussi le tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $C(s)G_p(s)$  avec  $C(s)$  le correcteur  $PI^{0.90}D^{0.90}$  d'ordre fractionnaire dans sa forme rationnelle. La figure Fig.4.4 présente les réponses indicielles du système en boucle fermée avec les deux correcteurs, le correcteur PID classique et le correcteur  $PI^{0.90}D^{0.90}$  d'ordre fractionnaire dans sa forme de fonction rationnelle. Les signaux des actions de commande du système en boucle fermée avec les deux correcteurs PID classique et  $PI^{0.90}D^{0.90}$  d'ordre fractionnaire dans sa forme de fonction rationnelle sont présentés dans la figure Fig.4.5.

Pour la comparaison de l'amélioration des performances du système de commande, Nous avons récapitulé quelques caractéristiques de performance dans la table Tab.4.2 du système de commande pour les deux correcteurs, en terme de fréquence de coupure à gain unité  $\omega_c$ , marge de phase  $PM$ , marge de gain  $GM$ , temps de réponse  $t_s$ , et dépassement  $P$ .

Les résultats de comparaison sont donnés comme suit :

- La fréquence de coupure à gain unité a été changée de 18%.
- La marge de phase du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^{0.90}D^{0.90}$  d'ordre fractionnaire a augmenté de 10% et la marge de gain a diminué de 2%.
- Le temps de réponse du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^{0.90}D^{0.90}$  d'ordre fractionnaire est 26% plus petit que celui avec le correcteur PID classique.
- Le dépassement du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^{0.90}D^{0.90}$  d'ordre fractionnaire est 55% plus petit que celui avec le correcteur PID classique.

De la figure Fig.4.5, nous pouvons voir que le signal de commande du correcteur  $PI^{0.90}D^{0.90}$  d'ordre fractionnaire est beaucoup plus petit et significativement plus lisse que celui du correcteur PID classique réglé par la méthode de Ziegler-Nichols.

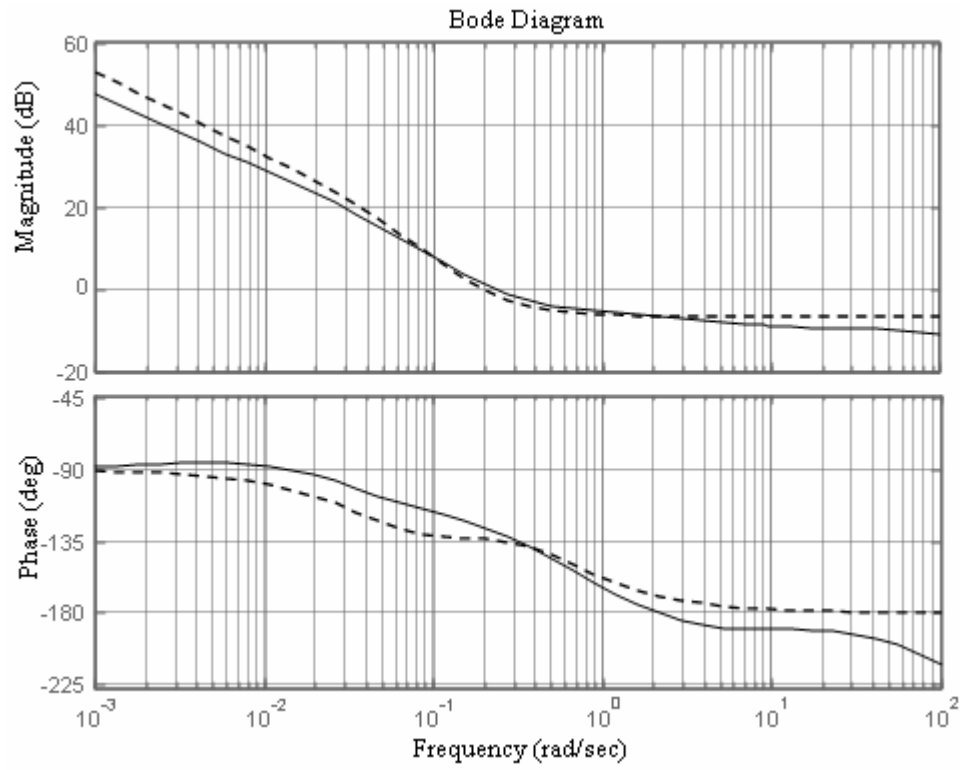


Fig. 4.3: Tracés de Bode du système en boucle ouverte : (--- : PID, \_\_\_ :  $PI^{0.90}D^{0.90}$ )

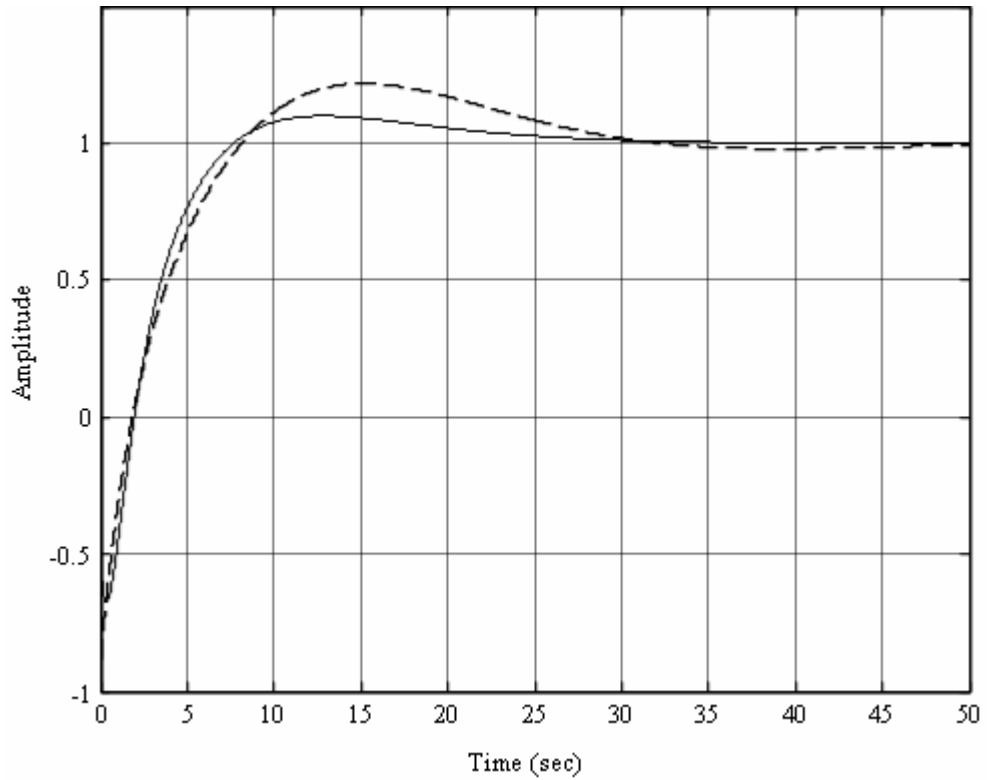


Fig. 4.4: Réponses indicielles du système en boucle fermée : (--- : PID, \_\_\_ :  $PI^{0.90}D^{0.90}$ )

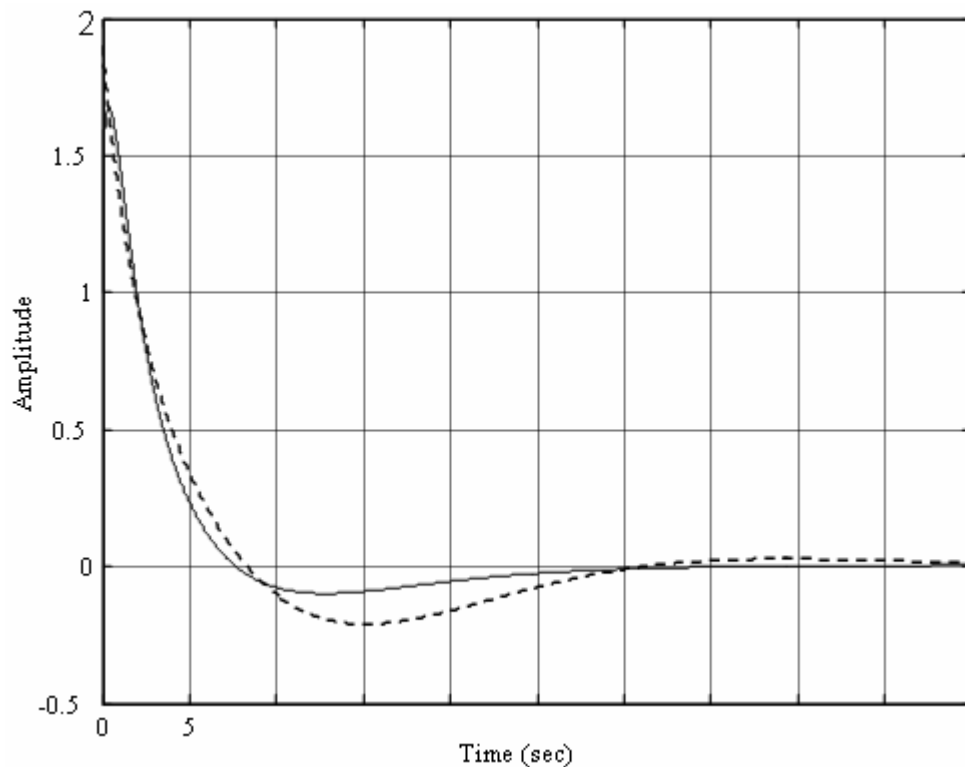


Fig. 4.5: Signal de commande du système en boucle fermée : (--- : PID, \_\_\_ :  $PI^{0.90}D^{0.90}$ )

Tab. 4.2: Caractéristiques de performance des correcteurs PID et  $PI^{0.90}D^{0.90}$

Correcteur $C(s)$	$\omega_u$ (rad/s)	$PM$ (deg)	$GM$ (dB)	$t_s$ (s)	$P$ (%)
PID	0.198	46.50	6.57	27.10	22.00
$PI^{0.90}D^{0.90}$	0.233	51.00	6.47	20.00	10.00

**c. Exemple 3: Système du deuxième ordre avec temps de retard [69]**

La fonction de transfert du système est donnée comme [64] :

$$G_p(s) = \frac{1}{s(1+2s)} e^{-s} \tag{4.23}$$

Pour  $\lambda = \mu = 1$ , les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  du correcteur PID classique sont ajustés à  $K_P = 0.444$ ,  $T_I = 6.0$  et  $T_D = 1.5$ , par l'utilisation des règles de la méthode de Ziegler-Nichols.

La figure Fig.4.6 présente le tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $C(s)G_p(s)$  avec le correcteur PID classique obtenu ci-dessus. Dans ce cas, la fréquence de coupure à gain unité est  $\omega_u = 0.361 \text{ rad/s}$ .

Une fois  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  sont ajusté, la fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  est donnée par:

$$C(s) = 0.444 \left( 1 + \frac{1}{6.0s^\lambda} + 1.5s^\mu \right) \quad (4.24)$$

Pour ajuster les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  par l'utilisation de la méthode de conception proposée, le temps de retards  $e^{-s}$  de la fonction de transfert  $G_p(s)$  du système est approximée par une fonction rationnelle par l'utilisation de l'approximation de Padé du premier ordre et la fonction irrationnelle du correcteur  $C(s)$  ci-dessus est aussi approximée par l'utilisation de la méthode présentée dans la section 3.4

Les opérateurs d'ordre fractionnaire du correcteur  $C(s)$  ci-dessus sont approximés dans une bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H] = [0.1\omega_u, 10\omega_u] = [0.0361 \text{ rad/s}, 3.61 \text{ rad/s}]$  avec une erreur d'approximation  $y=0.75dB$  pour l'intégrateur d'ordre fractionnaire et  $y=1.50$  pour le différentiateur d'ordre fractionnaire et la fréquence  $\omega_{max}=100\omega_H= 361.00 \text{ rad/s}$ .

D'après les résultats de simulation, le plus petit index  $J(\lambda, \mu)$  du critère ISE obtenu correspond au couple  $(\lambda, \mu) = (0.06, 0.95)$ . Alors la fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire exigée est donnée par:

$$C(s) = 0.444 \left( 1 + \frac{1}{6.0s^{0.06}} + 1.5s^{0.95} \right) \quad (4.25)$$

On peut dire que le correcteur  $C(s)$  ci-dessus se comporte de la même façon qu'un correcteur PD classique, puisque l'ordre de la partie intégrale est très petit ( $\lambda=0.06$ ) et l'ordre de la partie dérivée est presque l'unité ( $\mu=0.95$ ). La présence d'un intégrateur d'ordre fractionnaire garantit toujours une erreur statique nulle pour le système de commande, même pour une valeur basse du paramètre  $\lambda$ .

Donc, l'approximation de la fonction rationnelle du correcteur  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$C(s) = 0.444 \left( 1 + 0.2335 \frac{\prod_{i=0}^3 \left( 1 + \frac{s}{0.0182(21.3676)^i} \right)}{\prod_{i=0}^4 \left( 1 + \frac{s}{0.0152(21.3676)^i} \right)} + 0.007 \frac{\prod_{i=0}^2 \left( 1 + \frac{s}{0.0043(1438.4498)^i} \right)}{\prod_{i=0}^2 \left( 1 + \frac{s}{4.3308(1438.4498)^i} \right)} \right) \quad (4.26)$$

La figure Fig.4.6 présente le tracé de Bode de la fonction de transfert  $C(s)G_p(s)$  en boucle ouverte des deux correcteurs, PID classique et  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire dans sa forme de

fonction rationnelle. La figure Fig.4.7 présente les réponses indicielles de la boucle fermée du système de commande des deux correcteurs, PID classique et  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire dans sa forme de fonction rationnelle. Les actions de commande du système de commande en boucle fermée avec les deux correcteurs, PID classique et  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire sont présentées dans la figure Fig.4.8.

Pour la comparaison de l'amélioration des performances du système de commande, Nous avons récapitulé quelques caractéristiques de performance dans la table Tab.4.3 du système de commande pour les deux correcteurs, en terme de fréquence de coupure à gain unité  $\omega_u$ , marge de phase  $PM$ , marge de gain  $GM$ , temps de réponse  $t_s$ , et dépassement  $P$ .

On donne les résultats de comparaison comme suit :

- La fréquence de coupure à gain unité a été changée de 28%.
- La marge de phase du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire a augmenté de 38% et la marge de gain a diminué de 16%.
- Le temps de réponse du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire est 59% plus petit que celui avec le correcteur PID classique.
- Le dépassement du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire est 55% plus petit que celui avec le correcteur PID classique.

De la figure Fig.4.8, nous pouvons voir que le signal de commande du correcteur  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire est beaucoup plus petit et significativement plus lisse que celui du correcteur PID classique ajusté par la méthode de Ziegler-Nichols.

Tab. 4.3: Caractéristiques de performance pour des correcteurs PID et  $PI^{0.06}D^{0.95}$

Correcteur $C(s)$	$\omega_u$ (rad/s)	$PM$ (deg)	$GM$ (dB)	$t_s$ (s)	$P$ (%)
PID	0.361	38.30	14.80	22.80	41.00
$PI^{0.06}D^{0.95}$	0.462	53.00	12.50	9.34	13.00

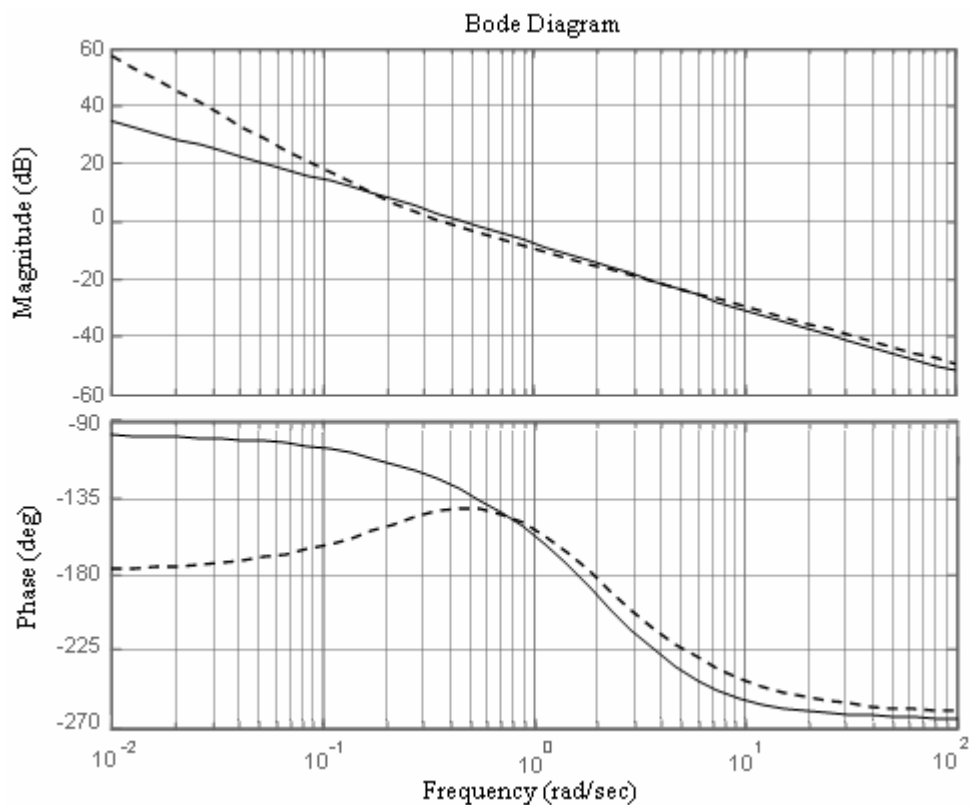


Fig. 4.6: Diagrammes de Bode du système en boucle ouverte: (--- : PID, \_\_\_ :  $PI^{0.06}D^{0.95}$ )

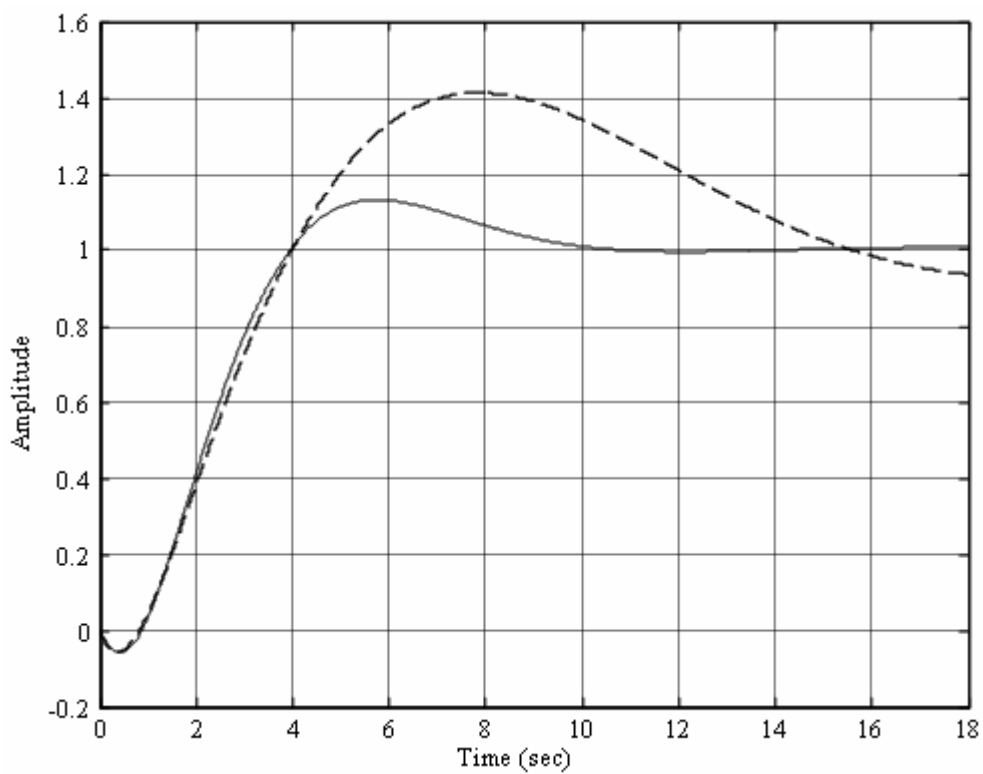


Fig. 4.7: Réponses indicielles du système en boucle fermée : (--- : PID, \_\_\_ :  $PI^{0.06}D^{0.95}$ )



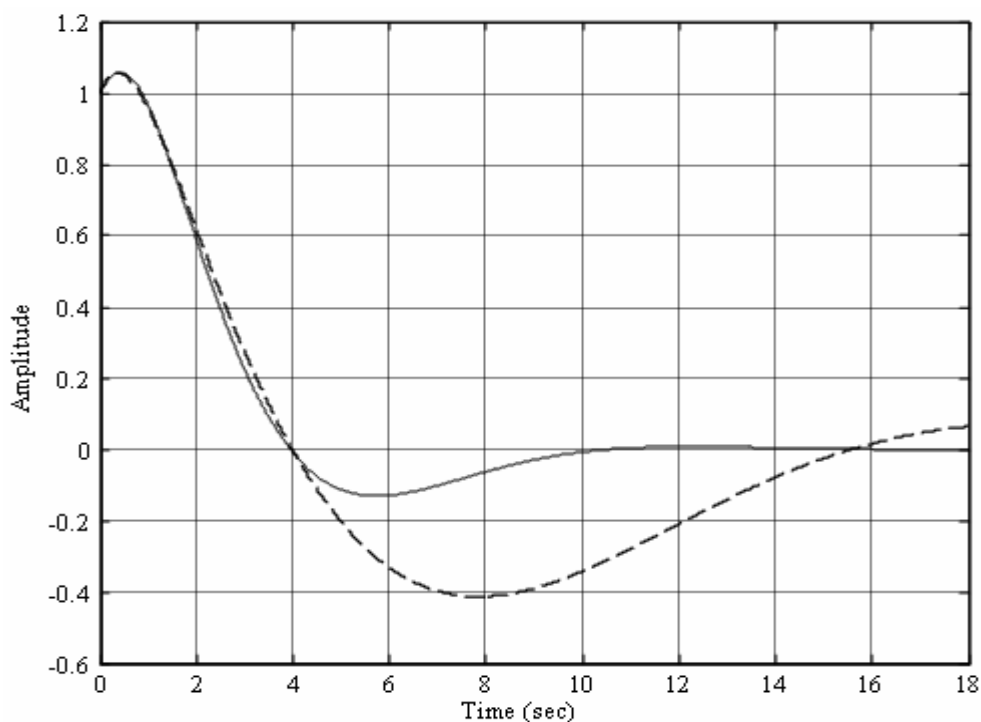


Fig. 4.8: Signal de commande du système en boucle fermée : (--- : PID, \_\_\_ :  $PI^{0.06}D^{0.95}$ )

#### 4.2.4 Test de robustesse

La robustesse des systèmes de commande aux perturbations et aux incertitudes est un objectif important dans les boucles de commande. La rétroaction ne serait pas nécessaire pour la plupart des systèmes de commande s'il n'y avait aucune perturbation et incertitude. En général, la conception des correcteurs est effectuée en utilisant les valeurs nominales des paramètres du processus à commander. Cependant, ils existent toujours des incertitudes sur les valeurs de ces paramètres. Nous pouvons dire qu'une conception est robuste, si elle garde les performances du système de commande pour la variation substantielle en valeurs des paramètres du processus.

Pour ce troisième exemple de simulation, nous comparerons les performances du système de commande pour les deux correcteurs, le correcteur PID classique et le correcteur  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire, avec la variation du gain  $K_0$  du processus. Les figures Fig.4.9 et Fig.4.10, présentent les réponses indicielles du système de commande en boucle fermée avec les correcteurs PID classique et  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire, respectivement, pour trois valeurs différentes du gain  $K_0$ ; la valeur nominale  $K_0=1$ , 50% plus de la valeur nominale  $K_0=1,5$  et 50% moins de la valeur nominale  $K_0=0,50$ . A partir des figures Fig.4.9 et Fig.4.10, nous pouvons facilement voir que le système de commande avec le correcteur  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire a beaucoup moins de changements de ses caractéristiques de performances pour des variations du gain  $K_0$  que le système de commande avec le correcteur PID classique. Alors,

nous pouvons dire que l'utilisation du correcteur  $PI^{0.06}D^{0.95}$  d'ordre fractionnaire fournit de bonnes performances et robustesse.

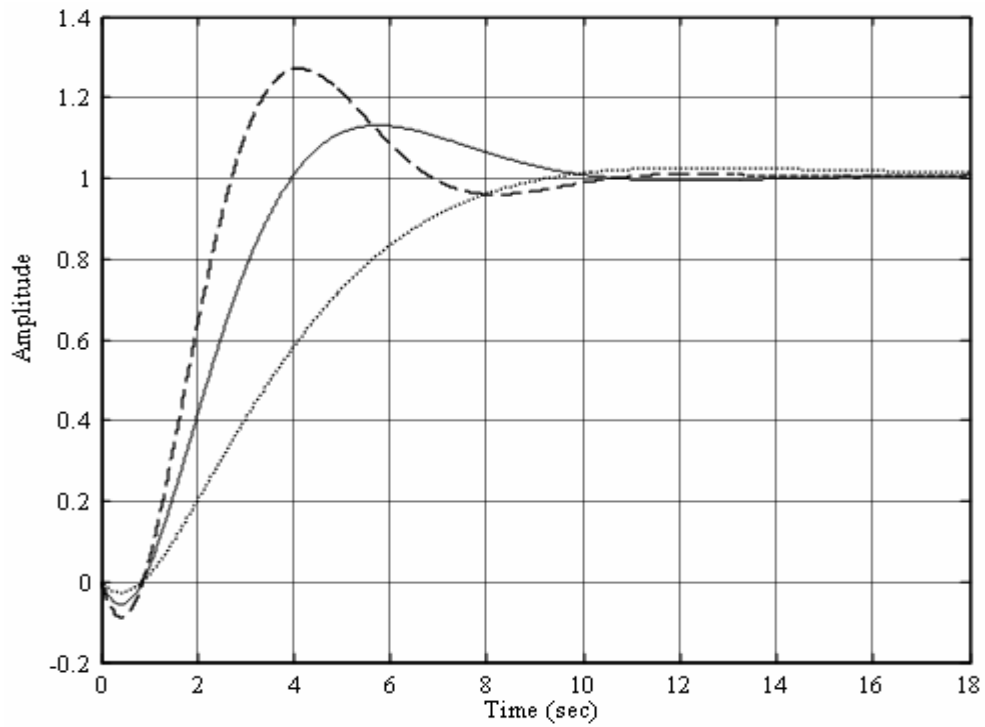


Fig. 4.9: Réponses indicielles du système en boucle fermée avec le correcteur  $PI^{0.06}D^{0.95}$  :  
 (... :  $K_\theta=0.5$ , \_\_ :  $K_\theta=1$ , --- :  $K_\theta=1.5$ )

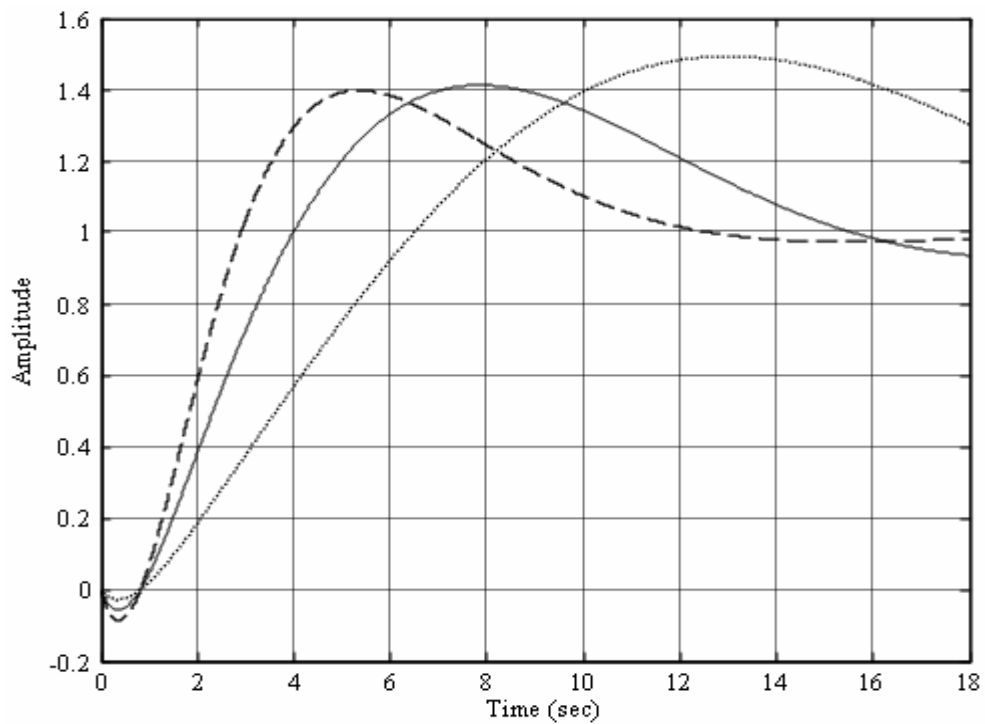


Fig. 4.10: Réponses indicielles du système en boucle fermée avec le correcteur PID:  
 (... :  $K_\theta=0.5$ , \_\_ :  $K_\theta=1$ , --- :  $K_\theta=1.5$ )

### 4.3 Considérations d'implémentation

Malgré que les règles de la méthode de Ziegler-Nichols sont employée pour l'ajustement des paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  pour  $\lambda = \mu = 1$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, notre méthode de conception proposée peut employer tous les autres techniques classiques d'ajustement qui existent dans la littérature. Par conséquent nous pouvons employer directement les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  de n'importe quel correcteur PID classique du système de commande [71].

Comme les correcteurs PID classique sont généralement les plus utilisés dans pratiquement toutes les applications industrielles de commande, notre méthode de conception des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sera très appropriée aux correcteurs PID classiques déjà réglés. Ainsi des considérations d'implémentation des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire avec les correcteurs PID déjà existants seront présentées. Supposez que nous avons un système de commande classique à retour unitaire déjà réglé avec un correcteur PID classique comme correcteur. La fonction de transfert de ce correcteur PID classique est donnée par :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (4.27)$$

Où  $K_I = K_p / T_I$  et  $K_D = K_p T_D$ .

La structure du correcteur PID classique de l'équation (4.27) consiste en la connexion parallèle des parties proportionnelles, intégrales et dérivées comme donné dans la figure Fig.4.11.

Dans notre méthode de conception, nous avons dit que nous pouvons employer directement les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  déjà réglés du correcteur PID classique du système de commande à étudié pour ajuster l'ordre fractionnaire  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) de l'action d'intégration et l'ordre fractionnaire  $\mu$  ( $0 < \mu < 1$ ) de l'action de différentiation du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Une fois que les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont ajustés, la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est donnée comme :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) = K_p + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad (4.28)$$

La structure du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire de l'équation (4.28) est le raccordement parallèle des parties proportionnelle, intégrale d'ordre fractionnaire et dérivée d'ordre fractionnaire comme donné dans la figure Fig.4.12.

Dans notre implémentation, nous voulons employer le correcteur PID déjà existant pour mettre en application notre correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, donc nous transformerons la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire de l'équation (4.28) à l'équation suivante :

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} s^{(1-\lambda)} + \frac{K_D s}{s^{(1-\mu)}} \quad (4.29)$$

L'équation (4.29) signifie que nous implémentons juste le différentiateur d'ordre fractionnaire  $s^{(1-\lambda)}$  ( $0 < \lambda < 1$ ) en cascade avec l'action d'intégration  $K_I/s$  déjà existante du correcteur PID classique pour obtenir l'action intégral  $K_I/s^\lambda$  d'ordre fractionnaire du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, et l'intégrateur  $\frac{1}{s^{(1-\mu)}}$  ( $0 < \mu < 1$ ) d'ordre fractionnaire en cascade avec l'action dérivée  $K_D s$  déjà existante du correcteur PID classique pour obtenir l'action dérivée  $K_D s^\mu$  d'ordre fractionnaire du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Par conséquent, la nouvelle structure interne du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire de la figure Fig.4.12 avec ces opérateurs d'ordre fractionnaire sera donnée comme dans la figure Fig.4.13.

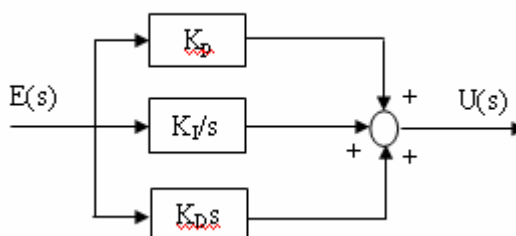


Fig. 4.11: Structure du correcteur PID classique

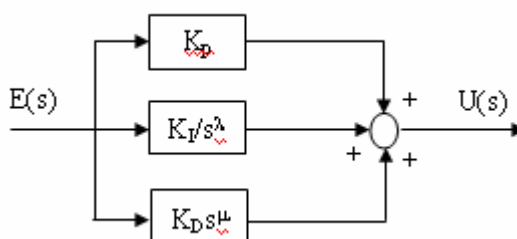
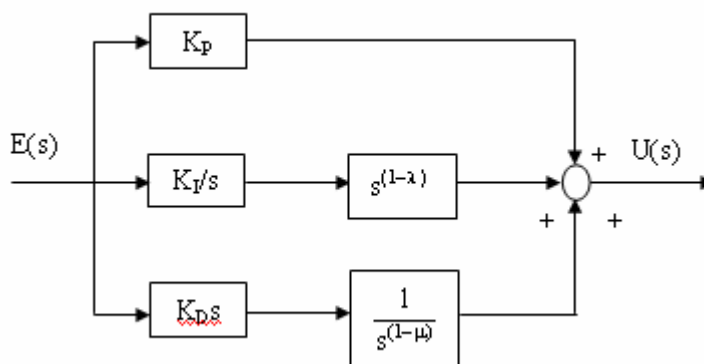


Fig. 4.12: Structure du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire

Fig. 4.13: Nouvelle structure du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire

#### 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode de conception du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est présentée pour l'amélioration de la qualité de commande et les performances d'un système de commande classique à retour unitaire. Les idées de base sont basées sur les règles de la méthode de Ziegler-Nichols et la minimisation du critère ISE. La formulation de cette nouvelle méthode de conception a été dérivée par l'utilisation des fonctions rationnelles des opérateurs d'intégration et de différentiation d'ordre fractionnaire, dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique. Des exemples explicatifs sont présentés pour exposer l'efficacité et la simplicité de la méthode proposée. Comme on peut voir des résultats de simulation, les correcteurs  $PI^\lambda/PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire ont significativement amélioré les caractéristiques de fonctionnement des systèmes de commande comparés aux correcteurs PI/PID classique et le système commandé par l'utilisation du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est robuste aux incertitudes du modèle. Notre technique de conception sera très appropriée pour des correcteurs PI/PID déjà réglé parce que pour implémenter le correcteur  $PI^\lambda/PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire nous employons le correcteur PI/PID classique déjà existant avec deux différentiateurs d'ordre fractionnaire donnés.

# Chapitre 5

## Réglage des correcteurs $PI^\alpha$ - $PD^\beta$ d'ordre fractionnaire

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Motivation

Le correcteur standard le plus utilisé dans l'industrie est le correcteur PID, car il permet de régler à l'aide de ses trois paramètres les performances du système de commande. Si la dynamique dominante du système à commander est supérieure au deuxième ordre, ou si le système contient un retard important ou plusieurs modes oscillants, le correcteur PID n'est plus adéquat et un correcteur plus complexe (avec plus de paramètres) doit être utilisé [33]. Majhi [61], a proposé le correcteur PI-PD, une forme modifiée du correcteur PID. Le correcteur PI-PD, correspond à la commande PI de la fonction de transfert du système changée par le retour de la commande PD. Ce correcteur peut produire une commande améliorée dans plusieurs situations.

Les objectifs d'une telle structure de commande sont le perfectionnement de la qualité de commande des systèmes et l'amélioration des performances. Dans ce contexte, nous proposons une généralisation du correcteur PI-PD, à savoir le correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, impliquant une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\alpha$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\beta$ . Ces deux paramètres peuvent être employés pour accomplir des spécifications complémentaires pour la conception ou d'autres exigences intéressantes pour le système à commander, que dans le cas d'une structure de commande PI-PD classique ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ).

Le réglage du correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, détaillé dans la section 3.5, sert à ajuster les six paramètres pour assurer des spécifications désirées. Une de ces spécifications est la minimisation d'un critère de performances, dans ce contexte, notre technique de réglage proposée, est basée.

### 5.1.2 Critères intégrales

Au cours des années, beaucoup de méthodes d'optimisation d'un critère intégral ont été étudiées, une approche commune est de réduire au minimum un index de performance. Ces méthodes s'appuient sur des critères d'optimisation d'une des spécifications de performances, considérée la plus importante. Elles sont applicables à condition que l'on puisse avoir une paramétrisation du critère en fonction des paramètres du correcteur.

Le but d'une méthode de réglage est de déterminer les valeurs des paramètres de correcteur qui minimisent un certain critère. Ce critère  $J$  est une fonction du vecteur  $P$  des paramètres du correcteur et, par conséquent, ce but peut être exprimé mathématiquement par :

$$\underset{P}{\text{Min}} J(P) \quad (5.1)$$

Les critères les plus connus peuvent être décrits par leurs dénominations suivantes :

-*Integrated Error* (IE) qui représente l'intégrale de l'erreur :

$$IE = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (5.2)$$

-*Integrated Absolute Error* (IAE) qui représente l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur :

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (5.3)$$

-*Integrated Square Error* (ISE) qui représente l'intégrale de l'erreur quadratique :

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (5.4)$$

-*Integrated Time multiplied Square Error* (IT<sup>2</sup>SE) qui représente l'intégrale de l'erreur quadratique multipliée par le temps :

$$ITSE = \int_0^{\infty} (te(t))^2 dt \quad (5.5)$$

-*Integrated Time multiplied Absolute Error* (ITAE) qui représente l'intégrale de l'erreur absolue multipliée par le temps :

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (5.6)$$

La méthode de minimisation du critère ISE a certains avantages tels que le calcul simple dans le domaine de fréquence, quant la fonction de transfert du système est connue. Une solution analytique peut être obtenue dans [66].

Dans notre cas d'étude, nous proposons, d'une part, la minimisation de l'intégrale du carrée de l'erreur ISE définie par:

$$Min_P J_1 = Min_P \left[ w_1 \int_0^{\infty} e^2(t) dt \right] \quad (5.7)$$

D'autre part, et pour éviter le grand effort de commande, la minimisation du critère de qualité de commande suivant est proposé:

$$Min_P J_2 = Min_P \left[ w_2 \int_0^{\infty} u^2(t) dt \right] \quad (5.8)$$

Donc, pour obtenir une bonne performance dynamique et éviter le grand effort de commande, nous pouvons proposer un critère général avec une combinaison linéaire des critères  $J_1$  et  $J_2$ :

$$Min_P J = Min_P \left[ w_1 \int_0^{\infty} e^2(t) dt + w_2 \int_0^{\infty} u^2(t) dt \right] \quad (5.9)$$

Le critère  $J$  peut répondre à l'exigence du concepteur en utilisant les valeurs des facteurs de pondérations  $w_1$  et  $w_2$ . Le critère de performance défini par l'équation (5.9) comporte deux limites, la signification de chacune est déterminée par un facteur  $w_i$ . Le concepteur doit définir les facteurs de pondérations  $w_1$  et  $w_2$  correctement afin d'obtenir les caractéristiques désirées. Une augmentation de  $w_i$  aura comme conséquence une certaine amélioration du dispositif correspondant mais peut dégrader d'autres critères.

## **5.2 Ajustement des paramètres du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup>**

### **5.2.1 Technique d'ajustement proposée**

La méthode de réglage proposée du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire est basée sur la solution d'un problème de minimisation. Ainsi, l'ajustement des six paramètres  $K_{PIF}$ ,  $K_{IF}$ ,  $K_{PDF}$ ,  $K_{DF}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Le correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire a six paramètres à ajuster (i.e.,  $K_{PIF}$ ,  $K_{IF}$ ,  $\alpha$ ,  $K_{PDF}$ ,  $K_{DF}$ ,  $\beta$ ), ceci peut souvent être fait par la solution d'un problème de minimisation. Pour l'ajustement des six paramètres du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire,



la technique proposée est basée sur la minimisation du critère général donnée par l'équation (5.9).

De la figure Fig.3.12, et pour une référence d'échelon unité, nous pouvons obtenir les fonctions de transfert de l'erreur et la commande comme suit :

$$E(s) = \left( \frac{1 + G_p(s)C_{PDF}(s)}{1 + G_p(s)(C_{PIF}(s) + C_{PDF}(s))} \right) \left( \frac{1}{s} \right) \quad (5.10)$$

$$U(s) = \left( \frac{C_{PIF}(s)}{1 + G_p(s)(C_{PIF}(s) + C_{PDF}(s))} \right) \left( \frac{1}{s} \right) \quad (5.11)$$

Supposant que le processus et les correcteurs sont des systèmes linéaires invariables dans le temps, nous pouvons employer la méthode de Hall-Sartorius [66] pour évaluer le critère général d'intégral donné par l'équation (5.9).

De l'équation (5.9), l'intégrale complexe  $J$  est donnée comme :

$$J = w_1 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(s)E(-s)ds + w_2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} U(s)U(-s)ds \quad (5.12)$$

Afin de calculer l'intégrale complexe  $J$  en utilisant la méthode de Hall-Sartorius présentée dans l'annexe. A, les fonctions de transfert de  $E(s)$  et  $U(s)$  doivent être rationnelles. Mais la fonction de transfert  $C_{PIF}(s)$  du correcteur PI<sup>α</sup> d'ordre fractionnaire et la fonction de transfert  $C_{PDF}(s)$  du correcteur PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire données par les équations (3.13) et (3.14) respectivement, sont irrationnelles et la fonction de transfert  $G_p(s)$  du système est irrationnelle aussi quant elle est avec un temps de retard  $e^{-Ls}$ . Pour régler ce problème, le temps de retard  $e^{-Ls}$  de la fonction de transfert  $G_p(s)$  du système approximé par une fonction rationnelle utilisant la méthode d'approximation de Padé du premier ordre comme :

$$e^{-Ls} = \frac{\left( 1 - \frac{L}{2}s \right)}{\left( 1 + \frac{L}{2}s \right)} \quad (5.13)$$

Donc, la fonction de transfert  $G_p(s)$  devient une fonction rationnelle.

Les fonctions de transfert irrationnelles des correcteurs PI<sup>α</sup> et PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire des équations (3.13) et (3.14) sont approximés par des fonctions rationnelles données par (3.16) et

(3.17) respectivement. L'approximation du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle est effectuée dans une bande de fréquence d'intérêt pratique [ $\omega_L, \omega_H$ ].

Les signaux d'erreur  $E(s)$  et de commande  $U(s)$  deviennent des fonctions rationnelles et sont données comme:

$$E(s) = \frac{N_E(s)}{D_E(s)} \quad (5.14)$$

$$U(s) = \frac{N_U(s)}{D_U(s)} \quad (5.15)$$

Par conséquent, les intégrales complexes  $J_1$  et  $J_2$  définis par les équations (5.7) et (5.8) respectivement, peuvent être calculées comme montré dans l'Annexe .A par:

$$J_1 = w_1 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{N_E(s)N_E(-s)}{D_E(s)D_E(-s)} ds = w_1 \frac{(-1)^{(n-1)}}{2} \frac{\det(\Delta_n^{N_E})}{\det(\Delta_n^{D_E})} \quad (5.16)$$

$$J_2 = w_2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{N_U(s)N_U(-s)}{D_U(s)D_U(-s)} ds = w_2 \frac{(-1)^{(m-1)}}{2} \frac{\det(\Delta_m^{N_U})}{\det(\Delta_m^{D_U})} \quad (5.17)$$

Le critère général  $J$  est donné par une combinaison linéaire des deux critères  $J_1$  et  $J_2$  comme suit:

$$J = J_1 + J_2 \quad (5.18)$$

Ce critère est défini pour réduire au minimum les énergies de l'erreur et de la commande (effort) respectivement. Dans le cas de notre étude, les choix sont  $w_1=w_2=1$ , prenant  $w_1=1$  et  $w_2=0$ , nous obtiendrons  $J_1$ . Les arrangements des six paramètres du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire consistent à trouver ces paramètres qui réduisent au minimum l'index  $J$  de l'équation (5.18).

Pour la tâche de minimisation, nous avons changé les valeurs des six paramètres chacune avec un pas de 0,01 et pour chaque valeur des six paramètres; nous calculons l'index  $J$  correspondant. Avec un essai simple de comparaison de tous les index  $J$  calculés, nous pouvons obtenir l'index minimum et les arrangements correspondants des six paramètres du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire. Pour réduire le temps de minimisation, l'intervalle initial de chaque paramètres  $K_{PIF}$ ,  $K_{IF}$ ,  $K_{PDF}$  et  $K_{DF}$  est choisi pour être centré en valeurs de paramètre de Ziegler-Nichols. L'intervalle de  $\alpha$  et  $\beta$  est [0, 1].

### 5.2.2 Exemples de simulation

#### *a. Exemple .1 Système avec intégrateur pur et temps de retard [72]*

Nous considérons le système donné par:

$$G_p(s) = 0.0506 \frac{e^{-6s}}{s} \quad (5.19)$$

Cet exemple a été utilisé par Wang et Cluett [73], la fonction de transfert du système a un intégrateur pur et un temps de retard. Par l'utilisation de la méthode de réglage basée sur la minimisation du critère ISE :

Les paramètres  $K_P$  et  $K_I$  du correcteur PI classique sont  $K_P=3.982$ ,  $K_I=4.2048$ . Ainsi, le signal de sortie  $U_1(s)$  du correcteur PI classique est donnée par:

$$U_1(s) = \left( 3.982 + \frac{4.2048}{s} \right) E(s) \quad (5.20)$$

Les paramètres  $K_{PI}$ ,  $K_I$  et  $K_{PD}$  du correcteur PI-P classique sont  $K_{PI}=4.068$ ,  $K_I=2.7863$ ,  $K_{PD}=1.4125$ . Ainsi, le signal de sortie  $U_2(s)$  du correcteur PI-P classique est donnée par:

$$U_2(s) = \left( 4.068 + \frac{2.7863}{s} \right) E(s) - 1.4125Y(s) \quad (5.21)$$

Les paramètres  $K_{PIF}$ ,  $K_{IF}$ , et  $K_{PDF}$  du correcteur PI<sup>α</sup>-P d'ordre fractionnaire sont  $K_{PIF}=3.0125$ ,  $K_{IF}=0.525$ ,  $K_{PDF}=1.125$ ,  $\alpha=0.7$ . Ainsi, le signal de sortie  $U_3(s)$  du correcteur PI<sup>0.7</sup>-P d'ordre fractionnaire est donné par:

$$U_3(s) = \left( 3.0125 + \frac{0.525}{s^{0.7}} \right) E(s) - 1.125Y(s) \quad (5.22)$$

Dans cet exemple d'application, les parties intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire ont été implémentées dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique par la méthode d'approximation de Charef de l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire présenté dans la section 2.5.1. La figure Fig.5.1 présente les réponses indicielles du système en boucle fermée pour les trois correcteurs. Nous pouvons dire que le correcteur PI<sup>0.7</sup>-P d'ordre fractionnaire a amélioré la réponse indicielle du système d'une façon considérable en termes de dépassement et temps de réponse.

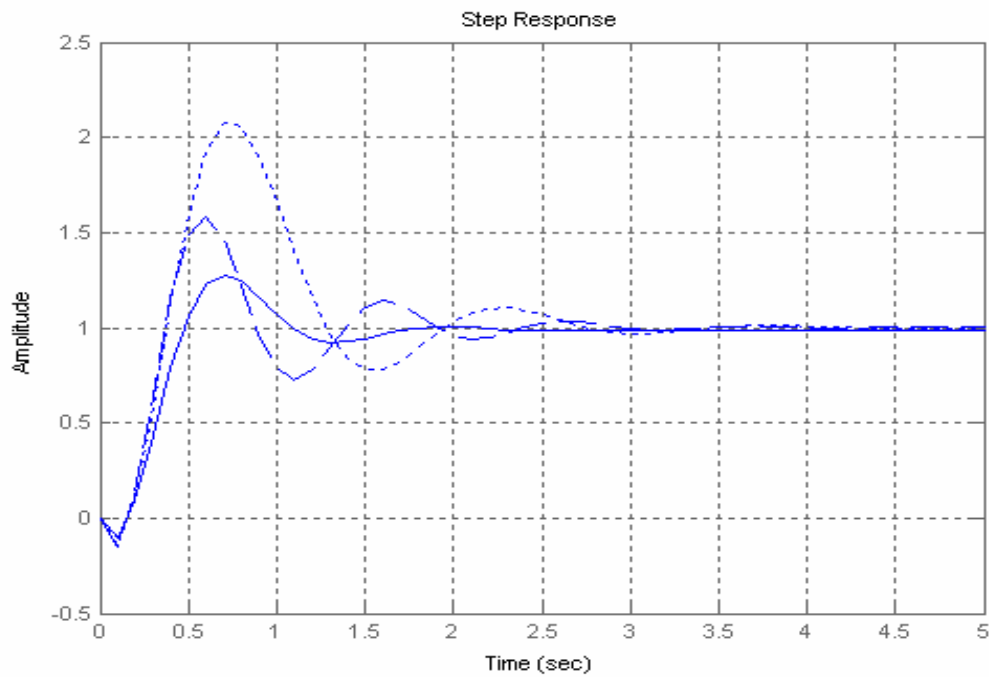


Fig. 5.1: Réponses indicielles du système en boucle fermée:  
 (—:  $PI^{0.7}$ -P, ---: PI-P, ....: PI)

**b. Exemple .2**

Le système suivant est utilisé pour l'évaluation des performances de la structure de commande  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire proposée. Nous considérons un système du premier ordre plus intégrateur et temps de retard, donné par :

$$G_p(s) = \frac{k_c}{s(\tau s + 1)} e^{-Ls} = \frac{1.4}{s(0.7s + 1)} e^{-0.05s} \tag{5.23}$$

Asservissement typique de position [55]. Les résultats de simulation sont présentés pour deux cas :

**- Cas 1 [74]**

L'ajustement des six paramètres  $K_{PIF}$ ,  $K_{IF}$ ,  $\alpha$ ,  $K_{PDF}$ ,  $K_{DF}$  et  $\beta$ , du correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire consiste à trouver ces paramètres qui réduisent au minimum l'indice  $J_I$  de l'équation (5.7). Pour réduire le temps de minimisation, l'intervalle de variation des paramètres est choisie pour être centré aux valeurs des paramètres de Ziegler-Nichols, ceux-ci sont  $K_{PIF} \in [0, 18]$ ,  $K_{IF} \in [0, 20]$ ,  $K_{PDF} \in [0, 18]$ ,  $K_{DF} \in [0, 4]$ . L'intervalle de  $\alpha$  et  $\beta$  est  $[0, 1]$ .

Pour ajuster les six paramètres par l'utilisation de la méthode proposée dans la section 5.2, le temps de retard  $e^{-0.05s}$  de la fonction de transfert  $G_p(s)$  du système est remplacé par une fonction rationnelle obtenue par la méthode d'approximation de Padé du premier ordre. Le correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire ci-dessus est remplacé aussi, par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H] = [\omega_L=0.1\omega_u, \omega_H=10\omega_u] = [0.23 \text{ rad/s}, 23 \text{ rad/s}]$ . L'erreur spécifique de l'approximation  $y=0.75 \text{ dB}$  pour la partie intégration et  $\bar{y} = 1.5 \text{ dB}$  pour la partie différentiation. La fréquence maximale de l'approximation  $\omega_{max}=100\omega_H = 2300 \text{ rad/s}$ .

Le plus petit index  $J_I$  est obtenu pour les paramètres  $K_{PIF}= 10.1025$ ,  $K_{IF}= 3.050$ ,  $K_{PDF}= 0.2150$ ,  $K_{DF}= 2.325$ ,  $\alpha=0.80$ ,  $\beta=0.75$ . A partir des paramètres obtenus, le signal de sortie  $U_I(s)$  du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$U_1(s) = \left( 10.1025 + \frac{3.050}{s^{0.80}} \right) E(s) - (0.215 + 2.235s^{0.75}) Y(s) \quad (5.24)$$

L'intégrateur d'ordre fractionnaire doit être implémenter comme  $\frac{1}{s^\alpha} = \frac{1}{s} s^{1-\alpha}$ , ceci pour assurer l'effet d'un intégrateur d'ordre entier  $1/s$  à très basses fréquences, donc le signal de sortie  $U_I(s)$  du correcteur PI<sup>0.8</sup>-PD<sup>0.75</sup> d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$U_1(s) = \left( 10.1025 + \frac{3.050}{s} s^{0.20} \right) E(s) - (0.215 + 2.235s^{0.75}) Y(s) \quad (5.25)$$

Dans ce cas d'étude, le correcteur PI<sup>0.80</sup>-PD<sup>0.75</sup> d'ordre fractionnaire ajusté par la minimisation de l'index  $J_I$  est comparé au correcteur PID ajusté par l'utilisation des règles de la méthode de Ziegler-Nichols donné par:

$$U_{PID}(s) = \left( 9 + \frac{10.2623}{s} + 1.9732s \right) E(s) \quad (5.26)$$

Et un correcteur PI-PD d'ordre entier ajusté par minimisation de l'index  $J_I$  donné par:

$$U_2(s) = \left( 2.01 + \frac{7.51}{s} \right) E(s) - (17.51 + 1.81s) Y(s) \quad (5.27)$$

La figure Fig.5.2 présente les tracés de Bode des trois fonctions de transfert en boucle ouverte. Les figures Fig.5.3 et Fig.5.4 présentent les réponses indicielles et les signaux de commande des systèmes en boucle fermée. Nous pouvons dire que le correcteur PI<sup>0.80</sup>-PD<sup>0.75</sup> d'ordre fractionnaire a amélioré la réponse indicielle du système d'une façon considérable en terme de dépassement.

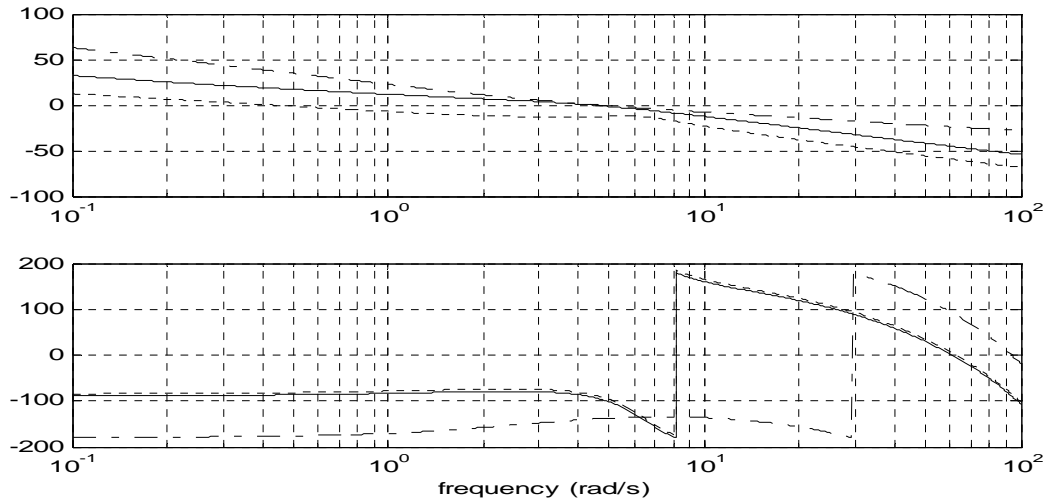


Fig. 5.2: Tracés de Bode des systèmes en boucle ouverte:

(— :  $PI^{0.80}-PD^{0.75}$ , --- : PI-PD, ..... : PID).

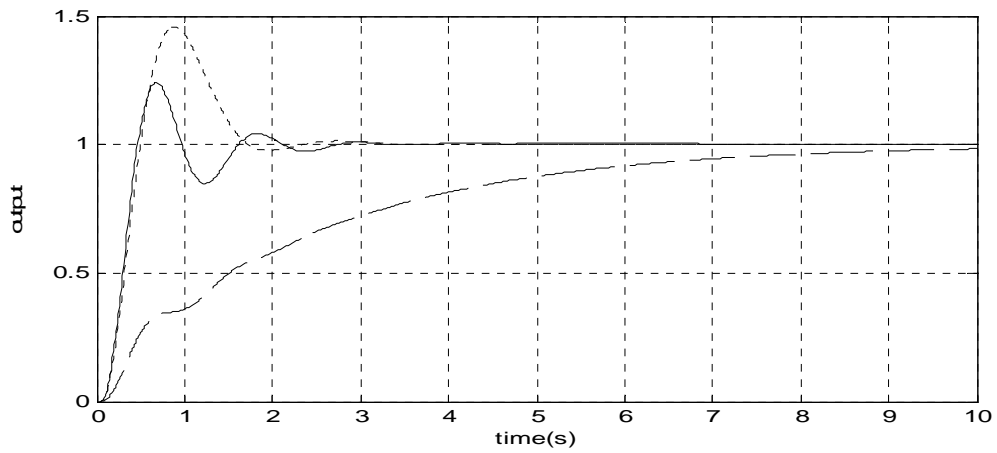


Fig. 5.3: Les réponses indicielles des systèmes en boucle fermée :

(— :  $PI^{0.80}-PD^{0.75}$ , --- : PI-PD, ..... : PID).

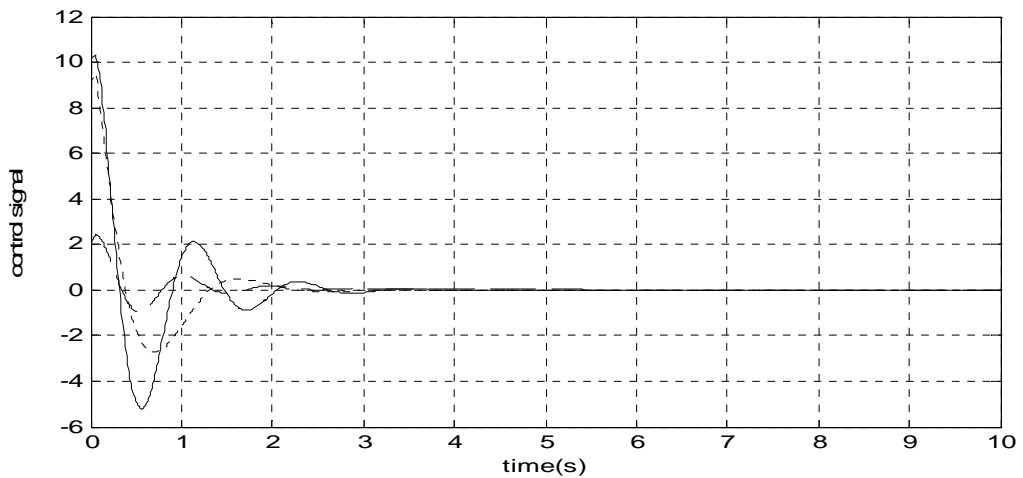


Fig. 5.4: Signaux de commande des systèmes en boucle fermée :

(— :  $PI^{0.80}-PD^{0.75}$ , --- : PI-PD, ..... : PID).

Quelques caractéristiques de performances du systèmes de commande avec les correcteurs  $PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$ ,  $PI$ - $PD$  d'ordre entier et  $PID$  sont récapitulées dans les tables Tab.5.1 et Tab.5.2, en termes de fréquence de coupure à gain unité  $\omega_u$ , marge de phase  $PM$ , marge de gain  $GM$ , temps de monté  $T_r$ , temps de réponse  $T_s$ , dépassement  $P$ , index  $J_I$  et  $J$ .

Nous pouvons voir des tables Tab.5.1 et Tab.5.2, que le correcteur  $PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$  d'ordre fractionnaire donne le petit index  $J_I$ , ceci parce que ce correcteur est ajusté par minimisation de cet index, et un temps de réponse petit, mais présente un grand effort de commande en comparaison avec ceux générés par les correcteurs  $PID$  et  $PI$ - $PD$  d'ordre entier. Ceci mène à mettre en considération la minimisation de l'effort de commande dans notre technique de conception.

Tab. 5.1: Caractéristiques fréquentielles

Correcteur $C(s)$	$\omega_u$ (rad/s)	$PM$ (deg)	$GM$ (dB)
$PID$	4.67	41.6	19.3
$PI$ - $PD$	0.433	93.0	17.7
$PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$	4.82	41.7	09.5

Tab. 5.2: Caractéristiques temporelles.

Correcteur $C(s)$	$T_r$ (sec)	$T_s$ (sec)	$P$ (%)	$J_I$	$J$
$PID$	0.20	2.02	38	0.3624	18.11
$PI$ - $PD$	5.26	9.51	0	0.3209	30.31
$PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$	0.7	6.4	4.0	0.2572	26.37

**- Cas 2 [74]**

L'ajustement des six paramètres  $K_{PIF}$ ,  $K_{IF}$ ,  $\alpha$ ,  $K_{PDF}$ ,  $K_{DF}$  et  $\beta$ , du correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire consiste à trouver ces paramètres minimisant l'index  $J$  de l'équation (5.12), nous prenons en considération la minimisation des énergies de l'erreur et de l'effort de commande. Comme discuté dans le cas.1, pour réduire le temps de minimisation, les intervalles de variation des paramètres sont choisies pour être centrés aux valeurs des paramètres de

Ziegler-Nichols, avec ceux-ci sont  $K_{PIF} \in [0, 18]$ ,  $K_{IF} \in [0, 20]$ ,  $K_{PDF} \in [0, 18]$ ,  $K_{DF} \in [0, 4]$ . L'intervalle de  $\alpha$  et  $\beta$  est  $[0, 1]$ .

Pour l'ajustement des six paramètres par l'utilisation de la méthode proposée dans la section 5.2, d'abord nous approximations le temps de retard  $e^{-0.05s}$  de la fonction de transfert  $G_p(s)$  du système par une fonction rationnelle par l'utilisation de la méthode d'approximation de Padé du premier ordre. Nous nous approximations aussi le correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire ci-dessus par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H] = [\omega_L=0.1\omega_u, \omega_H=10\omega_u] = [0.23 \text{ rad/s}, 23 \text{ rad/s}]$ . L'erreur spécifique de l'approximation de la partie d'intégration est  $\gamma = 0.75 \text{ dB}$ ,  $\bar{\gamma} = 75 \text{ dB}$  est pour la partie de différentiation et la fréquence maximale de l'approximation  $\omega_{max}=100\omega_H = 2300 \text{ rad/s}$ .

Le plus petit index  $J$  est obtenu pour les paramètres  $K_{PIF}= 0.432$ ,  $K_{IF}= 2.005$ ,  $K_{PDF}= 0.701$ ,  $K_{DF}=2.6025$ ,  $\alpha=0.64$ ,  $\beta=0.74$ . Ainsi, le signal de sortie  $U_1(s)$  du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$U_1(s) = \left( 0.432 + \frac{2.005}{s^{0.64}} \right) E(s) - (0.701 + 2.6025s^{0.74}) Y(s) \quad (5.28)$$

L'intégrateur d'ordre fractionnaire doit être implémenter comme  $\frac{1}{s^\alpha} = \frac{1}{s} s^{1-\alpha}$ , ceci pour assurer l'effet d'un intégrateur d'ordre entier  $1/s$  à très basses fréquences, donc le signal de sortie  $U_1(s)$  du correcteur PI<sup>α</sup>-PD<sup>β</sup> d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$U_1(s) = \left( 0.432 + \frac{2.005}{s} s^{0.36} \right) E(s) - (0.701 + 2.6025s^{0.74}) Y(s) \quad (5.29)$$

Dans ce cas, le correcteur PI<sup>0.64</sup>-PD<sup>0.74</sup> d'ordre fractionnaire ajusté par la minimisation de l'indexe  $J$  est comparé aux trois types de correcteurs :

Un correcteur ajusté par l'utilisation des règles de la méthode Ziegler-Nichols donné par:

$$U_{ZN}(s) = \left( 9 + \frac{10.2623}{s} + 1.9732s \right) E(s) \quad (5.30)$$

Un correcteur PI-PD d'ordre entier ajusté par minimisation de l'index  $J$ , son signal de sortie est donnée par :

$$U_2(s) = \left( 1.00 + \frac{3.05}{s} \right) E(s) - (9.21 + 2.32s) Y(s) \quad (5.31)$$



Un correcteur d'ordre fractionnaire présenté dans [75], ajusté pour des performances spécifiées:  $MG=60^\circ$ , fréquence de coupure à gain unité  $\omega_u=2.3 \text{ rad/sec}$ , et robustesse de variation du gain statique du système, donnée par:

$$U_{CF}(s) = \left( \frac{0.4348s + 1}{s} \right)^{0.8468} \left( \frac{4.0350s + 1}{0.0039s + 1} \right)^{0.8160} E(s) \quad (5.32)$$

La figure Fig.5.5 présente les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte. Les figures Fig.5.6, Fig.5.7, Fig.5.8 et Fig.5.9 présentent les réponses indicielles et les signaux de commande des systèmes en boucle fermée. On peut voir de ces figures que le correcteur  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$  d'ordre fractionnaire proposé surpasse les trois autres correcteurs, et une réponse indicielle acceptable est tracée avec un minimum d'effort de commande.

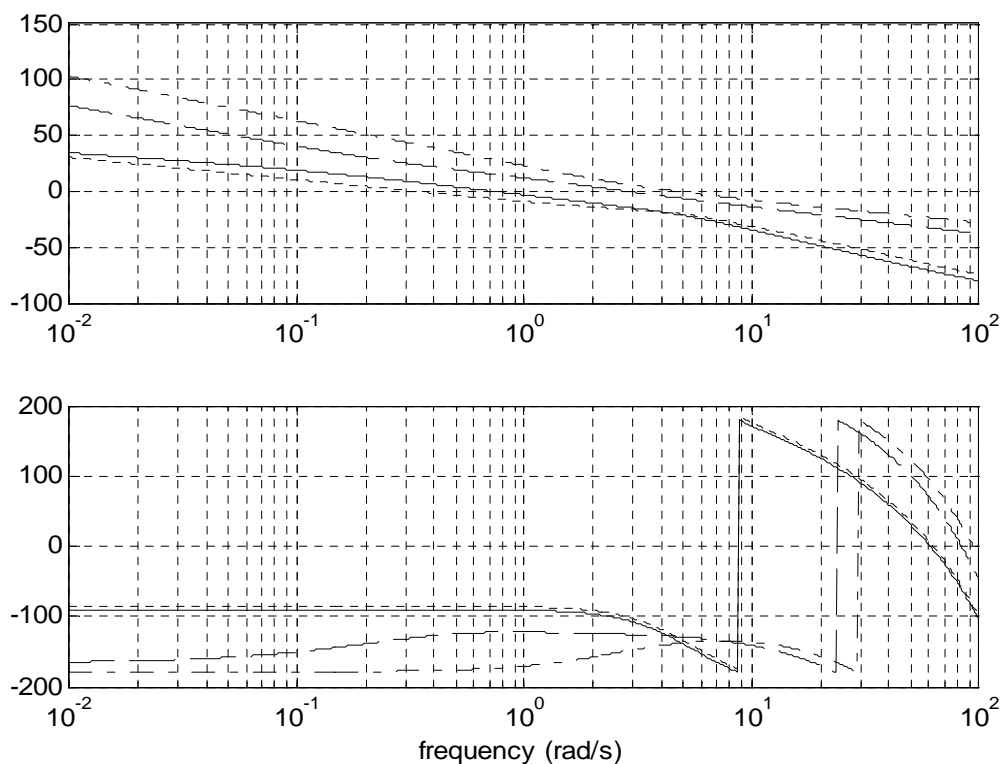


Fig. 5.5: Tracés de Bode des systèmes en boucle ouverte :  
 (—:  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$ , ....: PI-PD, ---: CF, -.-: PID).

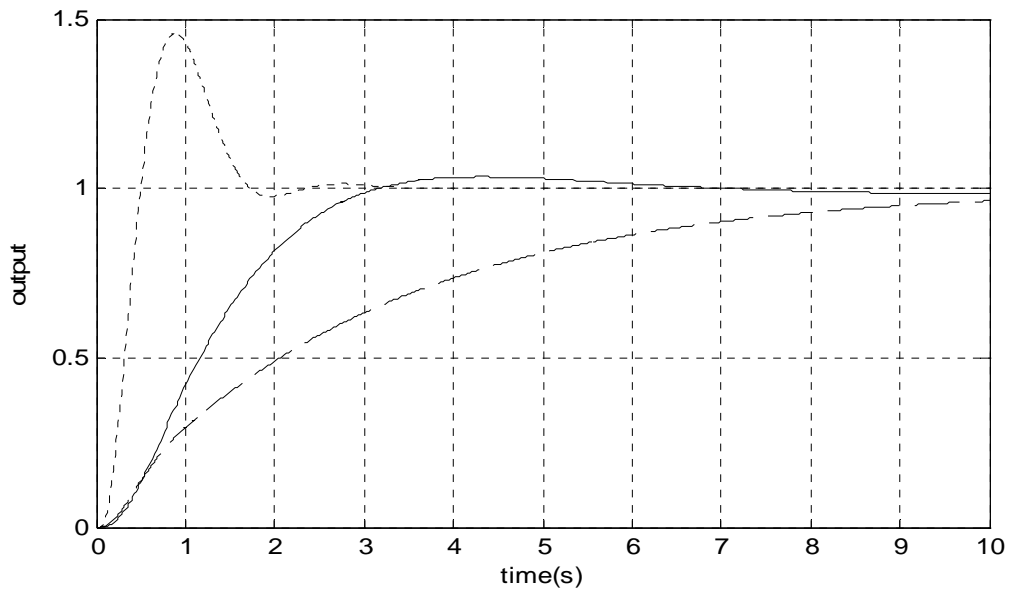


Fig. 5.6: Les réponses indicielles des systèmes en boucle fermée :  
 (—:  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$ , ---: PI-PD, ....:PID).

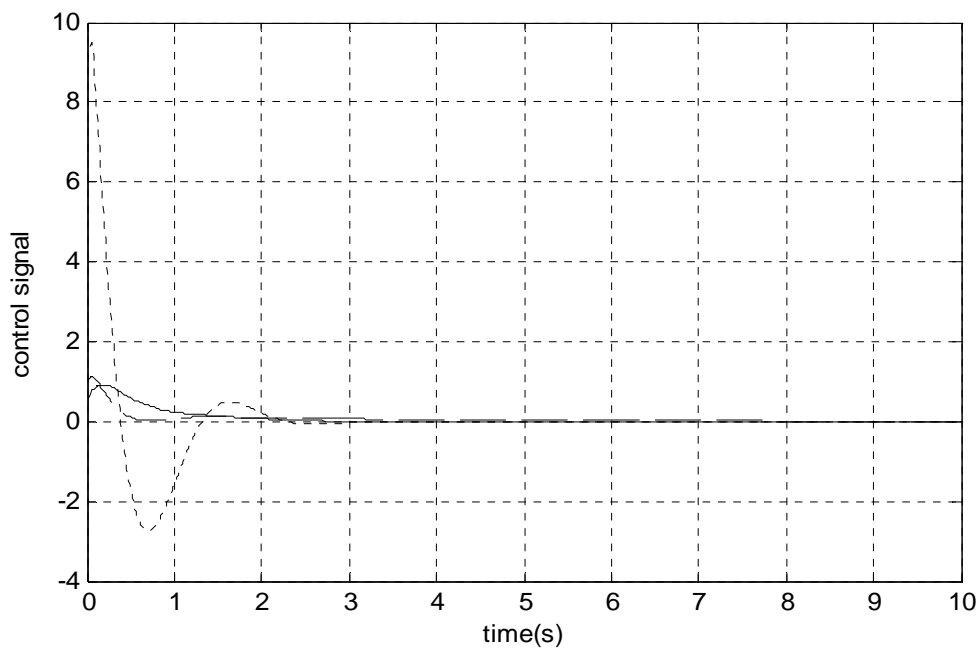


Fig. 5.7: Les signaux de commande des systèmes en boucle fermée :  
 (—:  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$ , ---: PI-PD, ....:PID).

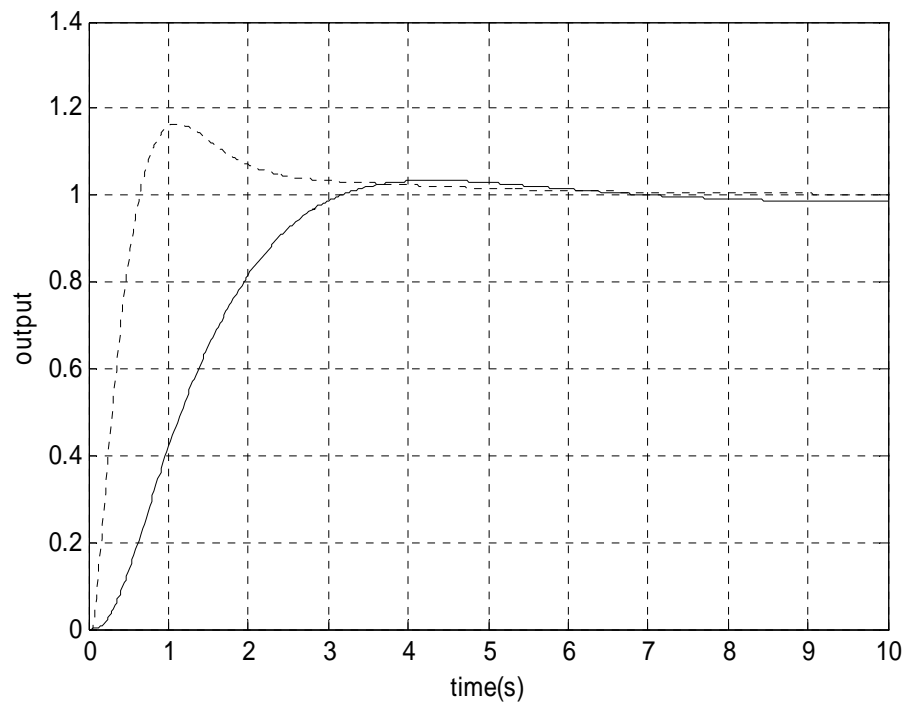


Fig. 5.8: Les réponses indicielles des systèmes en boucle fermée :

(— :  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$ , ...: CF).

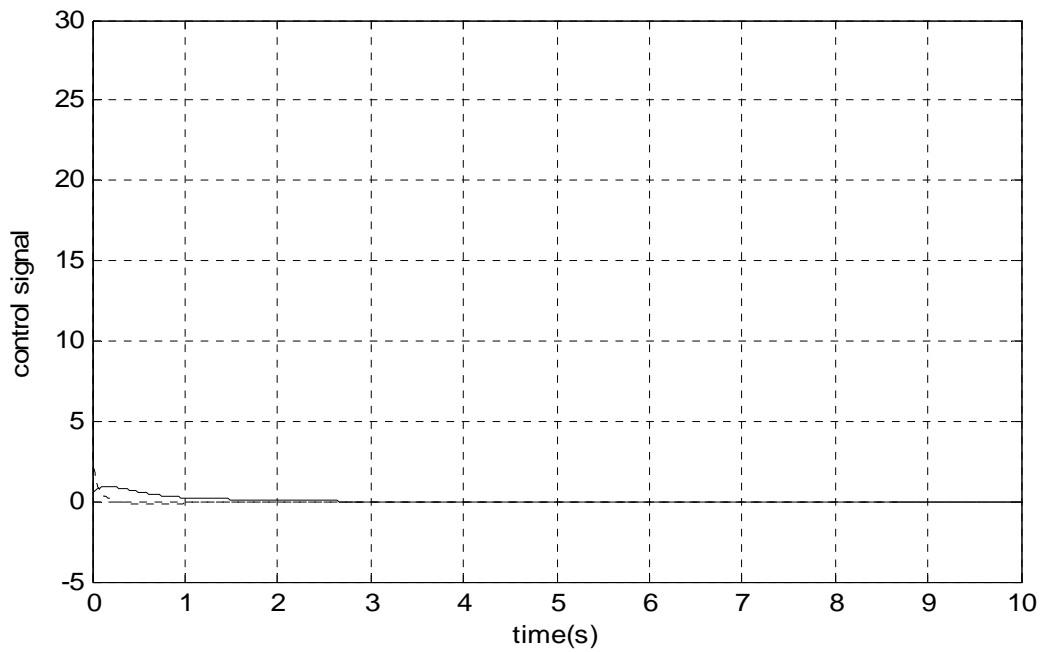


Fig. 5.9: Les signaux de commande des systèmes en boucle fermée :

(— :  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$ , ...: CF).

Quelques caractéristiques de performance des système de commande avec le correcteur  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$  d'ordre fractionnaire, le correcteur PID, le correcteur PI-PD d'ordre entier et le correcteur CF d'ordre fractionnaire sont récapitulé dans les tables Tab.5.3 et Tab.5.4, en termes de fréquence de coupure à gain unité  $\omega_u$ , marge de phase  $PM$ , marge de gain  $GM$ , temps de monté  $T_r$ , temps de réponse  $T_s$ , dépassement  $P$ , index  $J_I$  et  $J$ .

On peut voir de ces tables que le correcteur  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$  d'ordre fractionnaire donne le plus petit index  $J$ , cela parce que le correcteur est ajusté par minimisation de cet index. Par comparaison, le dépassement maximal est donné par le PID. Cependant, le temps de monté et le temps de réponse du correcteur  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$  d'ordre fractionnaire proposé sont plus moins que du correcteur PI-PD d'ordre entier. Le correcteur d'ordre fractionnaire présenté dans [75], vérifie les spécifications désirées, mais avec un très large index  $J$ , ceci est parce que la méthode de conception n'a pas pris en considération la minimisation des énergies de l'erreur et l'effort de commande.

Tab. 5.3: Caractéristiques fréquentielles

Correcteur $C(s)$	$\omega_u$ (rad/s)	$PM$ (deg)	$GM$ (dB)
PID	4.67	41.6	19.3
PI-PD	0.33	89.9	29.1
CF	2.78	58.5	24
$PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$	0.72	67.9	22.7

Tab. 5.4: Caractéristiques temporelles.

Correcteur $C(s)$	$T_r$ (sec)	$T_s$ (sec)	$P$ (%)	$J_I$	$J$
PID	0.2	2.0	38	0.3624	18.11
PI-PD	6.55	11.8	0	0.7717	01.32
CF	0.4	4.4	16	0.2479	57.66
$PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$	1.9	5.6	3.0	0.2572	01.29

### 5.3 Test de robustesse

La robustesse des systèmes de commande aux perturbations et aux incertitudes est un objectif important dans les boucles de commande. La rétroaction ne serait pas nécessaire pour la plupart des systèmes de commande s'il n'y avait aucune perturbation et incertitude. En général, la conception des correcteurs est effectuée en utilisant les valeurs nominales des paramètres du système à commander. Cependant, ils existent toujours des incertitudes sur les valeurs de ces paramètres. Nous pouvons dire qu'une conception est robuste, si elle garde les performances du système de commande en présence des variations substantielles en valeurs des paramètres du processus.

#### 5.3.1 Exemples de simulation

Pour évaluer la robustesse de la structure de commande  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, les deux cas d'étude de l'exemple 2 sont utilisés :

##### -Cas 1 [74]

Pour ce cas, Nous comparerons les performances du système de commande avec le correcteur  $PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$  d'ordre fractionnaire pour une variation du gain  $K_0$  du système. Les figures Fig.5.10 et Fig.5.11 représentent les réponses indicielles et les signaux de commande du système en boucle fermée avec le correcteur  $PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$  d'ordre fractionnaire, pour trois valeurs différentes du gain  $K_0$ ; la valeur nominal  $K_0 = 1.4$ , 100% plus que la valeur nominal  $K_0 = 2.8$  et 50% moins que la valeur nominal  $K_0 = 0.7$ . De la figure Fig.5.10, nous pouvons facilement voir que le système de commande avec le correcteur  $PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$  d'ordre fractionnaire a moins de changements de ses caractéristiques de fonctionnement. Nous pouvons dire que l'utilisation du correcteur  $PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$  d'ordre fractionnaire fournit de bonnes performances et robustesse.

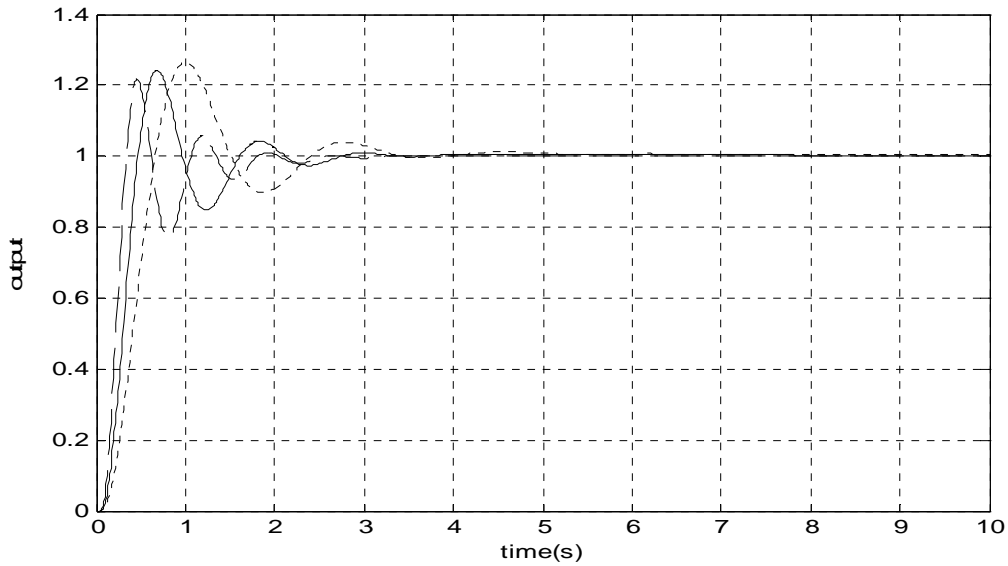


Fig. 5.10: Réponses indicielles du système en boucle fermée avec le correcteur  $PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$  : variations du gain ( ... :  $K_\theta=0.7$ , \_\_\_ :  $K_\theta=1.4$ , --- :  $K_\theta=2.8$  )

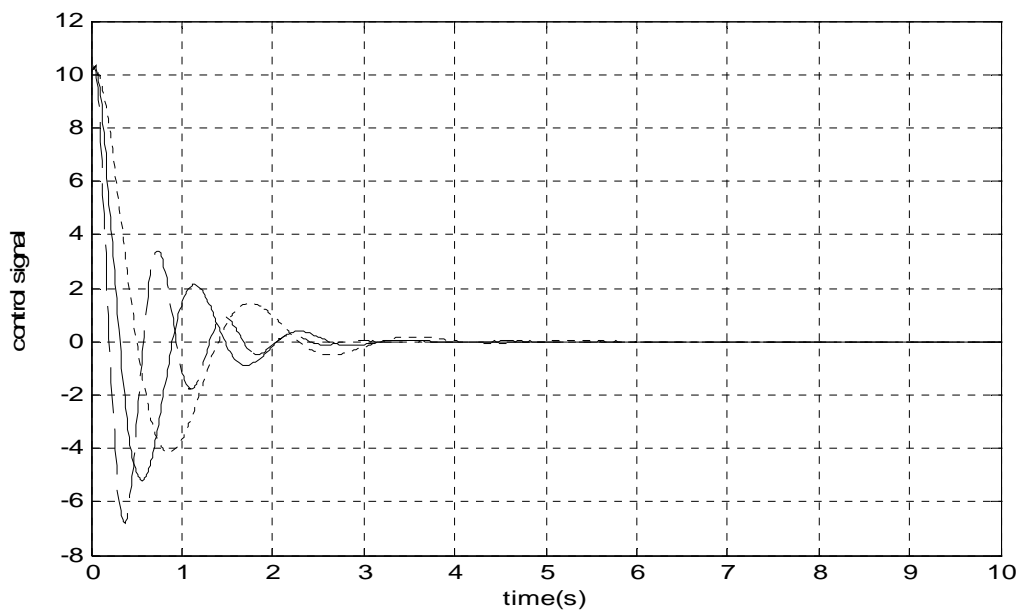


Fig. 5.11: Signaux de commande du système en boucle fermée avec le correcteur  $PI^{0.80}$ - $PD^{0.75}$  : variations du gain ( ... :  $K_\theta=0.7$ , \_\_\_ :  $K_\theta=1.4$ , --- :  $K_\theta=2.8$  )

-Cas 2 [74]

Comme dans le cas. 1, Nous évaluerons la robustesse de notre correcteur  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$  d'ordre fractionnaire pour des changements de gain  $K_\theta$ , les mêmes variations que dans le cas.1 seront considérées. Les réponses indicielles et les signaux de commande des systèmes en boucle fermée sont présentés sur les figures Fig.5.12 et Fig.5.13 respectivement. De la figure Fig.5.12, nous pouvons facilement voir que le système de commande avec le correcteur  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$  d'ordre fractionnaire a beaucoup moins de changements de ses caractéristiques de fonctionnement en termes de performances temporelles. Le correcteur  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$  d'ordre fractionnaire fournit une robustesse acceptable.

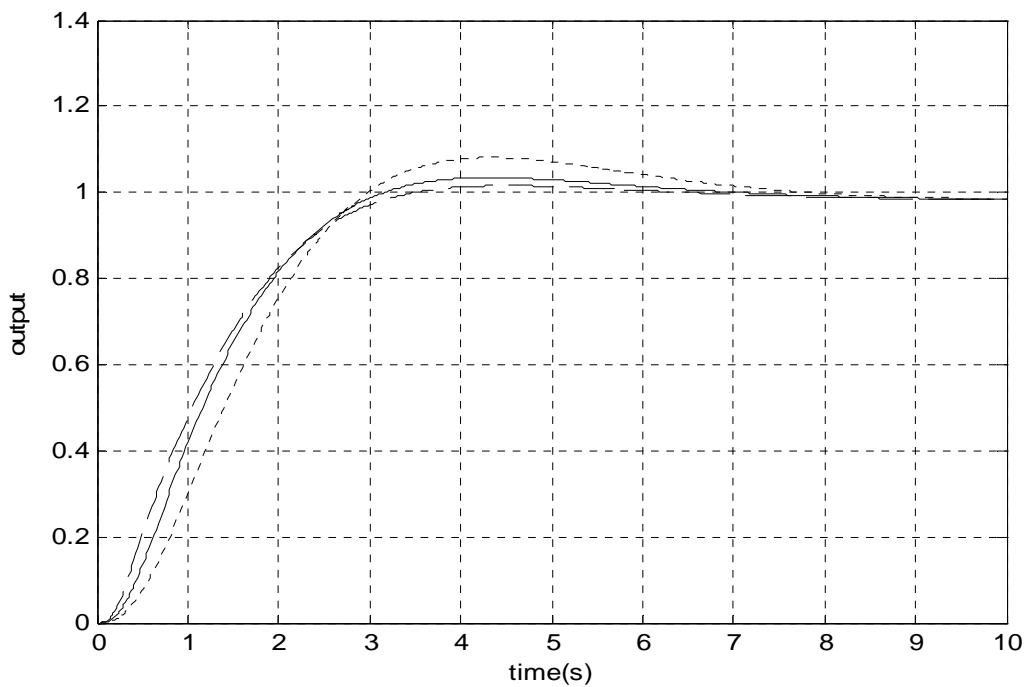


Fig. 5.12: Réponses indicielles du système en boucle fermée avec le correcteur  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$  :  
 Variation du gain (... :  $K_\theta=0.7$ , \_\_\_ :  $K_\theta=1.4$ , --- :  $K_\theta=2.8$ )

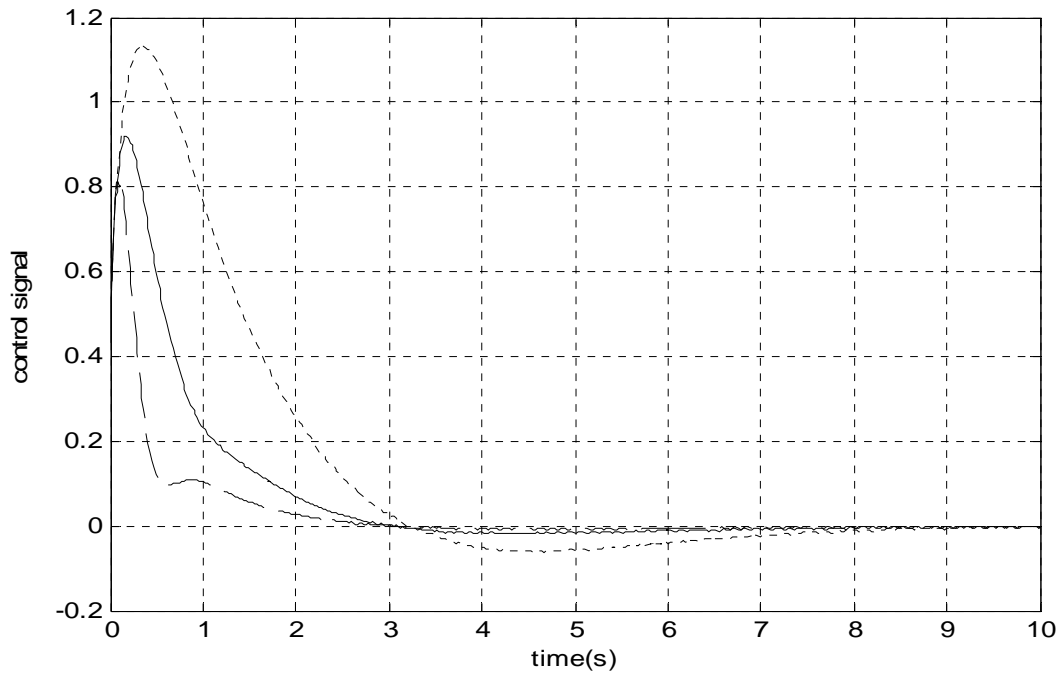


Fig. 5.13: Signaux de commande du système en boucle fermée avec le correcteur  $PI^{0.64}$ - $PD^{0.74}$ :

Variation du gain (... :  $K_\theta=0.7$ , \_\_\_ :  $K_\theta=1.4$ , --- :  $K_\theta=2.8$ )

## 5.4 Conclusion

Une nouvelle structure de commande  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire a été présentée. La nouveauté de la structure proposée consiste en prolongation d'ordre d'intégration et de dérivation des ordres entiers aux ordres fractionnaires. Le correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire proposé est une généralisation du correcteur PI-PD classique. Ce fait ouvre la manière de concevoir d'une classe plus flexible de correcteur, et donc vers la solution d'une plus grande variété de problèmes de commande, comme par exemple, la commande des processus avec des résonances, des intégrateurs et des fonctions de transfert instables. Nous avons décrit l'ajustement des paramètres du correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire et également étudié le mérite du correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire au-dessus des correcteurs PI-PD conventionnel, PID de Ziegler-Nichols et d'autres correcteurs d'ordre fractionnaire existants. La structure de commande  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire proposée a assuré de bonnes performances et une robustesse acceptable.



# Chapitre 6

## Conclusion générale

### 6 Conclusion générale

Ce travail porte essentiellement sur la commande d'ordre fractionnaire. En effet de nouvelles techniques de réglage des correcteurs d'ordre fractionnaire sont proposées dans ce sens, tout en montrant leurs avantages en les appliquant aux différents procédés. Nous avons présenté deux contributions relatives à la commande d'ordre fractionnaire pour améliorer la qualité de commande des systèmes dynamiques.

Notre première contribution concerne l'application du calcul d'ordre fractionnaire dans une structure de commande PID classique, une généralisation du correcteur PID d'ordre entier dans lequel les ordres des actions dérivée et intégrale sont fractionnaires, ce correcteur est nommé  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. L'idée de base de la méthode de réglage proposée est d'utiliser le correcteur PID d'ordre entier déjà existant. Autrement dit, notre méthode proposée consiste à employer les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  pour ajuster les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  minimisant l'intégrale du carré de l'erreur (ISE) du système de commande. Une étude comparative avec la structure de commande PID classique déjà existante nous a montré que cette nouvelle technique de réglage donne des résultats remarquables.

La deuxième contribution concerne la proposition d'une nouvelle structure de commande  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, cette structure est une généralisation de la structure de commande PI-PD classique. Le correcteur  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire implique une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\alpha$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\beta$ . L'intérêt de ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a deux paramètres en plus, qui sont l'ordre fractionnaire  $\alpha$  de l'action d'intégration et l'ordre fractionnaire  $\beta$  de l'action de différentiation. Ces paramètres peuvent être employés pour accomplir des spécifications complémentaires pour la conception ou d'autres exigences intéressantes pour le système de

commande. Pour vérifier les performances, le correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire a été réglé pour différents modèles de systèmes de commande. Dans l'ensemble, nous pouvons dire que le correcteur  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire a amélioré les performances et la robustesse du système de commande.

La conception des correcteurs d'ordre fractionnaire est une matière sans frontières. Cette thèse couvre seulement quelques aspects pour le réglage des correcteurs d'ordre fractionnaire. Davantage de recherche peut être prolongée au développement des méthodes de conception systématique, basées sur des règles pour l'ajustement des paramètres du correcteur  $PI^\lambda/PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, d'une part. D'autre part, l'algorithme de conception des correcteurs  $PI^\alpha$ - $PD^\beta$  d'ordre fractionnaire qui a été employé dans cette thèse peut être amélioré en employant quelques algorithmes d'optimisation telle que les algorithmes génétiques GA et la méthode d'optimisation par essaim particulaires PSO.

# Annexe A

## A. Méthode de Hall-Sartorius

### 1 Principe

La méthode proposée par Hall et Sartorius consiste, pour un système linéaire, à rechercher un asservissement minimisant l'intégrale du carré de l'erreur d'un système bouclé de la figure Fig. A.1, pour une entrée en échelon :

$$J = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [r(t) - y(t)]^2 dt \quad (\text{A.1})$$

Avec  $e(t)=[r(t) - y(t)]$  est le signal d'erreur.

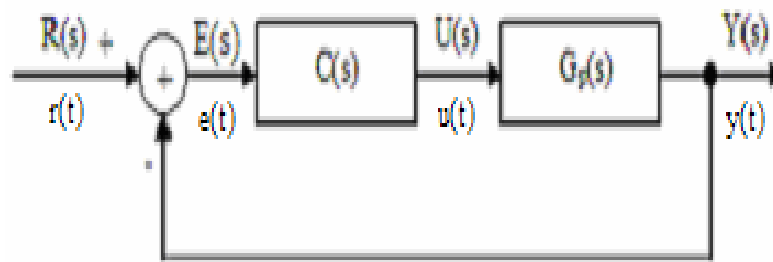


Fig. A.1: Système de commande à retour unitaire classique

La méthode nécessite le calcul de l'intégrale  $J$  sous forme littérale mettant en évidence les paramètres du système et du correcteur afin de déterminer les valeurs de ces paramètres minimisant l'intégrale. D'après les propriétés des transformées de Laplace l'intégrale  $J$  peut s'écrire :

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(s)E(-s)ds \quad (\text{A.2})$$



$\Delta_n^N \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  s'obtient en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de  $\Delta_n^D$  et en remplaçant la dernière colonne de la matrice ainsi obtenue par le vecteur  $C_N$  :

$$C_N = [c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n-1}]^T \quad (\text{A.10})$$

A titre d'exemple pour  $n=1$  :

$$\Delta_1^D = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad N(s)N(-s) = b_0^2, \quad \Delta_1^N = b_0^2$$

Soit :

$$I_1 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1}.$$

Pour  $n=2$ , il vient:

$$N(s)N(-s) = (b_0 + b_1s)(b_0 - b_1s) = b_0^2 - b_1^2s^2,$$

$$\Delta_2^D = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_2^N = \begin{bmatrix} a_0 & b_0^2 \\ a_2 & -b_1^2 \end{bmatrix},$$

D'où :

$$I_2 = -\frac{1}{2} \frac{\Delta_2^N}{\Delta_2^D} = \frac{b_1^2a_0 + b_0^2a_2}{2a_0a_1a_2}.$$

Pour  $n=3$ , on obtient:

$$N(s)N(-s) = (b_0 + b_1s + b_2s^2)(b_0 - b_1s - b_2s^2) = b_0^2 + (2b_0b_2 - b_1^2)s^2 + b_2^2s^4$$

$$\Delta_3^D = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta_3^N = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & b_0^2 \\ a_2 & a_1 & 2b_0b_2 - b_1^2 \\ 0 & a_3 & b_2^2 \end{bmatrix},$$

Soit:

$$I_3 = \frac{1}{2} \frac{\Delta_3^N}{\Delta_3^D} = \frac{(b_2^2a_0a_1 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_0a_3 + b_0^2a_2a_3)}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}.$$

De même pour  $n=4$  on obtient:

$$I_4 = \frac{(b_3^2(a_0a_1a_2 - a_0^2a_3) - (b_2^2 - b_1b_3)a_0a_1a_4 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_0a_3a_4 + b_0^2(a_2a_3a_4 - a_1^2a_4))}{(2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4))}.$$

### 3. Exemples de mise en oeuvre:

Considérons le système à retour unitaire admettant pour transmittance de la chaîne d'action l'expression :

$$C(s)G_p(s)=T(s) \quad (\text{A.11})$$

Il vient, en posant  $E(s)=N(s)/D(s)$  et pour une entrée en échelon  $R(s)=1/s$ , les valeurs suivantes de l'intégrale  $J$  :

$T(s)$	$J$	Optimum
$\frac{k}{s}$	$\frac{1}{2k}$	$k \uparrow$
$\frac{k}{s(1+\tau s)}$	$\frac{1}{2}(\tau + \frac{1}{k})$	$\tau \downarrow$ et $k \uparrow$
$\frac{k\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{1}{2\omega_n} \left( \frac{2\zeta/k + 4\zeta^2 - 1}{2\zeta - k} \right)$	$\omega_n \uparrow, \zeta = 0.5, k = 0.5$

Dans cette méthode les divers paramètres et en particulier  $\omega_n$  sont choisis en fonction des caractéristiques souhaitées, et notamment le temps de réponse désiré.

# Bibliographie

- [1] L. Debnath. A brief historical introduction to fractional calculus, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 35(4): 487–501, 2004.
- [2] K.B. Oldham and J. Spanier. *Fractional calculus*. Academic Press. New York, 1974.
- [3] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers. 1993.
- [4] K.S. Miller, B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley and Sons. New York, USA, 1993.
- [5] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press. San Deigo, 1999.
- [6] A. Oustaloup. *La commande CRONE*. Hermès. Paris, 1991.
- [7] I. Podlubny. Fractional order systems and  $PI^\lambda D^\mu$  controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1) : 208-214, 1999.
- [8] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*. Springer-Verlag. Wien and New York, 1997.
- [9] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A. Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus: Theoretical development and applications in physics and engineering*. Springer. Netherlands, 2007.
- [10] A. Oustaloup. *La dérivation non entière: théorie, synthèse et applications*. Hermes. Paris, 1995.
- [11] R. Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific. Singapore, 2000.
- [12] I. Petras, I. Podlubny, P. O’Leary, L. Dorcak, and B.M. Vingre. *Analogue realisations of fractional order controllers*. Faculta Berg, TU Koosice, 2002.
- [13] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier. Amsterdam, 2006.
- [14] R.L. Magin. *Fractional calculus in bioengineering*. Begell House, Redding, CT, USA, 2006.

- [15] M. Caputo. Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 2(13) : 529-539, 1967.
- [16] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral. Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 37 : 1465-1470, Sept.1992.
- [17] A. Charef. Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers, *IEE Proceeding on Control Theory Applications*, 135(6) : 714-720, 2006.
- [18] A. Charef. Modelling and analogue realization of the fundamental linear fractional order differential equation. *Nonlinear Dynamics*, 46 : 195-210, 2006.
- [19] B.M. Vinagre, I. Petráš, P. Merchan, and L. Dorcak. Two digital realisations of fractional controllers: Application to temperature control of a solid. Proc. European Control Conference (ECC2001), pages 1764-1767, Porto, Portugal, 2001.
- [20] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. A new discretization method for fractional order differentiators via continued fraction expansion. Proceedings of ASME, Desi. Eng. Tech. Conferences, Chicago, Illinios, USA, Sept 2-6, 2003.
- [21] M.A. Al-Alaoui. Filling the gap between the bilinear and the backward difference transforms: An interactive design approach. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 34(4) : 331-337, 1997.
- [22] Y.Q. Chen and B.M. Vinagre. A new IIR-type digital fractional order differentiator. *Signal Processing*, 83 : 2359-2365, 2003.
- [23] C.C. Tseng. Design of fractional order digital FIR differentiator. *Signal Processing Letters*, 8(3) : 77-79, 2001.
- [24] B.M. Vinagre, Y.Q. Chen, and I. Petráš. Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator. *Journal of the Franklin Institute*, 340 :349-362, 2003.
- [25] Y. Ferdi. Computation of fractional order derivative and integral via power series expansion and signal modelling. *Nonlinear Dynamics*, 46 : 1-15, 2006.
- [26] K. Hamdaoui and A. Charef. A new discretization method for fractional order differentiators via bilinear transformation. Proc. of the 15<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing, Cardiff, UK, July 1-4, 2007.
- [27] K. Hamdaoui and A. Charef. A new discretization method for fractional order differentiator via bilinear and backward transformations. Proc. of the International Conference on Modeling and Simulation, Algiers, Algeria, July 2-4, 2007.



- [28] T. Bensouici and A. Charef. Design of fractional order digital FIR integrator and differentiator. Proc. de la 1<sup>ière</sup> Conférence Internationale en Génie Electrique, CIGET'09, Tébessa, Algérie, 25-26 Octobre, 2009.
- [29] B.M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez, and V. Feliu. Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 3(3) : 231-248, 2000.
- [30] Y.Q. Chen, L. Kevin, and L. Moore. Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(3) : 363-367, 2002.
- [31] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives - An expository review. *Nonlinear Dynamics*, 38 :155-170, 2004.
- [32] M.A. Al-Alaoui. Novel IIR differentiator from the Simpson integration rule. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 41(2) :186-187, 1994.
- [33] K. Aström and T. Häggglund. *PID controllers: theory, design and tuning*. Instrument Society of America. 2<sup>nd</sup> edition, 1995.
- [34] C. Gang, Y. Haibin, X. Weihua, and C. Jian. PID control of unstable process with large dead time. *Chinese Journal of scientific instrument*, 26(3) : 301–303, 2005.
- [35] C. Hwang and J.H. Hwang. On stabilization of first-order plus dead-time unstable processes using PID controllers. In ECC, pages 614–623, Sept. 2003.
- [36] S. Majhi and D.P. Atherton. Autotuning and controller design for unstable time delay processes. In UKACC International Conference on Control, pages 769–774, Sept. 1998.
- [37] S. Majhi and D.P. Atherton. Online tuning of controllers for an unstable FOPDT process. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, 147(4) : 421–427, July 2000.
- [38] S. Manabe. The non-integer integral and its application to control systems. *JIEE (Japanese Institute of Electrical Engineers) Journal*, 80(860) : 589–597, 1960.
- [39] M. Axtell and E.M. Bise. Fractional calculus applications in control systems. In Proc. of the IEEE Nat. Aerospace and Electronics Conf., pages 563–566, New York, USA, 1990.
- [40] Y.Q. Chen and D. Xue. A comparative introduction of four fractional order controllers. In Proc. Of the 4<sup>th</sup> IEEE World Congress on Intelligent Control and Automatic (WCICA02), pages 3228-3235, Shanghai, China, June 2002.

- [41] A. Oustaloup. *La dérivation non entière*. Hermès. Paris, 1995.
- [42] B.J. Lurie. Three-parameter tunable Tilt-Integral-Derivative (TID) controller. *United States Patent, US 5 371 670*, USA, 1994.
- [43] H.F. Raynaud and A. Zergainoh. State-space representation for fractional order controllers. *Automatica*, 36 : 1017–1021, 2000.
- [44] C.A. Monje, B.M. Vinagre, A.J. Calderón, V. Feliu and Y.Q. Chen. Self-tuning of fractional lead-lag compensators. IFAC World Congress, Prague, Czech, July 4-8 2005.
- [45] R. Caponetto, L. Fortuna, and D. Porto. Parameter tuning of a non integer order PID controller. In 15<sup>th</sup> International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Notre Dame, Indiana, August 12-16, 2002.
- [46] J.F. Leu, S.Y. Tsay, and C. Hwang. Design of optimal fractional-order PID controllers. *Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers*, 33(2):193-202, 2002.
- [47] Z. Qing-Shan, C. Guang-Yi, and Z. Xin-Jian. The effect of the fractional order controller's orders variations on the fractional order control systems. Proc. of the first international conference on machine learning and cybernetics, Beijing, China, 4-5 Nov. 2002.
- [48] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and C.A. Monje. Une proposition pour la synthèse de correcteurs PI d'ordre non entier. In Action Thématique "Les Systèmes à Dérivées Non Entières", LAP-ENSEIRB, Bordeaux, France, 27-28 March, 2003.
- [49] J. Cervera, A. Baños, C.A. Monje, and B.M. Vinagre. Tuning of fractional PID controllers by using QFT. In 32<sup>nd</sup> Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Paris, France, 2006.
- [50] D. Valerio and J. Sa Da Costa. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols type rules. *Signal Processing*, 86(10) :2771-2784, Oct. 2006.
- [51] J.Y. Cao and B.G. Cao. Design of fractional order controller based on Particle Swarm Optimization. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 4(6) : 775-781, Dec. 2006.
- [52] S. Ladaci and A. Charef. An adaptive fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controller. Proc. TMCE 2006, Sixth International Symposium on Tools and Methods of Competitive Engineering, Ljubljana, Slovenia, 18-22 April, 2006.
- [53] R. Mansouri, S. Djennoune, and M. Bettayeb. Non integer order I-P controllers design using Genetic Algorithms. International Conference on Control, Modelling and Diagnostics, ICCMD'06, Annaba, Algeria, 22-24 May, 2006.

- [54] L. Dorčák, et al. Design of the fractional-order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers based on the optimization with self-organizing migrating algorithm. *Acta Montanistica Slovaca*, 12(4) : 285-293, 2007.
- [55] C.A. Monje, B.M. Vinagre, V. Feliu, and Y.Q. Chen. Tuning and autotuning of fractional order controllers for industry applications. *Control Engineering Practice*, 16:798-812, 2008.
- [56] D. Valério. *Fractional robust system control*. Ph.D. thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2005.
- [57] D.P. Atherton and S. Majhi. Limitations of PID controllers. American Control Conference, 6 : 3913-3917, 1999.
- [58] M. Benouarets. *Some design methods for linear and nonlinear controllers*. Ph.D. thesis, University of Sussex, U.K, 1993.
- [59] H.J. Kwak, S.W. Sung and I.B. Lee. On-line process identification and autotuning for integrating processes. *Ind. Eng. Chem. Res.* 36:5329-5338, 1997.
- [60] J.H. Park, S.W. Sung and I.B. Lee. An enhanced PID control strategy for unstable processes. *Automatica*, 34(6) : 751-756, 1998.
- [61] S. Majhi. *Relay feedback process identification and controller design*. Ph.D. thesis, University of Sussex, Brighton, UK, August, 1999.
- [62] I. Kaya and D.P. Atherton. A PI-PD controller design for integrating processes. Proc. of American Control Conference, ACC99, pages 258-262, 1999.
- [63] J.G. Ziegler and N.B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the A.S.M.E*, 64, 1942.
- [64] A. Besançon-Voda and S. Gentil. *Régulateurs PID analogiques et numériques*. Technique de l'Ingénieur R 7416, Traité Mesures et Contrôle, 1999.
- [65] I. Podlubny. *Fractional-order systems and fractional-order controllers*. UEF-03-94, Slovak Academy of Science, Kosice, 1994.
- [66] P. Borne. *Analyse et régulation des processus industriels*. Tome 1 : *Régulation Continue*, Editions Technip, Paris, pages 258-261, 1993.
- [67] K. Bettou, A. Charef and F. Mesquine. Conception of fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller. Conference on Systems and Control CSC'07. Marrakech, Marroco, 17-19 Mai, 2007.
- [68] S. Tavakoli and P. Fleming. Optimal tuning of PI controllers for first order plus dead time/long dead time models using dimensional analysis. European Control Conference ECC'03, Cambridge, UK, Sept. 2003.

- [69] K. Bettou and A. Charef. Control quality enhancement using fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controller. *International Journal of System Sciences*, 40(8) : 875-888, August 2009.
- [70] O. Lequin. Iterative feedback tuning of PID parameters comparison with classical tuning rules. *Control Engineering Practice*, 11(9) : 1023-1033, Sep. 2003.
- [71] K. Bettou and A. Charef. *Parameter tuning of fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controllers with integral performance criterion*. CISA'08, 1<sup>st</sup> Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation, Annaba, Algeria, June 30-July 2, 2008.
- [72] K. Bettou and A. Charef. *Parameters tuning of fractional order proportional integral-proportional derivative ( $PI^\alpha$ - $PD^\beta$ ) controller*. 3<sup>rd</sup> International Conference on Electrical Engineering, Alger, Algérie, 19-21 Mai 2009.
- [73] L. Wang and W.R. Cluett. Tuning PID controllers for integrating processes. *IEE Proc.-Control Theory Appl.* 144(5) :385-392. 1997.
- [74] K. Bettou , A. Charef, M. B. Vinagre, *A proposal for optimal tuning of fractional order proportional integral-proportional derivative ( $PI^\alpha$ - $PD^\beta$ ) controllers*. 14<sup>th</sup> IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation, pages 1-8, Mallorca, Spain, Sept. 22-26, 2009.
- [75] C.A. Monje. *Design method of fractional order controller for industrial applications*. Ph. D. Thesis, university of Extremadura, Badajoz, Spain, July 2006.

## **Résumé**

Le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans l'asservissement des processus industriels pour des décennies. Récemment, un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire qui est une généralisation du correcteur PID classique a été proposé. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus, les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis. Donc, le travail réalisé dans cette thèse présente essentiellement des idées nouvelles sur le réglage et l'implémentation des correcteurs d'ordre fractionnaire. Premièrement, une nouvelle stratégie de réglage des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire d'un système de commande classique à retour unitaire a été présentée. La technique de réglage est basée sur la méthode d'ajustement de Ziegler-Nichols pour calculer les paramètres  $K_P$ ,  $K_I$  et  $K_D$  pour  $\lambda=\mu=1$ . Puis, le critère de minimisation ISE est formulé pour calculer les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ . En seconde étape, une nouvelle structure de commande d'ordre fractionnaire, donnée par  $PI^\alpha-PD^\beta$ , a été présentée. Pour le réglage des six paramètres du correcteur  $PI^\alpha-PD^\beta$  d'ordre fractionnaire, la méthode proposée est basée sur la minimisation des critères de performance. La comparaison de ces résultats avec les schémas de commande d'ordre entier classique ont montré une nette amélioration des performances fréquentielles et temporelles et une meilleure robustesse aux incertitudes des paramètres des modèles des processus.

### **Mots Clés :**

Intégrateur d'Ordre Fractionnaire, Différentiateur d'Ordre Fractionnaire, Correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ , Correcteur  $PI^\alpha-PD^\beta$ , Réglage de Correcteurs.

## **Abstract**

The PID controllers have remained, by far, the most commonly and practically used in all industrial feedback control applications for decades. More recently, a fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controller, a generalization of classical PID controller, has been proposed. The interest of this type of controller is justified by a better flexibility in the control design since it has two more tuning parameters, the fractional orders of the integration and differentiation actions. These parameters could be used to satisfy additional feedback control design performances. So, the work realized in this thesis presents essentially new tuning and implementation ideas of fractional order controllers. First, a new tuning strategy of the fractional order  $PI^\lambda D^\mu$  controllers of a classical unity feedback control system has been presented. The tuning method is based on the classical Ziegler-Nichols tuning method for setting the parameters  $K_P$ ,  $K_I$  and  $K_D$  for  $\lambda=\mu=1$ . Then, the minimum ISE criterion is formulated to calculate the parameters  $\lambda$  and  $\mu$ . Second, a new fractional order control structure, given by  $PI^\alpha-PD^\beta$ , has also been presented. For the tuning of the six parameters of this fractional order  $PI^\alpha-PD^\beta$  controller, the proposed method is based on performance minimization criterions. Comparison of these results to the classical integer order control structures has shown a clear frequency and temporal performance enhancement and a better robustness to the plant's parameters variations.

### **Key words:**

Fractional Order Integrator, Fractional Order Differentiator,  $PI^\lambda D^\mu$  Controller,  $PI^\alpha-PD^\beta$  Controller, Controller Tuning.

## ملخص

المراقب الكلاسيكي هو التقنية الأكثر استعمالا في تحكم الأنظمة الصناعية من عشرات السنين. حاليا تم اقتراح المراقب الجزئي الذي هو تعميم للمراقب الكلاسيكي. الاهتمام بهذا المراقب الجديد يظهر من خلال مرونة إنشاء التحكم و ذلك لوجود عاملان جديان و هما التكامل الجزئي و الاشتقاق الجزئي.

هذان العاملان يمكن استعمالهما في تحسين نماذج أنظمة التحكم. إذن, العمل المقدم في هذه المذكرة يقدم أفكار جديدة حول إنشاء و تطبيق المراقب الجزئي. أولا, تم تقديم طريقة جديدة لإنشاء المراقب الجزئي لنظام تحكم كلاسيكي و ذلك باستخدام طريقة إنشاء زكلر-نيكلس و تصغير المعيار. هذه الطريقة تكون مناسبة للمراقب الكلاسيكي الموجود حاليا.

ثانيا, تم اقتراح نظام تحكم الجزئي جديد و في هذا النظام فان إنشاء العوامل الست يكون باستخدام تصغير المعيار تكامل مربع الخطأ و تكامل مربع إشارة خروج المراقب.

بالمقارنة مع تركيبات التحكم الكلاسيكي يظهر واضحا تحسن أداء المراقب الجزئي المقترح.

## كلمات المفاتيح:

تكامل جزئي, اشتقاق جزئي, مراقب جزئي, إنشاء المراقب.