

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES FRÈRES MENTOURI CONSTANTINE 1
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE



N ° d'ordre :91/D3C/2022
Série :05/phy/2022

THÈSE

PRÉSENTÉE POUR OBTENIR LE DIPLÔME DE DOCTORAT
3^{ème} Cycle LMD EN SCIENCES PHYSIQUE

SPÉCIALITÉ

PHYSIQUE THÉORIQUE

THÈME

**Quelques Modèles Au-delà du Modèle Standard et le Problème
de la Baryogénèse Électrofaible**

Par

BOUBAKIR ALIMA

Soutenu le : 09/01/2023

Devant le jury :

<u>Président :</u>	MIMOUNI Jamal	Prof.	Univ. Frères Mentouri Constantine1
<u>Rapporteur :</u>	AISSAOUI Habib	Prof.	Univ. Frères Mentouri Constantine 1
<u>Examineurs :</u>	ZAIM Slimane	Prof.	Univ. El Hadj Lakhdar, Batna 1
	MOUMNI Mustapha	Prof.	Univ. El Hadj Lakhdar, Batna 1

Remerciements

Je remercie le professeur Nouredine Mebarki Dieu accorde la paix à son âme, chef du laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique de l'Université Frères Mentouri Constantine 1. Il est parti brutalement et a laissé un immense vide dans la communauté scientifique. Cette thèse est le fruit de ses merveilleux conseils et ses remarques m'ont permis de voir mon travail sous un autre angle.

Je tiens à remercier Monsieur Habib Aissaoui, professeur à l'Université Frères Mentouri Constantine 1, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a fait partager merveilleuses idées. Je le remercie également pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux au professeur Jamal Mimouni pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

J'exprime ma gratitude à Monsieur Zaim Slimane et à Monsieur Mustapha Moumani, Professeurs à l'Université de Batna 1, pour avoir si aimablement accepté de juger ce travail.

Il m'est impossible d'oublier mon mari qui m'a soutenu dans tout ce que j'ai entrepris.

Mes derniers remerciements vont à tous les membres de ma famille qui ont tout fait pour m'aider.

À l'âme du professeur Nouredine Mebarki

À mon fils Nazih

Table des matières

1 Introduction	3
2 Le Modèle Standard de la physique des particules Elementaires	7
2.1 Le Modèle Standard de la physique des particules	7
2.1.1 Le Lagrangien du Modèle Standard	9
2.1.2 L'invariance de jauge	11
2.1.3 La brisure spontanée de la symétrie	14
2.2 Les problèmes du Modèle Standard	17
2.2.1 Le problème de la gravité	18
2.2.2 Le problème de la hiérarchie de masse des fermions	18
2.2.3 Le problème de l'antimatière	18
2.2.4 Le problème de la matière sombre	19
3 Quelques modèles au-delà du modèle standard	21
3.1 Les Modèles 331	22
3.1.1 Le Modèle Économique 331 avec Neutrinos de chiralité Droite	23
3.1.2 Le Modèle Minimal 331 avec seulement deux triplets de Higgs	29
3.2 Le Modèle Compact 341	35
3.2.1 Contenu en particules	36
3.2.2 Le secteur de Higgs	39
3.2.3 Le secteur fermionique	41
3.2.4 Le secteur de Jauge	43
4 La Transition de Phase Électrofaible	47
4.1 Potentiel Effectif	48
4.1.1 L'approche fonctionnelle	48
4.2 La Transition de Phase Électrofaible	59
4.2.1 La transition de phase électrofaible dans le modèle standard	59
4.2.2 La transition de phase électrofaible dans le modèle économique 331 avec neutrinos de chiralité droite	61
4.2.3 La transition de phase électrofaible dans le modèle minimal 331	67
4.2.4 La transition de phase électrofaible dans le modèle compact 341	72
5 Les Sphalérons et la Violation du Nombre Baryonique	83
5.1 Le Taux du Sphaléron dans les Deux Modèles 331	84

5.1.1	Le taux du sphaléron dans le modèle économique 331 avec neutrinos de chiralité droite	84
5.1.2	Le taux de sphaléron dans le modèle minimal 331	85
5.1.3	Discussion sur les résultats de l'approximation statique pour les deux modèles 331	87
5.2	Le Taux du Sphaléron dans le Modèle Compact 341	88
5.2.1	L'énergie du sphaléron	88
5.2.2	Le taux du sphaléron	89
6	Conclusion	99

Chapitre 1

Introduction

Pendant longtemps, les physiciens ont tenté d'expliquer les phénomènes cosmiques en posant la question suivante :

Notre univers a-t-il changé avec le temps ? c'est-à-dire les principaux ingrédients de l'univers primordial sont-ils les mêmes que dans l'univers actuel ? La réponse à cette question majeure est liée à deux branches de la physique, la cosmologie et la physique des particules. Le modèle cosmologique le plus courant est le modèle de cosmologie standard du Big-Bang qui présuppose trois principes de base [1] :

1) La validité du principe cosmologique qui dit que l'univers est homogène et isotrope [2] (i.e. présente les mêmes propriétés dans toutes les directions) et que les lois de la physique sont les mêmes en tous points.

2) Les lois de la physique sont invariantes dans le temps.

3) L'univers actuel est en expansion et il a été créé à un instant précis dans le passé par une immense explosion le Big Bang.

La théorie de Big Bang fournit des explications pour de nombreuses observations actuelles de notre univers telles l'abondance des éléments par la nucléosynthèse primordiale et prédit le rayonnement de fond cosmique (CMB), mais elle ne répond pas à la question de savoir pourquoi notre univers semble totalement dominé par la matière et contient très peu de baryons [2,3] en comparaison au nombre de photons, la densité baryonique est de l'ordre de 10^{-10} [4] et on peut définir :

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \quad (1.1)$$

où n_γ est le nombre de photons, n_B est le nombre baryonique total (la différence entre le nombre de baryons et d'antibaryons par unité de volume). Ce rapport décrit l'excès de matière sur l'antimatière, l'explication de la faible densité baryonique ou de comprendre l'origine de l'asymétrie baryonique est l'un des enjeux actuels de la cosmologie et de la physique des particules.

Chaque particule est associée à une antiparticule qui ne diffère que par le signe de la charge, sauf pour les particules neutres l'antiparticule peut être identique à la particule, les lois qui régissent les interactions fondamentales ne distinguent pas entre particule-antiparticule (matière-antimatière), on peut penser alors qu'elles ont été produites en quantités égales au début de l'univers, autrement dit l'univers primordial été symétrique. Les différentes observations directes et indirectes n'ont pas prouvé l'existence d'antimatière dans

notre univers actuel, il ne contient donc plus que de la matière et la plupart des théoriciens actuels recherchent des mécanismes qui permettent de générer un surplus de particules (baryons).

Selon la théorie du Big Bang, l'univers primitif était symétrique et le nombre baryonique était conservé, cet univers se dilate et se refroidit et sa densité diminue jusqu'à ce que sa température atteigne une valeur spécifique à laquelle différentes symétries sont brisées et l'équilibre thermique est rompu, la génération de nombre baryonique devient possible à ce moment, en d'autres termes, dépend de la brisure et de la conservation du nombre baryonique dans les interactions des particules élémentaires.

Ainsi, il est clair qu'une telle asymétrie baryonique doit s'accompagner d'un mécanisme appelé baryogénèse qui est le scénario le plus prometteur de génération du nombre baryonique et doit répondre aux trois conditions formulées par Andrei Sakharov en 1967. [5,6,7] :

1) Il doit y avoir un processus fondamental provoquant la violation du nombre baryonique.

2) Ce processus doit violer C et CP.

3) Processus doit être hors équilibre thermique.

Pour la 1^{ère} condition si le nombre de baryons est conservé, c'est à-dire qu'il est nul au début et le restera pour toujours, mais s'il n'est soumis à aucune loi de conservation alors il est violé à l'état d'équilibre, pour la seconde condition, la violation de C et CP assure la prééminence de la matière sur l'antimatière puisque la conservation de C et CP conduirait à la création de la même quantité (matière-antimatière), il convient de noter que si les deux autres conditions sont satisfait aucune charge nette de baryon n'est alors générée.

Comme nous l'avons vu précédemment à l'équilibre thermique, le processus qui crée un excès de baryons est annulé par le processus inverse afin de préserver les baryons en excès qui sont les résultats de la violation de C et CP, ce processus doit sortir de l'équilibre thermique.

Kuz'min, Rubakov et Shaposhnikov [8] ont proposé que l'asymétrie baryonique puisse être générée à des températures de l'ordre du TeV en se basant sur la théorie électrofaible (EW) qui contient toutes les ingrédients nécessaires de la baryogénèse : violation de la symétrie C et CP, nombre baryonique est violé à cause des anomalies chirales et la brisure de l'équilibre thermique lors de la transition de phase électrofaible du premier ordre qui correspond au passage d'une symétrie non brisée à une symétrie brisée. Malgré cela, la valeur calculée de l'asymétrie est trop faible et la théorie présente deux problèmes majeurs :

* La violation de CP est insuffisante parce que, dans la théorie électrofaible, la seule source de violation de CP est la phase complexe de la matrice de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa (CKM) et sa valeur est trop petite pour rendre compte de l'asymétrie baryonique observée.

* La transition de phase électrofaible du premier ordre : pour créer le déséquilibre thermique nécessaire, la transition doit être du premier ordre, mais dans le cas du modèle standard (SM) la baryogénèse électrofaible (EWBG) associée à la masse de boson de Higgs qui doit prendre la valeur $m_H \leq 70$ GeV [9,10,11] ceci est en contradiction avec la valeur expérimentale actuelle qui est d'environ 125 GeV [12] alors la transition serait typiquement du second ordre et beaucoup plus douce.

L'efficacité de la baryogénèse électrofaible n'est évoquée qu'au voisinage de la température de transition de phase (température critique T_c), pour cette raison on peut dire que la baryogénèse électrofaible est dominée par la transition de phase du premier ordre qui est

basée sur l'estimation de la hauteur de la barrière séparant la région de l'espace où la symétrie est brisée et la région où elle ne l'est pas, elle détermine ainsi la force de la transition de phase.

Il est évident que dans l'univers primordial à des températures très élevées la symétrie électrofaible n'était pas brisée ou les symétries électromagnétique et faible étaient unifiées dans une symétrie de jauge électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, lorsque la température décroît jusqu'à une valeur de l'ordre $T \sim 100$ GeV la symétrie électrofaible est spontanément brisée et le champ de Higgs développe une valeur moyenne du vide (VeV) différente de zéro. Comme nous l'avons déjà mentionné, dans le cas de la transition de phase du premier ordre le VeV passe brutalement de zéro à une valeur non nulle, cela conduit à la formation d'une bulle de vide correspondant à la symétrie brisée, cette bulle s'agrandit et sa frontière se déplace dans le plasma de l'univers, c'est-à-dire la phase non brisée. Les différentes particules interagissent avec cette paroi pour restaurer sa masse, cela crée un état de déséquilibre temporaire et la troisième condition de Sakharov est satisfaite [13].

A l'extérieur de la bulle, dans le domaine de la symétrie électrofaible non-brisée, les antibaryons sont présents en excès et il y a des processus rapides de désintégration qui viole le nombre baryonique au taux Γ ce qui efface l'asymétrie baryonique extérieure à la bulle et retombe à une valeur moyenne nulle. À l'intérieur les baryons sont en excès et la symétrie électrofaible est brisée, au moment de la transition où T est inférieur à la hauteur de la barrière, des transitions se produisent en raison de l'effet tunnel quantique et ce processus nommé instantons qui viole la conservation du nombre de baryons dont le taux est trop faible par rapport à l'expansion de l'univers, il y a aussi un processus par sphaléron qui se produit lorsque les transitions se font classiquement (sans l'effet tunnel), pour ne pas perdre les baryons en excès que l'on a créé, le taux de sphaléron Γ_{sph} doit être petit devant le taux d'expansion de l'univers qui est exprimé par la constante de Hubble H .

Nous avons vu que le SM ne donne pas une explication complète du problème d'asymétrie baryonique. De plus, il contient quelques lacunes comme le problème de la hiérarchie entre les différentes masses des particules, n'inclut pas l'interaction gravitationnelle, n'explique pas la nature de la matière noire et de l'énergie noire. Parmi les principales motivations qui ont poussé les physiciens à chercher des signes d'une nouvelle physique au-delà du SM, mais ce modèle est un passage obligé pour formuler une théorie des particules élémentaires et de leurs interactions, tous ces modèles proposés se basent sur le SM comme théorie effective à basse énergie.

L'objet de ce travail est de donner une idée pour étendre la structure du groupe de jauge du modèle standard et d'étudier le problème de la baryogénèse dans les trois modèles suivants : le modèle économique 331 avec neutrinos de chiralité droite, le modèle minimal 331 avec seulement deux triplets de Higgs et le modèle compact 341.

Le plan de cette thèse sera le suivant. Dans le deuxième chapitre une brève description de la théorie électrofaible et le modèle standard sera donnée avec une discussion de certains de ses obstacles. Le troisième chapitre, une théorie plus basée sur le contenu en particules et le mécanisme de brisure spontanée de la symétrie avec ses étapes pour trois différents modèles au-delà du SM. Le chapitre quatre décrit les étapes de transition de phase du premier ordre des trois modèles et se concentre sur l'expression de potentiel effectif à température finie comme outil pour y parvenir. De plus, nous présentons nos résultats numériques en prenant en compte les contraintes théoriques imposées au potentiel scalaire. Le cinquième chapitre

sera principalement consacré au rôle des sphalérons dans la violation du nombre baryonique et à la relation entre l'énergie et le taux de sphalérons, ce dernier étant toujours comparé à la constante de Hubble.

Chapitre 2

Le Modèle Standard de la physique des particules Elementaires

Le Modèle Standard (SM) de la physique des particules s'appuie sur la théorie quantique des champs (TQC) [14] et le concept d'interaction de jauge. Le SM contient trois interactions distinctes, à savoir : l'interaction forte expliquée par la chromodynamique quantique (QCD), l'interaction électrofaible, qui est elle-même le fruit de l'unification des deux interactions : faible et électromagnétique, expliquée par la théorie de Abdu Salam-Glashow-Weinberg (SGW). En TQC, la construction d'un modèle de jauge revient à écrire un Lagrangien qui, en appliquant les principes variationnels usuels, conduit à la description de la dynamique des interactions en terme de champs de matière et de jauge des particules existant dans le modèle. Il est très important de noter que les particules élémentaires ont des charges et des nombres quantiques qui sont conservés.

La première tentative d'unifier les interactions faible et électromagnétique en une seule théorie "électrofaible" par S-L. Glashow a été réalisée en 1961, le principal problème de cette théorie est que les particules qu'elle décrit sont sans masse, ce qui est en désaccord avec la réalité. En 1967, S. Weinberg et A. Salam ont modifié ce modèle en incorporant le boson de Higgs qui donne la masse aux particules de la théorie. Enfin, le SM est apparu sous sa forme actuelle au milieu des années 1970 [15]. Ce chapitre, rappelle brièvement la construction du SM, ses succès et son pouvoir prédictif, mais aussi les insuffisances qui font croire qu'il ne s'agit certainement pas de la théorie ultime.

2.1 Le Modèle Standard de la physique des particules

La théorie quantique des champs s'avère être un excellent outil pour décrire les interactions fondamentales entre les particules dans la nature. Elle sert de cadre mathématique au Modèle Standard, le SM permet la description de trois interactions élémentaires sur les quatre formalisées en physique pour décrire l'univers [16]. La première interaction est l'interaction électromagnétique, elle a une portée infinie et régit le comportement de la matière au-delà de l'échelle atomique. La deuxième interaction est appelée l'interaction faible et elle n'est observée qu'au niveau nucléaire, elle est responsable des désintégrations β nucléaires. La troisième interaction est l'interaction forte qui est à l'origine de la liaison entre les nu-

cléons (protons et neutrons) à l'intérieur des noyaux atomiques ainsi que des quarks au sein de ces mêmes nucléons, ces deux dernières forces ont une portée finie.

Le SM est basé sur l'hypothèse que chacune des trois interactions à distance est médiée par l'échange de bosons vecteurs de spin ($s = 1$) dont la dynamique obéit à une symétrie de jauge. Le groupe de jauge du SM $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, où $SU(3)_C$ implique l'existence de huit gluons (G_a , $a = 1..8$) médiateurs de l'interaction forte de masse nulle de l'interaction forte, et le groupe de jauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ décrit les interactions électrofaibles qui prédisent notamment l'unification électrofaible des forces nucléaire faible et électromagnétique à une énergie autour de 100 GeV, les bosons chargés W^\pm et le boson neutre Z^0 ainsi que le photon γ (sans masse) sont les médiateurs des interactions électrofaibles. Le SM affirme que la matière de l'univers est composée de fermions élémentaires interagissant à travers des champs, les particules associées aux champs d'interaction sont les bosons de jauge, nous avons deux types de fermions les leptons et les quarks, ils ont tous le spin ($s = \frac{1}{2}$). Les leptons, s'ils sont chargés, interagissent uniquement à travers l'interaction électromagnétique et par le biais de l'interaction faible s'il s'agit de neutrinos. Les quarks interagissent électromagnétiquement, faiblement et à travers l'interaction forte. Les leptons sont l'électron e (stable), le muon μ et le tau τ , les deux derniers lepton différent de l'électron que par la période de leur vie finie et par leurs masses. Il existe de bonnes preuves expérimentales que les leptons susmentionnés sont associés respectivement à des neutrinos différents ν_e , ν_μ et ν_τ . Il est à noter que, les quarks portent des charges électriques fractionnaires, $(-\frac{2}{3}e)$ pour les quarks up et $(-\frac{1}{3}e)$ pour les quarks down. En plus des quarks up (u) et down (d), il existe un quark (s) dit étrange et des quarks, considérablement plus lourds, le quark charmé (c), le quark bottom (b) et le quark top (t). Il faut s'avoir qu'un quark isolé n'a jamais été observé expérimentalement à cause du confinement dans des systèmes composés appelés les hadrons, les baryons et les mésons. Ainsi, les baryons sont des fermions composés de trois quarks tels que le proton p (uud), le neutron n (udd) qui sont les baryons les plus légers, le neutron est un peu plus massif que le proton d'environ 1,3 MeV/c² et dans l'espace libre il se désintègre en proton via l'interaction faible ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) avec une durée de vie moyenne d'environ 15 minutes, le proton est le seul baryon stable, les mésons sont des bosons composés d'une paire (quark- antiquark), comme par exemple, le pion chargé π^+ le méson plus léger qui est constitué des deux quarks ($u\bar{d}$). Les quarks ont également un autre nombre quantique appelé charge de couleur, chaque saveur de quark se décline en trois couleurs (rouge, vert et bleu) donc les quarks et les gluons sont des champs colorés, aussi, les quarks portent aussi un nombre quantique d'isospin faible.

Pour préserver l'invariance de jauge de la théorie électrofaible, les particules du SM sont considérées comme sans masse. En réalité nous savons tous que les particules de la nature ont des masses non nulle à l'exception du photon. La solution à ce problème est la brisure spontanée de la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ via le mécanisme de Higgs qui génère de la masse aux particules lorsqu'elles interagissent avec un champ scalaire dit "Champ de Higgs", les particules qui n'interagissent pas avec ce champ restent sans masse comme le photon. Le champ de Higgs est associé à une particule appelée "boson de Higgs" qui a été découverte le 4 juillet 2012 par les deux collaborations du CERN, ATLAS et CMS du LHC. Notez que cette particule "Higgs" a les propriétés suivantes : le spin ($s = 0$), une masse d'environ 126 GeV, son couplage aux particules massives est proportionnel à la masse des particules, et il se couple aux bosons de jauge massifs W^\pm et Z mais pas directement aux photons et aux

gluons donc il ne participe pas aux interactions fortes.

Comme nous l'avons dit auparavant, le SM ne peut décrire que trois forces sur les quatre de la nature, la quatrième force est la gravité qui reste la moins comprise de toutes les autres forces physiques car l'origine de sa source n'a jamais été trouvée. Pour expliquer le fonctionnement de la gravité aux niveaux macroscopique et microscopique, les physiciens ont supposé qu'elle était liée à une particule tensorielle (médiatrice) appelé graviton (G) de spin ($s = 2$) et de masse nulle car la force gravitationnelle a une très longue portée et semble se propager à la vitesse de la lumière.

Après avoir décrit le contenu général du SM, nous présentons dans ce qui suit la dynamique des différentes interactions qui constituent ce dernier.

2.1.1 Le Lagrangien du Modèle Standard

La renormalisation de toute théorie en physique des particules semble être nécessaire. Une théorie est dite renormalisable lorsque les paramètres, apparaissant dans le lagrangien, sont finis en incluant les corrections quantiques. Les problèmes des divergences qui peuvent survenir lors des calculs des amplitudes de transitions des diagrammes de Feynman sont résolus en chromodynamique quantique QCD et en électrodynamique quantique QED par la redéfinition des grandeurs physiques comme la masse, les constantes de couplage, les champs qui peuvent toujours recevoir des résultats finis ou renormalisés en introduisant des contre-termes qui absorbent ces écart (divergences).

La première théorie de l'interaction faible a été proposée par Fermi en 1933 et le lagrangien de cette théorie peut s'écrire comme une interaction de courant (l'interaction est ponctuelle entre quatre particules) [17]

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu(x) J_\mu^+(x), \quad (2.1)$$

où $G_F = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ est la constante de Fermi universale et $J^\mu(x)$ est le courant. Notez que le Lagrangien de Fermi peut décrire à la fois trois types de processus faibles, à savoir : Leptonique (i.e. l'état final n'est constitué que de leptons), Semi-Leptoniques (i.e. l'état final se compose à la fois de hadrons et de leptons) et Hadroniques (i.e. l'état final n'est constitué que de hadrons). Aussi, il peut fournir une très bonne description de la physique des basses énergies. Cependant, à très hautes énergies tous les calculs perturbatifs au-delà du niveau de l'arbre divergent, en d'autres termes la théorie est non renormalisable, de plus, un autre problème lié au précédent est la violation de l'unitarité même au niveau de l'arbre.

Le courant leptonique s'écrit comme

$$J_\mu(x) = \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_l(x), \quad (2.2)$$

ici l , ν_l sont respectivement les leptons chargés et leurs neutrinos associés, le courant leptonique a une charge $+1$ et le conjugué hermitien a une charge -1 . Le courant chargé est couplé à un champ vectoriel W_μ^\pm de masse m , lors de la construction une théorie des interactions faibles utilisant les courants leptoniques, on obtient une théorie non renormalisable qui n'est valable qu'à basse énergie, la solution proposée pour ce problème est de considérer cette

théorie comme une théorie effective, une approximation d'une théorie plus fondamentale qui serait elle renormalisable. En utilisant les développements de la théorie des champs entre les années 50 et 60 Weinberg, Glashow et Salam indépendamment ont été les premiers physiciens à tenter d'unifier les interactions faibles et électromagnétiques dans une théorie de jauge [15] dont nous allons maintenant décrire.

Comme indiqué précédemment, le SM est basée sur le groupe de jauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, avec :

- $SU(3)_C$ le groupe de jauge des interactions forte avec la charge de couleur c ;
- $SU(2)_L$ le groupe d'isospin faible qui agit uniquement sur les composantes gauches des fermions, et par conséquent, les bosons de jauge $W_i^\mu(x)$ ne se couple pas aux composantes droites des fermions qui forment des singulets d'isospin faible ;
- $U(1)_Y$ le groupe d'hypercharge faible [18].

La relation suivante donne pour chaque champ la valeur de la charge électrique Q qui est une combinaison de l'hypercharge Y et T_3 :

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3. \quad (2.3)$$

Le SM contient trois types de particules selon leurs nombres quantiques [17, 16] : les fermions spin $\frac{1}{2}$ qui sont donnés en trois générations et différentes hélicités (gauche - droite), les bosons spin 1 et le boson scalaire de Higgs spin 0. Le tableau suivant résume les principales caractéristiques des particules du SM :

Tableau 1 : Spectre des particules du modèle standard.

Particules	Y	T_3	Q	$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$
$(\nu_e)_{L'}, (\nu_\mu)_{L'}, (\nu_\tau)_{L'}$ $(e^-)_{L'}, (\mu^-)_{L'}, (\tau^-)_{L'}$	-1	$(\frac{1}{2})_{-}$	$(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix})$	$(1, 2, -1)$
$e_{R}^-, \mu_{R}^-, \tau_{R}^-$	-2	0	-1	$(1, 1, -2)$
$(u)_{L'}, (c)_{L'}, (t)_{L'}$ $(d)_{L'}, (s)_{L'}, (b)_{L'}$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2})_{-}$	$(\begin{smallmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{smallmatrix})$	$(3, 2, \frac{1}{3})$
u_{R}, c_{R}, t_{R}	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$(3^*, 1, \frac{2}{3})$
d_{R}, s_{R}, b_{R}	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$(3^*, 1, -\frac{1}{3})$
Gluons (g)	0	0	0	$(8, 1, 0)$
W^\pm	0	± 1	± 1	$(1, 3, 0)$
Z	0	0	0	$(1, 3, 0)$
γ^0	0	0	0	$(1, 1, 0)$
H^0	+1	$-\frac{1}{2}$	0	$(1, 1, 1)$

La densité Lagrangienne du SM s'écrit comme

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y, \quad (2.4)$$

avec : \mathcal{L}_{YM} est la densité Lagrangienne de Yang-Mills, \mathcal{L}_f est la densité Lagrangienne des fermions, \mathcal{L}_H est la densité Lagrangienne de Higgs et \mathcal{L}_Y est la densité Lagrangienne de Yukawa.

Le terme de Yang-Mills \mathcal{L}_{YM} est donné par

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (2.5)$$

où une sommation est effectuée sur tous les générateurs des groupes de jauge du SM, alors le tenseur $F_{\mu\nu}^a$ s'écrit dans le cas général comme :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g^{(a)} f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (2.6)$$

avec G_ν^a représentent les bosons de jauge associés aux groupes $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$; $g^{(a)}$ représente la constante de couplage de chaque groupe et enfin f^{abc} sont les constantes de structure de chaque groupe, il est à noter que ces constantes de structure disparaissent pour le groupe $U(1)_Y$ et apparaissent dans les relations de commutation entre les générateurs des groupes non-abéliens (i.e. le commutateur est non nul) $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$.

Le deuxième terme est la densité Lagrangienne fermionique qui s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = & i\bar{L}_\alpha \gamma^\mu D_\mu L_\alpha + i\bar{Q}_\alpha \gamma^\mu D_\mu Q_\alpha + i\bar{E}_\alpha \gamma^\mu D_\mu E_\alpha \\ & + i\bar{U}_\alpha \gamma^\mu D_\mu U_\alpha + i\bar{D}_\alpha \gamma^\mu D_\mu D_\alpha, \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec L_α , Q_α sont les composantes gauches des leptons et les quarks, E_α , U_α et D_α sont les composantes droites des leptons et des quarks (up et down), D_μ est la dérivée covariante qui prend la forme :

$$D_\mu = \partial_\mu - ig^{(a)} T^a G_\mu^a. \quad (2.8)$$

Afin de préserver l'invariance de jauge du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, Weinberg et Salam ont utilisé le mécanisme de Higgs pour briser spontanément la symétrie électrofaible et générer ainsi les masses aux particules (fermions, bosons de jauge et le Higgs lui-même), ce mécanisme stipule l'existence d'un doublet complexe scalaire $H^T = (\Phi^+, \Phi^0)$, où le Lagrangien de ce champ de Higgs est donné par

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu H)^+ (D^\mu H) - V(\Phi), \quad (2.9)$$

et V représente le potentiel de Higgs

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi - \lambda (\Phi^+ \Phi)^2. \quad (2.10)$$

Le terme de Yukawa représente les interactions entre les fermions et le secteur scalaire. Puisqu'il existe des doublets de fermions avec l'hypercharge opposée, nous devons utiliser $\tilde{H}^T = (\Phi^{0+}, -\Phi^-)$ pour avoir un terme de Lagrangien invariant de jauge pour les fermions avec l'hypercharge positif (down type). Cependant, \mathcal{L}_Y écrit comme :

$$\mathcal{L}_Y = y_{\alpha\beta}^L \bar{L}_\alpha E_\beta H + y_{\alpha\beta}^D \bar{Q}_\alpha D_\beta H + y_{\alpha\beta}^U \bar{Q}_\alpha U_\beta \tilde{H} + \text{h.c.}, \quad (2.11)$$

avec $y_{\alpha\beta}$ les constantes de couplage de Yukawa.

2.1.2 L'invariance de jauge

Le modèle standard s'appuie sur le concept de l'invariance de jauge et que à chaque interaction correspond une symétrie de jauge locale qui implique la conservation d'une quantité physique. Le fait qu'une théorie soit invariante (i.e. le Lagrangien ne change pas) sous une transformation implique l'existence d'une symétrie, et l'ensemble de toutes ces symétries forme un groupe de symétrie qui associé à chaque générateur un champ correspondant

appelé champ de jauge. Ces champs de jauge sont inclus dans le lagrangien pour assurer son invariance. Noter que si le groupe de symétrie est non-commutatif alors la théorie dite non-abélienne comme il est le cas de la théorie de Yang-Mills ($SU(3)$, $SU(2)$), à l'inverse le groupe de jauge $U(1)$ est abélien.

Dans ce qui suit, nous exposons brièvement le concept d'invariance de jauge pour les deux sous-groupes ($SU(2)_L$ et $U(1)_Y$) du SM.

Le groupe abélien $U(1)$

Le groupe de jauge $U(1)$ ne possède qu'un seul générateur, dans ce cas la grandeur physique conservée est la charge électrique. La dynamique des fermions libre est décrite par l'équation de Dirac dont le lagrangien libre prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\bar{\mathcal{D}} - m)\psi(x), \quad (2.12)$$

où $\psi(x)$ étant le champ correspondant au fermion de masse m et $\bar{\mathcal{D}} = \partial_\mu \gamma^\mu$, le lagrangien \mathcal{L}_0 est invariant sous la transformation de jauge globale suivante (i.e. qui sont les mêmes en tout point de l'espace-temps) :

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{iq\theta} \psi(x), \quad (2.13)$$

où q étant la charge électrique du champ ψ et θ un paramètre réel arbitraire, le courant et la charge sont donnés par :

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= q [\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)], \\ Q &= q \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x). \end{aligned} \quad (2.14)$$

À cette symétrie le courant et la charge sont conservés :

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0, \quad \dot{Q} = 0. \quad (2.15)$$

Lorsqu'on choisit une transformation qui dépend des coordonnées d'espace-temps $\theta \equiv \theta(x)$ (une symétrie de jauge locale) le lagrangien \mathcal{L}_0 n'est plus invariant sous la transformation suivante :

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{iq\theta(x)} \psi(x). \quad (2.16)$$

si l'on veut que notre lagrangien soit invariant par les transformations de la symétrie locale, il faut introduire un champ de jauge A^μ qui se transforme comme

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x), \quad (2.17)$$

avec la dérivée ordinaire ∂_μ devient une dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$, le lagrangien \mathcal{L} sera invariant et prendra la forme suivante :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + q\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu. \quad (2.18)$$

Il est à noter que l'expression de \mathcal{L} est invariante sous une transformation locale du groupe $U(1)$, mais elle ne décrit pas un système physique car il n'y a pas de termes de champ

libre A_μ , quand on ajoute ce terme le lagrangien appelé lagrangien de l'électrodynamique quantique \mathcal{L}^{QED} prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}^{\text{QED}} = \mathcal{L}_0 + q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

où le 1er terme décrit la dynamique du champ libre fermionique, le 2ème terme est le couplage, "l'interaction", entre le champ fermionique ψ et le champ bosonique A_μ et le 3ème terme est pour la dynamique du champ bosonique libre A_μ .

Le groupe non-abélien $SU(2)$

En raison des états de chiralité, les fermions gauches sensibles aux interactions faibles doivent être distingués des fermions droits qui ne le sont pas, ainsi chaque champ de fermions se décompose comme :

$$\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi + \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (2.20)$$

Pour préserver l'invariance de groupe $SU(2)$ les spineurs bidimensionnels sans masse, nous allons maintenant considérer le lagrangien libre des fermions (sans masse) :

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{f_L} + \mathcal{L}_{f_R}. \quad (2.21)$$

Afin de simplifier en prend le lagrangien décrivant la propagation des électrons et des neutrinos électroniques

$$\mathcal{L}_0 = i [\bar{\psi}^L(x)\partial\psi^L(x) + \bar{\psi}_e^R(x)\partial\psi_e^R(x) + \bar{\psi}_\nu^R(x)\partial\psi_\nu^R(x)], \quad (2.22)$$

où les transformations globales laissent \mathcal{L}_0 invariant, cette invariance implique la conservation du courant

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &\rightarrow \psi'_L(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\alpha}\vec{\tau}\right)\psi_L(x), \\ \psi_i^R(x) &\rightarrow \psi_i^{R'}(x) = \psi_i^R(x), \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont des paramètres réels et $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ les matrices de Pauli (2×2) qui vérifient les relations de commutation :

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k, \quad (2.24)$$

avec ε_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique. Lorsque l'on remplace la phase globale indépendante du point d'espace temps par une phase locale qui en dépend $\vec{\alpha}(x)$ on obtient une transformation locale de groupe $SU(2)$:

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &\rightarrow \psi'_L(x) = \exp\left(\frac{i}{2}g\vec{\alpha}(x)\vec{\tau}\right)\psi_L(x), \\ \psi_i^R(x) &\rightarrow \psi_i^{R'}(x) = \psi_i^R(x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

où g est la constante de couplage de $SU(2)$. L'invariance du lagrangien sous ces transformations de jauge locales va nous conduire à l'introduction de nouveaux champs de jauge (bosons de jauge) et va générer de nouvelles interactions, aussi nous remplaçons la dérivée ordinaire ∂_μ par la dérivée covariante D_μ :

$$\partial_\mu \psi^L(x) \longrightarrow D_\mu \psi^L(x) = \left[\partial^\mu - ig \frac{\vec{\tau} \vec{W}^\mu(x)}{2} \right] \psi^L(x), \quad (2.26)$$

et $\vec{W}^\mu(x) = (W_1^\mu(x), W_2^\mu(x), W_3^\mu(x))$, nous avons introduit trois champs de jauge car il y a trois charges conservées et le champ de jauge se transforme comme

$$W_\mu^a(x) \longrightarrow W_\mu'^a(x) = W_\mu^a(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x), \quad (2.27)$$

où le nouveau lagrangien deviendra invariant sous une symétrie locale du groupe $SU(2)$ et prendra la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + g \frac{\vec{\tau}}{2} \bar{\psi}^L(x) \gamma^\mu \vec{W}^\mu(x) \psi^L(x) \\ + \text{autres fermions} - \frac{1}{4} F_i^{\mu\nu} F_{i\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

avec $F_i^{\mu\nu}$ est le tenseur antisymétrique qui prend la forme suivante :

$$F_i^{\mu\nu} = \partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu + g \varepsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu. \quad (2.29)$$

On peut déduire de ce qui précède que, si l'on veut préserver l'invariance de la théorie électrofaible sous les transformations de jauge du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, il faut prendre toutes les masses des particules égales à zéro. En effet l'ajout d'un terme de masse pour les particules casse l'invariance de jauge et notre théorie n'est plus renormalisable, il faut donc introduire un nouveau mécanisme qui génère des masses aux différentes particules sans perdre la renormalisabilité de notre théorie unifiée.

2.1.3 La brisure spontanée de la symétrie

Le mécanisme de Higgs consiste en une brisure spontanée de la symétrie sans détruire la renormalisabilité de la théorie de jauge. Dans les théories des champs, une invariance pourrait être spontanément brisée si son état de vide n'est pas symétrique, le vide du système est l'état d'énergie le plus bas, et il est invariant par les symétries internes (rotation, translation... etc.). Ensuite, si ce vide a la symétrie du système, le système doit se déplacer à cet état de vide et la symétrie est brisée.

Considérons le lagrangien du champ de Higgs :

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi - V(\Phi), \quad (2.30)$$

avec $V(\Phi)$ est le potentiel scalaire est donné par :

$$V = \mu^2 \Phi^* \Phi + \lambda (\Phi^* \Phi)^2, \quad (2.31)$$

où μ^2 et λ sont des paramètres réels arbitraires, le champ scalaire complexe $\Phi(x)$ est représenté par deux degrés de liberté réels

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)). \quad (2.32)$$

Le lagrangien \mathcal{L} est invariant sous la transformation de phase globale $U(1)$

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = e^{i\theta} \Phi(x). \quad (2.33)$$

Dans la relation du potentiel (2.31) on choisit $\lambda > 0$, le minimum du potentiel scalaire vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi^*} = \mu^2 \Phi + 2\lambda \Phi^* \Phi^2 = 0, \\ \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi} = \mu^2 \Phi^* + 2\lambda \Phi^{*2} \Phi = 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

ici on identifie deux cas différents :

- Si $-\mu^2 > 0$: dans ce cas les équations (2.34) n'ont qu'une seule solution qui est $\Phi(x) = 0$ donc il n'y a pas de brisure spontanée de la symétrie $U(1)$.
- Si par contre $-\mu^2 < 0$: dans ce cas le potentiel a une valeur maximale à $\Phi(x) = 0$ et a aussi un ensemble de points qui constituent un cercle entier de minima

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} e^{i\alpha}, \quad \alpha \in [0, 2\pi] \quad (2.35)$$

où l'état avec la plus basse énergie, c'est à dire l'état fondamental, n'est pas unique, la brisure spontanée de la symétrie $U(1)$ apparaîtra lorsque l'on choisira une valeur particulière de α pour représenter le vide, on prendra $\alpha = 0$ soit :

$$\Phi(x) = \Phi_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (2.36)$$

Notez que Φ_0 est réelle pure et appelée la valeur moyenne du vide (vacuum expectation value (VeV)).

Redéfinissons le champ scalaire $\Phi(x)$ en séparant le minimum et les composantes réelles et imaginaires des écarts par rapport à ce minimum :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \sigma(x) + i\eta(x)], \quad (2.37)$$

à partir de nouveaux champs $(\sigma(x), \eta(x))$ le lagrangien s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma(x) \partial_\mu \sigma(x) + \frac{1}{2} \partial^\mu \eta(x) \partial_\mu \eta(x) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2(x) \\ & - \lambda v \sigma(x) [\sigma^2(x) + \eta^2(x)] - \frac{\lambda}{4} [\sigma^2(x) + \eta^2(x)]^2 + \text{cst}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

où les trois premiers termes composent le lagrangien libre \mathcal{L}_0 et les autres termes comme les termes d'interaction

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma(x) \partial_\mu \sigma(x) + \frac{1}{2} \partial^\mu \eta(x) \partial_\mu \eta(x) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2(x), \quad (2.39)$$

et le lagrangien \mathcal{L}_0 présente deux champs scalaires réels $(\sigma(x), \eta(x))$, les deux champs sont associés à des particules neutres de spin 0, le boson σ de masse $\sqrt{2\lambda v^2}$ et l'autre boson η reste sans masse, un tel boson scalaire de masse nulle est appelé boson de Goldstone.

Comme nous l'avons vu, un lagrangien peut être invariant par les transformations locales du groupe $U(1)$ en introduisant un champ de jauge A^μ et en utilisant la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ la relation (2.30) s'écrit comme suite :

$$\mathcal{L} = [D^\mu \Phi(x)]^* [D_\mu \Phi(x)] - V(\Phi^* \Phi) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

avec $B^{\mu\nu}$ est la courbure du champ du groupe $U(1)$

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu. \quad (2.41)$$

Ce lagrangien \mathcal{L} définit le modèle de Higgs et il est invariant sous les transformations locales du groupe $U(1)$. Le champ scalaire complexe $\Phi(x)$ et le champ de jauge B_μ (sans masse) se transforment comme :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\longrightarrow \Phi'(x) = e^{iq\theta(x)} \Phi(x) \\ B_\mu(x) &\longrightarrow B_\mu(x) - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x). \end{aligned} \quad (2.42)$$

La brisure spontanée de la symétrie se produit lorsque $\mu^2 < 0$ et que le vide est dégénéré ($\Phi_0 \neq 0$) donc $\Phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$, le champ scalaire réel $\Phi(x)$ prend la forme $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))$. En substituant $\Phi(x)$ dans le lagrangien (2.40), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [D_\mu^\mu (v + h(x))]^* [D_{\mu\mu} (v + h(x))] \\ &\quad - V((v + h(x))^2) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu h(x) \partial^\mu h(x) + \frac{1}{2} (qv)^2 B_\mu B^\mu + q^2 v B^\mu B_\mu h(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} q^2 B^\mu B_\mu h^2(x) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{2} h^2(x) - \frac{3}{2} \lambda v^2 h^2(x) \\ &\quad - (\mu^2 + \lambda v^2) v h(x) - \lambda v h^3(x) - \frac{\lambda}{4} h^4(x). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Le lagrangien (2.44) décrivant un champ scalaire réel $h(x)$ associé à un boson neutre de spin 0 de masse $m = \sqrt{2\lambda}v$ et un champ vectoriel réel $B_\mu(x)$ de masse $m = |qv|$, la présence de cette masse sans rupture de l'invariance de jauge du lagrangien est connue sous le nom de la brisure spontanée de la symétrie (SSB) ou le mécanisme de Higgs et le boson scalaire massif associé au champ $h(x)$ est appelé le boson de Higgs.

Après la brisure spontanée de la symétrie on obtient de nouvelles interactions, de même manière les fermions acquièrent ces masses à travers les interactions de Yukawa (2.11). En considérant uniquement les termes de deux bosons de jauge avec deux champs de Higgs (2.9) on obtient :

$$\mathcal{L}_m^{gauge} \equiv \frac{1}{4} \Phi^+ \left[-g_1 B_\mu + g_2 \vec{\tau} \vec{W}_\mu \right] \left[g_1 B_\mu + g_2 \vec{\tau} \vec{W}_\mu \right] \Phi, \quad (2.45)$$

où après brisure spontanée de la symétrie SSB ce terme donne les masses des bosons de jauge W_μ et B_μ mais ces champs ne sont pas des états propres de masse, les états propres de masse sont donnés par :

$$\mathcal{L}_m^{gauge} = \frac{g_2^2}{4} v^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{(g_2^2 + g_1^2)}{8} v^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2} \times 0 \times A_\mu A^\mu, \quad (2.46)$$

avec

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2)}{\sqrt{2}}, \\ W_\mu^3 &= \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu, \\ B_\mu &= -\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu, \end{aligned} \quad (2.47)$$

où θ_W est l'angle de mélange de Weinberg, les relations entre les constantes de couplage g_1 , g_2 la charge électrique et l'angle de mélange sont données par

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad g_1 = \frac{e}{\cos \theta_W}, \quad \text{et} \quad g_2 = \frac{e}{\sin \theta_W} \quad (2.48)$$

avec $\tan \theta_W = \frac{g_2}{g_1}$, où la mesure actuelle de $\sin^2 \theta_W = 0.23$, ainsi, les masses des bosons de jauge de SM prend les formes et les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} M_\gamma &= 0 \text{ GeV}, \quad M_{W^\pm} = \frac{g_2 v}{2} = 80.398 \text{ GeV}, \\ M_Z &= \frac{\sqrt{(g_2^2 + g_1^2)}}{2} v = 91.1876 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.2 Les problèmes du Modèle Standard

Ces dernières années, toutes les recherches en physique des hautes énergies s'attachent à remplacer le SM par une théorie capable de décrire la nature au-delà de l'échelle du TeV, il est important de savoir que jusqu'à présent le SM nous a offert certains accords entre données expérimentales et prédictions théoriques, parmi les nombreux succès incontestables rencontrés dans la construction du SM, on retrouve souvent la prédiction théorique de l'existence de particules avant leur découverte expérimentale, à titre d'exemple le quark charmé (c) a été introduit en 1970 par S. Glashow [19], il a ensuite été mis en évidence en 1974 par les équipes de S. Ting [20] à Brookhaven et de B. Richter à SLAC [21], de même les bosons de jauge intermédiaires de l'interaction faibles ont été prédits par le modèle de GSW mais la découverte de ces bosons n'est faite qu'en 1983 au CERN par C. Rubbia et S. van der Meer, d'ailleurs le mécanisme de Higgs prédit que la masse du boson neutre de l'interaction faible Z^0 doit être supérieure à celle des bosons W^\pm ce qui a été vérifié expérimentalement. Ou encore,

- le SM a été testé avec grande précision au LEP.
- la découverte du Top quark au Tevatron.
- la propriété de chiralité permet de traiter la partie gauche et droite de différentes manières.

- décrit les interactions d'échelle électrofaible.

Néanmoins, ce modèle standard de la physique des particules n'explique pas tout, il souffre de plusieurs problèmes comme les masses des neutrinos, le problème de hiérarchie des masses, pourquoi l'échelle de Planck est très grande par rapport à l'échelle électrofaible, le SM ne contient pas la gravité et d'autres problèmes liée à la cosmologie comme la matière sombre, l'énergie noire et l'asymétrie baryonique de notre univers (matière-antimatière).

2.2.1 Le problème de la gravité

Une théorie fondamentale doit décrire toutes les forces de la nature dans le même cadre, celui de la mécanique quantique, mais malheureusement l'interaction gravitationnelle n'est en effet pas décrite par des interactions de particules car la gravité était de nature purement géométrique, dans le cadre de la relativité générale, la force gravitationnelle est une force extrêmement faible à basses énergies (petites masses, grandes distances), c'est à l'échelle de Planck $M_P = (8\pi G)^{-\frac{1}{2}} = 10^{19}$ que les effets quantiques de la force de la gravitation deviennent importants, ainsi la distance à laquelle la gravitation devient comparable aux autres interactions est l'échelle de Planck $l_{pl} \sim 10^{-33} cm$ ou en d'autres termes une unification de 4 forces y compris la gravité quantique. De là, le graviton g prend une valeur du spin égale à 2 et les autres bosons de jauge (γ , W^\pm , Z) prennent la valeur du spin égale à 1, par conséquent, ces deux valeurs correspondent à des représentations différentes de l'algèbre de Poincaré où l'unification de champs de jauge de spin 2 et spin 1 au sein d'une même algèbre est interdite (la seule exception à ce théorème est l'algèbre de supersymétrie ou *SUSY*).

En outre, le SM semble contenir fondamentalement deux échelles d'énergie très différentes, l'échelle d'unification électrofaible $m_{EW} \sim 100 GeV$ et l'échelle de la masse de Planck $M_{Pl} \sim 10^{19} GeV$ soit $m_{EW} \sim 10^{-17} M_{Pl}$, ici la nature semble alors afficher une importante hiérarchie entre des masses très différentes.

2.2.2 Le problème de la hiérarchie de masse des fermions

Le SM est incapable d'expliquer l'existence des trois familles de fermions composées de deux quarks, un lepton chargé et un lepton neutre, ni de prédire leurs masses (leur hiérarchie de masse). Toutefois, chaque masse correspond à un couplage de Yukawa, un paramètre libre du SM. Dans le secteur fermionique, il n'y a pas de relation entre les différents couplages de Yukawa, contrairement au secteur des bosons de jauge où, à l'ordre des arbres, les masses des bosons W^\pm et Z^0 sont liées par la relation suivante :

$$\rho = \frac{M_{W^\pm}^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1. \quad (2.50)$$

la valeur expérimentale actuelle de ce paramètre appelée aussi la symétrie custodiale $SU(2)_L$ vaut 1.00038 ± 0.00020 [18]

2.2.3 Le problème de l'antimatière

Une autre difficulté du SM est de rendre compte de l'absence d'antimatière dans l'univers. Au moment de la baryogénèse, si le SM ne contient aucun terme violant la symétrie CP,

matière et antimatière sont produites en quantités égales qui vont s'annihiler et laisser place à un univers vide de matière. Or, il est bien connu que dans l'interaction faible la matrice CKM a une source de violation de la symétrie CP permettant ainsi la production de plus de matière que d'antimatière. Néanmoins, cette asymétrie est assez faible ($\sim 10^{-18} - 10^{-22}$) et ne permet donc pas d'expliquer la quantité de matière actuellement observée dans l'univers. Il est important de noter que la matière observée et qui constitue notre univers est de nature baryonique, et nous savons aussi que chaque particule possède une antiparticule, en réalité la matière baryonique observée est de l'ordre de 10^{-10} ce qui représente que $\sim 5\%$ de la totale des constituants de notre univers (i.e. matière sombre, énergie noire et matière baryonique)

$$2.6 \times 10^{-10} < \eta < 6.2 \times 10^{-10} \quad (2.51)$$

2.2.4 Le problème de la matière sombre

Les concepts d'énergie noire et de matière sombre ne trouvent pas d'explication dans le cadre du SM de la physique des particules. La présence de matière sombre invisible dans l'univers a été confirmée par l'astronome suisse Zwicky qui a observé que la valeur de la luminosité d'une galaxie spirale est très inférieure à sa masse dynamique, et que la masse $M(R)$ se concentre à l'intérieur de la sphère (R), si on utilise la loi de Newton

$$F_g = m \frac{v^2}{R} \quad \text{et} \quad F_g = G \frac{mM(R)}{R^2},$$

$$\text{donc } v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \quad (2.52)$$

avec l'estimation que la masse de la galaxie prend que la partie visible donc $M(R) = cst$, l'équation (2.52) devient

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\text{vis}}}{R}} \propto \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad (2.53)$$

cependant les astronomes observent que la vitesse de rotation du centre de la galaxie est d'environ $v \simeq 100$ à 200 Km.s^{-1} , et d'après les observations cosmologiques, la quantité totale de matière dans l'univers n'est pas seulement de nature baryonique i.e.

$$\Omega_M h^2 = 0.127_{-0.013}^{+0.007} \quad \text{et} \quad \Omega_B h^2 = 0.0223_{-0.0009}^{+0.0007} \quad (2.54)$$

$$\text{donc } (\Omega_M - \Omega_B) h^2 = 0.105_{-0.013}^{+0.007} \neq 0,$$

où les recherches dans l'astrophysique confirment l'existence d'une matière sombre qui n'est pas baryonique de densité

$$\Omega_{\text{CDM}} = 0.1131 \pm 0.0034. \quad (2.55)$$

Contrairement à la matière ordinaire, la matière sombre n'est pas sensible à la force électromagnétique, elle ne peut pas absorber, refléter ou émettre de la lumière, elle est donc très difficile à détecter, les meilleurs candidats pour la matière sombre sont des particules massives $m_\chi \geq 10^2 \text{ GeV}$, stables, électriquement neutres et interagissant faiblement avec la matière. Il existe trois types possibles de la matière sombre non-baryonique : la matière

sombre chaude (HDM), la matière sombre froide (CDM) et la matière sombre tiède (WDM). Celles-ci reposent sur la masse des particules composant la matière sombre et par conséquent, sur leur vitesse. Dans le cas de la matière sombre dite "chaude", formée par des particules relativistes légères, tandis que celles composant une matière sombre dite "froide" seraient plus massives, plus lentes et interagissent faiblement (WIMP), la matière sombre tiède formée par des particules ayant une vitesse moyenne, elle a des propriétés intermédiaires entre les deux types précédents. Les neutrinos du SM $\nu_{e,\tau,\mu}$ sont considérés comme des candidats potentiels pour la matière sombre chaude HDM car ils ne sont pas de nature baryonique et interagissent très peu avec les autres particules et les physiciens peuvent calculer la densité relique

$$\begin{aligned}\Omega_\nu h^2 &= \frac{m_\nu}{93 \text{ eV}}, & m_\nu &= \sum_{i=1}^3 m_{\nu_i}, \\ m_\nu &< 2.05 \text{ eV}, & \Omega_\nu h^2 &\lesssim 0.07,\end{aligned}\tag{2.56}$$

où la contribution des neutrinos à la densité relique est très faible, ils sont donc loin d'être un candidat favorable pour la matière sombre. Enfin, comme nous l'avons vu, le SM n'offre pas un bon candidat pour la matière sombre. Ceci nous amène à investiguer au-delà du SM, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Quelques modèles au-delà du modèle standard

Les problèmes de SM cités ci-dessus conduisent les chercheurs à croire qu'il existe un modèle plus complet au-delà du SM [22,23,24,25,26], en introduisant de nouvelles symétries dans le Lagrangien du SM ou en étendant le SM en y ajoutant de nouvelles particules. La première idée est bien sûr d'avoir une théorie complètement unifiée des interactions électro-faibles et fortes, on sait que le SM est basé sur le groupe de jauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ avec trois constantes de couplage différentes, il est naturel de dire que le SM décrit les interactions précédemment mentionnées mais séparément, l'idée de la théorie de la grande unification proposée en 1974 par les physiciens Howard Georgi et Sheldon Glaschow, cette théorie donne une description unifiée et caractérisée par une plus grande symétrie de jauge $SU(5)$ mais avec une seule constante de couplage unifiée. Malheureusement, les théories de la grande unification sont très difficiles à confirmer expérimentalement, car ils n'existent pas d'accélérateurs suffisamment puissants pour les tester.

Des tentatives Simultanées d'unification de la gravité avec les trois autres interactions fourniraient une théorie de tout "*Theory of Everything*". La plus importante de toutes est l'idée de supersymétrie (SUSY), étendant les symétries de l'espace-temps en introduisant une nouvelle symétrie liant les bosons et les fermions, on prédit donc l'existence de beaucoup plus de particules que celles du SM, en SUSY toutes les particules fermioniques ont des superpartenaires bosoniques et vice versa [27,28], donc le nombre de particules est devenu double, l'espace ordinaire devient une superspace et les champs ordinaires deviennent des superchamps [29].

SUSY possède de nombreux avantages en guise d'exemples :

- elle offre plusieurs candidats possibles pour expliquer la matière noire (comme le neutralino) ;
- il existe également une parité supplémentaire appelée la R-parité qui conduit à la stabilité de la particule supersymétrique la plus légère (LSP) et qui peut-être un bon candidat pour la matière noire si elle interagit faiblement ;
- étant donné l'existence de superpartenaire à l'ordre du TeV, l'unification devient possible à une échelle d'énergie d'ordre 10^{16} GeV (l'échelle de grande unification) ;
- aussi cette théorie donne une explication à l'origine de la brisure spontanée de symétrie électrofaible qui est introduite à la main dans le SM ;

– et enfin, la possibilité de l'existence de la supergravité.

Cependant, il reste encore des difficultés non résolues dans SUSY, à savoir : aucun superpartenaire des particules connues n'a encore été observé, si SUSY était exacte les partenaires supersymétriques devraient avoir les mêmes masses que les particules ordinaires du SM, mais ce n'est pas le cas, ce qui indique une brisure de la SUSY et des masses élevées pour ces particules.

Ainsi, le SM peut être étendu de plusieurs manières différentes, d'abord en ajoutant des nouveaux champs de fermions par ex. en ajoutant un champ de neutrinos de chiralité droite, ou en augmentant le secteur scalaire de Higgs à plusieurs représentations, ou encore par l'élargissement de la symétrie du groupe de jauge impliquant de nouvelles interactions et un nouveau spectre de particules. Ici dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la dernière manière de ces extensions du SM qui peut être achevée à une échelle du TeV, comme le modèle économique 331 avec neutrinos de chiralité droite [30, 31], le modèle minimal 331 avec seulement deux triplets de Higgs [32] et le modèle compact 341 [33].

3.1 Les Modèles 331

Comme indiqué plus haut, parmi les extensions du SM nous avons les modèles basés sur le groupe de jauge $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ [34, 35, 36, 37, 38, 39], les fermions sont regroupés en un triplet du groupe $SU(3)_L$ pour les particules de chiralité gauche et en un singlet de $SU(3)_L$ pour celles de chiralité droite, qui incluent généralement les particules du SM ainsi que des particules exotiques. Ces modèles ont des caractéristiques intéressantes, ils peuvent donner une explication partielle au problème du nombre de générations, et pourquoi une de génération de quarks doit être différente des deux autres, mais il est important d'insister sur le fait qu'il n'est pas possible d'adapter toutes les familles de quarks et de leptons du SM dans des multiplets ayant les mêmes nombres quantiques. Pour décrire le contenu en particules des modèles 331 nous commençons par définir l'opérateur charge électrique qui peut s'écrire comme une combinaison linéaire de générateurs diagonaux du groupe :

$$Q = T_3 + \beta T_8 + XI \quad (3.1)$$

avec T_3 , T_8 sont deux des huit générateurs du groupe $SU(3)$, I est la matrice unitaire et β est un paramètre qui caractérise la structure spécifique de la particule et les nombres quantiques du modèle. Notons que le groupe de jauge des modèles 331 subit une brisure spontanée de symétrie en deux étapes ($331 \rightarrow 321 \rightarrow 31$) jusqu'à la symétrie électromagnétique $U(1)_{em}$ comme le SM. Ces modèles montrent une phénoménologie riche qui inclut la présence de nouvelles particules (scalaires, quarks lourds et bosons de jauge ($W_4^\mu \dots W_8^\mu$ et B^μ)), ils offrent également la possibilité d'un mécanisme de seesaw pour générer des masses de neutrinos [40], aussi ils peuvent contenir des candidats de la matière noire [41, 42, 43], et enfin l'unification du couplage de jauge [44].

La discrimination entre les différents types des modèles 331 se résume au choix du paramètre β de l'équation (3.1), pour le choix de $\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ cela conduit à des charges électriques standard (i.e. pas de charges exotiques) [45, 46, 47], au contraire lorsque $\beta = \pm \sqrt{3}$ dans ce cas les modèles 331 contiennent des charges exotiques [34, 35, 36].

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons aux modèles avec $\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\beta = -\sqrt{3}$, le premier choix conduit au modèle économique 331 avec neutrinos de chiralité droite [30,31], et le deuxième choix correspond à la version minimale du modèle 331 avec seulement deux triplets de Higgs [32].

3.1.1 Le Modèle Économique 331 avec Neutrinos de chiralité Droite

Contenu en particules

Le Modèle Économique avec des neutrinos de chiralité droite (331 RHN) est basé sur la symétrie de jauge $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, dans ce cas son opérateur de charge électrique s'écrit comme

$$Q = T_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}T_8 + X \quad (3.2)$$

avec $T_i = \frac{\lambda_i}{2}$, $i = 1..8$, et λ_i sont les matrices de Gell-Mann. Ainsi, le secteur scalaire est minimal avec seulement deux triplets de Higgs. Le secteur de Higgs est très simple (d'où le nom économique du modèle) et se compose de trois scalaires physiques (deux neutres et un chargé), et huit bosons de Goldstone, le nombre nécessaire pour les bosons de jauge massifs [48]. Ce modèle contient toutes les particules du SM avec en plus de nouveaux bosons de jauge, des quarks lourds et deux triplets scalaires de Higgs [30,31].

Comme le SM, nous avons trois générations de fermions, dont la troisième composante dans les trois triplets de leptons est liée aux neutrinos de chiralité droite (RH) (composantes de champ des neutrinos), et dont la première génération de quarks est différente des deux autres [49]. Le secteur des fermions est représenté par :

$$\begin{aligned} \psi_{aL} &= \begin{pmatrix} \nu_{aL} \\ l_{aL} \\ \nu_{aR}^c \end{pmatrix} \sim (1, 3, 0), \quad a = 1, 2, 3, \\ Q_{1L} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ U \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 3, \frac{1}{3}\right), \quad \begin{cases} u_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ d_{1R} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ U_R \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \end{cases} \quad (3.3) \\ Q_{\alpha L} &= \begin{pmatrix} d_\alpha \\ -u_\alpha \\ D_\alpha \end{pmatrix}_L \sim (3, 3^*, 0), \quad \begin{cases} u_{\alpha R} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ d_{\alpha R} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ D_{\alpha R} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \end{cases} \quad \alpha = 2, 3 \end{aligned}$$

où ν_{aR}^c sont les neutrinos de chiralité droite, U_L le quark lourd up, $D_{\alpha L}$ les quarks lourds down. Les charges électriques des nouveaux quarks sont les mêmes que celles des quarks ordinaires ($q_U = \frac{2}{3}$, $q_{D_\alpha} = -\frac{1}{3}$) en raison du choix de $\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (pour éviter des charges exotiques).

Le secteur scalaire contient deux triplets scalaires de Higgs, à savoir

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^- \\ \chi_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 + iA_1 + u) \\ \chi_2^- \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(S_3 + iA_3 + \omega) \end{pmatrix} \sim \left(1, 3, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^0 \\ \phi_3^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(S_2 + iA_2 + v) \\ \phi_3^+ \end{pmatrix} \sim \left(1, 3, \frac{2}{3}\right), \quad (3.4)$$

et nous avons trois valeurs moyennes de vide (vacuum expectation value or VeVs) réelles et neutres, u , ω et v

$$\langle \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

avec S_1, S_2, S_3 représentent le CP-scalaire pair (even scalar), A_1, A_2, A_3 sont le CP-scalaire impair (odd scalar). La brisure spontanée de la symétrie se produit dans deux échelles d'énergie différentes :

* La première étape (1ère échelle d'énergie) génère des masses aux nouveaux bosons de jauge et aux quarks lourds :

$$SU(3)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{\omega} SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \quad (3.6)$$

* La seconde étape (2ème échelle d'énergie) génère des masses aux particules du SM :

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{v, u} U(1)_Q. \quad (3.7)$$

nous imposons que les valeurs moyennes de vide VeVs ω , v , u vérifient la condition $u^2, v^2 \ll \omega^2$. Ainsi, ce modèle contient trois types d'échelles d'énergie différentes : $\omega \sim O(\text{TeV})$, $v \approx 246 \text{ GeV}$ et $u \sim O(\text{GeV})$.

La SSB est effectuée dans les deux étapes pour le secteur scalaire et fermionique comme :

Le secteur scalaire Dans la 1ère étape ($331 \rightarrow 321$), la SSB est entraînée par le VeV ω , les triplets scalaires se décomposent en doublets et un singulet comme :

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^- \\ \chi_3^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\omega} \chi' = \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^- \end{pmatrix} \sim (1, 2, -1) \oplus \chi_3^0 \sim (1, 1, 0),$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^0 \\ \phi_3^+ \end{pmatrix} \xrightarrow{\omega} \phi' = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} \sim (1, 2, +1) \oplus \phi_3^+ \sim (1, 1, +1), \quad (3.8)$$

avec $\chi_3^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + S_3 + iA_3)$ est le champ de Higgs et ω est la partie scalaire du champ massif de Higgs responsable de la masse à ce niveau (TeV), les autres composantes (S_3 et A_3) sont des Goldstones qui demeurent sans masse.

Dans la 2ème étape ($321 \rightarrow U(1)_Q$), la SSB est pilotée par les VeVs (v, u), les parties constantes des champs de Higgs $\phi_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_2 + iA_2 + v)$ et $\chi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 + iA_1 + u)$ (c'est-à-dire u et v) sont les scalaires massifs de Higgs responsable de l'origine de la masse à l'échelle du GeV, les composantes restantes sont des Goldstones sans masse.

Le secteur fermionique Dans la 1^{ère} étape chaque triplet de fermions est divisé en un doublet et un singulet comme c'était le cas des triplets scalaires :

$$\begin{aligned}\psi_{aL} &= \begin{pmatrix} \nu_{aL} \\ l_{aL} \\ \nu_{aR}^c \end{pmatrix} \rightarrow \psi'_{aL} = \begin{pmatrix} \nu_a \\ l_a \end{pmatrix}_L \sim (1, 2, -1) \oplus \nu_{aR}^c \sim (1, 1, 0), \\ Q_{1L} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ U \end{pmatrix}_L \rightarrow Q'_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus U_R \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ Q_{\alpha L} &= \begin{pmatrix} d_\alpha \\ -u_\alpha \\ D_\alpha \end{pmatrix}_L \rightarrow Q'_{\alpha L} = \begin{pmatrix} d_\alpha \\ -u_\alpha \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus D_{\alpha R} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right),\end{aligned}\quad (3.9)$$

où ψ'_{aL} , Q'_{1L} , $Q'_{\alpha L}$ sont respectivement les leptons et les quarks ordinaires.

Le secteur de Higgs

Le potentiel scalaire de Higgs du modèle (331 RHN) est donné par

$$\begin{aligned}V(\chi, \phi) &= \mu_1^2 \chi^+ \chi + \mu_2^2 \phi^+ \phi \\ &\quad + \lambda_1 (\chi^+ \chi)^2 + \lambda_2 (\phi^+ \phi)^2 \\ &\quad + \lambda_3 (\chi^+ \chi) (\phi^+ \phi) + \lambda_4 (\chi^+ \phi) (\phi^+ \chi),\end{aligned}\quad (3.10)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ représentent les constants de couplage sans dimension, lorsque le potentiel est minimisé, les paramètres μ_1^2, μ_2^2 s'écrivent comme

$$\begin{aligned}\mu_1^2 &= -(\lambda_1(u^2 + v^2) + \lambda_3 v^2/2), \\ \mu_2^2 &= -(\lambda_2 v^2 + \lambda_3(u^2 + \omega^2)/2).\end{aligned}\quad (3.11)$$

et on peut écrire le potentiel scalaire qui dépend de VeVs sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}V(\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle \omega \rangle) &= \frac{\mu_1^2(u^2 + \omega^2)}{2} + \frac{\mu_2^2 v^2}{2} + \frac{\lambda_1 u^2 \omega^2}{2} \\ &\quad + \frac{\lambda_2 v^4}{4} + \frac{\lambda_3 v^2(\omega^2 + u^2)}{4} + \frac{\lambda_4(u^4 + \omega^4)}{4}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

La matrice de masse du CP-scalaire réel (even) dans la base (S_1, S_2, S_3) est donnée par

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 u^2 & \lambda_3 uv & 2\lambda_1 \omega u \\ \lambda_3 uv & 2\lambda_2 v^2 & \lambda_3 \omega v \\ 2\lambda_1 \omega u & \lambda_3 \omega v & 2\lambda_1 \omega^2 \end{pmatrix}\quad (3.13)$$

où les valeurs propres de (3.13) sont les masses des Higgs neutres H_1^0, H_2^0 et G_4

$$\begin{aligned}M_{H_1^0}^2 &= \lambda_2 v^2 + \lambda_1(u^2 + \omega^2) - \sqrt{\lambda_1^2 \omega^4 - 2\lambda_1 \lambda_2 \omega^2 v^2 + 2\lambda_1^2 \omega^2 u^2 + \lambda_2^2 v^4} \\ &\quad - 2\lambda_1 \lambda_2 u^2 v^2 + \lambda_1^2 u^4 + \lambda_3^2 (\omega^2 + u^2) v^2} \\ &\simeq \frac{(4\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2)}{2\lambda_1} v^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{H_2^0}^2 &= \lambda_2 v^2 + \lambda_1 (u^2 + \omega^2) + \sqrt{\lambda_1^2 \omega^4 - 2\lambda_1 \lambda_2 \omega^2 v^2 + 2\lambda_1^2 \omega^2 u^2 + \lambda_2^2 v^4} \\
&\quad - 2\lambda_1 \lambda_2 u^2 v^2 + \lambda_1^2 u^4 + \lambda_3^2 (\omega^2 + u^2) v^2} \\
&\simeq 2\lambda_1 \omega^2, \\
M_{G_4}^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Les éléments de la matrice de masse du CP-scalaire impair (odd) dans la base (A_1, A_2, A_3) sont égales à zéro, donc les Higgs sont sans masse

$$M_{G_1}^2 = M_{G_2}^2 = M_{G_3}^2 = 0. \tag{3.15}$$

Pour le Higgs chargé la matrice de masse dans la base $(\phi_1^+, \chi_2^-, \phi_3^+)$ s'écrit comme

$$\frac{1}{2} \lambda_4 \begin{pmatrix} u^2 & vu & u\omega \\ vu & v^2 & v\omega \\ u\omega & v\omega & \omega^2 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

où les valeurs propres de la matrice précédente sont les masses de G_5, G_6 et le Higgs chargé H^+ :

$$M_{G_5}^2 = M_{G_6}^2 = 0, \quad M_{H^+}^2 = \frac{\lambda_4}{2} (\omega^2 + v^2 + u^2). \tag{3.17}$$

Donc dans le modèle (331 RHN) nous avons deux Higgs neutres (H_1^0, H_2^0) et un Higgs chargé H_2^+ , les bosons de Goldstones (G_5, G_6) ont été absorbés par les bosons de jauge chargés (W^\pm, Y^\pm), les bosons de Goldstones (G_2, G_3) ont été absorbés par les bosons de jauge (Z, Z') et les bosons de Goldstones (G_1, G_4) ont été absorbés par le boson de jauge X^0 .

Le secteur fermionique

Le terme de Yukawa qui donne les masses des fermions prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{\text{LNC}} + \mathcal{L}_{\text{LNV}}, \tag{3.18}$$

où la relation (3.18) contient deux parties, \mathcal{L}_{LNC} et \mathcal{L}_{LNV} indiquant respectivement que le nombre leptonique est conservé pour la première et qu'il est violé pour la deuxième, les relations suivantes donnent la forme de chaque terme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{LNC}} &= h^U \bar{Q}_{1L} \chi U_R + h_{\alpha\beta}^D \bar{Q}_{\alpha L} \chi^* D_{\beta R} + h_a^d \bar{Q}_{1L} \phi d_{\alpha R} + h_{\alpha a}^u \bar{Q}_{\alpha L} \phi^* u_{aR} \\
&\quad + h_{ab}^l \bar{\psi}_{aL} \phi l_{bR} + h_{ab}^\nu \varepsilon_{pmn} \left(\bar{\psi}_{aL}^c \right)_p (\psi_{bL})_m (\phi)_n + \text{h.c.}, \\
\mathcal{L}_{\text{LNV}} &= s_a^u \bar{Q}_{1L} \chi u_{aR} + s_{\alpha a}^d \bar{Q}_{\alpha L} \chi^* d_{aR} + s_\alpha^D \bar{Q}_{1L} \phi D_{\alpha R} + s_\alpha^U \bar{Q}_{\alpha L} \phi^* U_R + \text{h.c.},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

avec $a = 1, 2, 3$ et $\alpha = 2, 3$, pour le premier terme \mathcal{L}_{LNC} on a n, m, p représentant les indices du groupe $SU(3)_L$, $b = 1, 2, 3$, $\beta = 2, 3$ et $h^U, h_{\alpha\beta}^D, h_a^d, h_{\alpha a}^u, h_{ab}^l, h_{ab}^\nu$ qui sont les couplages de Yukawa du quark lourd up, les quarks lourds down et les quarks ordinaires, mais les deux derniers sont les couplages des leptons chargés et les neutrinos, il est également important de noter que les quarks lourds portent un nombre leptonique (leptoquarks) et que les couplages de Yukawa de \mathcal{L}_{LNC} possèdent une symétrie leptonique L [50, 51]. Le tableau suivant exprime seulement les champs des particules qui ont un nombre leptonique non nul :

Tableau 2 : Les particules ont un nombre leptonique.

Champ	ν_{aL}	$l_{aL,R}$	ν_{aR}^c	χ_1^0	χ_2^-	ϕ_3^+	$U_{L,R}$	$U_{\alpha L,R}$
L	1	1	-1	2	2	-2	-2	2

Donc on peut construire une nouvelle charge leptonique \mathcal{L} qui est conservée. Notons aussi que la charge baryonique \mathcal{B} est conservée. Pour le terme \mathcal{L}_{LNV} , les couplages de Yukawa des quarks ordinaires (up, down) et les quarks lourds (Up, Down) sont respectivement s_a^u , $s_{\alpha a}^d$, s_α^U , s_α^D , ce terme conserve \mathcal{B} et viole \mathcal{L} ce qui explique que ces interactions sont plus petites que les premiers [52], alors on peut écrire :

$$s_a^u, s_{\alpha a}^d, s_\alpha^U, s_\alpha^D \ll h^U, h_{\alpha\beta}^D, h_a^d, h_{\alpha a}^u, h_{ab}^l, h_{ab}^\nu. \quad (3.20)$$

où dans ce qui suit nous intéressons seulement au terme \mathcal{L}_{LNC} et on remarque que les masses des quarks lourds sont proportionnelles à ω , ils participent à la première étape de la brisure de symétrie, comme dans le SM, les masses des quarks ordinaires sont proportionnelles à v , ils participent à la deuxième étape de la brisure de symétrie et on considère seulement la masse de quark top :

$$\begin{aligned} m_U &= \frac{h^U \omega}{\sqrt{2}}, & m_{D_2} &= \frac{h_{22}^D \omega}{\sqrt{2}}, \\ m_{D_3} &= \frac{h_{33}^D \omega}{\sqrt{2}}, & m_t &= \frac{h^u v}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le tableau suivant contient la formulation des masses des quarks de ce modèle $m^2(\omega, v, u) = m^2(\omega) + m^2(v) + m^2(u)$:

Tableau 3 : la formulation des masses des quarks.

Quarks	$m^2(\omega, v, u)$	$m^2(\omega)$	$m^2(v)$	$m^2(u)$
m_U^2	$\frac{1}{2}h^{U^2}\omega^2$	$\frac{1}{2}h^{U^2}\omega^2$	0	0
$m_{D_2}^2$	$\frac{1}{2}h_{22}^{D^2}\omega^2$	$\frac{1}{2}h_{22}^{D^2}\omega^2$	0	0
$m_{D_3}^2$	$\frac{1}{2}h_{33}^{D^2}\omega^2$	$\frac{1}{2}h_{33}^{D^2}\omega^2$	0	0
m_t^2	$\frac{1}{2}h^{u^2}v^2$	0	$(171, 2 \text{ GeV})^2$	0

Le secteur de Jauge

Les termes de jauge sont contenus dans l'expression $\mathcal{L}_{\text{GB}}^{\text{mass}}$ qui s'écrit comme

$$\mathcal{L}_{\text{GB}}^{\text{mass}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi), \quad (3.22)$$

où D_μ la dérivée covariante est donnée par

$$D_\mu = \partial_\mu - igT_i W_{i\mu} - ig_x T_9 X B_\mu = \partial_\mu - iP_\mu \quad (3.23)$$

avec

$$P_\mu = \frac{g}{2} \begin{pmatrix} W_{3\mu} & & & & & & & & \\ +\sqrt{\frac{2}{3}}tXB_\mu & W_{1\mu}+iW_{2\mu} & & & W_{4\mu}-iW_{5\mu} & & & & \\ & -W_{3\mu}+\frac{W_{8\mu}}{\sqrt{3}} & & & & & W_{6\mu}-iW_{7\mu} & & \\ & +\sqrt{\frac{2}{3}}tXB_\mu & & & & & & & \\ W_{4\mu}+iW_{5\mu} & W_{6\mu}+iW_{7\mu} & & & -\frac{2W_{8\mu}}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}tXB_\mu & & & & \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

où g, g_x sont les constantes de couplage de jauge des groupes $SU(3)_L$ et $U(1)_X$, W_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) et B_μ sont les champs de jauge, $T_9 = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{diag}(1, 1, 1)$, avec $X = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{g_x}{g}$.

Pour les bosons de jauge chargés dans les bases (W_1^μ, W_6^μ) , (W_2^μ, W_7^μ) on a :

$$\frac{g^2}{2} \begin{pmatrix} v^2 + u^2 & \omega u \\ \omega u & v^2 + \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{g^2}{2} \begin{pmatrix} v^2 + u^2 & -\omega u \\ -\omega u & v^2 + \omega^2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

et les masses sont données par

$$M_{W^\pm}^2 = \frac{g^2 v^2}{4}, \quad M_{Y^\pm}^2 = \frac{g^2 (u^2 + v^2 + \omega^2)}{4}. \quad (3.26)$$

Pour les bosons de jauge neutres dans la base $(W_3^\mu, W_4^\mu, W_8^\mu, B^\mu)$, nous avons la matrice de masse suivante :

$$\frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & \omega u & \frac{\sqrt{3}(u^2 - v^2)}{3} & \frac{\sqrt{2}t(u^2 - v^2)}{3} \\ \omega u & u^2 + \omega^2 & -\frac{\sqrt{3}\omega u}{3} & \frac{2\sqrt{2}t\omega u}{3} \\ \frac{\sqrt{3}(u^2 - v^2)}{3} & -\frac{\sqrt{3}\omega u}{3} & \frac{1(u^2 + 4\omega^2 + v^2)}{3} & \frac{\sqrt{6}t(u^2 - 2\omega^2 + v^2)}{3} \\ \frac{\sqrt{2}t(u^2 - v^2)}{3} & \frac{2\sqrt{2}t\omega u}{3} & \frac{\sqrt{6}t(u^2 - 2\omega^2 + v^2)}{9} & \frac{4t^2(u^2 + \omega^2 + v^2)}{18} \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

et on obtient les masses de γ , X^0 , Z et Z'

$$\begin{aligned} M_\gamma^2 &= 0, & M_Z^2 &= \frac{g^2 v^2}{4 \cos^2 \theta_W}, \\ M_{X^0}^2 &= \frac{g^2 (u^2 + \omega^2)}{4}, \\ M_{Z'}^2 &= \frac{g^2 \omega^2 \cos^2 \theta_W}{(3 - 4 \sin^2 \theta_W)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

où θ_W est l'angle de Weinberg, W_4 et W_5 ont les mêmes masses car

$$X_\mu^0 = \frac{W_{4\mu} - iW_{5\mu}}{\sqrt{2}}. \quad (3.29)$$

Le tableau suivant contient la formulation des masses des bosons de jauge et les bosons de Higgs de ce modèle $m^2(\omega, v, u) = m^2(\omega) + m^2(v) + m^2(u)$:

Tableau 4 : la formulation des masses des bosons.

Bosons	$m^2(\omega, v, u)$	$m^2(\omega)$	$m^2(v)$	$m^2(u)$
$m_{W^\pm}^2$	$\frac{g^2 v^2}{4}$	0	$(80, 40 \text{ GeV})^2$	0
$m_{Y^\pm}^2$	$\frac{g^2 (u^2 + v^2 + \omega^2)}{4}$	$\frac{g^2 \omega^2}{4}$	$\frac{g^2 v^2}{4}$	$\frac{g^2 u^2}{4}$
$m_{X^0}^2$	$\frac{g^2 (u^2 + \omega^2)}{4}$	$\frac{g^2 \omega^2}{4}$	0	$\frac{g^2 u^2}{4}$
m_Z^2	$\frac{g^2 v^2}{4 \cos^2 \theta_W}$	0	$(91, 68 \text{ GeV})^2$	0
$m_{Z'}^2$	$\frac{g^2 \cos^2 \theta_W \omega^2}{(3 - 4 \sin^2 \theta_W)}$	$\frac{g^2 \cos^2 \theta_W \omega^2}{(3 - 4 \sin^2 \theta_W)}$	0	0
$m_{H^0}^2$	$\frac{(4\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2) v^2}{2\lambda_1}$	0	$(125 \text{ GeV})^2$	0
$m_{H_1^0}^2$	$2\lambda_1 \omega^2$	$2\lambda_1 \omega^2$	0	0
$m_{H_2^+}^2$	$\frac{\lambda_4 (\omega^2 + v^2 + u^2)}{2}$	$\frac{\lambda_4 \omega^2}{2}$	$\frac{\lambda_4 v^2}{2}$	$\frac{\lambda_4 u^2}{2}$

Par le tableau (4) on montre comment les bosons de jauge du modèle (331RHN) prennent ses masses au cours des deux étapes de SSB :

* Les particules Z' et H_2^0 ne participent qu'à la première étape seulement et c'est parce que $m_{Z', H_1^0}^2 \propto \omega^2$, le boson neutre Z' prend sa masse en absorbant le boson de Goldstone A_3 de triplet χ et interagit avec le champ scalaire H_2^0 qui est un Higgs massif.

* Les particules du SM W^\pm , Z et H_1^0 n'interviennent que dans la 2^{ème} étape ($m_{W^\pm, Z, H_1^0}^2 \propto v^2$), pour obtenir leurs masses les bosons W^\pm et Z absorbent deux Goldstones ϕ_1^+ et A_2 et en interagissant avec le deuxième champ scalaire H_1^0 qui est le boson de jauge du SM.

* Les bosons Y^\pm , X^0 , H^\pm sont impliqués dans les deux étapes de transition de phase à cause de $m_{Y^\pm, H^\pm}^2 \propto (\omega^2 + v^2 + u^2)$ et $m_{X^0}^2 \propto (\omega^2 + u^2)$, il convient de noter que quand l'univers atteint l'échelle de ($\omega \sim 2$ TeV) les bosons Y^\pm et X^0 sont absorbés respectivement, les Goldstones ϕ_3^+ et S_1 en interagissant avec le Higgs H_2^0 obtiennent la 1^{ère} partie de leurs masses. Après lorsque l'univers atteint l'énergie d'échelle GeV, les bosons de jauge Y^\pm et X^0 obtiennent la seconde partie de leurs masses par absorber respectivement deux autres Goldstones χ_2^- et A_1 , alors que le champ scalaire H^\pm est massif et demeure dans le spectre physique.

3.1.2 Le Modèle Minimal 331 avec seulement deux triplets de Higgs

Contenu en particules

Le modèle minimal 331 avec seulement deux triplets de Higgs (reduced minimal 331 model RM331) est basé sur le groupe de jauge $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ [32], l'opérateur de charge électrique dans ce cas s'écrit comme

$$Q = T_3 - \sqrt{3}T_8 + N \quad (3.30)$$

où ($T_i = \frac{\lambda_i}{2}$, $i = 1..8$), λ_i les matrices de Gell-Mann, N le nombre quantique du groupe $U(1)$. Ce modèle contient les particules du SM, les triplets de leptons incluent les leptons ordinaires du SM, la présence des nouveaux bosons de jauge, des quarks exotiques et deux triplets scalaires de Higgs, le spectre scalaire physique qui est composé de deux Higgs neutres et un Higgs double chargé. Les trois générations des fermions représentent par les triples :

$$f_L = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \\ l^c \end{pmatrix}_L \sim (1, 3, 0), \quad l = e, \mu, \tau,$$

$$Q_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ J_1 \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 3, \frac{2}{3}\right), \quad \begin{cases} u_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ d_{1R} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ J_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{5}{3}\right), \end{cases} \quad (3.31)$$

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} d_i \\ -u_i \\ J_i \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 3^*, -\frac{1}{3}\right), \quad \begin{cases} u_{iR} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ d_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ J_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{4}{3}\right), \end{cases} \quad i = 2, 3$$

avec J_1, J_i sont les quarks exotiques de charge exotiques ($q_{J_1} = \frac{5}{3}, q_{J_i} = -\frac{4}{3}$). Le secteur scalaire de Higgs contient deux triplets [53]

$$\begin{aligned}\rho &= \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\rho + R_\rho + iI_\rho) \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \sim (1, 3, 1), \\ \chi &= \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\chi + R_\chi + iI_\chi) \end{pmatrix} \sim (1, 3, -1),\end{aligned}\quad (3.32)$$

avec R_ρ, R_χ sont les CP-scalaires réels, I_ρ, I_χ sont les CP-scalaires impairs, les deux triples de Higgs développent deux valeurs moyennes de vide neutres VeVs :

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix}\quad (3.33)$$

où la brisure spontanée de la symétrie du groupe de jauge du modèle RM331 se déroule en deux étapes :

* La première étape :

$$SU(3)_L \otimes U(1)_N \xrightarrow{v_\chi} SU(2)_L \otimes U(1)_Y, \quad (3.34)$$

et donne des masses aux bosons de jauge lourds et aux quarks exotiques.

* La seconde étape :

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{v_\rho} U(1)_{QED},$$

et donne les masses aux particules du SM, donc ce modèle contient deux échelles d'énergie différentes $v_\chi \sim O(\text{TeV})$ et $v_\rho = 246 \text{ GeV}$.

La brisure de symétrie se produit en deux étapes qui se différencient par leur échelle, pour le secteur scalaire et les fermions :

Le secteur scalaire La 1^{ère} étape ($331 \rightarrow 321$), la SSB est promue par le VeV v_χ , les triplets scalaires sont divisés en doublets et un singulet

$$\begin{aligned}\chi &= \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_\chi} \chi' = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \end{pmatrix} \sim (1, 2, -3) \oplus \chi^0 \sim (1, 1, 0), \\ \rho &= \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \xrightarrow{v_\chi} \rho' = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \end{pmatrix} \sim (1, 2, +1) \oplus \rho^{++} \sim (1, 1, +2),\end{aligned}\quad (3.35)$$

avec $\chi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\chi + R_\chi + iI_\chi)$ est le champ de Higgs, la partie constante (v_χ) est le scalaire de Higgs massif qui est responsable de la masse à cet échelle (TeV), les autres composants sont des bosons de Goldstones sans masse.

Pour la seconde étape de SSB, la partie constante du champ de Higgs $\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\rho + R_\rho + iI_\rho)$ est le scalaire de Higgs massif qui est responsable de l'origine de la masse à ce niveau d'énergie (GeV) (le Higgs du SM).

Le secteur fermionique Comme dans le cas des triplets scalaires, le triplet fermionique se décompose en doublet et un singlet :

$$\begin{aligned}
 f_L &= \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \\ l^c \end{pmatrix}_L \rightarrow f'_L = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \sim (1, 2, -1) \oplus l_L^c \sim (1, 1, 1), \\
 Q_{1L} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ J_1 \end{pmatrix}_L \rightarrow Q'_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus J_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{5}{3}\right), \\
 Q_{iL} &= \begin{pmatrix} d_i \\ -u_i \\ J_i \end{pmatrix}_L \rightarrow Q'_{iL} = \begin{pmatrix} d_i \\ -u_i \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus J_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{4}{3}\right),
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

où f'_L , Q'_{1L} et Q'_{iL} sont les leptons et les quarks du SM.

Le secteur de Higgs

Le potentiel scalaire [53] est représenté par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 V(\chi, \rho) &= \mu_1^2 \rho^+ \rho + \mu_2^2 \chi^+ \chi \\
 &\quad + \lambda_1 (\rho^+ \rho)^2 + \lambda_2 (\chi^+ \chi)^2 \\
 &\quad + \lambda_3 (\rho^+ \rho)(\chi^+ \chi) + \lambda_4 (\rho^+ \chi)(\chi^+ \rho),
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont les constantes de couplage sans dimension, μ_1^2, μ_2^2 sont les paramètres de dimension de masse, lorsque le potentiel est minimisé on a

$$\begin{aligned}
 \mu_1^2 + \lambda_1 v_\rho^2 + \lambda_3 v_\chi^2 / 2 &= 0, \\
 \mu_2^2 + \lambda_2 v_\chi^2 + \lambda_3 v_\rho^2 / 2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

On utilise les relations [3.32] pour obtenir le potentiel scalaire [3.37] en fonction des VeVs

$$\begin{aligned}
 V(\langle \chi \rangle, \langle \rho \rangle) &= \frac{\mu_1^2 v_\rho^2}{2} + \frac{\mu_2^2 v_\chi^2}{2} \\
 &\quad + \frac{\lambda_1 v_\rho^4}{4} + \frac{\lambda_2 v_\chi^4}{4} + \frac{\lambda_3 v_\rho^2 v_\chi^2}{4}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

La matrice de masse du CP-pair (even) (2×2) dans la base (R_ρ, R_χ) est écrit comme

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 v_\rho^2 & \lambda_3 v_\rho v_\chi \\ \lambda_3 v_\rho v_\chi & 2\lambda_2 v_\chi^2 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

où les valeurs propres sont les masses des Higgs neutres H_1^0 et H_2^0

$$M_{H_1^0}^2 = \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_3^2}{4\lambda_2}\right)v_\rho^2, \quad M_{H_2^0}^2 = \lambda_2 v_\chi^2 + \frac{\lambda_3^2}{4\lambda_2}v_\rho^2. \tag{3.41}$$

Dans la base (I_ρ, I_χ) tous éléments de la matrice de masse de CP-impair (odd) sont nuls

$$M_{I_\rho}^2 = M_{I_\chi}^2 = 0. \quad (3.42)$$

Pour les bosons de Higgs chargés on a deux bases :

(1) Dans la base $(\chi^{\pm\pm}, \rho^{\pm\pm})$ on a la matrice

$$\frac{\lambda_4}{2} \begin{pmatrix} v_\rho^2 & v_\rho v_\chi \\ v_\rho v_\chi & v_\chi^2 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

avec les valeurs propres

$$M_{h^{\pm\pm}}^2 = 0, \quad M_{\tilde{h}^{\pm\pm}}^2 = \frac{1}{2}\lambda_4 (v_\rho^2 + v_\chi^2). \quad (3.44)$$

(2) Dans la base (ρ^\pm, χ^\pm) on a

$$M_{\rho^\pm}^2 = 0, \quad M_{\chi^\pm}^2 = 0. \quad (3.45)$$

Alors le modèle (RM331) contient deux Higgs neutres (H_1^0, H_2^0) et un Higgs chargé ($h^{\pm\pm}$), les bosons de Goldstones ($\rho^\pm, \chi^\pm, \tilde{h}^{\pm\pm}$) ont été absorbés par les bosons de jauge chargés (W^\pm, V^\pm et $U^{\pm\pm}$), les bosons de Goldstones (I_ρ, I_χ) ont été absorbés par les bosons de jauge neutres Z et Z' .

Le secteur fermionique

Le terme de Yukawa qui donne les masses aux quarks ordinaires et exotiques prend la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^{\text{quarks}} = & \lambda_{1a}^d \bar{Q}_{1L} \rho d_{aR} + \frac{\lambda_{ia}^d}{\Lambda} \varepsilon_{nmp} (\bar{Q}_{iLn} \rho_m \chi_p) d_{aR} \\ & + \lambda_{ia}^u \bar{Q}_{iL} \rho^* u_{aR} + \frac{\lambda_{1a}^u}{\Lambda} \varepsilon_{nmp} (\bar{Q}_{1Ln} \rho_m^* \chi_p^*) u_{aR} \\ & + \lambda_{11}^J \bar{Q}_{1L} \chi J_{1R} + \lambda_{ij}^J \bar{Q}_{iL} \chi^* J_{jR} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

où $a = 1, 2, 3$, $i, j = 2, 3$ et n, m, p représentent les indices du groupe $SU(3)_L$, les couplages de Yukawa des quarks sont $\lambda_{1a}^d, \lambda_{ia}^d, \lambda_{ia}^u, \lambda_{1a}^u, \lambda_{11}^J, \lambda_{ij}^J$.

La matrice de masse des quarks dans la base (J_1, J_2, J_3) est donnée par :

$$\frac{v_\chi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_{11}^J & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22}^J & \lambda_{23}^J \\ 0 & \lambda_{32}^J & \lambda_{33}^J \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

où les valeurs propres sont les masses des quarks exotiques J_1, J_2 et J_3 :

$$m_{J_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{11}^J v_\chi, \quad m_{J_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{22}^J v_\chi, \quad m_{J_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{33}^J v_\chi. \quad (3.48)$$

L'échelle d'énergie la plus élevée où le modèle s'avère perturbativement faible et à peu près $\Lambda = 4 - 5 \text{ TeV}$ [54], pour simplifier on suppose que $\Lambda \approx v_\chi$ et dans ce cas les matrices de

masse des quarks (up et down) dans les bases (u_1, u_2, u_3) , (d_1, d_2, d_3) prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{v_\rho}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_{11}^u & \lambda_{12}^u & \lambda_{13}^u \\ -\lambda_{21}^u & -\lambda_{22}^u & -\lambda_{23}^u \\ -\lambda_{31}^u & -\lambda_{32}^u & -\lambda_{33}^u \end{pmatrix}, \\ & \frac{v_\rho}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_{11}^d & \lambda_{12}^d & \lambda_{13}^d \\ \lambda_{21}^d & \lambda_{22}^d & \lambda_{23}^d \\ \lambda_{31}^d & \lambda_{32}^d & \lambda_{33}^d \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

où les valeurs propres sont les masses des quarks u, c, t, d, s, b

$$\begin{aligned} m_u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{11}^u v_\rho, \quad m_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{22}^u v_\rho, \quad m_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{33}^u v_\rho, \\ m_d &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{11}^d v_\rho, \quad m_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{22}^d v_\rho, \quad m_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{33}^d v_\rho. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Le terme qui donne les masses aux leptons est

$$\mathcal{L}_Y^{\text{leptons}} = \frac{k_l}{\Lambda} (\bar{f}_L^c \rho^*) (\chi^+ f_L) + \text{h.c.}, \quad (3.51)$$

avec k_l les couplages des leptons, l'expression de la masse d'un lepton chargé comme $m_l = k_l v_\rho / 2$ mais il est important de noter que les masses des leptons chargés, les quarks ordinaires (u, c, d, s, b) et les neutrinos prennent des petites valeurs par rapport aux masses des quarks exotiques et le quark top. Alors on considère que le secteur fermionique contient les quarks exotiques J_1, J_2, J_3 et le top (t).

Le tableau suivant contient la formulation des masses des quarks $m^2(v_\rho, v_\chi) = m^2(v_\rho) + m^2(v_\chi)$:

Tableau 5 : la formulation des masses des quarks

Quarks	$m^2(v_\rho, v_\chi)$	$m^2(v_\rho)$	$m^2(v_\chi)$
$m_{J_1}^2$	$\frac{\lambda_{11}^{J_1^2} v_\chi^2}{2}$	0	$\frac{\lambda_{11}^{J_1^2} v_\chi^2}{2}$
$m_{J_2}^2$	$\frac{\lambda_{22}^{J_2^2} v_\chi^2}{2}$	0	$\frac{\lambda_{22}^{J_2^2} v_\chi^2}{2}$
$m_{J_3}^2$	$\frac{\lambda_{33}^{J_3^2} v_\chi^2}{2}$	0	$\frac{\lambda_{33}^{J_3^2} v_\chi^2}{2}$
m_t^2	$\frac{\lambda_{11}^{t^2} v_\rho^2}{2}$	$(171, 2\text{GeV})^2$	0

Le secteur de Jauge

La densité lagrangienne qui donne les masses des bosons de jauge

$$\mathcal{L} = (D_\mu \chi)^+ (D^\mu \chi) + (D_\mu \rho)^+ (D^\mu \rho), \quad (3.52)$$

où D_μ est la dérivée covariante qui est donnée par :

$$D_\mu = \partial_\mu - i(g\lambda^a W_\mu^a / 2 + g_N N B_\mu) = \partial_\mu - iP_\mu \quad (3.53)$$

avec

$$P_\mu = \frac{g}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + 2\frac{g_N}{g}B_\mu & W_\mu^1 + iW_\mu^2 & W_\mu^4 - iW_\mu^5 \\ W_\mu^1 - iW_\mu^2 & -W_\mu^3 + \frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + 2\frac{g_N}{g}B_\mu & W_\mu^6 + iW_\mu^7 \\ W_\mu^4 + iW_\mu^5 & W_\mu^6 - iW_\mu^7 & \frac{-2W_\mu^8}{\sqrt{3}} + 2\frac{g_N}{g}B_\mu \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

où λ^a sont les matrices de Gell-Mann, N est le nombre quantique du groupe $U(1)_N$, supposant que $N = 1$ et g, g_N sont les couplages de jauge de $SU(3)_L, U(1)_N$ respectivement et $W_\mu^a (a = 1 \dots 8), B_\mu$ sont les champs de jauge.

La matrice de masse dans la base $(W_\mu^3, W_\mu^8, B_\mu)$ prend la forme suivante :

$$\frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 & -\frac{\sqrt{3}v_\rho^2}{3} & -2\frac{g_N}{g}v_\rho^2 \\ -\frac{\sqrt{3}v_\rho^2}{3} & \frac{1(v_\rho^2 + 4v_\chi^2)}{3} & 2\sqrt{3}\frac{g_N}{g}\frac{(v_\rho^2 - 2v_\chi^2)}{3} \\ -2\frac{g_N}{g}v_\rho^2 & 2\sqrt{3}\frac{g_N}{g}\frac{(v_\rho^2 - 2v_\chi^2)}{3} & 4\frac{g_N^2}{g^2}(v_\rho^2 + v_\chi^2) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

où les valeurs propres sont les masses des bosons de jauge neutres γ, Z, Z'

$$M_\gamma^2 = 0, \quad M_Z^2 = \frac{g^2 v_\rho^2}{4 \cos^2 \theta_W},$$

$$M_{Z'}^2 = \frac{g^2 (v_\chi^2 \cos^2 \theta_W)}{(3 - 4 \sin^2 \theta_W)}. \quad (3.56)$$

Pour les bosons de jauge chargés les matrices de masse dans les bases $(W_\mu^1, W_\mu^2), (W_\mu^4, W_\mu^5), (W_\mu^6, W_\mu^7)$ sont respectivement données par :

$$\frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 & 0 \\ 0 & v_\rho^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_\chi^2 & 0 \\ 0 & v_\chi^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} (v_\rho^2 + v_\chi^2) & 0 \\ 0 & (v_\rho^2 + v_\chi^2) \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

et les valeurs propres sont les masses de $W^\pm, V^\pm, U^{\pm\pm}$

$$M_{W^\pm}^2 = \frac{g^2 v_\rho^2}{4}, \quad M_{V^\pm}^2 = \frac{g^2 v_\chi^2}{4},$$

$$M_{U^{\pm\pm}}^2 = \frac{g^2 (v_\rho^2 + v_\chi^2)}{4}. \quad (3.58)$$

Le tableau suivant contient la formulation des masses des bosons de jauge et de Higgs $m^2(v_\rho, v_\chi) = m^2(v_\rho) + m^2(v_\chi)$:

Tableau 6 : formulation des bosons de jauge et des masses de Higgs

Bosons	$m^2(v_\rho, v_\chi)$	$m^2(v_\rho)$	$m^2(v_\chi)$
$m_{W^\pm}^2$	$\frac{g^2 v_\rho^2}{4}$	$(80, 40\text{GeV})^2$	0
$m_{V^\pm}^2$	$\frac{g^2 v_\chi^2}{4}$	0	$\frac{g^2 v_\chi^2}{4}$
$m_{U^{\pm\pm}}^2$	$\frac{g^2(v_\rho^2 + v_\chi^2)}{4}$	$\frac{g^2 v_\rho^2}{4}$	$\frac{g^2 v_\chi^2}{4}$
m_Z^2	$\frac{g^2 v_\rho^2}{4c^2}$	$(91, 68 \text{ GeV})^2$	0
$m_{Z'}^2$	$\frac{g^2 c_W^2 v_\chi^2}{(3-4s_W^2)}$	0	$\frac{g^2 c_W^2 v_\chi^2}{(3-4s_W^2)}$
$m_{H_1^0}^2$	$\lambda_1 v_\rho^2 - \frac{\lambda_3^2 v_\rho^2}{4\lambda_2}$	$(125 \text{ GeV})^2$	0
$m_{H_2^0}^2$	$\lambda_2 v_\chi^2 + \frac{\lambda_3^2 v_\rho^2}{4\lambda_2}$	$\frac{\lambda_3^2 v_\rho^2}{4\lambda_2}$	$\lambda_2 v_\chi^2$
$m_{h^{\pm\pm}}^2$	$\frac{\lambda_4(v_\rho^2 + v_\chi^2)}{2}$	$\frac{\lambda_4 v_\rho^2}{2}$	$\frac{\lambda_4 v_\chi^2}{2}$

À partir du tableau (6), on montre comment les bosons de jauge acquèrent leurs masses lors de la brisure de symétrie :

* Les bosons Z' , V^\pm et H_2^0 ne contribuent qu'à la première étape de SSB à cause de la dépendance de ses masses au VeV v_χ où Z' et V^\pm absorbent respectivement les bosons de Goldstones I_χ , χ^\pm de triplet χ et interagissent avec le champ scalaire H_2^0 qui est le Higgs massif.

* Les particules du SM (W^\pm , Z , H_1^0) n'apparaissent que dans la seconde étape de SSB car ($m_{W^\pm, Z, H_1^0}^2 \propto v_\rho^2$), les bosons W^\pm , Z obtiennent leurs masses par l'absorption des Goldstones (ρ^\pm , I_ρ) et en interagissant avec le champ de Higgs H_1^0 .

* Les expressions des masses des bosons doublement chargés $U^{\pm\pm}$, $h^{\pm\pm}$ sont liées aux VeVs (v_χ , v_ρ) ou $m_{U^{\pm\pm}, h^{\pm\pm}}^2 \propto (v_\chi^2 + v_\rho^2)$. Donc, ces bosons participent aux deux étapes de SSB, il faut noter que lorsque l'univers obtient l'échelle d'énergie ($v_\chi \sim 2 \text{ TeV}$) le boson $U^{\pm\pm}$ absorbe le Goldstones $\chi^{\pm\pm}$ et interagit avec le Higgs H_2^0 , il acquit la première partie de sa masse. Enfin, lorsque le niveau d'énergie de l'univers tombe à ($v_\rho = 246 \text{ GeV}$) le boson $U^{\pm\pm}$ absorbe le Goldstone $\rho^{\pm\pm}$ et interagit avec le Higgs du SM (H_1^0), ainsi il obtient la 2^{ème} partie de la masse, le champ scalaire $h^{\pm\pm}$ est massif et reste dans le spectre physique du modèle.

3.2 Le Modèle Compact 341

Dans la littérature, de nombreux modèles basés sur le groupe 341 de jauge avec ou sans les charges exotiques [34, 55, 38], ces modèles ont été étudiés et classés selon l'existence ou non des fermions avec les charges exotiques, la structure de potentiel scalaire et le nombre de quatuors scalaires de Higgs ou la brisure spontanée de la symétrie de groupe de jauge. Les modèles 341 possibles sont paramétrés par les différentes valeurs des deux paramètres β et γ [55, 56] dans l'opérateur de charge qui est défini comme une combinaison linéaire des générateurs diagonaux du groupe de jauge et prend au cas général l'expression suivante :

$$Q = T_3 + \beta T_8 + \gamma T_{15} + X I_{4 \times 4}, \quad (3.59)$$

où T_3 , T_8 , T_{15} sont les générateurs diagonaux et prend la forme $T_i = \frac{\lambda_i}{2}$, λ_i qui sont les matrices de Gell-Mann de groupe $SU(4)$, $I_{4 \times 4} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ est la matrice unitaire diagonale et X un nombre quantique définissant la charge associée au groupe $U(1)_X$.

Dans notre travail, on se concentre sur le modèle compact 341 avec les charges exotiques et les paramètres $\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $\gamma = \frac{-4}{\sqrt{6}}$ où nous avons réduit le secteur scalaire à trois quatuors scalaires seulement [33]. Parmi les plus intrigantes caractéristiques de ce modèle, l'existence automatique de boson de Higgs du SM, la capacité de contenir un candidat pour la matière noire froide CDM [57, 58], en plus des nouvelles particules qui devraient apparaître avec une signature distincte près de l'échelle électrofaible comme les scalaires et les vecteurs doublement chargés, certaines d'entre eux portant deux unités de nombre leptoniques appelés bileptons. Dans ce modèle, il existe aussi un pôle de Landau.

Donc il est peut-être intéressant de remarquer que le modèle recèle une phénoménologie très riche.

3.2.1 Contenu en particules

Le Modèle Compact 341 est décrit par le groupe de jauge $SU(3)_C \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_X$ où C , L et X représentent respectivement la couleur, la chiralité gauche et l'hypercharge du groupe $U(1)_X$, il contient toutes les particules de modèle standard SM avec de nouveaux bosons de jauge, des quarks exotiques et trois quatuors scalaires de Higgs [33]. Comme le SM, nous avons trois générations des fermions représentés par les quatuors :

$$L_{aL} = \begin{pmatrix} \nu_a \\ l_a \\ \nu_a^c \\ l_a^c \end{pmatrix}_L \sim (1, 4, 0), \quad a = e, \mu, \tau,$$

$$Q_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ U_1 \\ J_1 \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 4, \frac{2}{3}\right), \quad \begin{cases} u_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ d_{1R} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ U_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ J_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{5}{3}\right), \end{cases} \quad (3.60)$$

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} d_i \\ u_i \\ D_i \\ J_i \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 4^*, -\frac{1}{3}\right), \quad \begin{cases} u_{iR} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ d_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ D_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ J_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{4}{3}\right), \end{cases} \quad i = 2, 3$$

avec u_1 , d_1 sont les quarks up et down, U_1 , J_1 , J_i , D_i sont les nouveaux quarks exotiques avec les charges électriques $2/3$, $5/3$, $-4/3$, $-1/3$ respectivement. On rappelle que la charge X de $U(1)$ est liée à la charge électrique des fermions par la relation :

$$Q_e = (X, X - 1, X, X + 1) \quad (3.61)$$

Le secteur scalaire contient trois quatuors scalaires de Higgs

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^0 \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (R_{\eta_1} + iI_{\eta_1}) \\ \eta_1^- \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v_\eta + R_{\eta_2} + iI_{\eta_2}) \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} \sim (1, 4, 0),$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho^0 \\ \rho_2^+ \\ \rho^{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\rho + R_\rho + iI_\rho) \\ \rho_2^+ \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \sim (1, 4, 1), \quad (3.62)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi^{--} \\ \chi_2^- \\ \chi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi^{--} \\ \chi_2^- \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\chi + R_\chi + iI_\chi) \end{pmatrix} \sim (1, 4, -1).$$

Les composantes des quatuors développent trois valeurs moyennes de vides neutres (VeVs)

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \rho \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

avec $R_{\eta_1}, R_{\eta_2}, R_\rho, R_\chi$ sont les scalaires CP-pairs (réels), $I_{\eta_1}, I_{\eta_2}, I_\rho, I_\chi$ sont les scalaires CP-impairs (imaginaires), la raison pour laquelle on choisit le quatuor η pour développer VeV seulement dans la 3^{ème} composante est liée au fait que nous ne voulons pas de mélange entre les quarks ordinaires et exotiques dans le Lagrangien de Yukawa, qui garantit le mélange CKM habituel dans le secteur des quarks. De manière équivalente, ceci est également possible si l'on ajoute une nouvelle symétrie discrète Z_3 au modèle. Cette dernière permettra également un scénario approprié pour générer des masses par les opérateurs effectifs.

La brisure spontanée de la symétrie a lieu en trois étapes différentes :

* La première étape :

$$SU(4)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\chi} SU(3)_L \otimes U(1)_X. \quad (3.64)$$

* La seconde étape :

$$SU(3)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\eta} SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \quad (3.65)$$

* La troisième étape :

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{v_\rho} U(1)_{QED}. \quad (3.66)$$

on a les contraintes suivantes sur les VeVs v_χ, v_η, v_ρ :

$$v_\chi \approx v_\eta \gg v_\rho. \quad (3.67)$$

Ainsi, dans ce modèle, il existe deux échelles bien différentes des valeurs moyennes de vide : $v_\chi \sim O(\text{TeV})$, $v_\eta \sim O(\text{TeV})$ et $v_\rho \approx 246 \text{ GeV}$. La relation entre les constants de couplage [33] (g_L, g_χ) des groupes de jauge ($SU(4)_L, U(1)_X$) est :

$$\frac{g_\chi^2}{g_L^2} = \frac{s_w^2}{1 - 4s_w^2} \quad (3.68)$$

la relation (3.68) présente un pôle de Landau lorsque $s_w^2 = \frac{1}{4}$ où $g_\chi \rightarrow \infty$ (vient infini et g_L fini) [59,60]. L'existence d'un pôle de Landau pour le modèle compact 341 à une échelle d'environ 5 TeV implique une coupure naturelle pour le modèle où l'on peut contourner le problème de hiérarchie existant depuis longtemps.

Il est important de savoir comment la SSB est effectuée dans les différentes étapes pour le secteur scalaire et les fermions :

Le secteur scalaire

(1) Dans la 1^{ère} étape (341 \rightarrow 331) la SSB est entraînée par le VeV v_χ , les quatuors scalaires se décomposent en triplets et un singulet comme :

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi_2^- \\ \chi_3^- \\ \chi^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_\chi} \chi' = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi_2^- \\ \chi_3^- \end{pmatrix} \sim \left(1, 3, -\frac{4}{3}\right) \oplus \chi^0 \sim (1, 1, 0). \quad (3.69)$$

Ici la partie constante du champ de Higgs $\chi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\chi + R_\chi + iI_\chi)$ (c'est-à-dire v_χ) est le scalaire de Higgs massif qui est responsable de l'origine de la masse à ce niveau (TeV), les autres composantes (R_χ et I_χ) sont des Goldstones qui demeurent sans masse.

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^0 \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} \xrightarrow{v_\chi} \eta' = \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^0 \end{pmatrix} \sim \left(1, 3, -\frac{1}{3}\right) \oplus \eta_2^+ \sim (1, 1, +1),$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho^0 \\ \rho_2^+ \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \xrightarrow{v_\chi} \rho' = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho^0 \\ \rho_2^+ \end{pmatrix} \sim \left(1, 3, +\frac{2}{3}\right) \oplus \rho^{++} \sim (1, 1, +2). \quad (3.70)$$

(2) Dans la 2^{ème} étape (331 \rightarrow 321) la SSB est pilotée par le VeV v_η comme :

$$\chi' = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi_2^- \\ \chi_3^- \end{pmatrix} \xrightarrow{v_\eta} \chi'' = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi_2^- \end{pmatrix} \sim (1, 2, -3) \oplus \chi_3^- \sim (1, 1, -2),$$

$$\eta' = \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_\eta} \eta'' = \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_1^- \end{pmatrix} \sim (1, 2, -1) \oplus \eta_2^0 \sim (1, 1, 0), \quad (3.71)$$

$$\rho' = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho^0 \\ \rho_2^+ \end{pmatrix} \xrightarrow{v_\eta} \rho'' = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho^0 \end{pmatrix} \sim (1, 2, 1) \oplus \rho_2^+ \sim (1, 1, +2).$$

Dans ce cas, la partie constante du champ de Higgs $\eta_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\eta + R_{\eta_2} + iI_{\eta_2})$ (c'est-à-dire v_η) est le scalaire massif de Higgs qui est responsable de l'origine de la masse à ce niveau, les autres composants sont des bosons de Goldstones sans masse et ρ'' représente le doublet de Higgs du SM.

Le secteur fermionique

(1) Dans la 1^{ère} étape les quatuors des fermions se décomposent en triplets et un singulet comme :

$$\begin{aligned}
L_{aL} &= \begin{pmatrix} \nu_a \\ l_a \\ \nu_a^c \\ l_a^c \end{pmatrix}_L \rightarrow L'_{aL} = \begin{pmatrix} \nu_a \\ l_a \\ \nu_a^c \end{pmatrix}_L \sim \left(1, 3, -\frac{1}{3}\right) \oplus l_{aL}^c \sim (1, 1, 1), \\
Q_{1L} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ U_1 \\ J_1 \end{pmatrix}_L \rightarrow Q'_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ U_1 \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 3, \frac{1}{3}\right) \oplus J_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{5}{3}\right), \\
Q_{iL} &= \begin{pmatrix} d_i \\ u_i \\ D_i \\ J_i \end{pmatrix}_L \rightarrow Q'_{iL} = \begin{pmatrix} d_i \\ u_i \\ D_i \end{pmatrix}_L \sim (3, 3^*, 0) \oplus J_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{4}{3}\right).
\end{aligned} \tag{3.72}$$

(2) Dans la seconde étape les triplets des leptons et des quarks se décomposent en doublets et un singulet comme :

$$\begin{aligned}
L'_{aL} &= \begin{pmatrix} \nu_a \\ l_a \\ \nu_a^c \end{pmatrix}_L \rightarrow L''_{aL} = \begin{pmatrix} \nu_a \\ l_a \end{pmatrix}_L \sim (1, 2, -1) \oplus \nu_{aL}^c \sim (1, 1, 0), \\
Q'_{1L} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ U_1 \end{pmatrix}_L \rightarrow Q''_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus U_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\
Q'_{iL} &= \begin{pmatrix} d_i \\ u_i \\ D_i \end{pmatrix}_L \rightarrow Q''_{iL} = \begin{pmatrix} d_i \\ u_i \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus D_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right),
\end{aligned} \tag{3.73}$$

avec L''_{aL} , Q''_{1L} et Q''_{iL} sont respectivement les leptons et les quarks ordinaires du SM.

3.2.2 Le secteur de Higgs

Le potentiel scalaire du modèle compact 341 [33] est donné par

$$\begin{aligned}
V(\eta, \rho, \chi) &= \mu_\eta^2 \eta^+ \eta + \mu_\rho^2 \rho^+ \rho + \mu_\chi^2 \chi^+ \chi \\
&\quad + \lambda_1 (\eta^+ \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^+ \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^+ \chi)^2 \\
&\quad + \lambda_4 (\eta^+ \eta) (\rho^+ \rho) + \lambda_5 (\eta^+ \eta) (\chi^+ \chi) + \lambda_6 (\rho^+ \rho) (\chi^+ \chi) \\
&\quad + \lambda_7 (\rho^+ \eta) (\eta^+ \rho) + \lambda_8 (\chi^+ \eta) (\eta^+ \chi) + \lambda_9 (\rho^+ \chi) (\chi^+ \rho),
\end{aligned} \tag{3.74}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9$ sont les constantes de couplage sans dimension, $\mu_{\eta, \rho, \chi}^2$ sont les paramètres de dimension de masse satisfaisant les relations suivantes lorsque le potentiel est minimisé. Les conditions du tadpole sont :

$$\begin{aligned}\mu_\eta^2 + \lambda_1 v_\eta^2 + (\lambda_4 v_\rho^2 + \lambda_5 v_\chi^2)/2 &= 0, \\ \mu_\rho^2 + \lambda_2 v_\rho^2 + (\lambda_4 v_\eta^2 + \lambda_6 v_\chi^2)/2 &= 0, \\ \mu_\chi^2 + \lambda_3 v_\chi^2 + (\lambda_5 v_\eta^2 + \lambda_6 v_\rho^2)/2 &= 0.\end{aligned}\tag{3.75}$$

Le potentiel scalaire dépendant des VeVs (3.74) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}V(\langle \eta \rangle, \langle \rho \rangle, \langle \chi \rangle) &= \frac{\mu_\eta^2 v_\eta^2}{2} + \frac{\mu_\rho^2 v_\rho^2}{2} + \frac{\mu_\chi^2 v_\chi^2}{2} \\ &+ \frac{\lambda_1 v_\eta^4}{4} + \frac{\lambda_2 v_\rho^4}{4} + \frac{\lambda_3 v_\chi^4}{4} \\ &+ \frac{\lambda_4 v_\eta^2 v_\rho^2}{4} + \frac{\lambda_5 v_\eta^2 v_\chi^2}{4} + \frac{\lambda_6 v_\chi^2 v_\rho^2}{4}.\end{aligned}\tag{3.76}$$

La matrice de masse du CP-pair (even) dans la base $(R_{\eta_1}, R_{\eta_2}, R_\rho, R_\chi)$ est

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 v_\eta^2 & \lambda_4 v_\eta v_\rho & \lambda_5 v_\eta v_\chi \\ 0 & \lambda_4 v_\eta v_\rho & 2\lambda_2 v_\rho^2 & \lambda_6 v_\rho v_\chi \\ 0 & \lambda_5 v_\eta v_\chi & \lambda_6 v_\rho v_\chi & 2\lambda_3 v_\chi^2 \end{pmatrix}\tag{3.77}$$

Les valeurs propres de la matrice (3.77) correspondent aux masses physiques des trois Higgs neutres H_1^0, H_2^0, H_3^0

$$\begin{aligned}M_{H_1^0}^2 &= \left(\lambda_2 + \frac{[\lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_6 (\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_4 \lambda_5)]}{\lambda_5^2 - 4\lambda_1 \lambda_3} \right) v_\rho^2, \\ M_{H_2^0}^2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) v_\eta^2, \\ M_{H_3^0}^2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) v_\chi^2, \\ M_{G_1}^2 &= 0.\end{aligned}\tag{3.78}$$

Les éléments CP-impair de la matrice de masse (4×4) dans la base $(I_{\eta_1}, I_{\eta_2}, I_\rho, I_\chi)$ sont nuls et donc, les Higgs neutres CP-impair sont tous sans masse.

$$M_{I_{\eta_1}}^2 = M_{I_{\eta_2}}^2 = 0, \quad M_{I_\rho}^2 = M_{I_\chi}^2 = 0.\tag{3.79}$$

Pour les Higgs simplement chargés les matrices de masse peuvent être exprimées selon trois bases :

(1) Dans la base (η_1^\pm, ρ_2^\pm) nous avons la matrice

$$\frac{1}{2} \lambda_7 \begin{pmatrix} v_\eta^2 & v_\rho v_\eta \\ v_\rho v_\eta & v_\rho^2 \end{pmatrix}\tag{3.80}$$

avec les valeurs propres

$$M_{G_1^\pm}^2 = 0, \quad M_{h_1^\pm}^2 = \frac{1}{2}\lambda_7(v_\eta^2 + v_\rho^2). \quad (3.81)$$

(2) Dans la base (η_2^\pm, χ_2^\pm) on a

$$\frac{1}{2}\lambda_8 \begin{pmatrix} v_\eta^2 & v_\chi v_\eta \\ v_\chi v_\eta & v_\chi^2 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

avec les valeurs propres

$$M_{G_2^\pm}^2 = 0, \quad M_{h_2^\pm}^2 = \frac{1}{2}\lambda_8(v_\eta^2 + v_\chi^2). \quad (3.83)$$

(3) Dans la base (ρ_1^\pm, χ_1^\pm) on a

$$M_{\rho_1^\pm}^2 = 0, \quad M_{\chi_1^\pm}^2 = 0. \quad (3.84)$$

Pour le Higgs doublement chargé, nous avons la matrice de masse dans la base $(\chi^{\pm\pm}, \rho^{\pm\pm})$

$$\frac{1}{2}\lambda_9 \begin{pmatrix} v_\chi^2 & v_\chi v_\rho \\ v_\chi v_\rho & v_\rho^2 \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

avec les valeurs propres

$$M_{G^{\pm\pm}}^2 = 0, \quad M_{h^{\pm\pm}}^2 = \frac{1}{2}\lambda_9(v_\rho^2 + v_\chi^2). \quad (3.86)$$

Ainsi, dans ce modèle, nous avons trois Higgs neutres (H_1^0 le Higgs de SM, H_2^0, H_3^0) et trois Higgs chargés ($h_1^\pm, h_2^\pm, h^{\pm\pm}$), le boson de Goldstone $G^{\pm\pm}$ a été absorbé par le boson de jauge $V^{\pm\pm}$, les bosons de Goldstone $\rho_2^\pm, G_2^\pm, G_1^\pm, \chi_2^\pm$ ont été absorbés par les bosons de jauge $W^\pm, K_1^\pm, Y^\pm, X^\pm$ et les bosons de Goldstone $I_\rho, I_{\eta_1}, I_{\eta_2}, I_\chi, G_1$ ont été absorbés par les bosons de jauge neutres Z, Z', Z'', K, K' .

3.2.3 Le secteur fermionique

Pour obtenir les masses de fermions, nous avons besoin des interactions de Yukawa données par la densité du lagrangien [33] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \lambda_{11}^J \bar{Q}_{1L} \chi J_{1R} + \lambda_{ij}^J \bar{Q}_{iL} \chi^* J_{jR} + \lambda_{11}^U \bar{Q}_{1L} \eta U_{1R} \\ & + \lambda_{ij}^D \bar{Q}_{iL} \eta^* D_{jR} + \lambda_{1a}^d \bar{Q}_{1L} \rho d_{aR} + \lambda_{ia}^u \bar{Q}_{iL} \rho^* u_{aR} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

avec $\lambda_{11}^J, \lambda_{ij}^J, \lambda_{11}^U, \lambda_{ij}^D$ et $\lambda_{1a}^d, \lambda_{ia}^u$ sont les couplages de Yukawa des quarks exotiques et les quarks ordinaires respectivement ($i, j = 2, 3$ et $a = 1, 2, 3$). Comme dans le SM les masses des quarks ordinaires sont proportionnelles à VeV v_ρ , ils prennent leur masse après la troisième étape de brisure de symétrie $SU(2)_L \rightarrow U(1)_Q$. Dans la suite, nous considérons seulement la masse du quark top parce que les contributions des quarks (u, s et b) sont très petites :

$$m_t = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{33}^u v_\rho. \quad (3.88)$$

Les masses des quarks exotiques J_1, J_2, J_3 sont proportionnelles au VeV v_χ , ils prennent leur masse après la première étape de brisure de symétrie $SU(4)_L \rightarrow SU(3)_L$, la masse du quark J_1 est :

$$m_{J_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{11}^J v_\chi, \quad (3.89)$$

la matrice de masse des quarks J_2, J_3 dans la base (J_2, J_3) est

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_\chi \begin{pmatrix} \lambda_{22}^J & \lambda_{23}^J \\ \lambda_{32}^J & \lambda_{33}^J \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

avec les valeurs propres

$$m_{J_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{22}^J v_\chi, \quad m_{J_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{33}^J v_\chi. \quad (3.91)$$

Les masses des quarks exotiques U_1, D_2, D_3 sont proportionnelles à v_η et prennent leur masse après la seconde étape de brisure de symétrie $SU(3)_L \rightarrow SU(2)_L$, la masse du quark U_1 est :

$$m_{U_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{11}^U v_\eta, \quad (3.92)$$

la matrice de masse des quarks D_2, D_3 dans la base (D_2, D_3) est

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_\eta \begin{pmatrix} \lambda_{22}^D & \lambda_{23}^D \\ \lambda_{32}^D & \lambda_{33}^D \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

avec les valeurs propres

$$m_{D_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{22}^D v_\eta, \quad m_{D_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{33}^D v_\eta. \quad (3.94)$$

Le tableau suivant contient la formulation des masses des quarks de ce modèle $m^2(v_\eta, v_\rho, v_\chi) = m^2(v_\chi) + m^2(v_\eta) + m^2(v_\rho)$:

Tableau 7 : la formulation des masses des quarks.

Quarks	$m^2(v_\eta, v_\rho, v_\chi)$	$m^2(v_\eta)$	$m^2(v_\rho)$	$m^2(v_\chi)$
$m_{D_2}^2$	$\frac{1}{2} \lambda_{22}^{D^2} v_\eta^2$	$\frac{1}{2} \lambda_{22}^{D^2} v_\eta^2$	0	0
$m_{D_3}^2$	$\frac{1}{2} \lambda_{33}^{D^2} v_\eta^2$	$\frac{1}{2} \lambda_{33}^{D^2} v_\eta^2$	0	0
$m_{U_1}^2$	$\frac{1}{2} \lambda_{11}^{U^2} v_\eta^2$	$\frac{1}{2} \lambda_{11}^{U^2} v_\eta^2$	0	0
$m_{J_2}^2$	$\frac{1}{2} \lambda_{22}^{J^2} v_\chi^2$	0	0	$\frac{1}{2} \lambda_{22}^{J^2} v_\chi^2$
$m_{J_3}^2$	$\frac{1}{2} \lambda_{33}^{J^2} v_\chi^2$	0	0	$\frac{1}{2} \lambda_{33}^{J^2} v_\chi^2$
$m_{J_1}^2$	$\frac{1}{2} \lambda_{11}^{J^2} v_\chi^2$	0	0	$\frac{1}{2} \lambda_{11}^{J^2} v_\chi^2$
m_t^2	$\frac{1}{2} \lambda_{33}^{u^2} v_\rho^2$	0	$(171, 2 \text{ GeV})^2$	0

3.2.4 Le secteur de Jauge

En considérant la densité lagrangienne \mathcal{L}^B des bosons de jauge

$$\mathcal{L}^B = (D_\mu \chi)^+ (D^\mu \chi) + (D_\mu \eta)^+ (D^\mu \eta) + (D_\mu \rho)^+ (D^\mu \rho), \quad (3.95)$$

où D_μ la dérivée covariante est donnée par

$$D^\mu = \partial^\mu - \frac{ig_L}{2} \lambda_\alpha A_\alpha^\mu - ig_x X B^\mu = \partial^\mu - iP^\mu \quad (3.96)$$

et

$$P^\mu = \frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} W_3^\mu + \frac{W_8^\mu}{\sqrt{3}} + \frac{W_{15}^\mu}{\sqrt{6}} + 2\frac{g_x}{g_L} X B^\mu & (W_1^\mu + iW_2^\mu) & (W_6^\mu + iW_7^\mu) & (W_{13}^\mu + iW_{14}^\mu) \\ (W_1^\mu - iW_2^\mu) & -W_3^\mu + \frac{W_8^\mu}{\sqrt{3}} + \frac{W_{15}^\mu}{\sqrt{6}} + 2\frac{g_x}{g_L} X B^\mu & (W_4^\mu + iW_5^\mu) & (W_9^\mu + iW_{10}^\mu) \\ (W_6^\mu - iW_7^\mu) & (W_4^\mu - iW_5^\mu) & -2\frac{W_8^\mu}{\sqrt{3}} + \frac{W_{15}^\mu}{\sqrt{6}} + 2\frac{g_x}{g_L} X B^\mu & (W_{11}^\mu + iW_{12}^\mu) \\ (W_{13}^\mu - iW_{14}^\mu) & (W_9^\mu - iW_{10}^\mu) & (W_{11}^\mu - iW_{12}^\mu) & -3\frac{W_{15}^\mu}{\sqrt{6}} + 2\frac{g_x}{g_L} X B^\mu \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

avec g_L , g_x sont les constantes de couplage de jauge des groupes $SU(4)_L$ et $U(1)_X$ respectivement W_i^μ ($i = 1, \dots, 15$) et B_μ sont les champs de jauge.

Pour les bosons de jauge chargés, dans les bases (W_1^μ, W_2^μ) , (W_4^μ, W_5^μ) , (W_6^μ, W_7^μ) , (W_9^μ, W_{10}^μ) , (W_{11}^μ, W_{12}^μ) , (W_{13}^μ, W_{14}^μ) on a les matrices de masse suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 & 0 \\ 0 & v_\rho^2 \end{pmatrix}, & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} (v_\rho^2 + v_\eta^2) & 0 \\ 0 & (v_\rho^2 + v_\eta^2) \end{pmatrix}, \\ & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\eta^2 & 0 \\ 0 & v_\eta^2 \end{pmatrix}, & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 + v_\chi^2 & 0 \\ 0 & v_\rho^2 + v_\chi^2 \end{pmatrix}, \\ & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\eta^2 + v_\chi^2 & 0 \\ 0 & v_\eta^2 + v_\chi^2 \end{pmatrix}, & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\chi^2 & 0 \\ 0 & v_\chi^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Pour obtenir les masses :

$$\begin{aligned} M_{W^\pm}^2 &= \frac{g_L^2}{4} v_\rho^2, & M_{\kappa_1^\pm}^2 &= \frac{g_L^2}{4} (v_\rho^2 + v_\eta^2), \\ M_{K, K'}^2 &= \frac{g_L^2}{4} v_\eta^2, & M_{Y^\pm}^2 &= \frac{g_L^2}{4} (v_\rho^2 + v_\chi^2), \\ M_{V^{\pm\pm}}^2 &= \frac{g_L^2}{4} (v_\eta^2 + v_\chi^2), & M_{X^\pm}^2 &= \frac{g_L^2}{4} v_\chi^2, \end{aligned} \quad (3.99)$$

Pour les bosons neutres dans la base $(W_3^\mu, W_8^\mu, W_{15}^\mu, B^\mu)$, nous avons la matrice de masse suivante :

$$\frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 & \frac{-v_\rho^2}{\sqrt{3}} & \frac{-v_\rho^2}{\sqrt{6}} & -2X \frac{g_x}{g_L} v_\rho^2 \\ \frac{-v_\rho^2}{\sqrt{3}} & \frac{(4v_\eta^2+v_\rho^2)}{3} & \frac{(v_\rho^2-2v_\eta^2)}{3\sqrt{2}} & 2X \frac{g_x}{g_L} \frac{(v_\rho^2-2v_\eta^2)}{\sqrt{3}} \\ \frac{-v_\rho^2}{\sqrt{6}} & \frac{(v_\rho^2-2v_\eta^2)}{3\sqrt{2}} & \frac{(v_\eta^2+v_\rho^2+9v_\chi^2)}{6} & 2X \frac{g_x}{g_L} \frac{(v_\eta^2+v_\rho^2-3v_\chi^2)}{\sqrt{6}} \\ -2X \frac{g_x}{g_L} v_\rho^2 & 2X \frac{g_x}{g_L} \frac{(v_\rho^2-2v_\eta^2)}{\sqrt{3}} & 2X \frac{g_x}{g_L} \frac{(v_\eta^2+v_\rho^2-3v_\chi^2)}{\sqrt{6}} & 4X^2 \frac{g_x^2}{g_L^2} (v_\eta^2 + v_\rho^2 + 3v_\chi^2) \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

où $X = 1$, les masses des bosons neutres γ , Z , Z' , Z'' sont

$$\begin{aligned} M_\gamma^2 &= 0, & M_Z^2 &= \frac{g_L^2 v_\rho^2}{4 \cos^2 \theta_W}, \\ M_{Z'}^2 &= \frac{g_L^2 (\cos^2 \theta_W v_\eta^2)}{(3 - 4 \sin^2 \theta_W)}, \\ M_{Z''}^2 &= \frac{g_L^2 v_\eta^2 \left[(1 - 4 \sin^2 \theta_W)^2 + (3 - 4 \sin^2 \theta_W)^2 \right]}{8 (3 - 4 \sin^2 \theta_W) (1 - 4 \sin^2 \theta_W)}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Le tableau suivant résume la formulation des masses des bosons de jauge et de Higgs $m^2(v_\eta, v_\rho, v_\chi) = m^2(v_\eta) + m^2(v_\rho) + m^2(v_\chi)$:

Tableau 8 : formulation des bosons de jauge et des masses de Higgs.

Bosons	$m^2(v_\eta, v_\rho, v_\chi)$	$m^2(v_\eta)$	$m^2(v_\rho)$	$m^2(v_\chi)$
$m_{W^\pm}^2$	$\frac{g_L^2 v_\rho^2}{4}$	0	$(80, 40 \text{ GeV})^2$	0
$m_{K_1^\pm}^2$	$\frac{g_L^2 (v_\rho^2 + v_\eta^2)}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\rho^2}{4}$	0
m_K^2	$\frac{g_L^2 v_\eta^2}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2}{4}$	0	0
$m_{V^{\pm\pm}}^2$	$\frac{g_L^2 (v_\rho^2 + v_\chi^2)}{4}$	0	$\frac{g_L^2 v_\rho^2}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}$
$m_{Y^\pm}^2$	$\frac{g_L^2 (v_\eta^2 + v_\chi^2)}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2}{4}$	0	$\frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}$
$m_{X^\pm}^2$	$\frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}$	0	0	$\frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}$
m_Z^2	$\frac{g_L^2 v_\rho^2}{4 \cos^2 \theta_W}$	0	$(91, 68 \text{ GeV})^2$	0
$m_{Z'}^2$	$\frac{g_L^2 \cos^2 \theta_W v_\eta^2}{(3 - 4 \sin^2 \theta_W)}$	$\frac{g_L^2 \cos^2 \theta_W v_\eta^2}{(3 - 4 \sin^2 \theta_W)}$	0	0
$m_{Z''}^2$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2 \left[(1 - 4 \sin^2 \theta_W)^2 + (3 - 4 \sin^2 \theta_W)^2 \right]}{8(3 - 4 \sin^2 \theta_W)(1 - 4 \sin^2 \theta_W)}$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2 \left[(1 - 4 \sin^2 \theta_W)^2 + (3 - 4 \sin^2 \theta_W)^2 \right]}{8(3 - 4 \sin^2 \theta_W)(1 - 4 \sin^2 \theta_W)}$	0	0
$m_{h_1^\pm}^2$	$\frac{\lambda_7 (v_\eta^2 + v_\rho^2)}{2}$	$\frac{\lambda_7 v_\eta^2}{2}$	$\frac{\lambda_7 v_\rho^2}{2}$	0
$m_{h_2^\pm}^2$	$\frac{\lambda_8 (v_\eta^2 + v_\chi^2)}{2}$	$\frac{\lambda_8 v_\eta^2}{2}$	0	$\frac{\lambda_8 v_\chi^2}{2}$
$m_{h^{\pm\pm}}^2$	$\frac{\lambda_9 (v_\rho^2 + v_\chi^2)}{2}$	0	$\frac{\lambda_9 v_\rho^2}{2}$	$\frac{\lambda_9 v_\chi^2}{2}$
$m_{H_1^0}^2$	$\left(\lambda_2 + \frac{[\lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_6 (\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_4 \lambda_5)]}{\lambda_5^2 - 4 \lambda_1 \lambda_3} \right) v_\rho^2$	0	$(125 \text{ GeV})^2$	0
$m_{H_2^0}^2$	$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}) v_\eta^2}{2}$	$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}) v_\eta^2}{2}$	0	0
$m_{H_3^0}^2$	$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}) v_\chi^2}{2} = \Omega$	0	0	Ω

Selon, le tableau (8) on peut distinguer les scénarios dans lesquels les bosons de jauge du modèle 341 obtiennent leurs masses par les différentes étapes de SSB :

* X^\pm et H_3^0 n'interviennent que dans la 1^{ère} étape de la transition de phase car $m_{X^\pm}^2, H_3^0 \propto v_\chi^2$, le boson simplement chargé X^\pm acquies sa masse par l'absorption du boson de Goldstone χ_2^\pm de quatuor χ et en interagissant avec le champ scalaire H_3^0 qui est un higgs neutre et massif.

* Les bosons de jauge neutres K, K', Z', Z'' et H_2^0 n'interviennent qu'à la deuxième étape de transition de phase parce que $m_{K, K', Z', Z'', H_2^0}^2 \propto v_\eta^2$, pendant cette étape de la transition de phase, les Goldstones $I_\chi, R_{\eta_1}, I_{\eta_1}, I_{\eta_2}$ sont respectivement absorbés par K, K', Z', Z'' , ces derniers en interagissant avec le champ scalaire H_2^0 qui est le second higgs neutre et massif du modèle et ils obtiennent leurs masses.

C'est très important de noter que les deux premières étapes de transition de phase (TeV échelle) concernent les quarks exotiques et les bosons de jauge lourds, mais sans implication des particules du SM.

* Les particules du SM W^\pm, Z et H_1^0 ne sont impliquées seulement que dans la troisième étape de la transition de phase ($m_{W^\pm, Z, H_1^0}^2 \propto v_\rho^2$), afin d'obtenir leurs masses, les bosons de jauge W^\pm et Z respectivement absorbent deux Goldstones ρ_2^\pm et I_ρ , et en interagissant avec la 3^{ème} champ scalaire H_1^0 qui est le boson de jauge du SM.

* Les particules h_2^\pm et Y^\pm sont impliquées dans les deux premières étapes de la transition de phase puisque $m_{h_2^\pm, Y^\pm}^2 \propto (v_\chi^2 + v_\eta^2)$. Il faut remarquer que lorsque l'univers atteint l'échelle de la première transition de phase ($v_\chi \sim 2.2$ TeV), le Y^\pm absorbe le premier Goldstone η_1^\pm et en interagissant avec H_3^0 obtient la première partie de sa masse. Dans la seconde étape quand l'univers atteint l'échelle de la deuxième étape de transition de phase ($v_\chi \sim 2.1$ TeV), le Y^\pm absorbe un autre boson de Goldstone χ_1^\pm et en interagissant avec H_2^0 récupère l'autre partie de sa masse, alors que le champ scalaire h_2^\pm est massif et demeure dans le spectre physique.

* Le boson $V^{\pm\pm}$ et le Higgs $h^{\pm\pm}$ sont impliqués dans la 1^{ère} et la 3^{ème} étapes de SSB ($m_{V^{\pm\pm}, h^{\pm\pm}}^2 \propto (v_\chi^2 + v_\rho^2)$), dans la 1^{ère} étape lorsque l'univers se refroidit à v_χ , le boson $V^{\pm\pm}$ absorbe le Goldstone $\chi^{\pm\pm}$ et en interagissant avec H_3^0 obtient la 1^{ère} partie de sa masse, de même le boson $V^{\pm\pm}$ absorbe le Goldstone $\rho^{\pm\pm}$ et en interagissant avec H_1^0 obtient la 2^{ème} partie de sa masse tant que l'univers atteint l'échelle de troisième étape de transition de phase ($v_\rho = 246$ GeV), bien que le champ scalaire $h^{\pm\pm}$ soit massif et reste dans le spectre physique.

* Le boson de jauge chargé K_1^\pm et le champ scalaire chargé h_1^\pm sont associés aux deux dernières étapes de SSB parce que $m_{K_1^\pm, h_1^\pm}^2 \propto (v_\eta^2 + v_\rho^2)$. Pour la seconde étape, lorsque l'univers se refroidit à v_η le boson K_1^\pm absorbe le Goldstone η_2^\pm et en interagissant avec H_1^0 obtient la première partie de sa masse. De la même façon, quand l'univers atteint l'énergie ($v_\rho = 246$ GeV) au cours de la 3^{ème} SSB, il absorbe un autre boson de Goldstone ρ_1^\pm et en interagissant avec H_1^0 , ainsi K_1^\pm obtient la seconde partie de sa masse, comme avant le champ scalaire h_1^\pm est massif et reste dans le spectre physique.

Dans ce chapitre, nous avons compté les particules qui composent les trois modèles mentionnés ci-dessus ainsi que leurs masses. Dans ce qui suit, nous aborderons l'un des problèmes les plus importants du modèle standard, qui est l'asymétrie baryon-antibaryon

(baryogénèse), qui est obtenu par la transition de phase électrofaible forte et de premier ordre.

Chapitre 4

La Transition de Phase Électrofaible

Dans le cadre de la physique chaque particule correspond à une antiparticule, mais les observations actuelles indiquent que le nombre des baryons et le nombre d'antibaryons sont inégaux, l'univers a commencé dans un état de symétrie baryonique, mais les interactions des particules ont produit une asymétrie nette, l'essence du problème d'asymétrie des baryons est de comprendre pourquoi dans la partie observable de notre univers la densité des baryons est supérieure de plusieurs ordres à la densité des antibaryons, et pourquoi d'autre part la densité des baryons est bien inférieure à la densité des photons. La possibilité d'expliquer l'asymétrie du baryon à partir d'un contexte cosmologique a fait l'objet de nombreux travaux au cours des dernières décennies.

La baryogénèse électrofaible est le scénario qui peut générer l'asymétrie des baryons à des températures de l'ordre du $T \sim 10^2$ GeV, l'avantage de cette baryogénèse est qu'elle s'appuie principalement sur une physique connue de la théorie électrofaible. En 1967, le physicien russe Sakharov a identifié les conditions suivantes [5,6,7] : la violation du nombre baryonique B, la violation du C et CP, une évolution hors équilibre thermique.

La troisième condition de Sakharov fournit une étude approfondie de la transition de phase électrofaible, cette condition n'est satisfaite que si la transition de phase électrofaible est de premier ordre. La transition de phase électrofaible est la transition entre deux différentes phases, la première phase symétrique et la seconde phase qui est asymétrique. De plus, il existe deux types de transition de phase : les transitions du second ordre qui sont des transitions de phase dites continues où sont celles pour lesquelles le paramètre d'ordre reste continu au passage de la transition et les transitions du premier ordre qui concernent le paramètre d'ordre qui est discontinu à la transition.

Si la transition de phase électrofaible est du second ordre (smooth transition), cet effet est négligeable, le potentiel scalaire est responsable de la brisure de symétrie et il a deux minimums, l'un d'eux, c'est le faux vide et la deuxième appelée le vrai vide, à la température critique, les deux minimums sont séparés par une barrière d'énergie, lorsque la transition de phase est du premier ordre, la nucléation des bulles commence. En d'autres mots, la transition passe du faux vide au vrai vide, à une température ci-dessous de T_c , les bulles augmentent, se développent et remplissent tout l'espace. Dans ce cas, sont appelées les bulles critiques, ainsi la baryogénèse est terminée et la troisième condition de Sakharov a satisfait.

À tous les premiers stades de son évolution, l'univers est rempli de matière d'énergies et de densités très élevées, de sorte que la matière doit être décrite en termes de champs

quantiques. Afin d'étudier comment la transition de phase électrofaible a pu se produire au début de l'univers, nous devons travailler dans le cadre de la théorie quantique des champs, l'outil de base pour l'étude de la nature de la transition de phase électrofaible est le potentiel effectif.

4.1 Potentiel Effectif

Le potentiel effectif pour la théorie quantique des champs a été introduit la première fois par Euler, Heisenberg et Schwinger [61], le potentiel effectif à une boucle a été calculé par Coleman et E. Weinberg en 1973 [62] et pour le cas des boucles multiples, on peut se référer aux calculs de Jackiw [63], Itzykson et Martin [64]. Dans ce qui suit, nous présentons les techniques usuelles permettant le calcul complet de potentiel effectif à une boucle et prenant en considération la contribution de toutes les particules du modèle (les fermions, les bosons, les scalaires). Il existe deux approches différentes pour trouver l'expression de potentiel effectif : l'approche fonctionnelle et l'approche perturbative. Dans notre travail, nous utiliserons l'approche fonctionnelle.

4.1.1 L'approche fonctionnelle

L'approche fonctionnelle a été utilisée par Coleman et E. Weinberg [62], elle permet de définir un potentiel effectif qui inclut toutes les interactions de la théorie qui sont explicites dans le lagrangien où issues des corrections quantiques. On commence à partir d'une action effective qui est construite en termes du champ ϕ et dont la forme générique est :

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\phi(x)], \quad (4.1)$$

avec \mathcal{L} est la densité lagrangienne, $\phi(x)$ représente les scalaires, les vecteurs et les fermions, mais dans ce cas, on s'intéresse seulement au champ scalaire. La fonctionnelle génératrice $Z[j]$ est obtenue lorsqu'on ajoute une fonction d'espace-temps $j(x)$ à l'action S .

$$\begin{aligned} Z[j] &= \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ i \left[\mathcal{S}[\phi(x)] + \int d^4x j(x) \phi(x) \right] \right\} \\ &= \exp(iW[j]), \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $W[j]$ est la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes, l'action effective est définie dans [65] par

$$\Gamma[\phi] = W[j] - \int d^4x \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} j(x), \quad (4.3)$$

et $\Gamma[\phi]$ est définie comme la transformée de Legendre de $W[j]$ et $\phi(x) = \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)}$, d'après l'équation (4.3) on a

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} &= \frac{\delta W[j]}{\delta \phi} - \int d^4x \frac{\delta \left(\frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} j(x) \right)}{\delta \phi} \\
&= \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} \frac{\delta j(x)}{\delta \phi} - \int d^4x \left[\frac{\delta \left(\frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} \right)}{\delta \phi} j(x) + \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} \frac{\delta j(x)}{\delta \phi} \right] \\
&= \phi(x) \frac{\delta j(x)}{\delta \phi} - \int d^4x \left[\frac{\delta \phi}{\delta \phi} j(x) + \phi \frac{\delta j(x)}{\delta \phi} \right] \\
\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} &= -j(x) \Rightarrow \left. \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} \right|_{j=0} = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

L'extension de $Z[j]$ ou $W[j]$ à la série de Taylor fonctionnelle

$$Z[j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n j(x_1) \dots j(x_n) G_{(n)}(x_1 \dots x_n), \tag{4.5}$$

et

$$iW[j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n j(x_1) \dots j(x_n) G_{(n)}^{(c)}(x_1 \dots x_n), \tag{4.6}$$

avec $G_{(n)}^{(c)}$ les fonctions de Green connexes. De même, on peut écrire l'action effective en série de Taylor

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n), \tag{4.7}$$

et $\Gamma^{(n)}$ est la fonction de Green d'une particule irréductible, la transformation de Fourier de $\Gamma^{(n)}$ et $\phi(x)$ sont

$$\bar{\phi}(p) = \int d^4x e^{-ipx} \phi(x) \Rightarrow \bar{\phi}(-p) = \int d^4x e^{ipx} \phi(x) \tag{4.8}$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \exp\{ip_i x_i\} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1 \dots p_n), \tag{4.9}$$

La relation (4.7) devient

$$\begin{aligned}
\Gamma[\phi] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \int d^4x \exp\{ip_i x_i\} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1 \dots p_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \bar{\phi}(-p) \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1 \dots p_n),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

où

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi] &= \int d^4x [-V_{eff}(\phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 Z(\phi)], \\ \phi(x) &= \phi_c,\end{aligned}\tag{4.11}$$

ϕ_c est constant donc

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x [-V_{eff}(\phi_c)] + \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu\phi_c)^2 Z(\phi_c)],\tag{4.12}$$

et le second terme de l'équation précédente est nul donc

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x [-V_{eff}(\phi_c)].\tag{4.13}$$

Pour simplifier la relation (4.10) nous avons utilisé l'égalité suivante

$$\int d^4x e^{-ipx} = \delta^4(p) (2\pi)^4,\tag{4.14}$$

et d'après les relations (4.8), (4.14) on trouve

$$\bar{\phi}(p) = \delta^4(p) (2\pi)^4 \phi_c,\tag{4.15}$$

L'équation (4.10) devient

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_c] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \delta^4(-p) (2\pi)^4 \phi_c^{(n)} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi_c^{(n)} (2\pi)^4 \delta^4(0) \Gamma^{(n)}(p_i = 0),\end{aligned}\tag{4.16}$$

avec

$$(2\pi)^4 \delta^4(0) = \int d^4x e^{-i(0)x} = \int d^4x,\tag{4.17}$$

la relation (4.16) s'écrit

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi_c^{(n)} \Gamma^{(n)}(p_i = 0) \int d^4x,\tag{4.18}$$

nous avons comparé les relations (4.13) et (4.18) on a trouvé :

$$V_{eff}(\phi_c) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi_c^{(n)} \Gamma^{(n)}(p_i = 0).\tag{4.19}$$

L'expression du potentiel effectif, c'est la somme sur tous les diagrammes d'une particule irréductible (1PI) ou le calcul des fonctions de Green $\Gamma^{(n)}$.

À température zéro

Supposons un modèle physique a le potentiel V_0 (tree-level), à la température zéro le potentiel effectif, c'est la somme de V_0 et les corrections à une boucle des champs d'interactions avec le Higgs

$$V_{\text{eff}}(\phi_c) = V_0(\phi_c) + V_1(\phi_c), \quad (4.20)$$

avec V_1 est l'expression de potentiel à une boucle qui prend différentes formes pour les scalaires, les fermions et les bosons de jauge.

Le cas des scalaires Considérons la densité lagrangienne des scalaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_c) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_0, \\ V_0(\phi_c) &= \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4, \end{aligned} \quad (4.21)$$

où la contribution à une boucle est la somme de tous les diagrammes d'une particule irréductible (1PI) et en utilisant les règles de Feynman, donc l'expression de V_1 s'écrit sous la forme :

$$V_1(\phi_c) = i \sum_{n=1}^{n=+\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2n} \left[\frac{(\frac{\lambda}{2}) \phi_c^2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right]^n, \quad (4.22)$$

On utilise

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln[1-x], \quad x = \left(\frac{\lambda}{2} \phi_c^2 \right) / (p^2 - m^2 + i\varepsilon). \quad (4.23)$$

L'équation (4.22) devient

$$V_1(\phi_c) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left[1 - \frac{(\frac{\lambda}{2}) \phi_c^2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right], \quad (4.24)$$

et pour simplifier la relation précédente en utilisant la rotation de Wick et la relation de masse (shifted mass)

$$\begin{aligned} p_E &= (-ip^0, \vec{p}) \\ p^2 &= (p^0)^2 - \vec{p}^2 = -p_E^2 \\ m^2(\phi_c) &= m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi_c^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

on néglige le terme indépendant de champs, donc la relation (4.24) devient

$$V_1(\phi_c) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [p^2 + m^2(\phi_c)]. \quad (4.26)$$

La formule (4.26) est valable seulement pour une théorie avec un seul champ scalaire et on peut généraliser pour le cas des champs scalaires complexes qui est décrit par le lagrangien suivant

$$\mathcal{L}(\phi_c) = \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi_a^+ - V_0(\phi^a, \phi_a^+), \quad (4.27)$$

et la relation (4.26) devient

$$V_1(\phi_c) = \frac{1}{2} Tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [p^2 + M_s^2(\phi^a, \phi_b^+)], \quad (4.28)$$

avec

$$(M_s^2)_b^a = \left. \frac{\partial V_0}{\partial \phi_a^+ \partial \phi^b} \right|_{\phi=\phi_c}. \quad (4.29)$$

Le cas des fermions La densité lagrangienne des fermions est :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_a \gamma \partial \psi^a - \bar{\psi}_a (M_f)_b^a \psi^a, \quad (4.30)$$

avec l'expression de potentiel à une boucle est

$$V_1(\phi_c) = -2\lambda i Tr \sum_{n=1}^{n=+\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2n} \left[\frac{M_f^2}{p^2} \right]^n, \quad (4.31)$$

la relation (4.31) lorsqu'on utilise (4.23)

$$V_1(\phi_c) = 2\frac{\lambda i}{2} Tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left[1 - \frac{M_f^2}{p^2} \right], \quad (4.32)$$

après l'utilisation de rotation de wick et la relation $M_f^2(\phi_c) = M_f^2 + \lambda\phi_c^2/2$ on obtient

$$V_1(\phi_c) = -2\frac{\lambda}{2} Tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [p^2 + M_f^2(\phi_c)]. \quad (4.33)$$

Le cas des bosons de jauge Considérons maintenant une théorie décrite par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Tr (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} Tr (D_\mu \phi_a)^+ (D^\mu \phi^a), \quad (4.34)$$

et le propagateur des bosons de jauge dans la jauge de Landau qui préserve la renormalisation de la théorie

$$\Pi_\nu^\mu = -\frac{i}{p^2 + i\varepsilon} \Delta_\nu^\mu, \quad \Delta_\nu^\mu = g_\nu^\mu - \frac{p^\mu p_\nu}{p^2} \quad (4.35)$$

et l'expression de V_1 écrit comme

$$V_1(\phi_c) = \frac{1}{2} Tr(\Delta) Tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [p^2 + M_G^2(\phi_c)], \quad (4.36)$$

où $Tr(\Delta) = Tr(\Delta_\nu^\mu)^n$ est le nombre de degrés de liberté qui égale 3 pour les bosons massifs et la relation (4.36) devient

$$V_1(\phi_c) = \frac{3}{2} Tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [p^2 + M_G^2(\phi_c)]. \quad (4.37)$$

Pour une théorie de jauge qui contient N_s (scalaire), N_f (fermions), on fait la somme de (4.28), (4.33), (4.37) qui donne la relation de potentiel effectif à une boucle à température zéro

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\phi_c) &= V_0(\phi_c) + \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [p^2 + M_s^2(\phi_c)] \\ &\quad + -2 \frac{\lambda}{2} \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [p^2 + M_f^2(\phi_c)] \\ &\quad + \frac{3}{2} \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [p^2 + M_G^2(\phi_c)] . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Il est clair que les intégrales (4.26), (4.28), (4.33), (4.37) sont ultra-violettes divergentes et pour que la théorie quantique des champs aura un sens, les divergences peuvent être absorbées par des contretermes où tous les paramètres de lagrangien doivent être renormalisé comme la masse, la fonction d'onde et pour renormaliser les intégrales précédentes, on utilise le schème de renormalisation dimensionnelle. Nous avons calculé l'intégrale (4.26) aux dimensions $(4 - 2\varepsilon)$ et les infinités sont paramétrées par le facteur $\frac{1}{\varepsilon}$.

$$V_1(\phi_c) = \frac{1}{2} (\mu^2)^{2-\frac{n}{2}} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \ln [p^2 + m^2(\phi_c)] , \quad (4.39)$$

avec

$$\frac{dV_1}{dm^2(\phi_c)} = \frac{1}{2} (\mu^2)^{2-\frac{n}{2}} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{[p^2 + m^2(\phi_c)]} , \quad (4.40)$$

où μ un paramètre qui prend la dimension de masse (l'échelle de renormalisation) et pour calculer (4.40) nous avons utilisé la relation

$$\int d^n p \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + M^2)^\beta} = \pi^{\frac{n}{2}} (M^2)^{\frac{n}{2} + \alpha - \beta} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{n}{2}) \Gamma(\beta - \alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\beta)} , \quad (4.41)$$

dans notre cas $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, après l'intégration et la simplification, on obtient

$$V_1(\phi_c) = \frac{m^4(\phi_c)}{64\pi^2} \left\{ - \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right] + \ln \frac{m^2(\phi_c)}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right\} , \quad (4.42)$$

avec $\varepsilon = 2 - \frac{n}{2}$, $\mu^2 = \Lambda^2$ et $\gamma_E = 0.57721566$ est la constante d'Euler-Maxheroni. Le choix des contretermes pour absorber les divergences qui déterminent le schème de renormalisation.

Nous intéressons ici sur le schème \overline{MS} , le premier terme de l'équation (4.42) est absorbé par les contretermes et on obtient

$$V_1(\phi_c) = \frac{m^4(\phi_c)}{64\pi^2} \left\{ \ln \frac{m^2(\phi_c)}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right\} . \quad (4.43)$$

On fait la même chose pour les intégrales (4.33), (4.37) (pour les fermions et les bosons de jauge) et on obtient les résultats suivants

$$\begin{aligned} V_1^f(\phi_c) &= -\lambda \frac{1}{32\pi^2} M_f^2(\phi_c) \left[\ln \frac{M_f^2(\phi_c)}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right] , \\ V_1^b(\phi_c) &= \frac{3}{64\pi^2} M_g^2(\phi_c) \left[\ln \frac{M_g^2(\phi_c)}{\Lambda^2} - \frac{5}{6} \right] . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les relations précédentes (4.43), (4.44) peuvent se généraliser sous la forme suivante :

$$V_1(\phi_c) = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i a_i m_i^4(\phi_c) \left[\log \frac{m_i^2(\phi_c)}{\Lambda^2} - C_i \right], \quad (4.45)$$

où m_i^2 les champs dépendent de masse carrée, n_i les multiplicités des particules du modèle, ($C_i = \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$) et ($a_i = 1, -2, 3$) pour les scalaires, les fermions et les bosons de jauge respectivement. Il est utile de mentionner que nous travaillons dans la jauge de Landau et on utilise le schème de renormalisation \overline{DR} [66] où les coefficients C_i prennent la même valeur $\frac{3}{2}$ pour toutes les particules donc la relation (4.45) devient [62, 65, 66]

$$V_1(\phi_c) = \sum_i \frac{\tilde{n}_i}{64\pi^2} m_i^4(\phi_c) \left[\ln \frac{m_i^2(\phi)}{\Lambda^2} - C_i \right], \quad (4.46)$$

où $\tilde{n}_i = n_i(-1)^{2S_i}$, S_i et n_i représentent le spin et les degrés de liberté de la particule i .

Enfin, on peut réécrire la relation (4.20) comme

$$V_{\text{eff}}(\phi_c) = V_0(\phi_c) + \sum_i \frac{\tilde{n}_i}{64\pi^2} m_i^4(\phi_c) \left[\ln \frac{m_i^2(\phi)}{\Lambda^2} - C_i \right]. \quad (4.47)$$

À température finie

L'univers primordial contient la matière et le rayonnement à température très élevée, ce domaine appelé la théorie des champs à température finie et les règles de Feynman sont modifiées, pour étudier la transition de phase électrofaible, l'expression de potentiel effectif à une boucle à température zéro devrait généraliser pour être valable à température finie et pour cela, on utilise l'une des deux méthodes existantes (le formalisme de temps imaginaire et le formalisme de temps réel) [67, 68], mais ces deux méthodes de calcul donnent les mêmes résultats. Au formalisme de temps imaginaire les champs des bosons et des fermions sont

$$\phi(\tau, \vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{\phi}_n(\vec{x}) e^{i\omega_n^b \tau}, \quad \psi(\tau, \vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{\psi}_n(\vec{x}) e^{i\omega_n^f \tau}, \quad (4.48)$$

avec $t = i\tau$, ω_n est la fréquence de Matsubara $\omega_n^b = 2\pi n\beta^{-1}$ et $\omega_n^f = (2n+1)\pi\beta^{-1}$, n représente le mode de Matsubara, $\beta = 1/k_B T$ et ($k_B = 1$), les règles de Feynman dans ce cas sont

$$\begin{aligned} \text{Bosons propagator} &: \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad p^\mu = [2\pi n i \beta^{-1}, \vec{p}] \\ \text{Fermions propagator} &: \frac{i}{\gamma p - m^2}, \quad p^\mu = [(2n+1) i \pi \beta^{-1}, \vec{p}] \\ \text{Loop integral} &: \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \\ \text{vertex function} &: -i\beta (2\pi)^3 \delta_{\Sigma \omega_i} \delta^3 \left(\sum_i \vec{p}_i \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Donc on peut écrire les contributions des bosons de jauge (scalaires) et les fermions dans le potentiel effectif à une boucle à température finie.

Le cas des bosons Pour trouver l'expression de $V_1(\phi)$ à température finie on utilise (4.49), (4.26)

$$V_1(\phi) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln [\omega_n^2 + \omega^2], \quad (4.50)$$

avec

$$\omega^2 = \vec{p}^2 + m^2(\phi_c), \quad (4.51)$$

on pose

$$v(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln [\omega_n^2 + \omega^2] \quad (4.52)$$

et

$$\frac{\partial v(\omega)}{\partial \omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega}{\omega_n^2 + \omega^2} = \frac{2\omega\beta^2}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + \omega^2\beta^2/4\pi^2)}, \quad (4.53)$$

avec $y = \omega\beta/2\pi$ et on utilise

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{\pi}{y} \coth(\pi y)$$

$$\coth(x) = 1 + \frac{2}{\exp(2x) - 1} \quad (4.54)$$

où $x = \frac{\beta\omega}{2}$ donc la relation (4.53) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\omega)}{\partial \omega} &= \beta + \left[\frac{2\beta}{\exp(\beta\omega) - 1} \right] \\ &= \frac{1}{T} + \left[\frac{2/T}{\exp(\omega/T) - 1} \right], \end{aligned} \quad (4.55)$$

on intègre (4.55)

$$v(\omega) = \frac{\omega}{T} + 2 \ln [1 - \exp(-\omega/T)], \quad (4.56)$$

donc la relation (4.50) devient

$$V_1(\phi) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{2} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \ln [1 - \exp(-\omega/T)]. \quad (4.57)$$

Pour calculer la première intégrale dans la relation précédente, on utilise l'identité suivante :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi i} \ln (-x^2 + \omega^2) = \frac{\omega}{2}, \quad (4.58)$$

et la dérivée de (4.58) est

$$\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi i} \frac{1}{(-x^2 + \omega^2)} = \frac{1}{2}, \quad (4.59)$$

on utilise la rotation de wick ($p_0 = ip_E$) et ($p_0 = x$) alors que la première intégrale de (4.57) s'écrit comme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega &= -\frac{i}{2} \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \ln [-p_0^2 + \omega^2] \\
&= -\frac{i}{2} (i) \int \frac{dp_E}{(2\pi)} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \ln [-(i)^2 p_E^2 + \omega^2] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^3} \ln [p_E^2 + \omega^2] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^3} \ln [p_E^2 + \vec{p}^2 + m^2(\phi_c)], \tag{4.60}
\end{aligned}$$

et on remplace P_E par P

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \ln [P^2 + m^2(\phi_c)] \tag{4.61}$$

on trouve la même relation que nous avons obtenue dans le cas de température zéro (4.26). Pour la deuxième intégrale de (4.57) qui dépendant de la température, on a $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2(\phi_c)}$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} T \ln \left[1 - \exp(-\sqrt{\vec{p}^2/T^2 + m^2(\phi_c)/T^2}) \right], \tag{4.62}$$

et on fait le changement de variable $x = P/T$

$$\int_0^{+\infty} \frac{T^4 x^2}{2\pi^2} dx \ln \left[1 - \exp(-\sqrt{x^2 + m^2(\phi_c)/T^2}) \right], \tag{4.63}$$

on peut généraliser l'équation (4.61) pour que le cas des bosons de jauge dans le schème \overline{DR} prenne la même forme que l'équation (4.46), donc la relation (4.57) s'écrit comme

$$\begin{aligned}
V_1^b(\phi_c) &= \frac{m^4(\phi_c)}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m^2(\phi)}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right] \\
&+ \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} x^2 dx \ln [1 - \exp(-x^2 + m^2(\phi_c)/T^2)]. \tag{4.64}
\end{aligned}$$

Le cas des fermions On utilise les équations (4.33), (4.49) pour trouver la contribution des fermions au potentiel effectif à température finie

$$\begin{aligned}
V_1^f(\phi_c) &= -2 \frac{\lambda}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log [\omega_n^2 + \vec{p}^2 + M_f^2(\phi_c)] \\
&= -2 \frac{\lambda}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log [\omega_n^2 + \omega^2], \tag{4.65}
\end{aligned}$$

on pose

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \log [\omega_n^2 + \omega^2], \quad (4.66)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} &= 2\omega \sum_{n=1_{\text{odd}}}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{n^2\pi^2}{\beta^2}\right) + \omega^2} \\ &= \frac{2\omega\beta^2}{\pi^2} \sum_{n=1_{\text{odd}}}^{+\infty} \frac{1}{\left(n^2 + \frac{\beta^2\omega^2}{\pi^2}\right)} \\ &= \frac{2\omega\beta^2}{\pi^2} \sum_{n=1_{\text{odd}}}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + y^2)}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

avec $y = \beta\omega/\pi$ pour simplifier (4.67) on utilise les relations suivantes

$$\begin{aligned} \sum_{n=1_{\text{odd}}}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + y^2)} &= \frac{\pi}{y} \coth(\pi y) - \frac{\pi}{2y} \coth\left(\frac{\pi}{2}y\right) \\ \coth(x) &= 1 + \frac{2}{\exp(2x) - 1} \end{aligned} \quad (4.68)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} &= \frac{1}{T} \left[2 \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) - \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[1 + \frac{4}{\exp(2\omega/T) - 1} - \frac{2}{\exp(\omega/T) - 1} \right], \end{aligned} \quad (4.69)$$

on intègre (4.69)

$$f(\omega) = \frac{\omega}{T} + 2 \ln(1 + \exp(-\omega/T)), \quad (4.70)$$

donc la relation (4.65) devient

$$V_1^f(\phi_c) = -2\lambda \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{2} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \ln(1 + \exp(-\omega/T)) \right], \quad (4.71)$$

La première intégrale peut s'écrire comme

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln [P^2 + \omega^2], \quad (4.72)$$

après le changement de variable $x = P/T$ la deuxième intégrale est écrite sous la forme

$$\int_0^{+\infty} \frac{T^4 x^2}{2\pi^2} dx \ln \left[1 + \exp(-\sqrt{x^2 + m^2(\phi_c)/T^2}) \right], \quad (4.73)$$

Finalement la relation (4.71) prend la forme

$$V_1^f(\phi_c) = -2\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln [P^2 + \omega^2] - 2\frac{\lambda T^4}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} x^2 dx \ln \left[1 + \exp(-\sqrt{x^2 + m^2(\phi_c)/T^2}) \right], \quad (4.74)$$

la relation (4.74) dans le schème \overline{DR} prend la forme

$$V_1^f(\phi_c) = \frac{M_f^4(\phi_c)}{64\pi^2} \left[\ln \frac{M_f^4(\phi)}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right] - 2\frac{\lambda T^4}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} x^2 dx \ln \left[1 + \exp(-\sqrt{x^2 + m^2(\phi_c)/T^2}) \right]. \quad (4.75)$$

Les intégrales dans les deuxièmes termes des relations (4.64), (4.75) sont les fonctions thermiques bosonique et fermionique

$$J_{B,F} \left(\frac{m^2}{T^2} \right) = \int_0^{\infty} dx x^2 \ln \left[1 \mp e^{-\sqrt{x^2 + m^2/T^2}} \right]. \quad (4.76)$$

D'après les relations (4.64), (4.75) on peut obtenir les contributions des bosons et des fermions au potentiel effectif à une boucle à température finie [65]

$$V_{\text{eff}}(\phi_c, T) = V_0(\phi_c) + V_1(\phi_c) + \Delta V_1^{(T)}(\phi_c, T), \quad (4.77)$$

où le terme $V_1(\phi_c)$ est exactement le potentiel effectif à une boucle à température zéro et le troisième terme contient les corrections thermiques à une boucle qui prend la forme suivante :

$$\Delta V_1^{(T)}(\phi_c, T) = \sum_{i=\text{boson}} \tilde{n}_i \frac{T^4}{2\pi^2} J_B \left(\frac{m_i^2}{T^2} \right) + \sum_{j=\text{fermion}} \tilde{n}_j \frac{T^4}{2\pi^2} J_F \left(\frac{m_j^2}{T^2} \right), \quad (4.78)$$

Pour $x \ll 1$ [65] les fonctions $J_B(x)$, $J_F(x)$ prennent les expansions suivantes

$$J_B(x^2) = -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{\pi}{6}x^{3/2} - \frac{1}{32}x^4 \ln\left(\frac{x^2}{a_b}\right) + O(x^3), \quad (4.79)$$

$$J_F(x^2) = \frac{7\pi^2}{360} - \frac{\pi^2}{24}x^2 - \frac{1}{32}x^4 \ln\left(\frac{x^2}{a_f}\right) + O(x^3) \quad (4.80)$$

avec $\ln(a_b) \simeq 5.4076$, $\ln(a_f) \simeq 2.6351$.

Pour $x \gg 1$ [65] on a

$$J_B(x^2) \simeq J_F(x^2) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-x} \left(1 + \frac{15}{8x} + O(x^{-2})\right). \quad (4.81)$$

4.2 La Transition de Phase Électrofaible

4.2.1 La transition de phase électrofaible dans le modèle standard

Au Modèle Standard, on estime que les conditions de Sakharov sont réalisées lorsque le nombre baryonique est violé à l'anomalie de $(B + L)$, C est violée au maximum dans le SM et la source de violation de CP existe dans la matrice de CKM (le secteur des quarks). Dans l'échelle électrofaible pour réaliser la dernière condition, il faut avoir la transition de phase du premier ordre et on utilise le potentiel effectif comme outil. Le potentiel effectif thermique à une boucle a donné par (4.77) et la somme doit être effectuée sur tous les champs du SM et il est plus pratique de considérer seulement les contributions des bosons de jauge et le quark (top) $i = t, W, Z$

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) = \frac{\mu^2 v^2}{2} + \frac{\lambda v^4}{4} + \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m_i^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right] + \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i J_{B,F} \left(\frac{m_i^2}{T^2} \right), \quad (4.82)$$

avec

$$\tilde{n}_h = 1, \quad \tilde{n}_W = 6, \quad \tilde{n}_Z = 3, \quad \tilde{n}_t = -12. \quad (4.83)$$

À l'aide des expansions dans les équations (4.79, 4.80), on peut réécrire (4.77) sous une forme simple illustrant les corrections thermiques dans le potentiel effectif [5]

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) = D(T^2 - T_0^2)\phi^2 - ET\phi^3 + \frac{\lambda(T)}{4}\phi^4, \quad (4.84)$$

où D, E, T_0 sont les coefficients indépendants de la température et $\lambda(T)$ est une fonction à variation lente de la température. Le type de la transition de phase est déterminé par la valeur du coefficient E , si $E = 0$ la transition de phase est du deuxième ordre [8] avec une température de transition T_0 et la valeur moyenne de vide (de Higgs) $\langle \phi \rangle_0$ s'écrit comme :

$$\langle \phi \rangle_0 = T_0 \sqrt{\frac{2D}{\lambda} \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right)}. \quad (4.85)$$

Pour $E \neq 0$ la transition de phase est du premier ordre, à température très élevée $T \gg T_1$ le seul minimum du potentiel effectif est $\langle \phi \rangle_0 = 0$. Lorsque $T = T_1$ le potentiel effectif acquiert un minimum supplémentaire à une valeur :

$$\langle \phi \rangle_1 = \frac{3ET}{2\lambda}, \quad (4.86)$$

où cette valeur apparaît comme un point d'inflexion à une température

$$T_1^2 = \frac{8\lambda D}{8\lambda D - 9E^2} T_0^2. \quad (4.87)$$

Lorsque la température baisse, le deuxième minimum (4.86) devient plus profond et dégénère avec l'autre $\langle\phi\rangle_1 = 0$, à une température critique T_c les deux minimums sont séparés par une barrière de potentiel et l'expression de T_c est donnée

$$T_c^2 = \frac{\lambda D T_0^2}{\lambda D - E^2}, \quad (4.88)$$

L'expression du minimum de température critique est donnée par

$$\langle\phi\rangle_c = \frac{2ET_c}{\lambda}. \quad (4.89)$$

La transition de phase du premier ordre est caractérisée par le rapport $\frac{\langle\phi\rangle_c}{T_c}$, la transition du minimum local au $\langle\phi\rangle = 0$ vers un minimum plus profond à $\langle\phi\rangle \neq 0$ s'effectue via le tunnel thermique [69]. Cela peut être compris en terme de formation des bulles de la phase brisée dans la mer de la phase symétrique.

Lorsqu'une grosse bulle se forme et s'agrandit jusqu'à ce qu'elle entre en collision avec d'autres bulles et à partir de là, l'univers se remplit de la phase brisée. La transition de phase électrofaible EWPT se produit à une température $T_W \sim 100$ GeV et doit être fortement du premier ordre pour atteindre une électrofaible baryogénèse (EWBG) et sa condition $\frac{\phi_c}{T_c} \geq 1$. La hauteur de la barrière entre les deux minimums est une mesure de la puissance de la transition de phase. Donc, la transition de phase forte du premier ordre présente une barrière élevée.

À la température critique, la transition de phase de second ordre s'est produite lorsqu'il n'y avait pas de barrière et le champ de Higgs tomberait continuellement de zéro à une valeur non nulle et qu'il n'y avait pas de nucléation de bulle qui soit la source de l'équilibre non thermique. Donc, la baryogénèse électrofaible serait impossible et on s'attendrait à un taux de violation du nombre baryonique très élevé car il n'y a pas de barrière entre les deux vides. Alors, dans ce cas la transition de sphaléron est rapide.

Pour le SM, les coefficients D , E , T_0 et $\lambda(T)$ prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{24v^2} (6m_W^2 + 3m_Z^2 + 6m_t^2), \\ E &= \frac{1}{12\pi v^3} (6m_W^3 + 3m_Z^3), \\ T_0^2 &= \frac{m_H^2}{4D} - \frac{1}{32\pi^2 D v^2} (6m_W^4 + 3m_Z^4 - 12m_t^4), \\ \lambda(T) &= \frac{m_H^2}{2v^2} \left[1 - \frac{1}{8\pi^2 v^2 m_H^2} \left(6m_W^4 \log \frac{m_W^2}{A_B T^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3m_Z^4 \log \frac{m_Z^2}{A_B T^2} - 12m_t^4 \log \frac{m_t^2}{A_F T^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.90)$$

et $\log A_B = \log a_b - \frac{3}{2}$, $\log A_F = \log a_f - \frac{3}{2}$.

Pour le SM, la transition de phase électrofaible EWPT est de premier ordre, seulement si la masse de boson de Higgs est inférieure à la valeur 70 GeV [9, 10, 11]. Ceci est en

contradiction avec la valeur expérimentale actuelle qui est d'environ 125 GeV [12]. Néanmoins, selon les Réfs. [70, 71, 72, 73] une transition de phase électrofaible du premier ordre est possible pour une masse de Higgs du SM dans la région de ($80 \text{ GeV} < m_H < 160 \text{ GeV}$) mais en supposant comme condition initiale de l'existence d'un champ hypermagnétique fort dans le plasma primordial, dans ces conditions la transition de phase du second ordre peut virer au premier ordre. De plus, la violation de CP induite par la phase CKM ne semble pas être suffisante pour générer l'asymétrie baryonique observée [74, 75, 76]. Donc, l'origine de la baryogénèse se situe dans une physique au-delà du SM.

En physique des particules, des nombreux modèles existent au-delà du SM, parmi ces modèles qui sont étudiés la transition de phase électrofaible, où les physiciens ont trouvé facilement une transition de phase de premier ordre dans le modèle *MSSM* (The Minimal Supersymmetric Standard Model) [77], *NMSSM* (The Next-to-Minimal Supersymmetric Standard Model) [78] et aussi dans le modèle UMSSM (The U(1)' extension of the Minimal Supersymmetric Standard Model) [79]. Dans les sections suivantes, on étudie la transition de phase électrofaible dans les modèles économique 331 avec neutrinos de chiralité droite, le modèle minimal 331 avec seulement deux triplets de Higgs et le modèle compact 341.

4.2.2 La transition de phase électrofaible dans le modèle économique 331 avec neutrinos de chiralité droite

Pour obtenir l'expression de potentiel effectif thermique à une boucle de modèle 331RHN, on utilise les formules (3.12, 4.77) et il est commode de travailler uniquement avec les contributions des bosons de jauge (W^\pm, Y^\pm, Z, Z', X^0), le quark top (t), les trois quarks lourds (U, D_2, D_3), le Higgs (H_1^0) et les deux Higgs (neutre H_2^0 et chargé H^+)

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}(\phi, T) = & \frac{\mu_1^2(u^2 + \omega^2) + \mu_2^2 v^2 + \lambda_1 u^2 \omega^2}{2} \\
& + \frac{\lambda_2 v^4 + \lambda_3 v^2 (\omega^2 + u^2) + \lambda_1 (u^4 + \omega^4)}{4} \\
& + \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m_i^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right] \\
& + \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i J_{B,F} \left(\frac{m_i^2}{T^2} \right), \tag{4.91}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{n}_{Z, Z', X} = 3, \quad \tilde{n}_{U, D_2, D_3, t} = -12, \\
\tilde{n}_{H_1^0, H_2^0} = 1, \quad \tilde{n}_{W, Y} = 6, \quad \tilde{n}_{H^+} = 2. \tag{4.92}
\end{aligned}$$

On sait que ce modèle contient deux étapes de brisure de symétrie, en d'autres termes, on a deux étapes de transition de phase de premier ordre à deux échelles des énergies différentes.

La première étape de transition de phase

Le potentiel effectif à température finie de la première étape de transition de phase ($SU(3)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{\omega} SU(2)_L \otimes U(1)_Y$) a la forme compacte

$$V_{\text{eff}}(\omega) = D(T^2 - T_0^2)\omega^2 - ET\omega^3 + \frac{\lambda(T)}{4}\omega^4, \quad (4.93)$$

où cette transition de phase se produit à l'échelle du TeV, les paramètres de l'équation précédente ont les expressions suivantes et contiennent les masses des bosons de jauge lourds (Y^\pm, Z', X^0), les quarks lourds (U, D_2, D_3) et les deux Higgs (H_2^0, H^+)

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{24\omega^2} \left(6m_{Y^\pm}^2 + 3m_{Z'}^2 + 3m_{X^0}^2 + 6m_U^2 + 6m_{D_2}^2 \right. \\ &\quad \left. + 6m_{D_3}^2 + m_{H_2^0}^2 + 2m_{H^+}^2 \right), \\ E &= \frac{1}{12\pi\omega^3} \left(6m_{Y^\pm}^3 + 3m_{Z'}^3 + 3m_{X^0}^3 + m_{H_2^0}^3 + 2m_{H^+}^3 \right), \\ T_0^2 &= \frac{m_{H_2^0}^2}{4D} - \frac{1}{32D\pi^2\omega^2} \left(6m_{Y^\pm}^4 + 3m_{Z'}^4 + 3m_{X^0}^4 \right. \\ &\quad \left. - 12m_U^4 - 12m_{D_2}^4 - 12m_{D_3}^4 + m_{H_2^0}^4 + 2m_{H^+}^4 \right), \\ \lambda(T) &= \frac{m_{H_2^0}^2}{2\omega^2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8\pi^2\omega^2 m_{H_2^0}^2} \right) \left[6m_{Y^\pm}^4 \log \frac{m_{Y^\pm}^2}{A_B T^2} + 3m_{X^0}^4 \log \frac{m_{X^0}^2}{A_B T^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3m_{Z'}^4 \log \frac{m_{Z'}^2}{A_B T^2} - 12m_U^4 \log \frac{m_U^2}{A_F T^2} - 12m_{D_2}^4 \log \frac{m_{D_2}^2}{A_F T^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 12m_{D_3}^4 \log \frac{m_{D_3}^2}{A_F T^2} + m_{H_2^0}^4 \log \frac{m_{H_2^0}^2}{A_B T^2} + 2m_{H^+}^4 \log \frac{m_{H^+}^2}{A_B T^2} \right] \right\}, \quad (4.94) \end{aligned}$$

avec la température critique T_{c_1} a donné par

$$T_{c_1} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - E^2/\lambda D}}, \quad (4.95)$$

et la condition du premier EWPT est

$$E \geq \frac{\lambda(T_{c_1})}{2}. \quad (4.96)$$

La seconde étape de transition de phase

Dans la seconde étape de la brisure de symétrie ($SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{v,u} U(1)_Q$), on a deux VeVs (v, u) à l'échelle de GeV, l'expression de potentiel effectif contient deux parties.

$$V_{\text{eff}}(v, u) = V_{\text{eff}}(v) + V_{\text{eff}}(u). \quad (4.97)$$

Le potentiel effectif à température finie a la forme :

$$V_{\text{eff}}(v, u) = D'(T^2 - T_0'^2)(v^2 + u^2) - E'T(v^3 + u^3) + \frac{\lambda'(T)}{4}(v^4 + u^4), \quad (4.98)$$

où cette transition de phase se produit à l'échelle de GeV. Les paramètres D' , E' , $T_0'^2$, $\lambda'(T)$ sont :

$$\begin{aligned} D' &= \frac{1}{24v^2} \left(6m_{W^\pm}^2 + 3m_Z^2 + 6m_t^2 + m_{H_1^0}^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{24u^2} (3m_{X^0}^2) + \frac{1}{24(v^2 + u^2)} (6m_{Y^\pm}^2 + 2m_{H^+}^2), \\ E' &= \frac{1}{12\pi v^3} \left(6m_{W^\pm}^3 + 3m_Z^3 + m_{H_1^0}^3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{12\pi u^3} (3m_{X^0}^3) + \frac{1}{12\pi(v^3 + u^3)} (6m_{Y^\pm}^3 + 2m_{H^+}^3), \\ T_0'^2 &= \frac{m_{H_1^0}^2}{4D'} - \frac{1}{32\pi^2 D' v^2} \left(6m_{W^\pm}^4 + 3m_Z^4 + m_{H_1^0}^4 - 12m_t^4 \right) \\ &\quad + \frac{1}{32\pi^2 D' u^2} (3m_{X^0}^4) + \frac{1}{32\pi^2 D' (v^2 + u^2)} (6m_{Y^\pm}^4 + 2m_{H^+}^4) \\ \lambda'(T) &= \frac{m_{H_1^0}^2}{2v^2} - \frac{1}{16\pi^2 v^4} \left(6m_{W^\pm}^4 \log \frac{m_{W^\pm}^2}{A_B T^2} + 3m_Z^4 \log \frac{m_Z^2}{A_B T^2} \right. \\ &\quad \left. + m_{H_1^0}^4 \log \frac{m_{H_1^0}^2}{A_B T^2} - 12m_t^4 \log \frac{m_t^2}{A_F T^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{16\pi^2 u^4} \left(3m_{X^0}^4 \log \frac{m_{X^0}^2}{A_B T^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{16\pi^2 (v^4 + u^4)} \left(6m_{Y^\pm}^4 \log \frac{m_{Y^\pm}^2}{A_B T^2} + 2m_{H^+}^4 \log \frac{m_{H^+}^2}{A_B T^2} \right), \end{aligned} \quad (4.99)$$

dans laquelle la température critique T_{c_2} est indiquée

$$T_{c_2} = \frac{T_0'}{\sqrt{1 - E'^2/\lambda' D'}}, \quad (4.100)$$

et la condition de la seconde étape de transition de phase s'écrit comme

$$E' \geq \frac{\lambda'(T_{c_2})}{2}. \quad (4.101)$$

Résultats numériques et discussion de la transition de phase pour le modèle économique 331 avec neutrinos de chiralité droite

Au début, on diagonalise le potentiel scalaire $V(\chi, \phi)$ et on a la matrice de bloc $M_{3 \times 3}$ dans la base $\Phi_1 = \chi^+ \chi$, $\Phi_2 = \phi^+ \phi$, $\Phi_3 = \phi^+ \chi$:

$$M_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3/2 \\ \lambda_3/2 & \lambda_2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad (4.102)$$

et les valeurs propres sont

$$V_1 = \pm \lambda_4/2, \\ V_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_3^2 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2}. \quad (4.103)$$

Maintenant, pour rendre notre étude claire et viable, il faut imposer des contraintes théoriques aux couplages sans dimension du potentiel scalaire $V_i (i = \overline{1, 2})$:

(1) Il faut que les valeurs propres soient réelles pour que les masses de toutes les particules soient réelles et positives.

(2) Pour préserver l'unitarité perturbative les V_i doivent vérifier les contraintes $0 < V_i < 8\pi$.

(3) Le potentiel doit être borné par le bas, ce qui impose les conditions de stabilité $V_i > 0 (i = \overline{1, 2})$.

Dans le modèle (331 RHN), le nouveau Higgs H_2^0 apparaît à partir de la première étape de transition de phase et dépend de $\text{VeV } \omega$ (quelque TeV), la deuxième étape également donne un Higgs H_1^0 qui est le Higgs du SM qui dépend de $\text{VeV } v = 246 \text{ GeV}$. On considère que les couplages de jauge des groupes $SU(3)_L$ et $U(1)_X$ sont équivalents à $g \simeq g_x = 0.65$ et les masses des particules du SM sont toujours constants $m_t = 172.44 \text{ GeV}$, $m_{W^\pm} = 80.4 \text{ GeV}$, $m_{Z^0} = 91.68 \text{ GeV}$ et $m_{H_1^0} = 125.43 \text{ GeV}$. Avant d'imposer les contraintes de la transition de phase forte du premier ordre, on prend des valeurs de couplages de Yukawa arbitrairement et on utilise les simulations de Monte-Carlo

$$h^t = 0.99, \quad 0.312 \leq h^U \leq 0.5712, \\ 0.301 \leq h_{22}^D \leq 0.559, \quad 0.3048 \leq h_{33}^D \leq 0.567. \quad (4.104)$$

On prend le $\text{VeV } \omega \sim 1.7 - 2.7 \text{ TeV}$ où les masses des quarks (U, D_2, D_3) doivent prendre des valeurs dans l'intervalle $600 - 700 \text{ GeV}$ et les constantes de couplage sont soumises aux contraintes suivantes :

$$4\lambda_2 - \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1} = 0.518, \quad 0.0119 \leq \lambda_1 \leq 0.065, \\ 0.099 \leq \lambda_4 \leq 0.524. \quad (4.105)$$

La figure [4.1](#) représente la région autorisée de 1^{ère} étape de la transition de phase pour le rapport R_1 en fonction de la masse de Higgs lourd et neutre $m_{H_2^0}$ où $T_{c1} \sim 1000 - 2000 \text{ GeV}$.

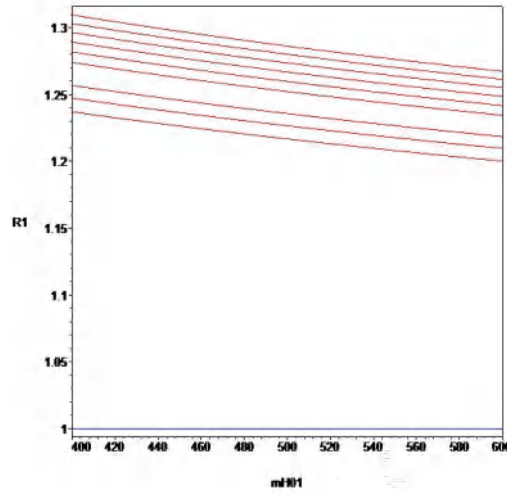


FIG. 4.1 – Le rapport $R_1 = \frac{v_{c1}}{T_{c1}} = \frac{2E}{\lambda(T_{c1})}$ en fonction de $m_{H_2^0}$ pour différentes valeurs de T_{c1} pour la région EWPT forte de premier ordre autorisée.

Dans les figures [4.2](#), [4.3](#), on trace respectivement le rapport R_1 en fonction de T_{c1} , et R_2 en fonction de T_{c2} , cela concerne la 1^{ère} et la 2^{ème} étape de transition de phase dans les régions autorisées de l'espace ayant des paramètres remplissant la transition de phase forte du premier ordre pour les deux étapes des SSBs.

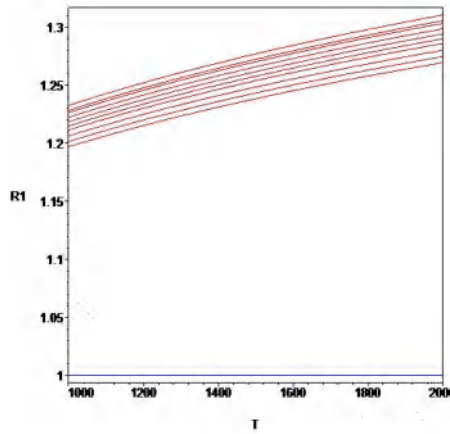


FIG. 4.2 – Le rapport $R_1 = \frac{v_{c1}}{T_{c1}} = \frac{2E}{\lambda(T_{c1})}$ en fonction de T_{c1} pour différentes valeurs de ω entre 1700 – 2500 GeV, pour la région EWPT du premier ordre forte autorisée. La première courbe à partir du haut est pour $\omega = 1700$ GeV.

La figure [4.4](#) représente la variation de masse de Higgs lourd chargé m_{h^\pm} en fonction du $m_{H_2^0}$, remplissant les conditions théoriques et la transition forte du premier ordre. pour plus de détails, les masses des particules ordinaires du modèle standard restant toujours dans la région autorisée du LHC, mais pour toutes les autres particules du modèle 331 RHN, nous fixons

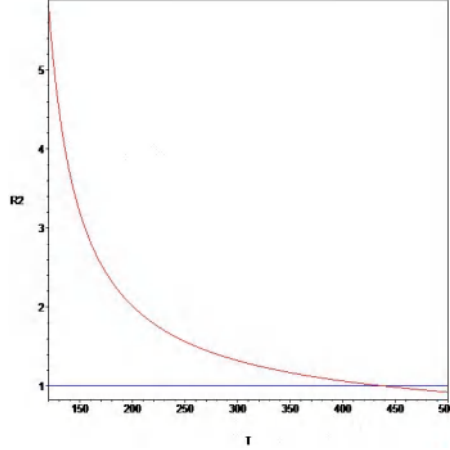


FIG. 4.3 – Le rapport $R_2 = \frac{v_{c2}}{T_{c2}} = \frac{2E'}{\lambda'(T_{c2})}$ en fonction de T_{c2} pour $v = 246$ GeV.

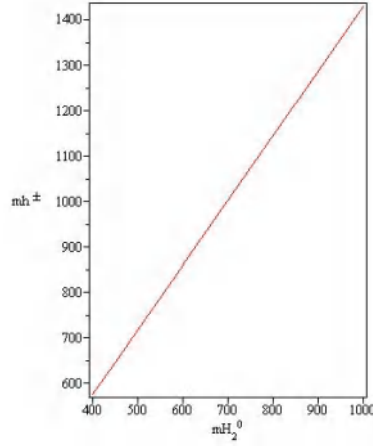


FIG. 4.4 – Variation de m_{h^\pm} en fonction de $m_{H_2^0}$

$$\lambda_1 = 0.028, \quad \lambda_2 = 0.13, \quad \lambda_3 = 0.00018, \quad \lambda_4 = 0.228,$$

$$\omega = 2150 \text{ GeV}, \quad v = 246 \text{ GeV} \quad \text{et} \quad \mu = 2.46 \text{ GeV}$$

on obtient

$$m_{H_2^0} \approx 508.78 \text{ GeV} \quad \text{et} \quad m_{H_1^0} \approx 125.43 \text{ GeV}.$$

En outre, lorsqu'on prend les couplages de Yukawa comme

$$h_{11}^U = 0.457, \quad h_{22}^D = 0.46, \quad h_{33}^D = 0.461,$$

où les quarks exotiques ont les masses suivantes : $m_{D_2} \approx 699.32$ GeV, $m_{D_3} \approx 700.84$ GeV et $m_U \approx 694.99$ GeV, donc environ 600 – 700 GeV et les autres particules prennent les masses ;

$$m_{Y^\pm} \approx 703.309 \text{ GeV}, \quad m_{X^0} \approx 698.69 \text{ GeV},$$

$$m_{Z'} \approx 844.86 \text{ GeV} \quad \text{et} \quad m_{H^\pm} \approx 730.66 \text{ GeV}.$$

4.2.3 La transition de phase électrofaible dans le modèle minimal 331

Le potentiel effectif $V_{\text{eff}}(\phi, T)$ du modèle RM331 contient les contributions des masses des particules ($H_1^0, H_2^0, J_1, J_2, J_3, W^\pm, V^\pm, U^{\pm\pm}, Z, Z', h^{\pm\pm}$ et t) et d'après les expressions (3.39, 4.77) prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}(\phi, T) &= \frac{\mu_\rho^2 v_\rho^2 + \mu_\chi^2 v_\chi^2}{2} + \frac{\lambda_1 v_\rho^4 + \lambda_2 v_\chi^4 + \lambda_3 v_\rho^2 v_\chi^2}{4} \\
&+ \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m_i^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right] \\
&+ \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i J_{B,F} \left(\frac{m_i^2}{T^2} \right), \tag{4.106}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{n}_{W^\pm, V^\pm, U^{\pm\pm}} &= 6, \quad \tilde{n}_{Z, Z'} = 3, \quad \tilde{n}_{h^{\pm\pm}} = 2, \\
\tilde{n}_{H_1^0, H_2^0} &= 1, \quad \tilde{n}_{J_1, J_2, J_3, t} = -12. \tag{4.107}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la transition de phase du premier ordre se produit en deux étapes.

La première étape de transition de phase

Le potentiel effectif à température finie pour la 1^{ère} étape de transition de phase ($SU(3)_L \otimes U(1)_N \xrightarrow{v_\chi} SU(2)_L \otimes U(1)_Y$) prend la forme compacte suivante

$$V_{\text{eff}}(v_\chi) = D(T^2 - T_0^2)v_\chi^2 - ETv_\chi^3 + \frac{\lambda(T)}{4}v_\chi^4, \tag{4.108}$$

où cette transition de phase se produit à l'échelle de TeV, les paramètres de l'équation précédente ont les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{24v_\chi^2} \left(6m_{V^\pm}^2 + 6m_{U^{\pm\pm}}^2 + 3m_{Z'}^2 + 6m_{J_1}^2 \right. \\
&\quad \left. + 6m_{J_2}^2 + 6m_{J_3}^2 + m_{H_2^0}^2 + 2m_{h^{\pm\pm}}^2 \right), \\
E &= \frac{1}{12\pi v_\chi^3} \left(6m_{V^\pm}^3 + 6m_{U^{\pm\pm}}^3 + 3m_{Z'}^3 + m_{H_2^0}^3 + 2m_{h^{\pm\pm}}^3 \right), \\
T_0^2 &= \frac{m_{H_2^0}^2}{4D} - \frac{1}{32D\pi^2 v_\chi^2} \left(6m_{V^\pm}^4 + 6m_{U^{\pm\pm}}^4 + 3m_{Z'}^4 \right. \\
&\quad \left. - 12m_{J_1}^4 - 12m_{J_2}^4 - 12m_{J_3}^4 + m_{H_2^0}^4 + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(T) = & \frac{m_{H_2^0}^2}{2v_\chi^2} - \frac{1}{16\pi^2 v_\chi^4} \left(6m_{V^\pm}^4 \log \frac{m_{V^\pm}^2}{A_B T^2} + 6m_{U^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{U^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} \right. \\
& + 3m_{Z'}^4 \log \frac{m_{Z'}^2}{A_B T^2} - 12m_{J_1}^4 \log \frac{m_{J_1}^2}{A_F T^2} \\
& - 12m_{J_2}^4 \log \frac{m_{J_2}^2}{A_F T^2} - 12m_{J_3}^4 \log \frac{m_{J_3}^2}{A_F T^2} \\
& \left. + m_{H_2^0}^4 \log \frac{m_{H_2^0}^2}{A_B T^2} + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{h^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} \right), \tag{4.109}
\end{aligned}$$

où la température critique T_{c1} est donnée par

$$T_{c1} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - E^2/\lambda D}}, \tag{4.110}$$

et la condition de 1^{ère} étape de transition de phase est

$$E \geq \frac{\lambda(T_{c1})}{2}. \tag{4.111}$$

La seconde étape de transition de phase

Le potentiel effectif à température finie a la forme suivante

$$V_{\text{eff}}(v_\rho) = D'(T^2 - T_0'^2)v_\rho^2 - E'Tv_\rho^3 + \frac{\lambda'(T)}{4}v_\rho^4, \tag{4.112}$$

où cette transition de phase à l'échelle de GeV, les paramètres D' , E' , $T_0'^2$, $\lambda'(T)$ sont

$$\begin{aligned}
D' = & \frac{1}{24v_\rho^2} \left(6m_{W^\pm}^2 + 6m_{U^{\pm\pm}}^2 + 3m_Z^2 + 6m_t^2 + m_{H_1^0}^2 + 2m_{h^{\pm\pm}}^2 \right), \\
E' = & \frac{1}{12\pi v_\rho^3} \left(6m_{W^\pm}^3 + 6m_{U^{\pm\pm}}^3 + 3m_Z^3 + m_{H_1^0}^3 + 2m_{h^{\pm\pm}}^3 \right), \\
T_0'^2 = & \frac{m_{H_1^0}^2}{4D'} - \frac{1}{32D'\pi^2 v_\rho^2} \left(6m_{W^\pm}^4 + 6m_{U^{\pm\pm}}^4 + 3m_Z^4 \right. \\
& \left. - 12m_t^4 + m_{H_1^0}^4 + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \right), \\
\lambda'(T) = & \frac{m_{H_1^0}^2}{2v_\rho^2} - \frac{1}{16\pi^2 v_\rho^4} \left(6m_{W^\pm}^4 \log \frac{m_{W^\pm}^2}{A_B T^2} + 6m_{U^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{U^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} \right. \\
& + 3m_Z^4 \log \frac{m_Z^2}{A_B T^2} - 12m_t^4 \log \frac{m_t^2}{A_F T^2} \\
& \left. + m_{H_1^0}^4 \log \frac{m_{H_1^0}^2}{A_B T^2} + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{h^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} \right), \tag{4.113}
\end{aligned}$$

où la température critique T_{c2} est donnée par

$$T_{c2} = \frac{T'_0}{\sqrt{1 - E'^2/\lambda' D'}}, \quad (4.114)$$

avec la condition de transition de phase

$$E' \geq \frac{\lambda'(T_{c2})}{2}. \quad (4.115)$$

Résultats numériques et discussion de la transition de phase pour le modèle minimal 331

Il faut d'abord diagonaliser le potentiel scalaire $V(\chi, \rho)$, pour cela, il est nécessaire de trouver les valeurs propres de la matrice de bloc $M_{3 \times 3}$ écrites dans la base $\Phi_1 = \chi^+ \chi$, $\Phi_2 = \rho^+ \rho$, $\Phi_3 = \chi^+ \rho$:

$$M_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3/2 \\ \lambda_3/2 & \lambda_2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad (4.116)$$

et les valeurs propres sont

$$V_1 = \pm \lambda_4/2, \\ V_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_3^2 - 4\lambda_1\lambda_2}}{2}. \quad (4.117)$$

Or, pour que notre étude soit claire et applicable, certaines contraintes théoriques doivent être imposées aux couplages sans dimension du potentiel scalaire :

(1) Les valeurs propres $V_i (i = 1, 2)$ doivent être réels de sorte que les masses de toutes les particules soient réelles et positives.

(2) Le potentiel doit être borné par le bas et cela va imposer les conditions de stabilité $V_i > 0 (i = \overline{1, 2})$.

(3) Afin de préserver l'unitarité perturbative, les valeurs propres V_i doivent vérifier les contraintes $0 < V_i < 8\pi$.

Dans ce modèle, on a deux étapes de transitions de phase du premier ordre et le spectre de masse des particules contient le boson de Higgs (du SM) de masse $m_{H_1^0} = 125$ GeV, le quark top $m_t = 172.44$ GeV, les masses des bosons ordinaires $m_{W^\pm} = 80.40$ GeV, $m_Z = 91.68$ GeV avec le VeV $v_\rho = 246$ GeV, les couplages de jauge $g \simeq g_N \simeq 0,65$. On fait un choix arbitraire pour les couplages de Yukawa et on utilise les simulations de Monte-Carlo après imposer les contraintes de la transition de phase forte du premier ordre

$$\lambda^t = 0.9875, \quad 0.3543 \leq \lambda^{J_1} \leq 0.535, \\ 0.3522 \leq \lambda^{J_2} \leq 0.5427, \quad 0.3675 \leq \lambda^{J_3} \leq 0.5656. \quad (4.118)$$

où les masses des quarks exotiques (J_1, J_2, J_3) prennent des valeurs comprises entre 600 et 700 GeV, ces contraintes sont obtenues sur les masses de quarks lorsque le VeV $v_\chi \sim 1.8 - 2.4$

TeV est utilisé pour éviter le pôle de Landau, on obtient les conditions suivantes sur les constants de couplage sans dimension du potentiel scalaire :

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \frac{\lambda_3^2}{4\lambda_2} &= 0.259, & 0.046 \leq \lambda_2 \leq 0.062, \\ 0.123 \leq \lambda_4 &\leq 0.367. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Dans la figure 4.5 on trace le rapport R_1 en fonction de la masse de Higgs lourd et neutre $m_{H_2^0}$ lorsque la valeur de $T_{c_1} \sim 1000 - 2000$ GeV.

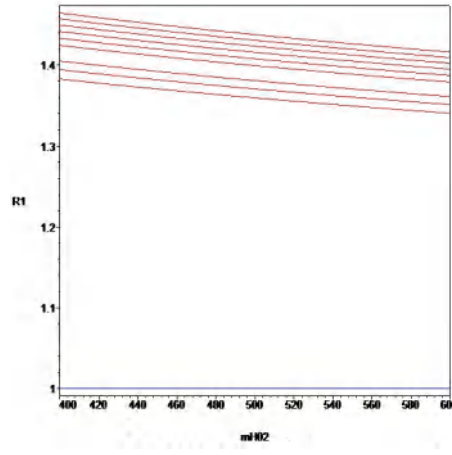


FIG. 4.5 – Le rapport $R_1 = \frac{v_{c_1}}{T_{c_1}} = \frac{2E}{\lambda(T_{c_1})}$ en fonction de $m_{H_2^0}$ pour différentes valeurs de T_{c_1} pour la région EWPT forte du premier ordre autorisée.

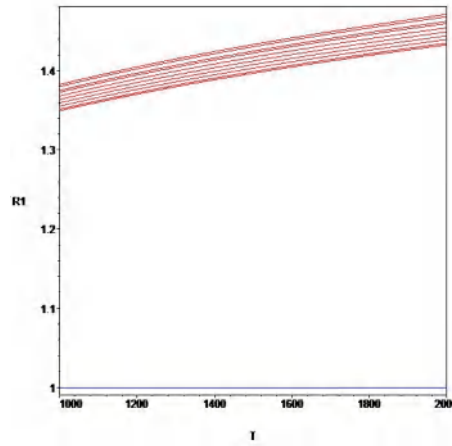


FIG. 4.6 – Le rapport $R_1 = \frac{v_{c_1}}{T_{c_1}} = \frac{2E}{\lambda(T_{c_1})}$ en fonction de T_{c_1} pour différentes valeurs de v_χ entre 1850 – 2400 GeV, pour la région EWPT du premier ordre forte autorisée. La première courbe à partir du haut est pour $v_\chi = 1850$ GeV.

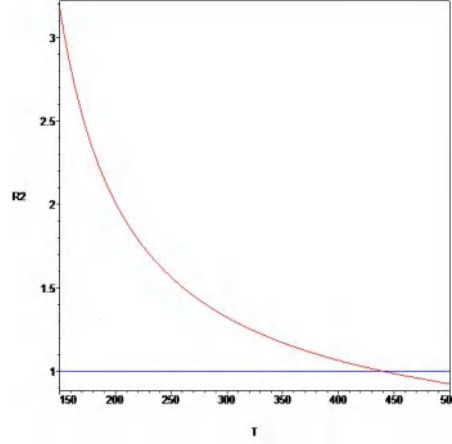


FIG. 4.7 – Le rapport $R_2 = \frac{v_{c_2}}{T_{c_2}} = \frac{2E'}{\lambda(T_{c_2})}$ en fonction de T_{c_2} pour $v_\rho = 246$ GeV.

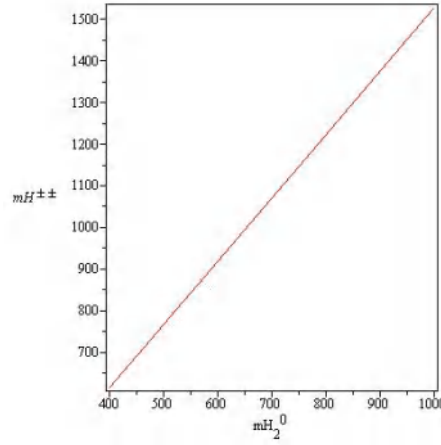


FIG. 4.8 – Variation de $m_{h^{\pm\pm}}$ en fonction de $m_{H_2^0}$.

Les figures [4.6](#), [4.7](#), représentent respectivement le rapport R_1 en fonction de T_{c_1} , et R_2 en fonction de T_{c_2} , pour les deux étapes de transition de phase. La figure [4.8](#) représente la variation de la masse de Higgs $m_{h^{\pm\pm}}$ en fonction du $m_{H_2^0}$. Les masses des particules ordinaires comme dans le SM, mais les masses d'autres nouvelles particules dépendantes de v_χ , v_ρ , les constants de couplage et les couplages de Yukawa pour les quarks exotiques par exemple, on prend

$$\lambda_1 = 0.261, \quad \lambda_2 = 0.049, \quad \lambda_3 = 0.018, \quad \lambda_4 = 0.228,$$

$$v_\chi = 2000 \text{ GeV}, \quad v_\rho = 246 \text{ GeV}$$

et les bosons de Higgs neutres ont les masses suivantes :

$$m_{H_2^0} \approx 508.78 \text{ GeV} \quad \text{et} \quad m_{H_1^0} \approx 125.43 \text{ GeV}$$

aussi si on prend les couplages de Yukawa :

$$\lambda_{11}^J = 0.445, \quad \lambda_{22}^J = 0.451, \quad \lambda_{33}^J = 0.468,$$

les quarks exotiques prennent les masses :

$$m_{J_1} \approx 629.32 \text{ GeV}, \quad m_{J_2} \approx 638.8 \text{ GeV} \quad \text{et} \quad m_{J_3} \approx 661.85 \text{ GeV}$$

et les masses des autres particules sont :

$$m_{U^{\pm\pm}} \approx 654.898 \text{ GeV}, \quad m_{V^{\pm}} \approx 649.94 \text{ GeV}, \\ m_{Z'} \approx 785.92 \text{ GeV}, \quad m_{h^{\pm\pm}} \approx 680.36 \text{ GeV}.$$

4.2.4 La transition de phase électrofaible dans le modèle compact 341

Le potentiel effectif de ce modèle est donné comme suit

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) = \frac{\mu_\eta^2 v_\eta^2 + \mu_\rho^2 v_\rho^2 + \mu_\chi^2 v_\chi^2}{2} \\ + \frac{\lambda_1 v_\eta^4 + \lambda_2 v_\rho^4 + \lambda_3 v_\chi^4 + \lambda_4 v_\eta^2 v_\rho^2 + \lambda_5 v_\eta^2 v_\chi^2 + \lambda_6 v_\rho^2 v_\chi^2}{4} \\ + \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m_i^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right] \\ + \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i J_{B,F} \left(\frac{m_i}{T} \right), \quad (4.120)$$

avec

$$\tilde{n}_h = 1, \quad \tilde{n}_{\text{ch arg é}} = 2, \quad \tilde{n}_{\text{quark}} = -12, \\ \tilde{n}_{Z, Z', Z'', K, K'} = 3, \quad \tilde{n}_{W, K_1, Y, X, V} = 6. \quad (4.121)$$

Dans ce travail, on considère que le potentiel effectif ne contient que les contributions des bosons de jauge, le quark top, les quarks exotiques, les trois Higgs neutres et les trois Higgs chargés. Nous avons trois étapes de brisure de symétrie, en d'autres mots en parlant de trois étapes de la transition de phase électrofaible.

La première étape de transition de phase

Le potentiel effectif à température finie de la première étape de transition de phase ($SU(4)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\chi} SU(3)_L \otimes U(1)_X$) a la forme compacte

$$V_{\text{eff}}(v_\chi) = D(T^2 - T_0^2)v_\chi^2 - ETv_\chi^3 + \frac{\lambda(T)}{4}v_\chi^4, \quad (4.122)$$

où cette transition de phase a lieu à l'échelle du TeV. Les paramètres de l'équation ci-dessus ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{24v_\chi^2} \left(6m_{V^{\pm\pm}}^2 + 6m_{Y^\pm}^2 + 6m_{X^\pm}^2 + 2m_{h_2^\pm}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2m_{h^{\pm\pm}}^2 + m_{H_3^0}^2 + 6m_{J_1}^2 + 6m_{J_2}^2 + 6m_{J_3}^2 \right), \\
E &= \frac{1}{12\pi v_\chi^3} \left(6m_{V^{\pm\pm}}^3 + 6m_{Y^\pm}^3 + 6m_{X^\pm}^3 + 2m_{h_2^\pm}^3 + 2m_{h^{\pm\pm}}^3 + m_{H_3^0}^3 \right), \\
T_0^2 &= \frac{\left(m_{H_3^0}^2 \right)}{4D} - \frac{1}{32D\pi^2 v_\chi^2} \left(6m_{Y^\pm}^4 + 6m_{V^{\pm\pm}}^4 + 6m_{X^\pm}^4 \right. \\
&\quad \left. - 12m_{J_1}^4 - 12m_{J_2}^4 - 12m_{J_3}^4 + m_{H_3^0}^4 + 2m_{h_2^\pm}^4 + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \right), \\
\lambda(T) &= \frac{\left(m_{H_3^0}^2 \right)}{2v_\chi^2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8\pi^2 v_\chi^2 (m_{H_3^0}^2)} \right) \left[6m_{Y^\pm}^4 \log \frac{m_{Y^\pm}^2}{A_B T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 6m_{X^\pm}^4 \log \frac{m_{X^\pm}^2}{A_B T^2} + 6m_{V^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{V^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} - 12m_{J_1}^4 \log \frac{m_{J_1}^2}{A_F T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 12m_{J_2}^4 \log \frac{m_{J_2}^2}{A_F T^2} - 12m_{J_3}^4 \log \frac{m_{J_3}^2}{A_F T^2} + m_{H_3^0}^4 \log \frac{m_{H_3^0}^2}{A_B T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2m_{h_2^\pm}^4 \log \frac{m_{h_2^\pm}^2}{A_B T^2} + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{h^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} \right] \right\}, \tag{4.123}
\end{aligned}$$

où la température critique T_{c_1} est donnée par

$$T_{c_1} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - E^2/\lambda D}}, \tag{4.124}$$

et la condition de transition de phase est

$$E \geq \frac{\lambda(T_{c_1})}{2}. \tag{4.125}$$

La seconde étape de transition de phase

Le potentiel effectif à température finie de la deuxième étape de transition de phase ($SU(3)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\eta} SU(2)_L \otimes U(1)_Y$) est indiqué par

$$V_{\text{eff}}(v_\eta) = D'(T^2 - T_0'^2)v_\eta^2 - E'Tv_\eta^3 + \frac{\lambda'(T)}{4}v_\eta^4, \tag{4.126}$$

où cette transition de phase se produit à l'échelle du TeV. Les paramètres D' , E' , T'_0 et $\lambda'(T)$ sont

$$\begin{aligned}
D' &= \frac{1}{24v_\eta^2} \left(3m_K^2 + 3m_{K'}^2 + 6m_{K_1^\pm}^2 + 6m_{Y^\pm}^2 + 3m_{Z'}^2 + 3m_{Z''}^2 \right. \\
&\quad \left. + 6m_{U_1}^2 + 6m_{D_2}^2 + 6m_{D_3}^2 + 2m_{h_1^\pm}^2 + 2m_{h_2^\pm}^2 + m_{H_2^0}^2 \right), \\
E' &= \frac{1}{12\pi v_\eta^3} \left(6m_{Y^\pm}^3 + 6m_{K_1^\pm}^3 + 3m_{Z'}^3 + 3m_{Z''}^3 \right. \\
&\quad \left. + 3m_K^3 + 3m_{K'}^3 + 2m_{h_1^\pm}^3 + 2m_{h_2^\pm}^3 + m_{H_2^0}^3 \right), \\
T_0'^2 &= \frac{m_{H_2^0}^2}{4D'} - \frac{1}{32\pi^2 D' v_\eta^2} \left(6m_{Y^\pm}^4 + 6m_{K_1^\pm}^4 + 3m_{Z'}^4 + 3m_{Z''}^4 + 3m_K^4 \right. \\
&\quad \left. + 3m_{K'}^4 - 12m_{U_1}^4 - 12m_{D_2}^4 - 12m_{D_3}^4 + 2m_{h_1^\pm}^4 + 2m_{h_2^\pm}^4 + m_{H_2^0}^4 \right), \\
\lambda'(T) &= \frac{m_{H_2^0}^2}{2v_\eta^2} \left[1 - \frac{1}{8\pi^2 m_{H_2^0}^2 v_\eta^2} \left(6m_{Y^\pm}^4 \log \frac{m_{Y^\pm}^2}{A_B T^2} + 6m_{K_1^\pm}^4 \log \frac{m_{K_1^\pm}^2}{A_B T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3m_{Z'}^4 \log \frac{m_{Z'}^2}{A_B T^2} + 3m_{Z''}^4 \log \frac{m_{Z''}^2}{A_B T^2} + 3m_K^4 \log \frac{m_K^2}{A_B T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3m_{K'}^4 \log \frac{m_{K'}^2}{A_B T^2} - 12m_{U_1}^4 \log \frac{m_{U_1}^2}{A_F T^2} - 12m_{D_2}^4 \log \frac{m_{D_2}^2}{A_F T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 12m_{D_3}^4 \log \frac{m_{D_3}^2}{A_F T^2} + 2m_{h_1^\pm}^4 \log \frac{m_{h_1^\pm}^2}{A_B T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2m_{h_2^\pm}^4 \log \frac{m_{h_2^\pm}^2}{A_B T^2} + m_{H_2^0}^4 \log \frac{m_{H_2^0}^2}{A_B T^2} \right) \right], \tag{4.127}
\end{aligned}$$

où la température critique T_{c_2} est donnée par

$$T_{c_2}' = \frac{T_0'}{\sqrt{1 - E'^2/\lambda' D'}}, \tag{4.128}$$

et la condition de transition de phase est

$$E' \geq \frac{\lambda'(T_{c_2})}{2}. \tag{4.129}$$

La troisième étape de transition de phase

Le potentiel effectif à température finie de la troisième étape de transition de phase ($SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow[v_\rho]{} U(1)_{\text{QED}}$) a la forme

$$V_{\text{eff}}(v_\rho) = D''(T^2 - T_0''^2)v_\rho^2 - E''T v_\rho^3 + \frac{\lambda''(T)}{4}v_\rho^4, \tag{4.130}$$

où cette transition de phase se produit à l'échelle du GeV et les coefficients D'' , E'' , T_0'' et $\lambda''(T)$ sont

$$\begin{aligned}
D'' &= \frac{1}{24v_\rho^2} \left(6m_{W^\pm}^2 + 6m_{K_1^\pm}^2 + 6m_{V^{\pm\pm}}^2 + 3m_Z^2 \right. \\
&\quad \left. + m_{H_1^0}^2 + 2m_{h_1^\pm}^2 + 2m_{h^{\pm\pm}}^2 + 6m_t^2 \right), \\
E'' &= \frac{1}{12\pi v_\rho^3} \left(6m_{W^\pm}^3 + 6m_{K_1^\pm}^3 + 6m_{V^{\pm\pm}}^3 \right. \\
&\quad \left. + 3m_Z^3 + m_{H_1^0}^3 + 2m_{h_1^\pm}^3 + 2m_{h^{\pm\pm}}^3 \right), \\
T_0''^2 &= \frac{m_{H_1^0}^2}{4D''} - \frac{1}{32D''\pi^2 v_\rho^2} \left(6m_{W^\pm}^4 + 6m_{K_1^\pm}^4 + 6m_{V^{\pm\pm}}^4 \right. \\
&\quad \left. + 3m_Z^4 + m_{H_1^0}^4 + 2m_{h_1^\pm}^4 + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 - 12m_t^4 \right), \\
\lambda''(T) &= \frac{m_{H_1^0}^2}{2v_\rho^2} - \frac{1}{16\pi^2 v_\rho^4} \left(6m_{W^\pm}^4 \log \frac{m_{W^\pm}^2}{A_B T^2} + 6m_{K_1^\pm}^4 \log \frac{m_{K_1^\pm}^2}{A_B T^2} \right. \\
&\quad + 6m_{V^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{V^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} + 3m_Z^4 \log \frac{m_Z^2}{A_B T^2} + m_{H_1^0}^4 \log \frac{m_{H_1^0}^2}{A_B T^2} \\
&\quad \left. + 2m_{h_1^\pm}^4 \log \frac{m_{h_1^\pm}^2}{A_B T^2} + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{h^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} - 12m_t^4 \log \frac{m_t^2}{A_F T^2} \right), \tag{4.131}
\end{aligned}$$

avec la température critique T_{c_3} est donnée par

$$T_{c_3} = \frac{T_0''}{\sqrt{1 - E''^2/\lambda'' D''}}, \tag{4.132}$$

et la condition de la troisième étape de transition de phase est

$$E'' \geq \frac{\lambda''(T_{c_3})}{2}. \tag{4.133}$$

Résultats numériques et discussion de la transition de phase pour le modèle compact 341

Avant de procéder, il faut d'abord diagonaliser le potentiel scalaire $V(\eta, \rho, \chi)$, nous devons trouver les valeurs propres de la matrice de bloc $M_{6 \times 6}$ écrites dans la base $\Phi_1 = \eta^+ \eta$, $\Phi_2 = \rho^+ \rho$, $\Phi_3 = \chi^+ \chi$, $\Phi_4 = \rho^+ \eta$, $\Phi_5 = \chi^+ \eta$, $\Phi_6 = \chi^+ \rho$:

$$M_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_4/2 & \lambda_5/2 \\ \lambda_4/2 & \lambda_2 & \lambda_6/2 \\ \lambda_5/2 & \lambda_6/2 & \lambda_3 \end{pmatrix} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{4.134}$$

Des calculs simples mais fastidieux donnent les valeurs propres suivantes

$$\begin{aligned}
V_1 &= \pm \frac{\lambda_9}{2}, \quad V_2 = \pm \frac{\lambda_8}{2}, \quad V_3 = \pm \frac{\lambda_7}{2}, \\
V_4 &= \left\{ - \left[\left(\begin{array}{c} -(\frac{2}{27}\beta^3 - \frac{\gamma\beta}{3} + \delta)/2 \\ 4(\gamma - \beta^3/3)^3 \\ +27(\frac{2}{27}\beta^3 - \frac{\gamma\beta}{3} + \delta)^2 \end{array} \right) /27 \right]^{1/2} /2 \right\}^{1/3} \\
&+ \left\{ + \left[\left(\begin{array}{c} -(\frac{2}{27}\beta^3 - \frac{\gamma\beta}{3} + \delta)/2 \\ 4(\gamma - \beta^3/3)^3 \\ +27(\frac{2}{27}\beta^3 - \frac{\gamma\beta}{3} + \delta)^2 \end{array} \right) /27 \right]^{1/2} /2 \right\}^{1/3}, \quad (4.135) \\
V_5 &= \frac{(-V_4 + \sqrt{\Delta})}{2}, \quad V_6 = \frac{(-V_4 - \sqrt{\Delta})}{2},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\beta &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\
\gamma &= ((\lambda_6^2 + \lambda_5^2 + \lambda_4^2)/4 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3), \\
\delta &= ((\lambda_6^2\lambda_1 + \lambda_5^2\lambda_2 + \lambda_4^2\lambda_3)/4 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_4\lambda_5\lambda_6)/3). \quad (4.136)
\end{aligned}$$

Pour faire une étude claire, viable et cohérente certaines contraintes théoriques doivent être imposées aux couplages sans dimension du potentiel scalaire $V_i (i = \overline{1, 6})$.

(1) Les valeurs propres V_i doivent être réels de telle sorte que les masses de toutes les particules soient réelles et positives (no ghost masses in the model).

(2) Le potentiel doit être borné par le bas et cela imposera les conditions de stabilité $V_i > 0 (i = \overline{1, 6})$.

(3) Pour préserver l'unitarité perturbative, V_i vérifie les contraintes $0 < V_i < 8\pi (i = \overline{1, 6})$.

Dans ce qui suit, nous identifions la masse de Higgs neutre le plus léger $m_{H_1^0} = 125.616$ GeV, la masse du quark top $m_t = 172.4466$ GeV, les masses des bosons de jauge W^\pm, Z , $m_{W^\pm} = 80.4$ GeV, $m_Z = 91.6838$ GeV, le VeV $v_\rho = 246$ GeV et le couplage de jauge $g_L \simeq g_x \simeq 0,65$. En prenant le couplage de Yukawa aléatoire et en utilisant une simulation de Monte-Carlo après avoir imposé la contrainte d'une transition de phase forte du premier ordre, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda_{33}^u &= 0.9913, \quad 0.385 \leq \lambda_{11}^J \leq 0.54, \quad 0.382 \leq \lambda_{22}^J \leq 0.536, \\
0.386 &\leq \lambda_{33}^J \leq 0.542, \quad 0.42 \leq \lambda_{11}^U \leq 0.61, \\
0.4 &\leq \lambda_{22}^D \leq 0.54, \quad 0.41 \leq \lambda_{33}^D \leq 0.56.
\end{aligned} \quad (4.137)$$

De plus, en utilisant le fait que les VeVs où $v_\chi \sim v_\eta \sim 2 - 5$ TeV (pour éviter le pôle de Landau [59], [60]), les masses des quarks exotiques $U, J_1, J_2, J_3, D_2, D_3$ sont de l'ordre de 600-700 GeV qui sont compatibles avec les résultats de LHC, donnant la bande inférieure

reproduisant les résultats expérimentaux et en imposant les contraintes théoriques mentionnées précédemment, on obtient les conditions suivantes sur les constantes de couplage du potentiel scalaire :

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda_2 + \frac{[\lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_6(\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_4 \lambda_5)]}{\lambda_5^2 - 4\lambda_1 \lambda_3} \right) = 0.259, \\
& 0.064 \leq \left(\lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) \leq 0.168, \\
& 0.1032 \leq \left(\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) \leq 0.294, \\
& 0.083 \leq (\lambda_1 + \lambda_3) \leq 0.231, \quad 0.00038 \leq ((\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2) \leq 0.0039, \\
& 0.156 \leq \lambda_7 \leq 0.31, \quad 0.16 \leq \lambda_8 \leq 0.27, \quad 0.167 \leq \lambda_9 \leq 0.32.
\end{aligned} \tag{4.138}$$

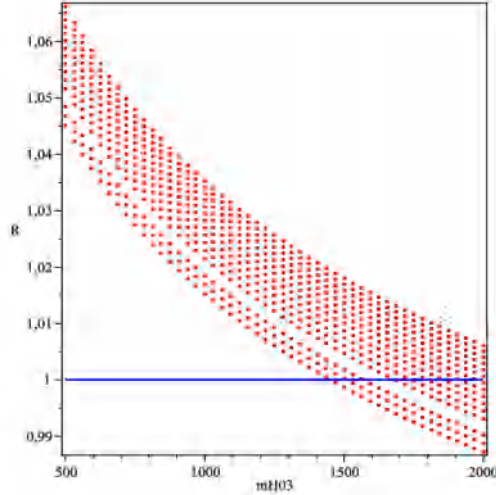


FIG. 4.9 – Le rapport $R_1 = \frac{v_{c_1}}{T_{c_1}} = \frac{2E}{\lambda(T_{c_1})}$ en fonction de $m_{H_3^0}$ pour différentes valeurs de T_{c_1} entre 1300 – 2000 GeV, pour la région EWPT du premier ordre forte autorisée. La première courbe à partir du bas est pour $T_{c_1} = 1300$ (diagramme de densité).

Figure 4.9 représente la région autorisée de la première étape de la transition de phase EWPT pour le rapport $R_1 = \frac{2E}{\lambda(T_{c_1})} = \frac{v_{c_1}}{T_{c_1}}$ en fonction de la masse de Higgs lourd et neutre $m_{H_3^0}$, où la température critique T_{c_1} prend des valeurs dans l'intervalle $T_{c_1} \sim 1200 - 2000$ GeV. Il est important de noter que la bande de confiance (la densité tracée) vient du fait qu'à une valeur donnée $m_{H_3^0}$. On a encore beaucoup de choix de couplages scalaires λ_i combinés pour donner la même valeur du rapport R_1 . Figure 4.10 affiche la variation du rapport R_1 dans la région autorisée de l'espace des paramètres en termes de la température critique T_{c_1} remplissant la transition de phase forte du premier ordre EWPT.

La figure 4.11 est comme la figure 4.10 mais pour la deuxième étape de EWPT, où $T_{c_2} \sim 989 - 1549$ GeV. Notez que dans ce cas la région autorisée est plus étroite que celle de la première étape, cela est dû au fait que l'espace des paramètres est plus contraint. Figure

[4.12](#) est similaire à la figure [4.10](#) mais pour la troisième étape de EWPT, où $T_{c_3} \sim 120 - 235$ GeV. À titre d'illustration et pour se faire une idée : tout d'abord, tous les résultats du SM, à savoir les masses du boson de Higgs, des fermions chargés, des quarks, des bosons de jauge. Ensuite, en restant toujours dans la région autorisée du LHC pour toutes les autres particules du modèle compact 341, on fixe

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0741, \quad \lambda_2 = 0.335, \quad \lambda_3 = 0.05, \quad \lambda_4 = 0.084, \quad \lambda_5 = 0.01, \\ \lambda_6 &= 0.107, \quad \lambda_7 = 0.195, \quad \lambda_8 = 0.209, \quad \lambda_9 = 0.228, \\ v_\chi &= 2200 \text{ GeV}, \quad v_\eta = 2100 \text{ GeV} \quad \text{et} \quad v_\rho = 246 \text{ GeV} \end{aligned}$$

on obtient

$$m_{H_3^0} \approx 602.781 \text{ GeV}, \quad m_{H_2^0} \approx 464.87 \text{ GeV} \quad \text{et} \quad m_{H_1^0} \approx 125.456 \text{ GeV}.$$

De plus, si l'on prend les couplages de Yukawa comme

$$\begin{aligned} \lambda_{33}^u &= 0.9913, \quad \lambda_{22}^D = 0.445, \quad \lambda_{33}^D = 0.468, \quad \lambda_{11}^U = 0.453, \\ \lambda_{11}^J &= 0.456, \quad \lambda_{22}^J = 0.453, \quad \lambda_{33}^J = 0.457, \end{aligned}$$

tous les quarks exotiques ont une masse environ 600 – 700 GeV.

Maintenant, pour $1200 \text{ GeV} \leq T_{c_1} \leq 2000 \text{ GeV}$, $1000 \text{ GeV} \leq T_{c_2} \leq 1900 \text{ GeV}$ et $120 \text{ GeV} \leq T_{c_3} \leq 250 \text{ GeV}$, on a $R_i = \frac{2E_i}{\lambda_i(T_c)} = \frac{v_{c_i}}{T_{c_i}} \geq 1$, ($i = 1, 2, 3$), comme le montre les figures. 10-12, ce rapport remplit la condition de la transition de phase du premier ordre pour les trois étapes des SSBs.

Les figures [4.13](#), [4.14](#) et [4.15](#) représentent la variation des masses de Higgs lourdes chargées ($m_{h_1^\pm}$, $m_{h_2^\pm}$) et double chargé $m_{h^{\pm\pm}}$ du modèle en fonction de la masse de Higgs lourd et neutre $m_{H_3^0}$ remplissant les contraintes théoriques et la transition forte du premier ordre EWPT.

Le chapitre suivant exprime le rôle du sphaléron dans le scénario de baryogénèse électrofaible.

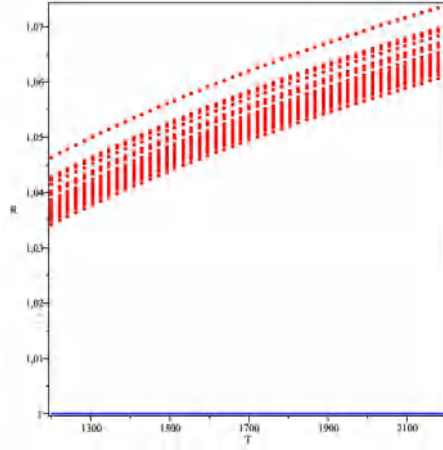


FIG. 4.10 – Le rapport $R_1 = \frac{v_{c1}}{T_{c1}} = \frac{2E}{\lambda(T_{c1})}$ en fonction de T_{c1} pour différentes valeurs de v_χ entre 1700 – 2250 GeV, pour la région EWPT forte du premier ordre autorisée. La première courbe à partir du haut est pour $v_\chi = 1700$ GeV (diagramme de densité).

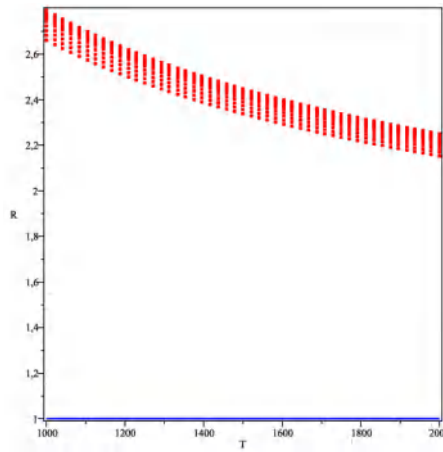


FIG. 4.11 – Le rapport $R_2 = \frac{v_{c2}}{T_{c2}} = \frac{2E'}{\lambda'(T_{c2})}$ en termes de T_{c2} pour différentes valeurs de v_η entre 1700 – 2150 GeV, pour la région EWPT forte du premier ordre autorisée. La première courbe à partir du bas est pour $v_\eta = 1700$ GeV (diagramme de densité).

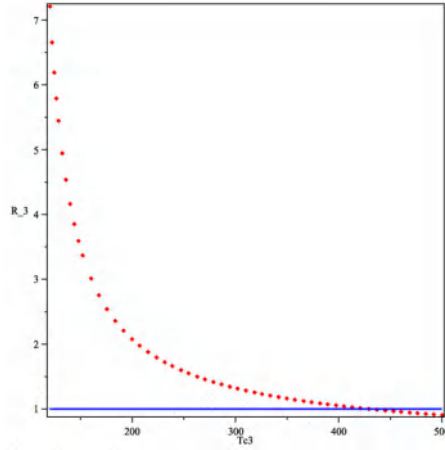


FIG. 4.12 – Le rapport $R_3 = \frac{v_{c3}}{T_{c3}} = \frac{2E'}{\lambda''(T_{c3})}$ en fonction de T_{c3} pour $v_\rho = 246$ GeV.

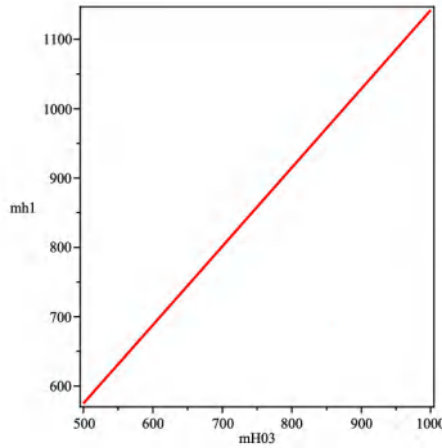
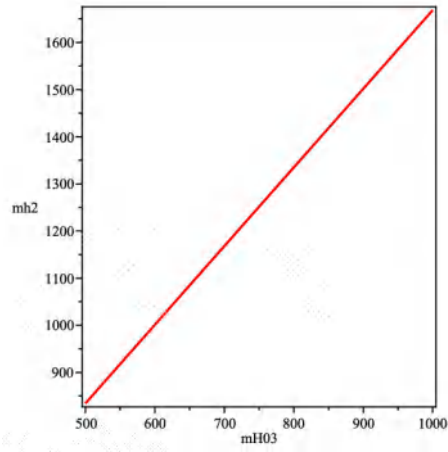
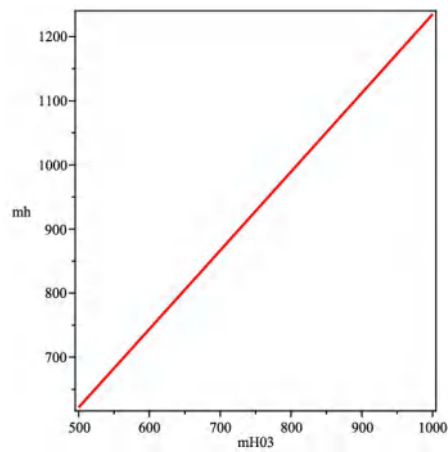


FIG. 4.13 – Variation de $m_{h_1^\pm}$ en fonction de $m_{H_3^0}$ vérifiant l'EWPT et les contraintes théoriques.

FIG. 4.14 – Variation de $m_{h_2^\pm}$ en fonction de $m_{H_3^0}$.FIG. 4.15 – Variation de $m_{h^{\pm\pm}}$ en fonction de $m_{H_3^0}$.

Chapitre 5

Les Sphalérons et la Violation du Nombre Baryonique

Comme il est bien mentionné au-dessus, la baryogénèse électrofaible est une possibilité d'expliquer l'asymétrie baryonique de l'univers (BAU). À partir de l'univers primordial à symétrie baryon-antibaryon, le BAU non nul peut être généré si les trois conditions de Sakharov sont satisfaites, le mécanisme d'EWBG lié à la violation de B et CP d'une manière hors d'équilibre pour produire un BAU. Ce mécanisme exige que l'univers en expansion connaisse une période de transition de phase de premier ordre au cours de laquelle des bulles de symétrie électrofaible brisée nucléant, croissent, entrent en collision et fusionnent au milieu des régions de phase symétrique. Dans ces régions, la violation du nombre baryonique B se produira rapidement, mais elle s'arrêtera essentiellement dans les bulles de phase brisée, cela donne une relation entre processus hors d'équilibre et la violation de B, la violation de CP viendra d'après les interactions entre les fermions qui deviennent massifs à travers la brisure spontanée de la symétrie électrofaible et les parois des bulles, cela fournit une relation entre la physique hors d'équilibre et la violation de CP pendant l'expansion cosmologique.

Les scénarios de baryogénèse peuvent expliquer l'asymétrie observée bien qu'il reste quelques problèmes tels que l'élimination de l'asymétrie générée par les processus sphalérons, la forme de la barrière énergétique entre les vides topologiquement distincts et surtout la hauteur est importante pour l'étude de la baryogénèse puisqu'il déterminera le taux de transition. Si la hauteur de la barrière énergétique séparant les vides est très grande par rapport à la température, une transition d'une VeV nulle à une autre non nulle peut être réalisée par l'effet tunnel quantique appelé instanton, donc la violation du nombre de baryons est négligeable.

Il existe des solutions instables et indépendantes du temps des équations de champs appelés sphalérons qui sont des points de selle, ils ont été trouvés pour la première fois par Dashen, Hasslacher et Neveu [80] mais la relation du sphaléron à la topologie de l'espace de configuration et de la violation du baryon a été fondée par Klinkhammer et Manton [81]. À des températures finies, les sphalérons se produisent lorsque les fluctuations thermiques avec une énergie supérieure à la hauteur de la barrière entre les deux vides dégénérés peuvent classiquement traverser la barrière qui conduisent à une violation non supprimée du nombre de baryons.

Il convient de noter que les sphalérons sont l'un des ingrédients les plus importants dans

l'étude d'EWBG perçoit que dans l'univers primordial, le taux du sphaléron contrôle le taux de la densité du nombre baryonique. Dans la phase brisée, le taux de violation du baryon est principalement déterminé par l'énergie du sphaléron, un calcul précis de l'énergie du sphaléron est important pour évaluer la viabilité de la baryogénèse électrofaible, dans ce scénario, l'asymétrie matière-antimatière est générée lors de la transition de phase électrofaible et si le sphaléron est en équilibre pendant la transition de phase, il éliminera l'asymétrie du baryon.

Comme il est bien établi dans les références [82, 83, 84, 85, 86] et afin de décrire correctement la baryogénèse électrofaible, nous avons besoin de connaître les aspects suivants :

- le type de la transition de phase (première, second ordre).
- la nucléation des bulles et les températures critiques fournissent des informations sur l'occurrence de la transition de phase.
- le taux du sphaléron est nécessaire pour générer l'asymétrie du nombre des baryons.

D'après le Réf. [82], le taux du sphaléron Γ par unité de temps est lié à l'énergie du sphaléron ε via la relation

$$\frac{\Gamma}{V} = \alpha^4 T^4 \exp(-\varepsilon/T) \quad (5.1)$$

avec T la température, ε l'énergie du sphaléron, $\alpha = 1/30$ une constante et V le volume de la région d'EWPT, $V = \frac{4\pi r^3}{3} \sim \frac{1}{T^3}$. La constante d'Hubble décrit le taux d'expansion cosmologique à la température T [87], [88]

$$H^2 = \frac{\pi^2 g T^4}{90 M^2}, \quad g = 106.75, \quad M = 2.43 \times 10^{18} \quad (5.2)$$

Dans notre travail, nous avons calculé l'énergie du sphaléron ε_{sph} , le taux du sphaléron Γ et nous avons comparé ce dernier avec la constante d'Hubble H . Afin d'éviter l'élimination de l'asymétrie du baryon après la transition de phase, il faut supposer que le taux du sphaléron Γ doit être égal à la constante d'Hubble H , bien sûr Γ doit être plus grand que le paramètre H à $T > T_c$ et plus petit à $T < T_c$.

On prend n'importe quelles valeurs des masses de particules qui satisfont la condition de transition de phase EWPT pour calculer les énergies du sphaléron.

5.1 Le Taux du Sphaléron dans les Deux Modèles 331

5.1.1 Le taux du sphaléron dans le modèle économique 331 avec neutrinos de chiralité droite

L'énergie du sphaléron

Pour calculer l'énergie ε , on commence par la densité lagrangienne du modèle RHN331 :

$$\mathcal{L}_{\text{jauge-Higgs}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\chi, \phi), \quad (5.3)$$

et on obtient l'énergie ε après la dérivation de la densité hamiltonienne

$$\varepsilon = \int d^3x \left[(D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + V_{\text{eff}}(\chi, \phi) \right], \quad (5.4)$$

utilisant le potentiel effectif à température finie et les VeVs (ω, v, μ) , l'équation (5.4) peut être réécrite sous la forme

$$\varepsilon = 4\pi \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\nabla\omega)^2 + \frac{1}{2}(\nabla(v, u))^2 + V_{\text{eff}}(\chi, \phi, T) \right], \quad (5.5)$$

à l'aide de l'approximation de champ statique [82]

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial(v, u)}{\partial t} = 0, \quad (5.6)$$

avec les équations du mouvement des VeVs (ω, v, μ) qui conduisent aux expressions suivantes de l'énergie du sphaléron pour chaque étape de transition de phase :

$$\varepsilon_{\text{sph}}(SU(3), SU(2)) = 4\pi \int \left[\frac{1}{2} \frac{d^2(\omega, v, \mu)}{dr^2} + V_{\text{eff}}(\omega, v, \mu, T) \right] r^2 dr. \quad (5.7)$$

où $\varepsilon_{\text{sph}}(SU(3))$, $\varepsilon_{\text{sph}}(SU(2))$ sont les énergies du sphaléron pour les transitions de phase respectivement : $SU(3)_L \xrightarrow{\omega} SU(2)_L$, $SU(2)_L \xrightarrow{v, \mu} U(1)_{QED}$.

Le taux du sphaléron

Pour estimer le taux du sphaléron Γ comme dans le Réf [82], nous utilisons l'approximation statique qui suppose que les VeVs du champ de Higgs ne changent pas d'un point à un autre dans l'univers, c'est-à-dire $\nabla(\omega, v, \mu) = 0$ correspondant à l'extrême de V_{eff} lorsqu'on utilise les équations de champ, on montre que ces dernières sont réduites à

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(\omega, v, \mu)}{\partial(\omega, v, \mu)} = 0. \quad (5.8)$$

Ainsi, les énergies du sphaléron de l'équation (5.7) sont simplifiées comme :

$$\varepsilon_{\text{sph}}(SU(3), SU(2)) = \frac{4\pi r^3}{3} V_{\text{eff}}(\omega, v, \mu, T) \Big|_{\omega_m, v_m, \mu_m}. \quad (5.9)$$

avec ω_m, v_m, μ_m sont les VeVs au maximum du potentiel effectif, en utilisant les éqs (4.93, 4.98) ensemble avec $\nabla(\omega, v, \mu) = 0$ et (5.1), les expressions suivantes sont obtenues pour le taux du sphaléron (des deux étapes) :

$$\Gamma = \begin{cases} \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E^4}{4\lambda_T^3}\right) & \text{pour } SU(3) \rightarrow SU(2), \\ \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E^4}{4\lambda_T^3}\right) & \text{pour } SU(2) \rightarrow U(1). \end{cases} \quad (5.10)$$

5.1.2 Le taux de sphaléron dans le modèle minimal 331

L'énergie du sphaléron

L'énergie ε est calculée à partir de la densité lagrangienne du modèle RHN331 :

$$\mathcal{L}_{\text{jauge-Higgs}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu \chi)^+ (D^\mu \chi) + (D_\mu \rho)^+ (D^\mu \rho) - V(\chi, \rho), \quad (5.11)$$

et on obtient l'énergie ε après la dérivation de la densité hamiltonienne

$$\varepsilon = \int d^3x \left[(D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) + (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) + V_{\text{eff}}(\chi, \rho) \right], \quad (5.12)$$

utilisant le potentiel effectif à température finie et les VeVs (ω, v, μ) , l'équation (5.12) peut être réécrite sous la forme

$$\varepsilon = 4\pi \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla v_\chi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla v_\rho)^2 + V_{\text{eff}}(\chi, \rho, T) \right], \quad (5.13)$$

en se servant de l'approximation du champ statique [82]

$$\frac{\partial v_\chi}{\partial t} = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} = 0, \quad (5.14)$$

avec les équations du mouvement de VeVs (v_χ, v_ρ) qui conduisent aux expressions suivantes de l'énergie du sphaléron pour chaque étape de transition de phase :

$$\varepsilon_{\text{sph}}(SU(3), SU(2)) = 4\pi \int \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 v_{\chi, \rho}}{dr^2} + V_{\text{eff}}(v_{\chi, \rho}, T) \right] r^2 dr. \quad (5.15)$$

où $\varepsilon_{\text{sph}}(SU(3))$ et $\varepsilon_{\text{sph}}(SU(2))$ sont les énergies du sphaléron pour les transitions de phase respectivement : $SU(3)_L \xrightarrow{v_\chi} SU(2)_L$, $SU(2)_L \xrightarrow{v_\rho} U(1)_{QED}$.

Le taux du sphaléron

Pour évaluer le taux du sphaléron Γ comme dans le Réf [82], on utilise l'approximation statique qui suppose que les VeVs de champ de Higgs ne changent pas d'un point à l'autre dans l'univers, c'est-à-dire $\nabla v_{\chi, \rho} = 0$ correspondant à l'extrême de V_{eff} en utilisant les équations de champ, nous montrons que ces dernières sont réduites à :

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(v_{\chi, \rho})}{\partial v_{\chi, \rho}} = 0. \quad (5.16)$$

De cette façon, les énergies du sphaléron de l'équation (5.15) sont simplifiées comme :

$$\varepsilon_{\text{sph}}(SU(3), SU(2)) = \frac{4\pi r^3}{3} V_{\text{eff}}(v_{\chi, \rho}, T) \Big|_{v_{\chi_m}, v_{\rho_m}}. \quad (5.17)$$

avec v_{χ_m} , v_{ρ_m} sont les VeVs au maximum du potentiel effectif, en utilisant les eqs (4.108, 4.112), ensemble avec $\nabla v_{\chi, \rho} = 0$ et (5.1) on obtient les expressions suivantes pour le taux du sphaléron :

$$\Gamma = \begin{cases} \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E^4}{4\lambda_T^3}\right) & \text{pour } SU(3) \rightarrow SU(2), \\ \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E^4}{4\lambda_T^3}\right) & \text{pour } SU(2) \rightarrow U(1). \end{cases} \quad (5.18)$$

5.1.3 Discussion sur les résultats de l'approximation statique pour les deux modèles 331

Noter que, pour les particules lourdes des modèles (331RNH, RM331) dans les régions autorisées où les transitions de phase fortes et du premier ordre se produisent, les quantités E , E' et λ , λ' sont presque constantes. Par conséquent, tel qu'illustré dans les figures 5.2 et 5.3, le taux du sphaléron Γ devient une fonction linéaire de T .

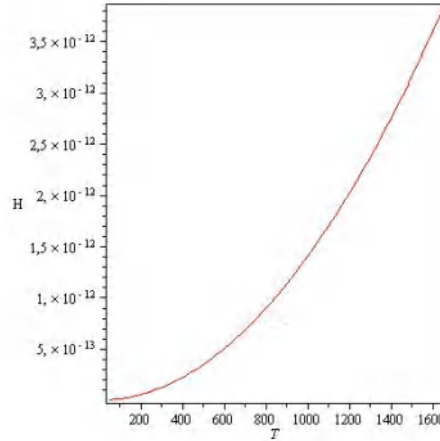


FIG. 5.1 – La constante d'Hubble H en fonction de T .

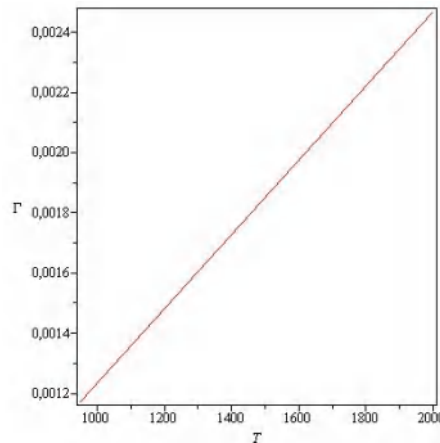


FIG. 5.2 – Le taux du sphaléron Γ en fonction de T pour la 1^{ère} étape de la transition de phase.

Les résultats numériques (pour les deux étapes de transition de phase) montrent que pour les températures inférieures à la température critique T_c où l'univers passe à la phase de brisure de symétrie, le taux du sphaléron Γ est encore beaucoup plus élevé que la constante d'Hubble $\Gamma_{SU(3)} \sim 10^{-3} \gg H \sim 10^{-12}$, $\Gamma_{SU(2)} \sim 10^{-4} \gg H \sim 10^{-13}$ et cela conduit à l'effacement de la violation de B. Conséquemment, dans l'approximation statique, la condition

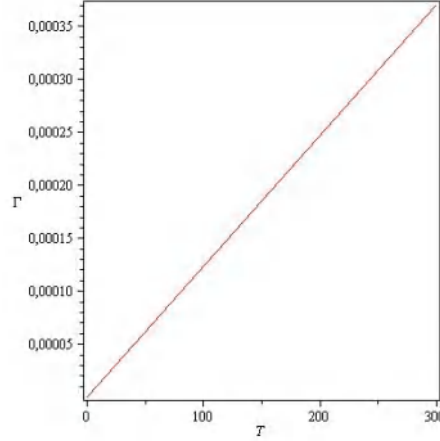


FIG. 5.3 – Le taux du sphaléron Γ en fonction de T pour la 2^{ème} étape de la transition de phase.

du découplage de sphaléron n'est pas remplie au cours des deux étapes de la transition de phase.

5.2 Le Taux du Sphaléron dans le Modèle Compact 341

5.2.1 L'énergie du sphaléron

Nous avons le lagrangien des bosons de jauge et les Higgs

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{jauge-Higgs}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu\chi)^\dagger(D^\mu\chi) \\ & + (D_\mu\eta)^\dagger(D^\mu\eta) + (D_\mu\rho)^\dagger(D^\mu\rho) - V(\chi, \eta, \rho), \end{aligned} \quad (5.19)$$

puis, on dérive la densité hamiltonienne et en déduit la forme finale suivante de l'énergie ε :

$$\varepsilon = \int d^3x \left[(D_\mu\chi)^\dagger(D^\mu\chi) + (D_\mu\eta)^\dagger(D^\mu\eta) + (D_\mu\rho)^\dagger(D^\mu\rho) + V(\chi, \eta, \rho) \right], \quad (5.20)$$

au moyen des Éqs. (4.122), (4.126) et (4.130) des potentiels effectifs à température finie avec les VeVs (v_χ, v_η, v_ρ) , on peut réécrire Éq. (5.20) comme

$$\varepsilon = 4\pi \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\nabla v_\chi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla v_\eta)^2 + \frac{1}{2}(\nabla v_\rho)^2 + V_{\text{eff}}(\chi, \eta, \rho, T) \right], \quad (5.21)$$

et en utilisant l'approximation du champ statique

$$\frac{\partial v_\chi}{\partial t} = \frac{\partial v_\eta}{\partial t} = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} = 0, \quad (5.22)$$

on obtient

$$\varepsilon = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_i v_\chi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i v_\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i v_\rho)^2 + V_{\text{eff}}(\chi, \eta, \rho, T) \right]. \quad (5.23)$$

Nous avons trois équations du mouvement pour les VeVs (v_χ, v_η, v_ρ)

$$\ddot{v}_{\chi,\eta,\rho} + \nabla^2 v_{\chi,\eta,\rho} - \frac{\partial V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho}, T)}{\partial v_\chi} = 0, \quad (5.24)$$

avec

$$\ddot{v}_{\chi,\eta,\rho} = \frac{\partial^2 v_{\chi,\eta,\rho}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.25)$$

et on peut réécrire les Éqs. (5.24) dans les coordonnées sphériques sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 v_{\chi,\eta,\rho}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv_{\chi,\eta,\rho}}{dr} - \frac{\partial V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho}, T)}{\partial v_{\chi,\eta,\rho}} = 0. \quad (5.26)$$

Selon les équations du mouvement des VeVs (v_χ, v_η, v_ρ) , les expressions suivantes des énergies du sphaléron ε sont obtenues pour chaque étape de la transition de phase :

$$\varepsilon_{\text{sph}}(SU(4), SU(3), SU(2)) = 4\pi \int \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 v_{\chi,\eta,\rho}}{dr^2} + V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho}, T) \right] r^2 dr. \quad (5.27)$$

5.2.2 Le taux du sphaléron

L'approximation statique

On suppose que $\nabla v_{\chi,\eta,\rho} = 0$ et dans les équations des champs nous avons

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho})}{\partial v_{\chi,\eta,\rho}} = 0, \quad (5.28)$$

où les expressions d'énergies du sphaléron dans les Éqs. (5.27) sont simplifiés comme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{sph}}(SU(4), SU(3), SU(2)) &= 4\pi \int V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho}, T) r^2 dr \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho}, T) \Big|_{v_{\chi_m, \eta_m, \rho_m}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec $v_{\chi_m, \eta_m, \rho_m}$ sont les VeVs au maximum du potentiel effectif. En utilisant les Eqs. (4.122), (4.126) et (4.130) ensemble avec Eq. (5.1), on obtient les expressions de taux du sphaléron pour les trois étapes de la transition de phase

$$\Gamma = \begin{cases} \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E^4}{4\lambda^3}\right) & \text{pour } SU(4) \rightarrow SU(3), \\ \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E'^4}{4\lambda'^3}\right) & \text{pour } SU(3) \rightarrow SU(2), \\ \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E''^4}{4\lambda''^3}\right) & \text{pour } SU(2) \rightarrow U(1). \end{cases} \quad (5.30)$$

Notez que les expressions ci-dessus dépendent des quantités E (E' , E'') et λ , (λ' , λ''), ces dernières sont presque constantes pour les particules lourdes du modèle 341.

La figure 5.4 représente le taux du sphaléron en fonction de T pour les trois étapes de SSB, il est clair que Γ_{sph} est une fonction linéaire de T .

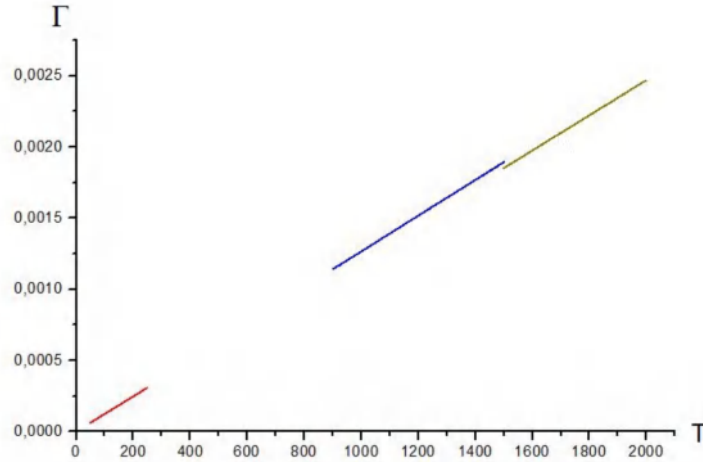


FIG. 5.4 – Le taux du Sphaléron Γ en fonction de la température T pour les trois étapes de la transition de phase.

Pour mieux comprendre, prenons un exemple : dans la 1^{ère} étape si $T = 1700$ GeV $< T_{c1} \sim 1800$ GeV, $\Gamma \sim 2.0985 \times 10^{-3} \gg H$ et pour la 2^{ème} étape si $T = 900$ GeV $< T_{c2} \sim 1000$ GeV, $\Gamma \sim 1.1401 \times 10^{-3} \gg H$. De même pour la 3^{ème} étape si $T = 70$ GeV $< T_{c3} \sim 122$ GeV, $\Gamma \sim 8.654 \times 10^{-4} \gg H$.

Donc, dans l'approximation statique lorsque $T < T_c$ le taux du sphaléron Γ est toujours supérieure à H (comme les deux modèles 331 précédents), la violation de B a été éliminée et la condition de découplage du sphaléron ne peut être remplie.

L'approximation de la paroi mince

Comme nous l'avons vu, le potentiel effectif varie en fonction du champ de Higgs à diverses températures. Si la température à un emplacement spatial est supérieure à la température de nucléation de bulle T_1 , le potentiel $V_{\text{eff}}(\phi)$ n'a qu'un minimum à $\phi = 0$ et cette région est symétrique. Quand T tombe sous T_1 , le deuxième minimum de $V_{\text{eff}}(\phi)$ se forme et la barrière du potentiel qui sépare deux minima apparaît progressivement. La transition de phase se produit microscopiquement, ce qui entraîne une minuscule bulle de la phase brisée dans laquelle le champ de Higgs ϕ acquiert une valeur moyenne de vide non nulle mais lorsque la température est inférieure à T_c , le deuxième minimum est le plus profond correspondant à un vrai vide, tandis que le premier minimum devient le faux vide.

À divers endroits de l'univers, les minuscules bulles du vrai vide peuvent se produire de façon aléatoire et s'étendre au milieu d'un faux vide. Si le taux du sphaléron est plus élevé que le taux d'expansion de l'univers, les bulles peuvent s'effondrer et se fusionner jusqu'à ce que le vrai vide remplisse tout l'espace. Cependant, si la condition de découplage du sphaléron est remplie après la transition, le taux du sphaléron doit être inférieur au taux d'expansion cosmologique lorsque T va de T_c à T_0 , à laquelle le premier minimum de $V_{\text{eff}}(\phi)$ disparaît complètement.

Supposons que dans une bulle de transition de phase on a

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho})}{\partial v_{\chi,\eta,\rho}} = C_{\chi,\eta,\rho} = \text{const}, \quad (5.31)$$

où $v_{\chi,\eta,\rho}$ sont le deuxième minimum du potentiel effectif V_{eff} dans les bulles de transition de phase $SU(4) \rightarrow SU(3)$, $SU(3) \rightarrow SU(2)$ et $SU(2) \rightarrow U(1)$ respectivement. On utilise Éq. (5.31) de sorte à simplifier les équations du champ des VeVs (v_χ, v_η, v_ρ) (5.26) :

$$\frac{d^2 v_{\chi,\eta,\rho}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv_{\chi,\eta,\rho}}{dr} = C_{\chi,\eta,\rho} \quad (5.32)$$

avec les conditions aux limites

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_{\chi,\eta,\rho}(r) = 0, \quad \left. \frac{dv_{\chi,\eta,\rho}(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (5.33)$$

où dans le cas $r \rightarrow \infty$ (les emplacements spatiaux sont en phase symétrique) ou $r \rightarrow 0$ (les emplacements spatiaux sont en phase brisée). Dans les parois des bulles, les solutions des Éqs. (5.32) et (5.33) sont données par (82)

$$v_{\chi,\eta,\rho} = \frac{C_{\chi,\eta,\rho}}{6} r^2 - \frac{A_{\chi,\eta,\rho}}{r} + B_{\chi,\eta,\rho}, \quad (5.34)$$

avec $A_{\chi,\eta,\rho}$, $B_{\chi,\eta,\rho}$ sont des constantes d'intégration, la continuité des champs scalaires dans une bulle se traduit par les systèmes d'équations suivantes

$$\begin{cases} \frac{C_{\chi,\eta,\rho}}{6} R_{\chi,\eta,\rho}^2 - A_{\chi,\eta,\rho}/R_{\chi,\eta,\rho} + B_{\chi,\eta,\rho} = v_{\chi_c,\eta_c,\rho_c}, \\ \frac{C_{\chi,\eta,\rho}}{6} (R_{\chi,\eta,\rho} + \Delta l_{\chi,\eta,\rho})^2 - A_{\chi,\eta,\rho}/(R_{\chi,\eta,\rho} + \Delta l_{\chi,\eta,\rho}) + B_{\chi,\eta,\rho} = 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

Pour être plus précis, si le sphaléron a un rayon $R_{\chi,\eta,\rho}$ et une épaisseur $\Delta l_{\chi,\eta,\rho}$ la solution $v_{\chi,\eta,\rho}$ peut être exprimé comme

$$v_{\chi,\eta,\rho}(r) = \begin{cases} v_{\chi_c,\eta_c,\rho_c} & \text{quand } r \leq R_{\chi,\eta,\rho}, \\ \frac{C_{\chi,\eta,\rho}}{6} r^2 - \frac{A_{\chi,\eta,\rho}}{r} + B_{\chi,\eta,\rho} & \text{quand } R_{\chi,\eta,\rho} < r \leq R_{\chi,\eta,\rho} + \Delta l_{\chi,\eta,\rho}, \\ 0 & \text{quand } R_{\chi,\eta,\rho} + \Delta l_{\chi,\eta,\rho} < r. \end{cases} \quad (5.36)$$

Ici v_{χ_c,η_c,ρ_c} représente le deuxième minimum pour les trois étapes de la transition de phase. Afin d'aller plus loin, la constante $C_{\chi,\eta,\rho}$ peut être approximée comme

$$C_{\chi,\eta,\rho} \sim \frac{\Delta V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho})}{\Delta v_{\chi,\eta,\rho}}, \quad (5.37)$$

où $\Delta V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}(v_{\chi_c,\eta_c,\rho_c})$ et $\Delta v_{\chi,\eta,\rho} = v_{\chi_c,\eta_c,\rho_c}$. On utilise (5.36) pour calculer l'énergie de sphaléron, les paramètres $A_{\chi,\eta,\rho}$, $B_{\chi,\eta,\rho}$, $R_{\chi,\eta,\rho}$ et $\Delta l_{\chi,\eta,\rho}$ sont déterminés à partir de l'équation (5.35) et la supposition qui à la température critique le taux du sphaléron est égale à la constante d'Hubble $\Gamma(T_c) = H(T_c)$, cette supposition repose sur l'exigence d'éviter le lavage du BAU généré après une transition de phase.

Les tableaux suivants contiennent nos résultats pour chaque étape de transition de phase :

* $SU(4) \rightarrow SU(3)$

Table 9 : Le taux du sphaléron de la transition de phase $SU(4) \rightarrow SU(3)$.

T (GeV)	$R \times 10^{-4} (\text{GeV}^{-1})$	$R/\Delta l$	$\varepsilon_{\text{sph}} (\text{GeV})$	$\Gamma (\text{GeV})$	$H \times 10^{-12} (\text{GeV})$	Γ/H
$T_1=1823$	13.53	13.53	130.991	4.8456×10^{11}	4.6769	1.03608×10^{23}
1822.55	13.66	13.66	5561.90	2.4609×10^{10}	4.67460	5.2646×10^{21}
1822	13.91	13.91	17398.496	3.7084×10^7	4.6717	7.9379×10^{18}
1821.66	14.26	14.26	37224.660	694.4841	4.67004	1.4871×10^{14}
1821	14.77	14.77	73520.097	0.15209×10^{-5}	4.666	3.2591×10^5
1820.15	15.02	15.02	94779.621	1.2621×10^{-11}	4.6623	2.7071613
$T_c=1820$	15.04	15.04	96584.402	4.66178×10^{-12}	4.66153	1
1819.5	15.08	15.08	1.0024×10^5	6.15942×10^{-13}	4.6589	0.1322
1816.5	17	17	3.5743×10^5	1.8077×10^{-74}	4.6436	3.893×10^{-63}
1811.5	19.5	19.5	9.6997×10^5	1.47604×10^{-221}	4.61809	3.1962×10^{-210}
1808.5	20.5	20.5	1.3062×10^6	1.0667×10^{-302}	4.6028	2.3176×10^{-291}
1800.5	24.5	24.5	2.9409×10^6	2.2034×10^{-698}	4.5621	4.8191×10^{-687}
$T_0=1796.625$	28.5	28.5	3.5624×10^6	3.7557×10^{-850}	4.5425	8.2678×10^{-839}

* $SU(3) \rightarrow SU(2)$ Table 10 : Le taux du sphaléron de la transition de phase $SU(3) \rightarrow SU(2)$.

T (GeV)	$R \times 10^{-5} (\text{GeV}^{-1})$	$R/\Delta l$	$\varepsilon_{\text{sph}} (\text{GeV})$	$\Gamma (\text{GeV})$	$H \times 10^{-12} (\text{GeV})$	Γ/H
$T_1=1309.35$	4.5	4.5	356.036	2.8493×10^{11}	2.4126	1.1809×10^{23}
1308.75	6.5	6.5	9114.86562	3.53154×10^8	2.4104	1.465×10^{20}
1308	9.5	9.5	24853.26568	2091.05642	2.407	8.6848×10^{14}
1307.45	11.5	11.5	37728.1	0.10967	2.4056	4.558×10^{10}
1307	13.5	13.5	52725.6231	0.000001127	2.4040	4.6909×10^5
1306.05	15.25	15.25	67660	1.1832×10^{-11}	2.4005	4.9291
$T_c=1306$	15.4957	15.4957	69745.6822	2.3913×10^{-12}	2.4003	1
1304	16.5	16.5	79519.7988	1.222×10^{-15}	2.3929	0.000509
1300	20.5	20.5	1.24768×10^5	7.7243×10^{-31}	2.3783	3.2477×10^{-19}
1292	25.1	25.1	2.0045×10^5	1.54001×10^{-56}	2.3491	6.5556×10^{-45}
1288	27.5	27.5	3.6675×10^5	7.9538×10^{-113}	2.3346	3.4069×10^{-101}
1283	29.3	29.3	3.8103×10^5	3.84098×10^{-118}	2.3165	1.658×10^{-106}
$T_0=1280.02$	30.05	30.05	5.228×10^5	1.5305×10^{-166}	2.3058	6.6379×10^{-155}

* $SU(2) \rightarrow U(1)$ Table 11 : Le taux du sphaléron de la transition de phase $SU(2) \rightarrow U(1)$.

T (GeV)	$R \times 10^{-4}(\text{GeV}^{-1})$	$R/\Delta l$	ε_{sph} (GeV)	$\Gamma(\text{GeV})$	$H \times 10^{-14}(\text{GeV})$	Γ/H
$T_1=194.94$	11.97	0.0797	113.10236	3.11674×10^{10}	5.34795	5.8279×10^{23}
190	12.38	0.082	769.0308	9.477784×10^8	5.08034	1.8655×10^{22}
186	12.88	0.085	1842.2126	2.65383×10^6	4.8686	5.45081×10^{19}
180	13.55	0.09	3711.6434	56.98872	4.5596	1.2498×10^{15}
172	14.61	0.097	7571.4492	3.74658×10^{-9}	4.1633	89989.6529
168	15	0.099	9244.024	6.0881×10^{-14}	3.9719	1.5327
$T_c=167.5$	15.01	0.1	9288.5772	3.94764×10^{-14}	3.9483	1
166	15.5	0.103	11571.412	2.52572×10^{-20}	3.8779	6.513×10^{-7}
162	18	0.11	25953.662	1.2244×10^{-59}	3.6933	3.3151×10^{-46}
158	21	0.14	48330.991	6.41307×10^{-123}	3.5131	1.8254×10^{-109}
156	22.5	0.15	61322.283	8.53893×10^{-161}	3.4248	2.4932×10^{-147}
152	25.5	0.17	90533.54437	9.2283×10^{-249}	3.2514	2.8382×10^{-235}
$T_0=151.89$	27	0.18	1.06654×10^5	4.815×10^{-295}	3.2467	1.4832×10^{-281}

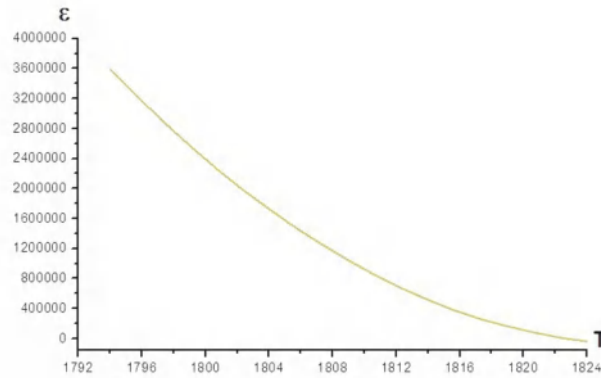


FIG. 5.5 – L'énergie du sphaléron ε en fonction de T pour la 1^{ère} étape de la transition de phase.

En analysant les figures [5.5](#) à [5.13](#), on a observé un comportement général pour toutes les étapes d'EWPT $SU(4) \rightarrow SU(3)$, $SU(3) \rightarrow SU(2)$ et $SU(2) \rightarrow U(1)$: comme T est inférieur de la température de nucléation de la bulle T_1 où la transition de phase forte et du premier ordre commence, le rayon R et l'énergie ε de la bulle sont augmentés tandis que le taux du sphaléron Γ diminue de telle sorte que le rapport $\frac{\Gamma}{H} < 1$ est plus grand (respectivement. plus petit) que 1 pour $T_c < T < T_1$ (respectivement. $T_0 < T < T_c$). Pour être plus précis, on remarque que les symétries de jauge respectivement $SU(4) \rightarrow SU(3)$, $SU(3) \rightarrow SU(2)$ et $SU(2) \rightarrow U(1)$ commencent à se rompre spontanément à la température de nucléation de la bulle $T_1 \sim 1823, 1309.35, 194.94$ GeV ($\hbar = c = k = 1$). Puis, une petite bulle avec rayon $R \sim 13.53 \times 10^{-4}, 4.5 \times 10^{-5}, 11.97 \times 10^{-4}$ GeV⁻¹ et l'épaisseur $\Delta l \sim 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-4}$ (GeV⁻¹) apparaît et stocke les VeVs $v_{\chi,\eta,\rho}$ non nuls à l'intérieur. Il est très important de mentionner que si les deux minima sont séparés par une barrière du potentiel, la transition de phase se produira avec des bulles de nucléation régies par

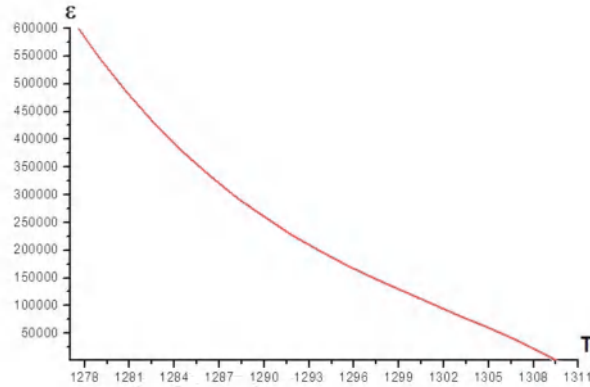


FIG. 5.6 – L'énergie du sphaléron ε en fonction de T pour la 2^{ème} étape de la transition de phase.

la canalisation thermique d'un minimum local à $\phi = 0$ (faux vide), à un minimum plus profond à $\phi \neq 0$ (vrai vide). L'équilibre non thermique est induit par les parois de bulles en expansion rapide à travers le plasma cosmologique et la violation de B découle de la transition du sphaléron rapide dans la phase symétrique. À cette température, le taux du sphaléron Γ obtient les valeurs 4.8456×10^{11} , 2.8493×10^{11} , 3.11674×10^{10} GeV, qui sont plus grandes que les valeurs de $H \sim 4.6769 \times 10^{-12}$, 2.4126×10^{-12} , 5.34795×10^{-12} GeV. Lorsque la température diminue de $T_1 \sim 1823$, 1309.35 , 194.94 GeV à $T_c \sim 1820$, 1306 , 167.5 GeV, le volume de la bulle et l'énergie augmentent et diminuent respectivement. De plus, le taux Γ baisse, mais le rapport $\frac{\Gamma}{H}$ reste supérieur à 1 permettant aux bulles d'entrer en collision et de remplir tout l'espace. Ce phénomène est très violent conduisant à un écart énorme de l'équilibre thermique. La production de baryon a lieu dans le voisinage des murs de bulles en expansion générant la violation CP et C. En fait, pour une illustration, si $T = 1822$, 1308 , 180 GeV, $R = 13.91 \times 10^{-4}$, 9.5×10^{-5} , 13.55×10^{-4} , $\varepsilon = 17398.496$, 24853.266 , 3711.643 GeV, $\Gamma = 3.7084 \times 10^7$, 2091.05642 , 56.98872 GeV et $\frac{\Gamma}{H} = 7.9379 \times 10^{18}$, 8.6848×10^{14} , 1.2498×10^{15} . Bien sûr, comme il a été supposé auparavant à $T = T_c$ le taux du sphaléron $\Gamma = H = 4.66178 \times 10^{-12}$, 2.3913×10^{-12} , 3.94764×10^{-14} GeV. Lorsque T devient plus petit que T_c ($T = 1811.5$, 1300 , 158 GeV) Γ diminue rapidement et le rapport $\frac{\Gamma}{H}$ devient inférieur à 1 ($\frac{\Gamma}{H} = 3.19962 \times 10^{-210}$, 3.2444×10^{-19} , 1.8254×10^{-109}). Lorsque la température atteint la température de fin de transition $T_0 = 1796.625$, 1280.02 , 151.89 GeV, il ne reste que la phase brisée et les transitions du sphaléron $SU(4) \rightarrow SU(3)$, $SU(3) \rightarrow SU(2)$ et $SU(2) \rightarrow U(1)$ sont totalement fermés.

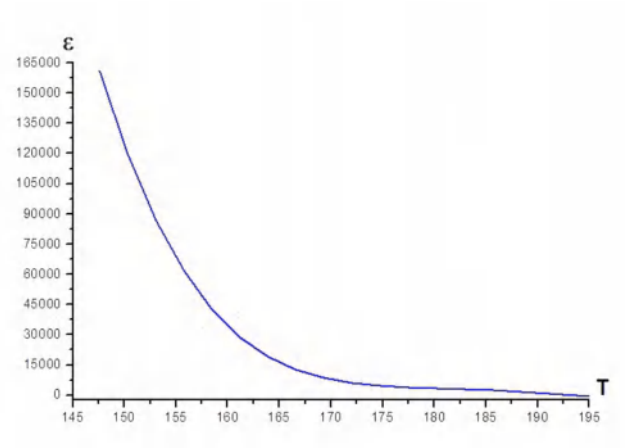


FIG. 5.7 – L'énergie du sphaléron ε en fonction de T pour la 3^{ème} étape de la transition de phase.

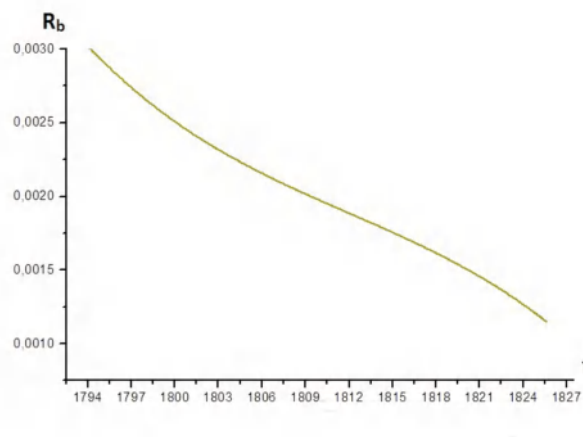


FIG. 5.8 – Les rayons des bulles R_b en fonction de T pour la 1^{ère} étape de la transition de phase.

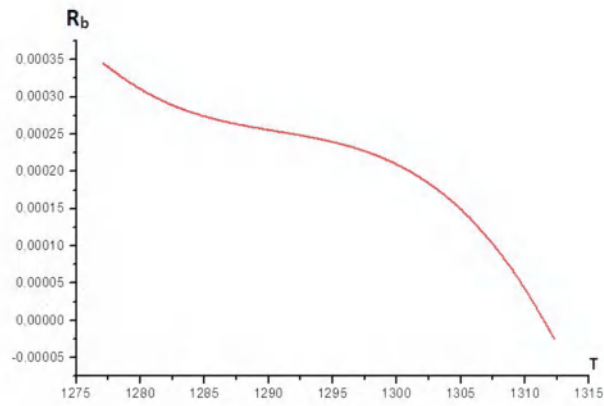


FIG. 5.9 – Les rayons des bulles R_b en fonction de T pour la 2^{ème} étape de la transition de phase.

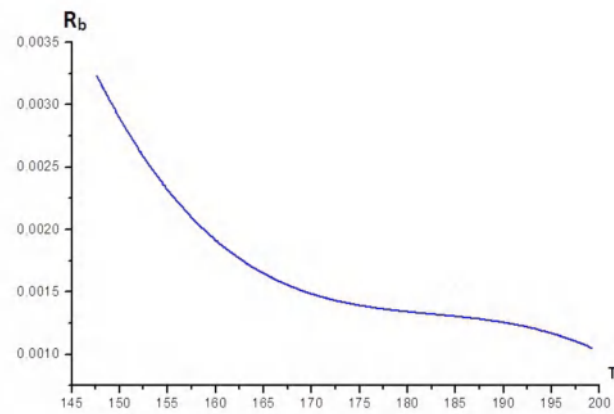


FIG. 5.10 – Les rayons des bulles R_b en fonction de T pour la 3^{ème} étape de la transition de phase.

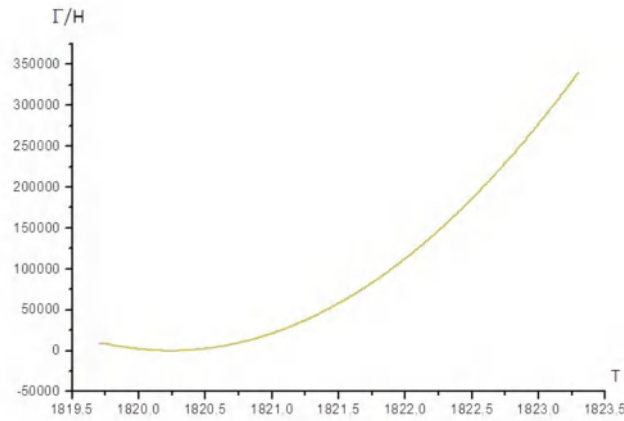


FIG. 5.11 – Le rapport $\frac{\Gamma}{H}$ en fonction de T pour la 1^{ère} étape de la transition de phase.

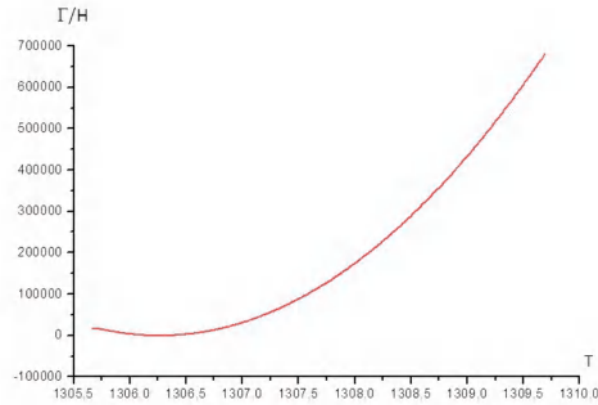


FIG. 5.12 – Le rapport $\frac{\Gamma}{H}$ en fonction de T pour la 2^{ème} étape de la transition de phase.

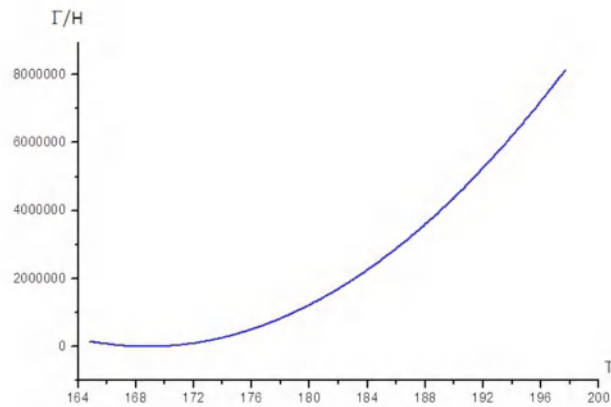


FIG. 5.13 – Le rapport $\frac{\Gamma}{H}$ en fonction de T pour la 3^{ème} étape de la transition de phase.

Chapitre 6

Conclusion

Les travaux menés au cours de cette thèse ont permis d'étudier le problème de la baryogénèse électrofaible EWBG à basse énergie par la transition de phase électrofaible et nous avons également expliqué la baryogénèse par les sphalérons dans les trois modèles 331 RHN, RM331 et le compact 341.

Tout d'abord, nous avons vu qu'actuellement dans le cadre du SM que les scénarios de baryogénèse à la transition de phase ne peuvent pas être réalisés et la raison principale de l'échec de la EWBG dans ce modèle est la faiblesse de la transition de phase, aussi le SM comporte plusieurs questions ouvertes qui n'ont pas été expliquées à son niveau, c'est ce qui a poussé les physiciens à proposer des modèles au-delà du SM. Tandis que nous étudions le spectre des particules dans les trois modèles mentionnés, ces modèles contiennent toutes les particules qui ont des masses lourdes par rapport aux masses de particules ordinaires, alors que les deux modèles (331 RHN, RM331) sont basés sur les mêmes groupes de jauge ou autrement dit la brisure spontanée de la symétrie se fait en deux étapes de transition de phase, la première à l'échelle de TeV et la seconde est la même du SM à l'échelle de GeV. Néanmoins, la brisure spontanée de la symétrie du modèle 341 se déroule en trois étapes et nous avons trois VeVs, les deux premières à l'échelle de TeV et la dernière $v_\rho = 246$ GeV (du SM).

Grâce à l'expression du potentiel effectif qui est fonction des masses des particules et de la température, nous avons trouvé que la transition de phase électrofaible pour chaque étape (des trois modèles) est satisfaite lorsque la condition $\frac{2E}{\lambda} \geq 1$ est remplie. En outre, nous avons abordé le problème de la baryogénèse par l'approche des sphalérons où nous avons calculé le taux du sphaléron puis l'avons comparé à la constante d'Hubble H qui décrit l'expansion de notre univers à des températures T . Nous avons ensuite vu qu'il existe deux façons de calculer le taux du sphaléron, la première est l'approximation statique, il est noté que cette approche ne peut pas donner des résultats cohérents pour le rapport $\frac{\Gamma}{H}$ dans le cas de $T < T_c$, par contre la deuxième approximation de la paroi mince le cela.

Enfin, nous avons pu comprendre et expliquer comment se produit la baryogénèse électrofaible et qu'elle est liée à la transition de phase électrofaible, cette dernière doit être forte et du premier ordre pour atteindre la troisième condition de Sakharov.

Bibliographie

- [1] F. Xavier Désert, *Cours de Cosmologie* (Laboratoire D’Astrophysique Observatoire De Grenoble).
- [2] E. W. Kolb and M. S. Turner, *the Early Universe* (Addison-Wesley Reading MA, 1989).
- [3] M. Dine and A. Kusenko, *Mod. Phys. Rev.* **76**, 1 (2004) ; K. Enqvist and A. Mazumdar, *Phys. Rep.* **380**, 99 (2003).
- [4] Y. V. Galaktionov, *Rep. Prog. Phys.* **65**, 1243 (2002).
- [5] G. W. Anderson and L. J. Hall, *Phys. Rev. D* **25**, 2685 (1992).
- [6] A. D. Sakharov, *JETP Lett.* **5**, 24 (1967).
- [7] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, 2005).
- [8] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **155**, 36 (1985).
- [9] A. I. Bochkarov and M. E. Shaposhnikov, *Mod. Phys. Lett. A* **2**, 417 (1987).
- [10] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B* **466**, 189 (1996).
- [11] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2887 (1996).
- [12] CMS Collab. (S. Chatrchyan *et al.*), *Phys. Lett. B* **716**, 30 (2012).
- [13] P. Huet and E. Sather, *Phys. Rev. D* **51**, 379 (1995).
- [14] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, 1996) ; T. P. Cheng, L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford University Press, 1982) ; M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Harper Collins, 1995).
- [15] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961) ; S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967) ; A. Salam et J. C. Ward, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 168 (1964).
- [16] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory* (Taylor & Francis, 1993) ; W. N. C. Cottingham and D. A. Greenwood, *An introduction to the Standard Model of particle physics* (Cambridge University Press, 1998) ; F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory* (Wiley-Interscience Publication, 1984) ; J. C. Taylor, *Gauge Theory of Weak Theories* (Cambridge University Press, Cambridge 1979) ; Ellwanger, *From the Universe to the Elementary Particles : A First Introduction to Cosmology and the Fundamental Interactions* (Springer-Verlag, Berlin, 2012).
- [17] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (Cambridge University Press, 2008).

- [18] P. A. Zyla *et al.* (PDG), Review of Particle Physics, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2020, 083C01 (2020).
- [19] S. L. Galashov, J. Iliopoulos, L. Maiani, *Phys. Rev. D* **2**, 1285 (1970).
- [20] J. J. Aubert *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1406 (1974).
- [21] J. E. Augustin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1406 (1974).
- [22] D. Kazakov, S. Lavignac and J. Dalibard, *Particle Physics Beyond the Standard Model* (Elsevier, 2006).
- [23] M. Bastero-Gil, C. Hugonie, S. F. King, D. P. Roy and S. Vempati, *Phys. Lett. B* **489**, 359 (2000).
- [24] A. Menon, D. E. Morrissey and C. E. M. Wagner, *Phys. Rev. D* **70**, 035005 (2004).
- [25] S. W. Ham, S. K. Oh, C. M. Kim, E. J. Yoo and D. Son, *Phys. Rev. D* **70**, 075001 (2004).
- [26] V. Zarikas, *Phys. Lett. B* **384**, 180 (1996).
- [27] I. J. R. Aitchison, arXiv :hep-ph/0505105v1.
- [28] M. Stephan, arXiv :hep-ph/9709356v7.
- [29] P. Ramond, *Field Theory A Modern Primer* (Addison-Wesley, 1990).
- [30] W. A. Ponce, Y. Giraldo and L. A. Sanchez, *Phys. Rev. D* **67**, 075001 (2003).
- [31] P. V. Dong, H. N. Long and D. V. Soa, *Phys. Rev. D* **75**, 073006 (2007).
- [32] J. Ferreira, P. Pinheiro, C. A. de S. Pires and P. S. Rodrigues da Silva, *Phys. Rev. D* **84**, 095019 (2011).
- [33] A. G. Dias, P. R. D. Pinheiro, C. A. de S. Pires and P. S. Rodrigues da Silva, *Ann. Phys.* **349**, 232 (2014).
- [34] F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **46**, 410 (1992).
- [35] P. H. Frampton, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2889 (1992).
- [36] R. Foot, O. F. Hernandez, F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **47**, 4158 (1993).
- [37] M. Singer, J. W. F. Valle and J. Schechter, *Phys. Rev. D* **22**, 738 (1980); H. N. Long, *Phys. Rev. D* **53**, 437 (1996); *Phys. Rev. D* **54**, 4691 (1996); *Mod. Phys. Lett. A* **13**, 1865 (1998).
- [38] R. Foot, H. N. Long and T. A. Tran, *Phys. Rev. D* **50**, R34 (1994).
- [39] P. V. Dong, L. N. Hoang, D. T. Nhung and D. V. Soa, *Phys. Rev. D* **73**, 035004 (2006).
- [40] J. C. Montero, C. A. de S. Pires and V. Pleitez, *Phys. Lett. B* **502**, 167 (2001); *Phys. Rev. D* **65**, 095001 (2002).
- [41] Fregolente and M. D. Tonasse, *Phys. Lett. B* **555**, 7 (2003).
- [42] L. N. Hoang and N. Q. Lan, *Europhys. Lett.* **64**, 571 (2003).
- [43] S. Filippi, W. A. Ponce and L. A. Sanchez, *Europhys. Lett.* **73**, 142 (2006).
- [44] R. A. Diaz, D. Gallego and R. Martinez, *Int. J. Mod. Phys. A* **22**, 1849 (2007).
- [45] M. Ozer, *Phys. Rev. D* **54**, 1143 (1996).
- [46] L. N. Hoang, *Phys. Rev. D* **53**, 437 (1996); *Phys. Rev. D* **54**, 4691 (1996).

- [47] R. Foot, L. N. Hoang and T. A. Tran, *Phys. Rev. D* **50**, 34 (1994).
- [48] P. V. Dong, H. N. Long and D. V. Soa, *Phys. Rev. D* **73**, 075005 (2006).
- [49] H.N. Long and V.T. Van, *Phys. J. G* **25**, 2319 (1999).
- [50] D. Chang and H. N. Long, *Phys. Rev. D* **73**, 053006 (2006).
- [51] M. B. Tully and G. C. Joshi, *Phys. Rev. D* **64**, 011301 (2001).
- [52] P. V. Dong, T. T. Huong, D. T. Huong and H. N. Long, *Phys. Rev. D* **74**, 053003 (2006).
- [53] V. T. N. Huyen, T. T. Lam, H. N. Long and V. Q. Phong, arXiv :hep-ph/12105833v2.
- [54] A. G. Dias, V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **80**, 056007 (2009).
- [55] J. M. Cabarcas and J. A. Rodriguez, *Mod. Phys. Lett. A* **29**, 1450032 (2014).
- [56] W. A. Ponce and L. A. Sanchez, *Mod. Phys. Lett. A* **22**, 435 (2007)
- [57] J. K. Mizukoshi, C. A. de S. Pires, F. S. Queiroz and P. S. Rodrigues da Silva, *Phys. Rev. D* **83**, 065024 (2011).
- [58] C. A. de S. Pires and P. S. Rodrigues da Silva, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0712**, 012 (2007).
- [59] A. G. Dias, R. Martinez, V. Pleitez, *Eur. Phys. J. C* **39**, 101 (2005).
- [60] A. G. Dias, *Phys. Rev. D* **71**, 015009 (2005).
- [61] W. Heisenberg, H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 710 (1936); J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
- [62] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973).
- [63] R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9**, 1686 (1974).
- [64] J. Iliopoulos, C. Itzykson and A. Martin, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 165 (1975).
- [65] M. Quiros, arXiv :hep-ph/9901312v1.
- [66] L. Dolan and R. Jackwin, *Phys. Rev. D* **9**, 3320 (1974).
- [67] J. I. Kapusta, *Finite Temperature field theory* (Cambridge University Press, 1989).
- [68] M. Le-Ballac, *Thermal Field theory*, (Cambridge University Press, 2000).
- [69] A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **70**, 306 (1977).
- [70] M. Giovannini and M. Shaposhnikov, *Phys. Rev. D* **57**, 2186 (1998).
- [71] V. Semikoz and J. Valle, *J. High Energy Phys.* **03**, 067 (2008).
- [72] V. Semikoz, D. D. Sokoloff and J. W. F. Valle, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 008 (2012).
- [73] V. Semikoz, D. D. Sokoloff, *Astron. Astrophys.* **433**, L53 (2005).
- [74] M. B. Gavela, P. Hernandez, J. Orlo, O. Pene and C. Quimbay, *Nucl. Phys. B* **430**, 382 (1994).
- [75] P. Iliet and E. Sather, *Phys. Rev. D* **51**, 379 (1995).
- [76] M. B. Gavela, P. Hernandez, J. Orlo, O. Pene and C. Quimbay, *Nucl. Phys. B* **430**, 382 (1994).

- [77] G. F. Giudice, *Phys. Rev. D* **45**, 3177 (1992); A. Brignole, J. R. Espinosa, M. Quiros and F. Zwirner, *Phys. Lett. B* **324**, 181 (1994); D. Delepine, J. M. Gerard, R. G. Felipe and J. Weyers, *Phys. Lett. B* **386**, 183 (1996); J. R. Espinosa, *Nucl. Phys. B* **475**, 273 (1996).
- [78] A. Menon, D.E. Morrissey and C. E. M. Wagner, *Phys. Rev. D* **70**, 035005 (2004); J. F. Gunion and H. E. Haber, *Nucl. Phys. B* 272 (1986) 1; J. R. Ellis, J. F. Gunion, H. E. Haber, L. Roszkowski and F. Zwirner, *Phys. Rev. D* **39**, 844 (1989); S. W. Ham, S. K. Oh, C. M. Kim, E. J. Yoo and D. Son, *Phys. Rev. D* **70**, 075001 (2004); M. Pietroni, *Nucl. Phys. B* **402**, 27 (1993); A. T. Davies, C.D. Froggatt and R. G. Moorhouse, *Phys. Lett. B* **372**, 88 (1996); S. J. Huber and M. G. Schmidt, *Nucl. Phys. B* **606**, 183 (2001).
- [79] A. Ahriche and S. Nasri, *Phys. Rev. D* **83**, 045032 (2011); Kang, P. Langacker, T. Li and T. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 061801 (2005); S. W. Ham, E. J. Yoo, S. K. Oh, *Phys. Rev. D* **76**, 075011 (2007).
- [80] R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, *Phys. Rev. D* **10**, 4138 (1974).
- [81] F. R. Klinkhamer and N.S. Manton, *Phys. Rev. D* **30**, 2212 (1984).
- [82] V. Q. Phong, H. N. Long, V. T. Van and N. C. Thanh, *Phys. Rev. D* **90**, 085019 (2014).
- [83] F. Csikor, Z. Fodor and J. Heitgere, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 21 (1999); J. Grant, M. Hindmarsh, *Phys. Rev. D* **64**, 016002 (2001).
- [84] P. Arnold and L. McLerran, *Phys. Rev. D* **36**, 581 (1987).
- [85] P. Arnold and L. McLerran, *Phys. Rev. D* **37**, 1020 (1988).
- [86] Y. Brihaye and J. Kunz, *Phys. Rev. D* **48**, 3884 (1993).
- [87] M. Joyce, *Phys. Rev. D* **55**, 1875 (1997).
- [88] M. D'onofrio, K. Rummukainen and A. Tranberg, *J. High Energy Phys.* **08**,123 (2012).

PAPER • OPEN ACCESS

Sphalerons from the minimal 331 model and baryogenesis

To cite this article: A Boubakir *et al* 2021 *J. Phys.: Conf. Ser.* **1766** 012003

View the [article online](#) for updates and enhancements.

The advertisement banner features a background of overlapping book covers in various colors (orange, red, yellow, green). On the right side, the text reads: "IOP ebooks™ Bringing together innovative digital publishing with leading authors from the global scientific community. Start exploring the collection—download the first chapter of every title for free." The IOP ebooks logo is in red and black, and the promotional text is in black and red.

IOP ebooks™

Bringing together innovative digital publishing with leading authors from the global scientific community.

Start exploring the collection—download the first chapter of every title for free.

Sphalerons from the minimal 331 model and baryogenesis

A Boubakir, H Aissaoui and N Mebarki

Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique
Frères Mentouri Constantine 1 University, Constantine, Algeria

E-mail: alimaboubakir@yahoo.com; aissaoui_h@yahoo.com; nnmebarki@yahoo.fr

Abstract. The sphaleron energy and rate are investigated within the minimal 331 model. It is shown, that the constraint leading to the first order phase transition is satisfied for both spontaneous symmetry breaking vacuums of the model. A comparison with the economical model study is also made.

1. Introduction

It is well-known that the Standard Model (SM) of particle physics does not contain all of the ingredients necessary for the electroweak baryogenesis. Consequently, new physics beyond the SM is needed, see for example ref [1].

As a matter of fact, the minimal 331 model is enjoying increasing interest due to its rich phenomenology [2]. In fact, as far as we are interested in, the first-order electroweak phase transition (EWPT) in this model is satisfied. Nevertheless an accurate and precise calculation of the energy of the sphaleron is needed to assess the viability of the EWPT because the energy of the latter is directly proportional to the number of baryons typically written $\nu_c / T_c > 1$.

The leading goal of the present work is the calculation of the energy and the rate of sphaleron within the minimal 331 model. It is shown, that the latter has a naturally first order EWPT needed for a successful baryonic asymmetry of the universe. The paper is organized as follow, in section 2, we present briefly the minimal 331 model. Section 3 is dedicated to the EWPT formalism. Section 4, sphaleron energy and rate are calculated and discussed. Finally, in section 5, we draw our conclusions.

2. Particles content of the minimal 331 model

The model proposed in ref.[2] is based on the fact, that each family of leptons comes in triplet, in the quark sector, the first family comes in $SU(3)_L$ triplet and the two others come in anti-triplet representation :

$$f_L = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \\ l^c \end{pmatrix}_L \text{ with } l = e, \mu, \tau, Q_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ J_1 \end{pmatrix}, Q_{iL} = \begin{pmatrix} d_i \\ -u_i \\ J_i \end{pmatrix} \text{ and } i = 2, 3. \quad (1)$$

The scalar potential is given by:

$$V(\chi, \rho) = \mu_1^2 \rho^+ \rho + \mu_2^2 \chi^+ \chi + \lambda_1 (\rho^+ \rho)^2 + \lambda_2 (\chi^+ \chi)^2 + \lambda_3 (\rho^+ \rho)(\chi^+ \chi) + \lambda_4 (\rho^+ \chi)(\chi^+ \rho) \quad (2)$$

where $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ are dimensionless coupling constants, and μ_1^2, μ_2^2 are the masses of the two scalar triples ρ and χ , where :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \frac{\nu_\rho + R_\rho + iI_\rho}{\sqrt{2}} \\ \rho^{++} \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \frac{\nu_\chi + R_\chi + iI_\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

It is worth mentioning that in this model, symmetry breaking is performed in two steps. The first one when χ^0 develops a vacuum expectation value (VeV) ν_χ and the second one when ρ^0 gets a (VeV) ν_ρ :

$$SU(3)_L \otimes U(1)_N \xrightarrow{\nu_\chi} SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{\nu_\rho} U(1)_{QED} \quad (4)$$

Moreover, the model we are using contains two neutral Higgses H_1^0, H_2^0 and a doubly charged Higgs h^{++} with the following masses:

$$M_{H_1^0}^2 = (\lambda_1 - \frac{\lambda_3^2}{4\lambda_2})\nu_\rho^2, \quad M_{H_2^0}^2 = \lambda_2\nu_\chi^2 + \frac{\lambda_3^2}{4\lambda_2}\nu_\rho^2, \quad M_{h^{++}}^2 = \lambda_4(\nu_\rho^2 + \nu_\chi^2)/2 \quad (5)$$

The Lagrangian density which gives the masses of gauge bosons is given by:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) + (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) \quad (6)$$

where $D_\mu = \partial_\mu - i(g\lambda^a W_\mu^a / 2 + g_N N B_\mu) = \partial_\mu - iP_\mu$, $a=1, \dots, 8$ with λ^a are the Gell-Mann matrices, N is a quantum number of the group $U(1)_N$. It is to be noted that, this model contains the ordinary gauge bosons of the SM (W^\pm, Z, γ) and a minimal extension in this sector by adding new gauge bosons ($V^\pm, U^{\pm\pm}, Z'$) with the following masses respectively:

$$M_{W^\pm}^2 = g^2\nu_\rho^2/4, \quad M_{V^\pm}^2 = g^2\nu_\chi^2/4, \quad M_{U^{\pm\pm}}^2 = g^2(\nu_\rho^2 + \nu_\chi^2)/4, \quad M_Z^2 = g^2\nu_\rho^2/4c_W^2, \quad M_{Z'}^2 = g^2c_W^2\nu_\chi^2/(3-4s_W^2) \quad (7)$$

3. The Electroweak Phase Transition

The one-loop effective potential at finite temperature in the \overline{DR} renormalization scheme [2] is given by:

$$V_{eff}(\nu_\rho, \nu_\chi) = \frac{1}{2}(\mu_\rho^2\nu_\rho^2 + \mu_\chi^2\nu_\chi^2) + \frac{1}{4}(\lambda_1\nu_\rho^4 + \lambda_2\nu_\chi^4 + \lambda_3\nu_\rho^2\nu_\chi^2) + \sum_i n_i \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left[\log \frac{m_i^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right] + \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_i n_i J_{B,F} \left(\frac{m_i}{T} \right), \quad (8)$$

here $\Lambda = \nu_\rho = 246 \text{ GeV}$ is the renormalization constant, the functions $J_{B,F}(\alpha)$ represent thermal bosonic and fermionic contributions [3], m_i are the field-dependent masses and n_i are the multiplicities of the field, with $n_{W^\pm, V^\pm, U^{\pm\pm}} = 6$, $n_Z = n_{Z'} = 3$, $n_{H_1^0, H_2^0} = 1$, $n_{h^{++}} = 2$ and $n_{J_1, J_2, J_3, t} = -12$.

The effective potential of the first step of (EWPT) at a finite temperature has the following compact form:

$$V_{eff}(\nu_\chi) = D(T^2 - T_0^2)\nu_\chi - E T \nu_\chi^2 + \frac{\lambda(T)}{4} \nu_\chi^4 \quad (9)$$

notice that, this phase transition occurs at TeV scale. The parameters of equation (9) are shown to have the following expressions:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{24v_\chi^2} \left(6m_{V^\pm}^2 + 6m_{U^{\pm\pm}}^2 + 3m_Z^2 + 6m_{J_1}^2 \right. \\
&\quad \left. + 6m_{J_2}^2 + 6m_{J_3}^2 + m_{H_2^0}^2 + 2m_{h^{++}}^2 \right) \\
E &= \frac{1}{12\pi v_\chi^3} \left(6m_{V^\pm}^3 + 6m_{U^{\pm\pm}}^3 + 3m_Z^3 + m_{H_2^0}^3 + 2m_{h^{++}}^3 \right) \\
T_0^2 &= \frac{m_{H_2^0}^2}{4D} - \frac{1}{32D\pi^2 v_\chi^2} \left(6m_{V^\pm}^4 + 6m_{U^{\pm\pm}}^4 + 3m_Z^4 \right. \\
&\quad \left. - 12m_{J_1}^4 - 12m_{J_2}^4 - 12m_{J_3}^4 + m_{H_2^0}^4 + 2m_{h^{++}}^4 \right) \\
\lambda(T) &= \frac{m_{H_2^0}^2}{2v_\chi^2} - \frac{1}{16\pi^2 v_\chi^4} \left(6m_{V^\pm}^4 \log \frac{m_{V^\pm}^2}{A_B T^2} + 6m_{U^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{U^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} \right. \\
&\quad \left. + 3m_Z^4 \log \frac{m_Z^2}{A_B T^2} - 12m_{J_1}^4 \log \frac{m_{J_1}^2}{A_F T^2} - 12m_{J_2}^4 \log \frac{m_{J_2}^2}{A_F T^2} \right) \\
&\quad \left. - 12m_{J_3}^4 \log \frac{m_{J_3}^2}{A_F T^2} + m_{H_2^0}^4 \log \frac{m_{H_2^0}^2}{A_B T^2} + 2m_{h^{++}}^4 \log \frac{m_{h^{++}}^2}{A_B T^2} \right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Now, the effective potential of the second step of (EWPT) at a finite temperature reads:

$$V_{eff}(v_\rho) = D'(T^2 - T_0'^2)v_\rho - E'Tv_\rho^2 + \frac{\lambda'(T)}{4}v_\rho^4 \tag{11}$$

where this second phase transition occurs at the GeV scale. The parameters D' , E' , $T_0'^2$ and $\lambda'(T)$ are given by:

$$\begin{aligned}
D' &= \frac{1}{24v_\rho^2} \left(6m_{W^\pm}^2 + 6m_{U^{\pm\pm}}^2 + 3m_Z^2 + 6m_t^2 + m_{H_1^0}^2 + m_{H_2^0}^2 + 2m_{h^{++}}^2 \right) \\
E' &= \frac{1}{12\pi v_\rho^3} \left(6m_{W^\pm}^3 + 6m_{U^{\pm\pm}}^3 + 3m_Z^3 + m_{H_1^0}^3 + m_{H_2^0}^3 + 2m_{h^{++}}^3 \right) \\
T_0'^2 &= \frac{(m_{H_1^0}^2 + m_{H_2^0}^2)}{4D'} - \frac{1}{32D'\pi^2 v_\rho^2} \left(6m_{W^\pm}^4 + 6m_{U^{\pm\pm}}^4 + 3m_Z^4 \right. \\
&\quad \left. - 12m_t^4 + m_{H_1^0}^4 + m_{H_2^0}^4 + 2m_{h^{++}}^4 \right) \\
\lambda'(T) &= \frac{(m_{H_1^0}^2 + m_{H_2^0}^2)}{2v_\rho^2} - \frac{1}{16\pi^2 v_\rho^4} \left(6m_{W^\pm}^4 \log \frac{m_{W^\pm}^2}{A_B T^2} \right. \\
&\quad \left. + 6m_{U^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{U^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} + 3m_Z^4 \log \frac{m_Z^2}{A_B T^2} - 12m_t^4 \log \frac{m_t^2}{A_F T^2} \right) \\
&\quad \left. + m_{H_1^0}^4 \log \frac{m_{H_1^0}^2}{A_B T^2} + m_{H_2^0}^4 \log \frac{m_{H_2^0}^2}{A_B T^2} + 2m_{h^{++}}^4 \log \frac{m_{h^{++}}^2}{A_B T^2} \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

For successful electroweak baryogenesis, the condition of a strong first-order (EWPT) should be typically written as $v_c / T_c \geq 1$ see ref.[4]. In our model, to perform the symmetry breaking, we have two steps. In other words, as it was shown in eq.(4), we have two strong first-order phase transitions, the first occurs at TeV scale with the condition of (EWPT) written as $v_{c1} / T_{c1} \geq 1$, and the second occurs at GeV scale with the condition of (EWPT) written as $v_{c2} / T_{c2} \geq 1$.

For the sake of illustration, we have fixed the values of some free parameters of the model, in case:

$$v_\rho = 246 \text{ GeV}, g = 0.65, \lambda_1 = 0.3225, \lambda_2 = 0.1406, \lambda_3 = 0.1882,$$

$$\lambda_4 = 0.1063, \lambda' = 0.9875, \lambda^{J_1} = 0.2533, \lambda^{J_2} = 0.3979, \lambda^{J_3} = 0.3494,$$

notice that, all our dimensionless coupling constants are real and checked the conditions of unitarity and stability. Moreover, the masses of the Higgs (h_1^0) and those of the gauge bosons (Z, W^\pm) of the SM as well as the mass of the top quark (t) are also fixed. In order to perform our calculations, we take $v_z \sim 2$ TeV. Under these conditions, the other remaining particles acquired the following masses:

$$m_{h_1^0} = 125.31 \text{ GeV}, m_{h_2^0} \sim 632.81 - 745.66 \text{ GeV}, m_t = 171.77 \text{ GeV}, m_Z = 91.68 \text{ GeV}$$

$$m_{J_1} \sim 300.8 - 354.96 \text{ GeV}, m_{J_2} \sim 472.51 - 557.53 \text{ GeV}, m_{J_3} \sim 414.98 - 489.65 \text{ GeV}$$

$$m_{h^{++}} \sim 416.55 - 490.04 \text{ GeV}, m_{W^\pm} = 80.40 \text{ GeV}, m_{V^\pm} \sim 548.85 - 647.59 \text{ GeV}$$

$$m_{U^{\pm\pm}} \sim 554.70 - 652.57 \text{ GeV}, m_{Z'} \sim 668.09 - 788.28 \text{ GeV}.$$

Notice that, for fermions we have taken only the masses of the top quark (t) and the new quarks (J_1, J_2, J_3), since the effect of the other fermions is negligible.

In figures (1) and (2), we plot the ratio v_c / T_c as a function of T_c for each step of (EWPT). In both cases it is clear that the condition $v_c / T_c \geq 1$ required for a strong first-order (EWPT) is satisfied.

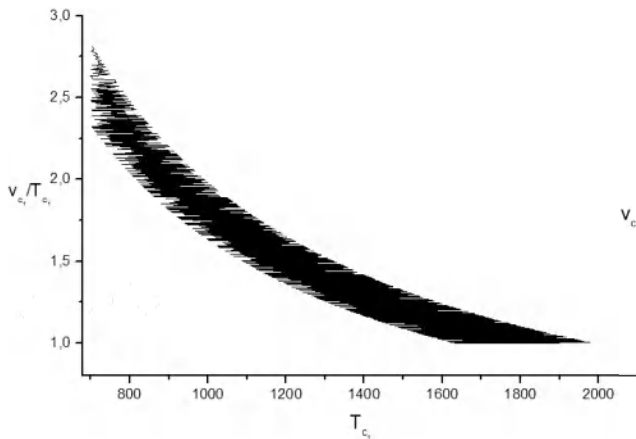


Figure 1: the ratio of v_{c1} / T_{c1} in terms of T_{c1}

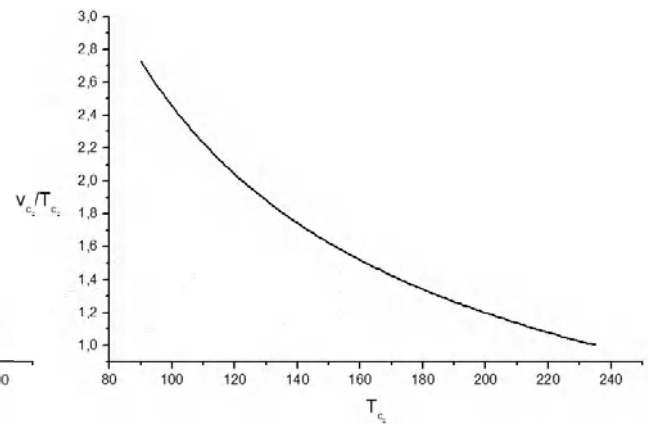


Figure 2: the ratio of v_{c2} / T_{c2} in terms of T_{c2}

4. Sphaleron Rate in the minimal 331 Model

One has to know that if the transition is done classically, by crossing-over the barrier, from the zero to a non-zero VeV, without tunneling, then we talk about sphaleron transitions, or else, the transition occurs from zero vacuum to a non-zero vacuum by quantum tunneling effect, this transition is called instanton.

4.1. Sphaleron Energy

The energy functional in the temporal gauge is given by:

$$\varepsilon = 4\pi \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla^2 v_\chi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla^2 v_\rho)^2 + V_{eff}(\chi, \rho) \right] \quad (13)$$

we have used the approximation

$$\frac{\partial v_\chi}{\partial t} = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_i v_\chi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i v_\rho)^2 + V_{eff}(\chi, \rho) \right] \quad (14)$$

and we have two equations of motion for the VeVs

$$\ddot{v}_\chi + \nabla^2 v_\chi - \frac{\partial V_{eff}(v_\chi, T)}{\partial v_\chi} = 0 \quad (15)$$

$$\ddot{v}_\rho + \nabla^2 v_\rho - \frac{\partial V_{eff}(v_\rho, T)}{\partial v_\rho} = 0 \quad (16)$$

with

$$\ddot{v}_\chi = \frac{\partial^2 v_\chi}{\partial t^2} = 0, \quad \ddot{v}_\rho = \frac{\partial^2 v_\rho}{\partial t^2} = 0$$

the equations (15), (16) became:

$$\frac{d^2 v_\chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv_\chi}{dr} - \frac{\partial V_{eff}(v_\chi, T)}{\partial v_\chi} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 v_\rho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv_\rho}{dr} - \frac{\partial V_{eff}(v_\rho, T)}{\partial v_\rho} = 0 \quad (18)$$

The sphaleron energies in each phase transition and the relation (13) became:

$$\mathcal{E}_{sph(Su(3))} = 4\pi \int \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 v_\chi}{dr^2} + V_{eff}(v_\chi, T) \right] r^2 dr \quad (19)$$

$$\mathcal{E}_{sph(Su(2))} = 4\pi \int \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 v_\rho}{dr^2} + V_{eff}(v_\rho, T) \right] r^2 dr \quad (20)$$

with $\mathcal{E}_{sph(Su(3))}$ and $\mathcal{E}_{sph(Su(2))}$ are the sphaleron energies in the $SU(3)_L \xrightarrow{v_\chi} SU(2)_L$, $SU(2)_L \xrightarrow{v_\rho} U(1)_{QED}$ phase transitions respectively.

4.2. Sphaleron Rate

In refs.[5], [6], [7] the sphaleron rate per unit time, per unit volume is given by:

$$\frac{\Gamma}{V} = \alpha^4 T^4 \exp(-\varepsilon/T) \quad (21)$$

where V is the volume of the EWPT region, T the temperature, ε the sphaleron energy and $\alpha = 1/30$ a constant. Comparing the sphaleron rate with the Hubble constant which describe the cosmological expansion rate at the temperature T and in order to have B violation one has to verify that $\frac{\Gamma}{V} > H$ at $T > T_c$. To estimate the upper bounds of the sphaleron rates, we suppose that the VeVs of the Higgs fields do not change from point to point in the universe, so we have:

$$\frac{dv_\chi}{dr} = \frac{dv_\rho}{dr} = 0 \quad (22)$$

the relations (17), (18) became:

$$\frac{\partial V_{eff}(v_\chi, T)}{\partial v_\chi} = 0, \quad \frac{\partial V_{eff}(v_\rho, T)}{\partial v_\rho} = 0 \quad (23)$$

and the relations (19), (20) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sph(Su(3))} &= 4\pi \int V_{eff}(v_\chi, T) r^2 dr = \frac{4\pi r^3}{3} V_{eff}(v_\chi, T) \Big|_{v_{\chi m}} \\ \varepsilon_{sph(Su(2))} &= 4\pi \int V_{eff}(v_\rho, T) r^2 dr = \frac{4\pi r^3}{3} V_{eff}(v_\rho, T) \Big|_{v_{\rho m}} \end{aligned} \quad (24)$$

with $v_{\chi m}$ and $v_{\rho m}$ are the VeVs at the maximum of the effective potential, and

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \quad (25)$$

the relations (24) become:

$$\varepsilon_{sph(Su(3))} \sim \frac{E^4 T}{4\lambda_T^3}, \quad \varepsilon_{sph(Su(2))} \sim \frac{E^4 T}{4\lambda_T^3} \quad (26)$$

and

$$\begin{aligned} \Gamma_{Su(3)} &= \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E^4 T}{4\lambda_T^3}\right) \\ \Gamma_{Su(2)} &= \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E^4 T}{4\lambda_T^3}\right) \end{aligned} \quad (27)$$

In figures (3) and (4), we plot the sphaleron rate $\Gamma(T)$ as a function of the temperature T for the two steps of phase transitions.

In order to plot the Hubble constant as a function of the temperature T , we use the relation:

$$H^2 = \frac{\pi^2 g T^4}{90M^2} \quad (28)$$

where $g = 106.75$ is the total number of degrees of freedom and $M = 2.43 \times 10^{18}$, so we get the figure 5. From figures (3) and (4), it is clear that the sphaleron rates are linear functions of T . For the first step of the phase transition fig.(4) and with comparison with fig.(5), one can see that $\Gamma_{Su(3)} \sim 10^{-3} > H \sim 10^{-13}$,

and for the second step, see fig.(3), $\Gamma_{Su(2)} \sim 10^{-4} > H \sim 10^{-13}$. Thus, it is well established as it was mentioned above that we have a B violation.

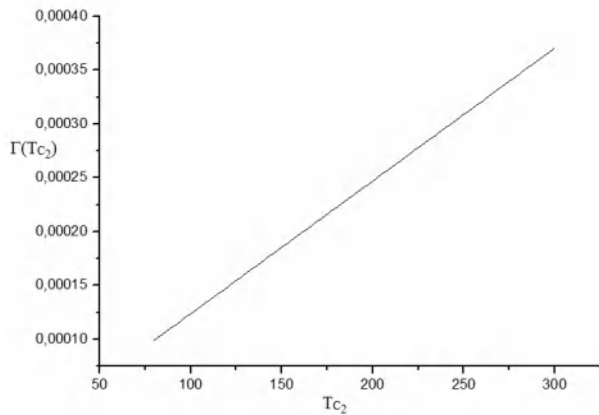


Figure 3: the sphaleron rate In terms of T_{c2}

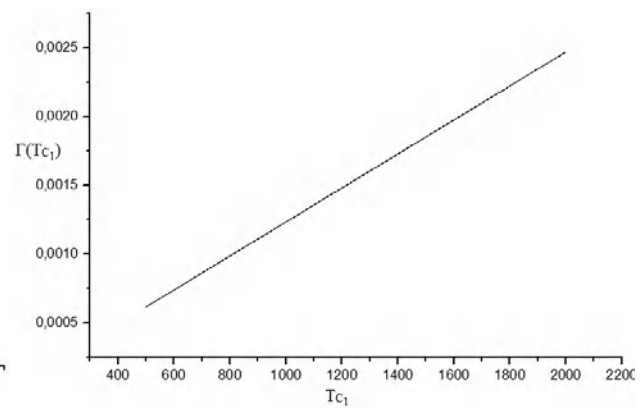


Figure 4: the sphaleron rate In terms of T_{c1}

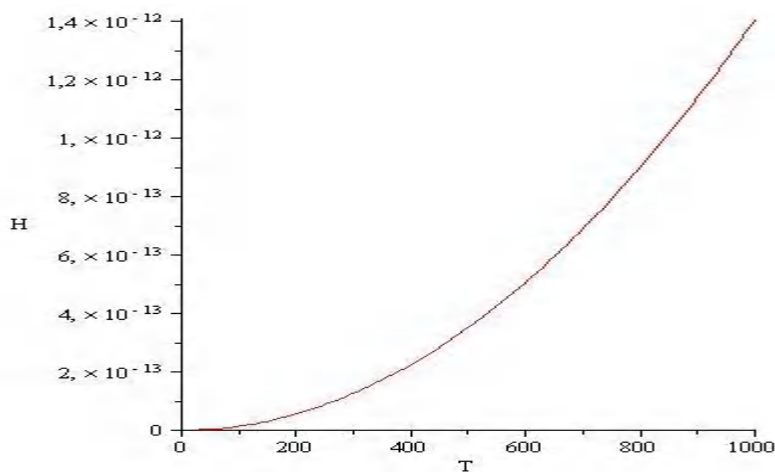


Figure 5: The Hubble constant H as a function of T

5. Conclusion

Through this article, we have investigated the possibility that the minimal 331 model could be a good candidate to explain the violation of baryonic number B in the early universe since this phenomenon is not included in the original formulation of the minimal Standard Model of particles. Indeed, we have calculated the energy and the rate of sphaleron and we have proved that the latter fulfills the third condition of Sakharov of a strong first-order EWPT. In addition, an estimation of the masses of the new particles of the model (exotic quarks, gauge bosons, and Higgses) has been placed.

Acknowledgments

This work is supported by the Algerian Ministry of High Education and Research and also by the DGRSDT.

References

- [1] Gavela, M. B *et al.*, 1994, *Nucl.Phys.* **B430**:345-381; 1994, *Nucl.Phys.* **B430**:382-426.
- [2] Pisano, F and Pleitez, V, 1992, *Phys.Rev. D* **46**, 410; Frampton, P.H, 1992, *Phys.Rev.Lett.* **69** 2889.
- [3] Siegel, W, 1979, *Phys.Lett. B* **84**, 193.
- [4] Dolan, L and Jackiw, R, 1974, *Phys.Rev. D* **9**, 3320-3341; Weinberg, S, 1974, *Phys.Rev. D* **9**, 3357-3378.
- [5] Shaposhnikov, M. E, 1987, *Nucl.Phys. B* **287**, 757; 1988, *Nucl. Phys. B* **2995**, 797.
- [6] Kajantie, K, Laine, M, Rummukainen, K, and Shaposhnikov, M, 1996, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2887; Csikor, F, Fodor, Z, and Heitger, J, 1999, *Phys.Rev.Lett.* **82**, 21; Grant, J and Hindmarsh, M, 2001 *Phys.Rev. D* **64**, 016002; D'Onofrio, M, Rummukainen, K and Tranberg, A, 2012, *JHEP* **08**, 123.
- [7] Arnold, P and McLerran, L, 1987, *Phys.Rev. D* **36**, 581; *Phys.Rev. D* **37**, 1020 (1988).
- [8] Brihaye, Y and Kunz, J, 1993, *Phys.Rev. D* **48**, 3884.

Strong first-order phase transition and B -violation in the compact 341 model

Alima Boubakir,* Habib Aissaoui[†] and Noureddine Mebarki[‡]

*Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique,
Frères Mentouri Constantine1 University, Constantine, Algeria*

* *alimaboubakir@yahoo.com*

[†] *h.aissaoui@umc.edu.dz*

[‡] *n.mebarki@umc.edu.dz*

Received 31 July 2021

Revised 6 November 2021

Accepted 12 November 2021

Published 15 December 2021

Baryogenesis in the context of the compact $SU(3)_C \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_X$ model is investigated. Using the finite temperature effective potential approach together with unitarity, stability and no ghost masses constraints, the existence of a strong first-order electroweak phase transition (EWPT) was shown and checked numerically during all steps of the spontaneous breakdown of the gauge symmetry of the model. Higgs masses regions fulfilling the EWPT criteria are also discussed. Moreover, and as a byproduct of our study, the B -violation via sphaleron was also emphasized.

Keywords: Beyond Standard Model; baryogenesis; electroweak phase transition.

PACS numbers: 12.60.-i, 11.15.Ex, 11.30.Fs, 11.15.-q, 98.80.Cq

1. Introduction

Electroweak baryogenesis (EWBG) remains a theoretically attractive and experimentally testable scenario for explaining the cosmic baryon asymmetry. Particular attention is paid to Standard Model (SM) extensions¹⁻⁵ that may provide the necessary ingredients for EWBG, and searches for the corresponding signatures at high energy limits. Within the SM,⁶⁻¹⁰ the EWBG cannot explain the observed baryonic asymmetry of the universe. Indeed, the SM electroweak phase transition (EWPT) is of first order (in order to have large deviations from thermal equilibrium) only if the mass of the Higgs boson is less than 70 GeV.¹¹⁻¹³ This is in contradiction with the current experimental value which is around 125 GeV.¹⁴ Nevertheless, according

[†]Corresponding author.

to Refs. 15–18 a first-order EWPT is possible for an SM Higgs mass in the region of ($80 \text{ GeV} < m_H < 160 \text{ GeV}$) but by assuming the existence, in the primordial plasma as an initial condition, of a strong hypermagnetic field. In these conditions, the phase transition of the second-order can turn to the first order. Moreover, the CP violation induced by the CKM phase does not appear to be sufficient to generate the observed baryonic asymmetry.^{19–21} Thus, an extended SM theory is needed. To carry out the extension program, one has to choose between two possibilities, the first possibility is to consider a more fundamental theory, for example, brane cosmology, where it is shown that we can generate large baryogenesis due to the unconventional early cosmic stage expansion rate.^{22,23} The second possibility is the widening of the gauge group symmetry leading to new interactions and particle spectrum and which can be achieved at the TeV scale, containing natural dark matter candidates^{24,25} and explaining the generation problem in the so-called 341 model.^{26,27}

Electroweak phase transition is a type of symmetry breaking that plays an important role at the early stage of the expanding universe where the scalar potential is responsible for this. It is the transition between symmetrical and asymmetrical phases, generating masses to elementary particles.

In order to describe the EWPT, it is better to use the technique of the effective potential. It is a function containing the contributions coming from fermions, bosons, and depends on temperature and vacuum expectation values (VeVs).^{28–30} It is worth mentioning that the first-order EWPT has to be strong, that is, the true vacuum expectation value (VeV) v_c has to be larger than the critical temperature, $\frac{v_c}{T_c} \geq 1$ (in the unit where Boltzmann’s constant $k_B = 1$).^{31,32}

Among the extended models of our interest is the compact 341 model,²⁷ which is based on the gauge symmetry group tensor product $SU(3)_C \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_X$. In addition to the SM particles spectra, the model contains 12 new gauge bosons, six exotic quarks, two charged Higgses, a doubly charged Higgs and two neutral Higgses. Some of the intriguing features of the 341 model are the automatic existence of the SM Higgs, and the ability to contain a candidate for cold dark matter.^{24,25}

This paper is organized as follows. In Sec. 2, we briefly present the compact 341 model. In Sec. 3, we introduce the effective potential technique and show the structure of phase transition in the compact 341 model. In Sec. 4, we present our numerical results taking into account the theoretical constraints imposed to the scalar potential. In Sec. 5, we discuss the B -violation via the sphaleron approach. Finally, in Sec. 6, we draw our conclusions.

2. The Compact 341 Model

2.1. Particle content

The compact 341 model is described by the gauge group $SU(3)_C \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_X$, and contains all the particles of the SM with new gauge bosons, exotic quarks, and three Higgs scalar quartets.²⁷ Unlike the original 341 model,^{33,34} in the

compact one the scalar sector was narrowed to only three quartets instead of four and there is no decuplet, hence the name compact. Also, like the SM, we have three generations of fermions represented by the quartets:

$$\begin{aligned}
 L_{aL} &= \begin{pmatrix} \nu_a \\ l_a \\ \nu_a^c \\ l_a^c \end{pmatrix}_L \sim (1, 4, 0), \quad a = e, \mu, \tau, \\
 Q_{1L} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ U_1 \\ J_1 \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 4, \frac{2}{3}\right), \quad \begin{cases} u_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ d_{1R} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ U_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ J_{1R} \sim \left(3, 1, \frac{5}{3}\right), \end{cases} \\
 Q_{iL} &= \begin{pmatrix} d_i \\ u_i \\ D_i \\ J_i \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 4^*, -\frac{1}{3}\right), \quad \begin{cases} u_{iR} \sim \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \\ d_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ D_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ J_{iR} \sim \left(3, 1, -\frac{4}{3}\right), \end{cases} \quad i = 2, 3
 \end{aligned} \tag{1}$$

where u_1, d_1 are the up and down quarks, U_1, J_1, J_i, D_i are the new exotic quarks with electric charges $2/3, 5/3, -4/3, -1/3$, respectively. We remind that the $U(1)$ charge X is related to the fermions electric charge by the relation:

$$Q_e = (X, X - 1, X, X + 1). \tag{2}$$

The scalar sector contains three Higgs scalar quartets

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^0 \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(R_{\eta_1} + iI_{\eta_1}) \\ \eta_1^- \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_\eta + R_{\eta_2} + iI_{\eta_2}) \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} \sim (1, 4, 0),$$

$$\begin{aligned}
\rho &= \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho^0 \\ \rho_2^+ \\ \rho^{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\rho + R_\rho + iI_\rho) \\ \rho_2^+ \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \sim (1, 4, 1), \\
\chi &= \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi^{--} \\ \chi_2^- \\ \chi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi^{--} \\ \chi_2^- \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\chi + R_\chi + iI_\chi) \end{pmatrix} \sim (1, 4, -1)
\end{aligned} \tag{3}$$

the following neutral components develop three nontrivial VEVs

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \rho \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix} \tag{4}$$

where $R_{\eta_1}, R_{\eta_2}, R_\rho, R_\chi$ are the CP-even scalar (real), $I_{\eta_1}, I_{\eta_2}, I_\rho, I_\chi$ are the CP-odd scalar (imaginary), the reason one chooses the η quadruplet to develop VEV only in the third component is related to the fact that we do not want to mix among ordinary and exotic quarks in the Yukawa Lagrangian, which guarantees the usual CKM mixing in the quark sector. Equivalently, this is also possible if one also adds a new Z_3 discrete symmetry to the model. The latter will also allow for an appropriate scenario for generating masses through effective operators. Spontaneous symmetry breaking takes place in three different steps:

* The first step:

$$SU(4)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\chi} SU(3)_L \otimes U(1)_X. \tag{5}$$

* The second step:

$$SU(3)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\eta} SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \tag{6}$$

* The third step:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{v_\rho} U(1)_{\text{QED}}. \tag{7}$$

The VEVs v_χ, v_η, v_ρ satisfy the constraints:

$$v_\chi \approx v_\eta \gg v_\rho. \tag{8}$$

So, in this model, there are two quite different scales of vacuum expectation values: $v_\chi \sim O(\text{TeV}), v_\eta \sim O(\text{TeV})$ and $v_\rho \approx 246 \text{ GeV}$. Following Ref. 27, the relationship

between $SU(4)_L$ and $U(1)_X$ coupling constants g_L and g_X , respectively is

$$\frac{g_X^2}{g_L^2} = \frac{s_w^2}{1 - 4s_w^2} \quad (9)$$

the relation (9) exhibits a Landau pole when $s_w^2 = \frac{1}{4}$ where $g_X \rightarrow \infty$ (comes infinite and g_L finite).^{35,36} The existence of a Landau pole for the compact 341 model at a scale of around 5 TeV implies a natural cutoff for the model where one can circumvent the long-standing hierarchy problem.

2.2. The Higgs sector

The scalar potential of the compact 341 model²⁷ is given by

$$\begin{aligned} V(\eta, \rho, \chi) = & \mu_\eta^2 \eta^\dagger \eta + \mu_\rho^2 \rho^\dagger \rho + \mu_\chi^2 \chi^\dagger \chi \\ & + \lambda_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2 \\ & + \lambda_4 (\eta^\dagger \eta) (\rho^\dagger \rho) + \lambda_5 (\eta^\dagger \eta) (\chi^\dagger \chi) + \lambda_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) \\ & + \lambda_7 (\rho^\dagger \eta) (\eta^\dagger \rho) + \lambda_8 (\chi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \chi) + \lambda_9 (\rho^\dagger \chi) (\chi^\dagger \rho), \end{aligned} \quad (10)$$

where $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9$ are dimensionless coupling constants, $\mu_{\eta, \rho, \chi}^2$ are the mass dimension parameters satisfying the following relations when the potential is minimized. These relations are given by the tadpole conditions

$$\begin{aligned} \mu_\eta^2 + \lambda_1 v_\eta^2 + (\lambda_4 v_\rho^2 + \lambda_5 v_\chi^2)/2 &= 0, \\ \mu_\rho^2 + \lambda_2 v_\rho^2 + (\lambda_4 v_\eta^2 + \lambda_6 v_\chi^2)/2 &= 0, \\ \mu_\chi^2 + \lambda_3 v_\chi^2 + (\lambda_5 v_\eta^2 + \lambda_6 v_\rho^2)/2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

The scalar potential depending on VEVs (10) can be written as follows:

$$\begin{aligned} V(\langle \eta \rangle, \langle \rho \rangle, \langle \chi \rangle) = & \frac{\mu_\eta^2 v_\eta^2}{2} + \frac{\mu_\rho^2 v_\rho^2}{2} + \frac{\mu_\chi^2 v_\chi^2}{2} \\ & + \frac{\lambda_1 v_\eta^4}{4} + \frac{\lambda_2 v_\rho^4}{4} + \frac{\lambda_3 v_\chi^4}{4} \\ & + \frac{\lambda_4 v_\eta^2 v_\rho^2}{4} + \frac{\lambda_5 v_\eta^2 v_\chi^2}{4} + \frac{\lambda_6 v_\chi^2 v_\rho^2}{4}. \end{aligned} \quad (12)$$

Moreover, the CP-even elements of the mass matrix (4×4) in the basis $(R_{\eta_1}, R_{\eta_2}, R_\rho, R_\chi)$ are written as

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 v_\eta^2 & \lambda_4 v_\eta v_\rho & \lambda_5 v_\eta v_\chi \\ 0 & \lambda_4 v_\eta v_\rho & 2\lambda_2 v_\rho^2 & \lambda_6 v_\rho v_\chi \\ 0 & \lambda_5 v_\eta v_\chi & \lambda_6 v_\rho v_\chi & 2\lambda_3 v_\chi^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

The eigenvalues of (13) are the masses of the neutral Higgses H_1^0, H_2^0, H_3^0 (up to the second order in ρ)

$$\begin{aligned} M_{H_1^0}^2 &= \left(\lambda_2 + \frac{[\lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_6(\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_4 \lambda_5)]}{\lambda_5^2 - 4\lambda_1 \lambda_3} \right) v_\rho^2, \\ M_{H_2^0}^2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) v_\eta^2, \\ M_{H_3^0}^2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) v_\chi^2, \\ M_{G_1}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

The CP-odd elements of the mass matrix (4×4) in the basis $(I_{\eta_1}, I_{\eta_2}, I_\rho, I_\chi)$ vanish and therefore, the neutral CP-odd Higgses are all massless

$$M_{I_{\eta_1}}^2 = M_{I_{\eta_2}}^2 = 0, \quad M_{I_\rho}^2 = M_{I_\chi}^2 = 0. \tag{15}$$

The mass matrices of the simply charged Higgs can be expressed according to three basis:

(1) In the basis (η_1^\pm, ρ_2^\pm) , we have

$$\frac{1}{2} \lambda_7 \begin{pmatrix} v_\eta^2 & v_\rho v_\eta \\ v_\rho v_\eta & v_\rho^2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

with the eigenvalues

$$M_{G_1^\pm}^2 = 0, \quad M_{h_1^\pm}^2 = \frac{1}{2} \lambda_7 (v_\eta^2 + v_\rho^2). \tag{17}$$

(2) In the basis (η_2^\pm, χ_2^\pm) we have

$$\frac{1}{2} \lambda_8 \begin{pmatrix} v_\eta^2 & v_\chi v_\eta \\ v_\chi v_\eta & v_\chi^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

and the eigenvalues

$$M_{G_2^\pm}^2 = 0, \quad M_{h_2^\pm}^2 = \frac{1}{2} \lambda_8 (v_\eta^2 + v_\chi^2). \tag{19}$$

(3) In the basis (ρ_1^\pm, χ_1^\pm) , we have

$$M_{\rho_1^\pm}^2 = 0, \quad M_{\chi_1^\pm}^2 = 0. \tag{20}$$

For the doubly charged Higgses, we have the mass matrix in the basis $(\chi^{\pm\pm}, \rho^{\pm\pm})$

$$\frac{1}{2} \lambda_9 \begin{pmatrix} v_\chi^2 & v_\chi v_\rho \\ v_\chi v_\rho & v_\rho^2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

with the eigenvalues

$$M_{G^{\pm\pm}}^2 = 0, \quad M_{h^{\pm\pm}}^2 = \frac{1}{2} \lambda_9 (v_\rho^2 + v_\chi^2). \tag{22}$$

So, in this model, we have three neutral Higgses (H_1^0 the Higgs of the SM) and three charged Higgses ($h_1^\pm, h_2^\pm, h^{\pm\pm}$), the Goldstone bosons $G^{\pm\pm}$ eaten by the doubly charged gauge bosons $V^{\pm\pm}$, the Goldstone bosons $G_1^\pm, G_2^\pm, \rho_1^\pm, \chi_1^\pm$ eaten by the charged gauge bosons $W^\pm, K^\pm, Y^\pm, X^\pm$ and $I_{\eta_1}, I_{\eta_2}, I_\rho, I_\chi, G_1$ eaten by the neutral gauge bosons Z, Z', Z'', K, K' .

2.3. The fermions sector

To obtain the fermion masses, we need the Yukawa interactions given by the Lagrangian density:²⁷

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \lambda_{11}^J \bar{Q}_{1L} \chi J_{1R} + \lambda_{ij}^J \bar{Q}_{iL} \chi^* J_{jR} + \lambda_{11}^U \bar{Q}_{1L} \eta U_{1R} \\ & + \lambda_{ij}^D \bar{Q}_{iL} \eta^* D_{jR} + \lambda_{1a}^d \bar{Q}_{1L} \rho d_{aR} + \lambda_{ia}^u \bar{Q}_{iL} \rho^* u_{aR} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (23)$$

where $\lambda_{11}^J, \lambda_{ij}^J, \lambda_{11}^U, \lambda_{ij}^D$ and $\lambda_{1a}^d, \lambda_{ia}^u$ are, respectively the Yukawa couplings of the exotic and the ordinary quarks ($i, j = 2, 3$ and $a = 1, 2, 3$). In what follows, we only consider the mass of the top quark since the contribution of the u, s and b quarks is highly suppressed:

$$m_t = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{33}^u v_\rho.$$

The masses of the exotic quarks J_1, J_2, J_3 are proportional to the VeV v_χ , and they are involved in the first step of SSB $SU(4)_L \rightarrow SU(3)_L$, the mass of J_1 is

$$m_{J_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{11}^J v_\chi, \quad (24)$$

the mass matrix of J_2, J_3 in the basis (J_2, J_3) is written as

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_\chi \begin{pmatrix} \lambda_{22}^J & \lambda_{23}^J \\ \lambda_{32}^J & \lambda_{33}^J \end{pmatrix} \quad (25)$$

with the eigenvalues

$$m_{J_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{22}^J v_\chi, \quad m_{J_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{33}^J v_\chi. \quad (26)$$

The masses of the exotic quarks U_1, D_2, D_3 are proportional to the VeV v_η , and they are involved in the second step of SSB $SU(3)_L \rightarrow SU(2)_L$. The mass of U_1 is

$$m_{U_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{11}^U v_\eta \quad (27)$$

the mass matrix of D_2, D_3 in the basis (D_2, D_3) is written as

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_\eta \begin{pmatrix} \lambda_{22}^D & \lambda_{23}^D \\ \lambda_{32}^D & \lambda_{33}^D \end{pmatrix} \quad (28)$$

Table 1. The quarks masses formulation.

Quarks	$m^2(v_\eta, v_\rho, v_\chi)$	$m^2(v_\eta)$	$m^2(v_\rho)$	$m^2(v_\chi)$
$m_{D_2}^2$	$\frac{1}{2}\lambda_{22}^{D^2} v_\eta^2$	$\frac{1}{2}\lambda_{22}^{D^2} v_\eta^2$	0	0
$m_{D_3}^2$	$\frac{1}{2}\lambda_{33}^{D^2} v_\eta^2$	$\frac{1}{2}\lambda_{33}^{D^2} v_\eta^2$	0	0
$m_{U_1}^2$	$\frac{1}{2}\lambda_{11}^{U^2} v_\eta^2$	$\frac{1}{2}\lambda_{11}^{U^2} v_\eta^2$	0	0
$m_{J_2}^2$	$\frac{1}{2}\lambda_{22}^{J^2} v_\chi^2$	0	0	$\frac{1}{2}\lambda_{22}^{J^2} v_\chi^2$
$m_{J_3}^2$	$\frac{1}{2}\lambda_{33}^{J^2} v_\chi^2$	0	0	$\frac{1}{2}\lambda_{33}^{J^2} v_\chi^2$
$m_{J_1}^2$	$\frac{1}{2}\lambda_{11}^{J^2} v_\chi^2$	0	0	$\frac{1}{2}\lambda_{11}^{J^2} v_\chi^2$
m_t^2	$\frac{1}{2}\lambda_{33}^{u^2} v_\rho^2$	0	$\frac{1}{2}\lambda_{33}^{u^2} v_\rho^2$	0

with the eigenvalues

$$m_{D_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_{22}^D v_\eta, \quad m_{D_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_{33}^D v_\eta. \quad (29)$$

A summary of the quarks masses formulation $m^2(v_\eta, v_\rho, v_\chi) = m^2(v_\eta) + m^2(v_\rho) + m^2(v_\chi)$ is shown in Table 1.

2.4. The gauge bosons

Considering the Lagrangian density \mathcal{L}^B of the gauge bosons

$$\mathcal{L}^B = (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) + (D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) + (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho), \quad (30)$$

where D_μ is the covariant derivative given by

$$D^\mu = \partial^\mu - \frac{ig_L}{2}\lambda_\alpha A_\alpha^\mu - ig_x X B^\mu = \partial^\mu - iP^\mu \quad (31)$$

and

$$P^\mu = \frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} W_3^\mu + \frac{W_8^\mu}{\sqrt{3}} + \frac{W_{15}^\mu}{\sqrt{6}} & (W_1^\mu + iW_2^\mu) & (W_6^\mu + iW_7^\mu) & (W_{13}^\mu + iW_{14}^\mu) \\ + 2\frac{g_x}{g_L} X B^\mu & & & \\ (W_1^\mu - iW_2^\mu) & -W_3^\mu + \frac{W_8^\mu}{\sqrt{3}} + \frac{W_{15}^\mu}{\sqrt{6}} & (W_4^\mu + iW_5^\mu) & (W_9^\mu + iW_{10}^\mu) \\ & + 2\frac{g_x}{g_L} X B^\mu & & \\ (W_6^\mu - iW_7^\mu) & (W_4^\mu - iW_5^\mu) & -\frac{2W_8^\mu}{\sqrt{3}} + \frac{W_{15}^\mu}{\sqrt{6}} & (W_{11}^\mu + iW_{12}^\mu) \\ & & + 2\frac{g_x}{g_L} X B^\mu & \\ (W_{13}^\mu - iW_{14}^\mu) & (W_9^\mu - iW_{10}^\mu) & (W_{11}^\mu - iW_{12}^\mu) & -\frac{3W_{15}^\mu}{\sqrt{6}} + 2\frac{g_x}{g_L} X B^\mu \end{pmatrix} \quad (32)$$

W_i^μ ($i = 1, \dots, 15$) and B_μ are the gauge fields.

For the charged gauge bosons, in the basis (W_1^μ, W_2^μ) , (W_4^μ, W_5^μ) , (W_6^μ, W_7^μ) , (W_9^μ, W_{10}^μ) , (W_{11}^μ, W_{12}^μ) , (W_{13}^μ, W_{14}^μ) one has the following mass matrices:

$$\begin{aligned} & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 & 0 \\ 0 & v_\rho^2 \end{pmatrix}, & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} (v_\rho^2 + v_\eta^2) & 0 \\ 0 & (v_\rho^2 + v_\eta^2) \end{pmatrix}, \\ & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\eta^2 & 0 \\ 0 & v_\eta^2 \end{pmatrix}, & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 + v_\chi^2 & 0 \\ 0 & v_\rho^2 + v_\chi^2 \end{pmatrix}, \\ & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\eta^2 + v_\chi^2 & 0 \\ 0 & v_\eta^2 + v_\chi^2 \end{pmatrix}, & \frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\chi^2 & 0 \\ 0 & v_\chi^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

To obtain the masses:

$$\begin{aligned} M_{W^\pm}^2 &= \frac{g_L^2 v_\rho^2}{4}, & M_{K_1^\pm}^2 &= \frac{g_L^2 (v_\rho^2 + v_\eta^2)}{4}, \\ M_{K, K'}^2 &= \frac{g_L^2 v_\eta^2}{4}, & M_{Y^\pm}^2 &= \frac{g_L^2 (v_\rho^2 + v_\chi^2)}{4}, \\ M_{V^{\pm\pm}}^2 &= \frac{g_L^2 (v_\eta^2 + v_\chi^2)}{4}, & M_{X^\pm}^2 &= \frac{g_L^2 (v_\chi^2)}{4}, \end{aligned} \quad (34)$$

respectively. For the neutral bosons in the basis $(W_3^\mu, W_8^\mu, W_{15}^\mu, B^\mu)$, we have the following mass matrix:

$$\frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 & -\frac{v_\rho^2}{\sqrt{3}} & -\frac{v_\rho^2}{\sqrt{6}} & -2X \frac{g_x}{g_L} v_\rho^2 \\ -\frac{v_\rho^2}{\sqrt{3}} & \frac{(4v_\eta^2 + v_\rho^2)}{3} & \frac{(v_\rho^2 - 2v_\eta^2)}{3\sqrt{2}} & 2X \frac{g_x}{g_L} \frac{(v_\rho^2 - 2v_\eta^2)}{\sqrt{3}} \\ -\frac{v_\rho^2}{\sqrt{6}} & \frac{(v_\rho^2 - 2v_\eta^2)}{3\sqrt{2}} & \frac{(v_\eta^2 + v_\rho^2 + 9v_\chi^2)}{6} & 2X \frac{g_x}{g_L} \frac{(v_\eta^2 + v_\rho^2 - 3v_\chi^2)}{\sqrt{6}} \\ -2X \frac{g_x}{g_L} v_\rho^2 & 2X \frac{g_x}{g_L} \frac{(v_\rho^2 - 2v_\eta^2)}{\sqrt{3}} & 2X \frac{g_x}{g_L} \frac{(v_\eta^2 + v_\rho^2 - 3v_\chi^2)}{\sqrt{6}} & 4X^2 \frac{g_x^2}{g_L^2} (v_\eta^2 + v_\rho^2 + 3v_\chi^2) \end{pmatrix}, \quad (35)$$

where $X = 1$, and therefore, the masses of γ , Z , Z' , Z'' are

$$\begin{aligned} M_\gamma^2 &= 0, & M_Z^2 &= \frac{g_L^2 v_\rho^2}{4 \cos^2 \theta_W}, \\ M_{Z'}^2 &= \frac{g_L^2 (\cos^2 \theta_W v_\eta^2)}{(3 - 4 \sin^2 \theta_W)}, \\ M_{Z''}^2 &= \frac{g_L^2 v_\eta^2 [(1 - 4 \sin^2 \theta_W)^2 + (3 - 4 \sin^2 \theta_W)^2]}{8(3 - 4 \sin^2 \theta_W)(1 - 4 \sin^2 \theta_W)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Here, θ_W is the Weinberg angle. Table 2 summarizes the gauge bosons and Higgs masses formulation $m^2(v_\eta, v_\rho, v_\chi) = m^2(v_\eta) + m^2(v_\rho) + m^2(v_\chi)$.

Table 2. The gauge bosons and Higgs masses formulation.

Bosons	$m^2(v_\eta, v_\rho, v_\chi)$	$m^2(v_\eta)$	$m^2(v_\rho)$	$m^2(v_\chi)$
$m_{W^\pm}^2$	$\frac{g_L^2 v_\rho^2}{4}$	0	$(80.40 \text{ GeV})^2$	0
$m_{K_1^\pm}^2$	$\frac{g_L^2 (v_\rho^2 + v_\eta^2)}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\rho^2}{4}$	0
m_K^2	$\frac{g_L^2 v_\eta^2}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2}{4}$	0	0
$m_{V^\pm}^2$	$\frac{g_L^2 (v_\rho^2 + v_\chi^2)}{4}$	0	$\frac{g_L^2 v_\rho^2}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}$
$m_{Y^\pm}^2$	$\frac{g_L^2 (v_\eta^2 + v_\chi^2)}{4}$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2}{4}$	0	$\frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}$
$m_{X^\pm}^2$	$\frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}$	0	0	$\frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}$
m_Z^2	$\frac{g_L^2 v_\rho^2}{4 \cos^2 \theta_W}$	0	$(91.68 \text{ GeV})^2$	0
$m_{Z'}^2$	$\frac{g_L^2 \cos^2 \theta_W v_\eta^2}{(3-4 \sin^2 \theta_W)}$	$\frac{g_L^2 \cos^2 \theta_W v_\eta^2}{(3-4 \sin^2 \theta_W)}$	0	0
$m_{Z''}^2$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2 [(1-4 \sin^2 \theta_W)^2 + (3-4 \sin^2 \theta_W)^2]}{8(3-4 \sin^2 \theta_W)(1-4 \sin^2 \theta_W)}$	$\frac{g_L^2 v_\eta^2 [(1-4 \sin^2 \theta_W)^2 + (3-4 \sin^2 \theta_W)^2]}{8(3-4 \sin^2 \theta_W)(1-4 \sin^2 \theta_W)}$	0	0
$m_{h_1^\pm}^2$	$\frac{\lambda_7 (v_\eta^2 + v_\rho^2)}{2}$	$\frac{\lambda_7 v_\eta^2}{2}$	$\frac{\lambda_7 v_\rho^2}{2}$	0
$m_{h_2^\pm}^2$	$\frac{\lambda_8 (v_\eta^2 + v_\chi^2)}{2}$	$\frac{\lambda_8 v_\eta^2}{2}$	0	$\frac{\lambda_8 v_\chi^2}{2}$
$m_{h^{\pm\pm}}^2$	$\frac{\lambda_9 (v_\rho^2 + v_\chi^2)}{2}$	0	$\frac{\lambda_9 v_\rho^2}{2}$	$\frac{\lambda_9 v_\chi^2}{2}$
$m_{H_1^0}^2$	$\left(\lambda_2 + \frac{[\lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_6 (\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_4 \lambda_5)]}{\lambda_5^2 - 4 \lambda_1 \lambda_3} \right) v_\rho^2$	0	$(125 \text{ GeV})^2$	0
$m_{H_2^0}^2$	$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}) v_\eta^2}{2}$	$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}) v_\eta^2}{2}$	0	0
$m_{H_3^0}^2$	$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}) v_\chi^2}{2} = \Omega$	0	0	Ω

It is very important to know that due to the acceleration of the early universe and given that the three scales of the SSB are very different, the latter (i.e. SSB) is carried out sequentially in three steps as it was mentioned before as follows:

First step:

$$SU(3)_C \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\chi \sim 2 \text{ TeV}} SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X .$$

Second step:

$$SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\eta \sim 2 \text{ TeV}} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y .$$

Third step:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{v_\rho = 246 \text{ GeV}} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{QED}} .$$

In addition, by examining Table 2, one can distinguish several scenarios concerning how gauge bosons of the model get their masses through the different SSBs, namely:

- X^\pm and H_3^0 only intervene in the first step of the phase transition where $m_{X^\pm, H_3^0}^2 \propto v_\chi^2$. The simply charged boson X^\pm acquires its mass by eating the χ_2^\pm Goldstone boson of the quartet χ and by interacting with the scalar field H_3^0 which is a massive neutral Higgs.
- The neutral gauge bosons K, K', Z', Z'' and H_2^0 only intervene in the second step of the phase transition since $m_{K, K', Z', Z'', H_2^0}^2 \propto v_\eta^2$. During this step, the Goldstones $I_\chi, R_{\eta_1}, I_{\eta_1}, I_{\eta_2}$ are, respectively eaten by K, K', Z', Z'' , the latter by interacting with the scalar field H_2^0 which is the second massive neutral Higgs of the model get their masses.

It should be noted here that these two phase transitions only concern exotic quarks and heavy bosons, without the involvement of SM particles.

- W^\pm, Z and H_1^0 are only involved in the third step of the phase transition ($m^2 \propto v_\rho^2$). To get their masses, the gauge bosons W^\pm and Z , respectively eat two Goldstones ρ_2^\pm and I_ρ , and by interacting with the third scalar field H_1^0 which is the SM like Higgs boson.
- h_2^\pm and Y^\pm are involved in both the first and second steps of the phase transitions since $m_{h_2^\pm, Y^\pm}^2 \propto (v_\chi^2 + v_\eta^2)$. It should be noted that when the universe reaches the scale of the first phase transition ($v_\chi \sim 2.2$ TeV), the Y^\pm eats the first Goldstone η_1^\pm and by interacting with H_3^0 obtains the first part of its mass. In the second step when the universe reaches the second scale of the phase transition ($v_\eta \sim 2.1$ TeV) it eats another Goldstone boson χ_1^\pm and by interacting with H_2^0 recovers the other part of its mass, while the scalar field h_2^\pm is massive and remain in the physical spectrum.
- The doubly charged Higgs $h^{\pm\pm}$ is involved in the first and third steps of the SSB ($m^2 \propto v_\rho^2 + v_\chi^2$), this scalar field is massive and remain in the physical spectrum.
- The charged gauge bosons $K_1^\pm, V^{\pm\pm}$ and the charged scalar field h_1^\pm are involved in the second and third steps of the SSB as ($m^2 \propto v_\rho^2 + v_\eta^2$). The K_1^\pm and $V^{\pm\pm}$ in the second step when the universe cools down to v_η eat two Goldstones η_2^\pm and $\chi^{\pm\pm}$, respectively, and by interacting with H_2^0 get the first part of their masses. After, during the third SSB when the universe reaches the energy ($v_\rho = 246$ GeV) they, respectively eat two other Goldstones ρ_1^\pm and $\rho^{\pm\pm}$, and by interacting with H_1^0 , thus obtain the second part of their masses. As before, the scalar field h_1^\pm is massive and remains in the physical spectrum.

3. Electroweak Phase Transition

3.1. *Effective potential*

In a perturbative analysis of the EWPT, the important tool is the effective potential at finite temperature.^{37,39–41} It is the contribution coming from fermions, bosons and Higgses. This function also depends on the VeVs and temperature and is given

at one-loop order by⁴²

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) = V_0(\phi) + V_1(\phi) + \Delta V_1^{(T)}(\phi, T), \quad (37)$$

where V_0 and V_1 are, respectively the tree-level and the one-loop effective potential at $T = 0$. The third term $\Delta V_1^{(T)}(\phi, T)$ contains the one-loop thermal corrections. The expression of $V_1(\phi)$ reads^{37,39,42}

$$V_1(\phi) = \sum_i \frac{\tilde{n}_i}{64\pi^2} m_i^4(\phi) \left[\ln \frac{m_i^2(\phi)}{\mu^2} - C_i \right], \quad (38)$$

where μ is the renormalization scale and $\tilde{n}_i = n_i(-1)^{2S_i}$, with S_i and n_i stand for the spin and the degrees of freedom of the particle i . The sum is over all particles of the model having a mass $m_i(\phi)$. It is worthwhile mentioning, that if we work in the Landau gauge and use the \overline{DR} renormalization scheme,⁴³ the coefficients C_i take the same value $\frac{3}{2}$ for all kind of particles. Following Ref. 42 $\Delta V_1^{(T)}(\phi, T)$ has the form

$$\Delta V_1^{(T)}(\phi, T) = \sum_{i=\text{boson}} n_i \frac{T^4}{2\pi^2} J_B\left(\frac{m_i^2}{T^2}\right) + \sum_{j=\text{fermion}} n_j \frac{T^4}{2\pi^2} J_F\left(\frac{m_j^2}{T^2}\right), \quad (39)$$

where $J_B(x)$, $J_F(x)$ are, respectively the bosonic and fermionic thermal functions, with the following expansions (for $x \ll 1$)⁴²

$$J_B(x^2) = -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{\pi}{6}x^{3/2} - \frac{1}{32}x^4 \ln\left(\frac{x^2}{a_b}\right) + O(x^3) \quad (40)$$

and

$$J_F(x^2) = \frac{7\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{24}x^2 - \frac{1}{32}x^4 \ln\left(\frac{x^2}{a_f}\right) + O(x^3) \quad (41)$$

with $\ln(a_b) \simeq 5.4076$ and $\ln(a_f) \simeq 2.6351$. For $x \gg 1$ one has⁴²

$$J_B(x^2) \simeq J_F(x^2) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-x} \left(1 + \frac{15}{8x} + O(x^{-2})\right). \quad (42)$$

Regarding the particles content of the compact 341 model, the effective potential $V_{\text{eff}}(\phi, T)$ can be shown as having the following expression

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\phi, T) &= \frac{\mu_\eta^2 v_\eta^2 + \mu_\rho^2 v_\rho^2 + \mu_\chi^2 v_\chi^2}{2} \\ &+ \frac{\lambda_1 v_\eta^4 + \lambda_2 v_\rho^4 + \lambda_3 v_\chi^4 + \lambda_4 v_\eta^2 v_\rho^2 + \lambda_5 v_\eta^2 v_\chi^2 + \lambda_6 v_\chi^2 v_\rho^2}{4} \\ &+ \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left[\ln \frac{m_i^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right] \\ &+ \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_{i=\text{bosons, fermions}} \tilde{n}_i J_{B,F}\left(\frac{m_i}{T^2}\right) \end{aligned} \quad (43)$$

with

$$\begin{aligned}\tilde{n}_h &= 1, & \tilde{n}_{\text{charged}} &= 2, & \tilde{n}_{\text{quark}} &= -12, \\ \tilde{n}_{Z,Z',Z'',K,K'} &= 3, & \tilde{n}_{W,K_1,Y,X,V} &= 6.\end{aligned}\tag{44}$$

3.2. Electroweak phase transition in the compact 341 model

The electroweak baryogenesis (EWBG) is one of the most attractive and important ways of accounting for the observed baryon asymmetry of the universe. In order to explain the problem of baryogenesis, Sakharov posited three conditions for generating this asymmetry (matter–antimatter).^{44–46} The process causing the violation of the baryon number must come from a rapid transition of the sphalerons into the symmetrical phase. It must violate C and CP since its conservation would lead to the creation of the same amount of matter–antimatter particles. The involved interactions should take place out-of-equilibrium so that the last Sakharov condition is reached by a strong first-order phase transition.

Using the high-temperature expansions in Eqs. (40) and (41) one can rewrite Eq. (37) in a simplified form illustrating the thermal corrections in the effective potential, as in Ref. 44

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) = D(T^2 - T_0^2)\phi^2 - ET\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\phi^4,\tag{45}$$

where D , E , T_0 are temperature independent coefficients and λ is a slowly-varying function of T . If $E = 0$ the phase transition is of a second-order type⁴⁷ with a transition temperature T_0 and the Higgs expectation value $\langle\phi\rangle_0$ such that

$$\langle\phi\rangle_0 = T_0\sqrt{\frac{2D}{\lambda}\left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right)}.\tag{46}$$

For $E \neq 0$ the phase transition becomes first order, at very high temperatures $T \gg T_1$. The only minimum of the effective potential is $\langle\phi\rangle_0 = 0$. When $T = T_1$ the effective potential acquires an extra minimum at a value

$$\langle\phi\rangle_1 = \frac{3ET}{2\lambda},\tag{47}$$

which appears as an inflection point at a temperature

$$T_1^2 = \frac{8\lambda D}{8\lambda D - 9E^2}T_0^2.\tag{48}$$

As the temperature drops, the second minimum in Eq. (47) becomes deeper, and it degenerates with the other one $\langle\phi\rangle_1 = 0$. The two minima are separated by a potential barrier at a critical temperature T_c such that

$$T_c^2 = \frac{\lambda DT_0^2}{\lambda D - E^2}.\tag{49}$$

The value of the minimum of the critical temperature is given by

$$\langle \phi \rangle_c = \frac{2ET_c}{\lambda}. \quad (50)$$

The first-order phase transition is characterized by the ratio $\frac{\langle \phi \rangle_c}{T_c}$. The transition from the local minimum at $\langle \phi \rangle = 0$ to a deeper minimum at $\langle \phi \rangle \neq 0$ proceeds via the thermal tunneling.⁴⁸ It can be understood in terms of bubbles formation of the broken phase in the sea of the symmetrical phase. When enough large bubble forms and expands until it collides with other bubbles, then the universe becomes filled with the broken phase. The EWPT occurs at a temperature $T_w \sim 100$ GeV and must be strongly first order to achieve a successful EWBG and its quantitative condition is $\frac{\phi_c}{T_c} \geq 1$. The height of the barrier between the two minima measures of the strength of the transition. Thus, the strong first-order phase transition presents a high barrier.

The EWBG would not be possible at the critical temperature if a second-order phase transition occurred when there was no barrier and the Higgs field would continuously drop from zero to a nonzero expectation value and that there was no bubble nucleation which is the source of nonthermal equilibrium. We would expect a very large baryon violation rate because there is no barrier between the two vacuum, so the sphaleron transition is quick in this case.

In our work, we only consider the contributions of the gauge bosons, top and exotic quarks, three neutral and three charged Higgses to the effective potential during the three steps of the spontaneous symmetry breaking.

3.2.1. The first step phase transition

The effective potential at finite temperature of the first step of phase transition ($SU(4)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\chi} SU(3)_L \otimes U(1)_X$) has the compact form

$$V_{\text{eff}}(v_\chi) = D(T^2 - T_0^2)v_\chi^2 - ETv_\chi^3 + \frac{\lambda(T)}{4}v_\chi^4, \quad (51)$$

where this phase transition occurs at the TeV scale. The parameters of the above equation are shown to have the following expressions:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{24v_\chi^2} \left(6m_{V^{\pm\pm}}^2 + 6m_{Y^\pm}^2 + 6m_{X^\pm}^2 + 2m_{h^\pm}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2m_{h^{\pm\pm}}^2 + m_{H_3^0}^2 + 6m_{J_1}^2 + 6m_{J_2}^2 + 6m_{J_3}^2 \right), \\ E &= \frac{1}{12\pi v_\chi^3} \left(6m_{V^{\pm\pm}}^3 + 6m_{Y^\pm}^3 + 6m_{X^\pm}^3 + 2m_{h^\pm}^3 + 2m_{h^{\pm\pm}}^3 + m_{H_3^0}^3 \right), \\ T_0^2 &= \frac{(m_{H_3^0}^2)}{4D} - \frac{1}{32D\pi^2 v_\chi^2} \left(6m_{Y^\pm}^4 + 6m_{V^{\pm\pm}}^4 + 6m_{X^\pm}^4 \right. \\ &\quad \left. - 12m_{J_1}^4 - 12m_{J_2}^4 - 12m_{J_3}^4 + m_{H_3^0}^4 + 2m_{h^\pm}^4 + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda(T) = & \frac{(m_{H_3^0}^2)}{2v_\chi^2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8\pi^2 v_\chi^2 (m_{H_3^0}^2)} \right) \left[6m_{Y^\pm}^4 \log \frac{m_{Y^\pm}^2}{A_B T^2} + 6m_{X^\pm}^4 \log \frac{m_{X^\pm}^2}{A_B T^2} \right. \right. \\
 & + 6m_{V^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{V^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} - 12m_{J_1}^4 \log \frac{m_{J_1}^2}{A_F T^2} \\
 & - 12m_{J_2}^4 \log \frac{m_{J_2}^2}{A_F T^2} - 12m_{J_3}^4 \log \frac{m_{J_3}^2}{A_F T^2} + m_{H_3^0}^4 \log \frac{m_{H_3^0}^2}{A_B T^2} \\
 & \left. \left. + 2m_{h_2^\pm}^4 \log \frac{m_{h_2^\pm}^2}{A_B T^2} + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{h^{\pm\pm}}^2}{A_B T^2} \right] \right\}, \tag{52}
 \end{aligned}$$

where the critical temperature T_{c_1} is given by

$$T_{c_1} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - E^2/\lambda D}} \tag{53}$$

and the condition of first EWPT is

$$E \geq \frac{\lambda(T_{c_1})}{2}. \tag{54}$$

3.2.2. The second step phase transition

The effective potential at finite temperature of the second step of phase transition ($SU(3)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{v_\eta} SU(2)_L \otimes U(1)_Y$) reads

$$V_{\text{eff}}(v_\eta) = D'(T^2 - T_0'^2)v_\eta^2 - E'Tv_\eta^3 + \frac{\lambda'(T)}{4}v_\eta^4, \tag{55}$$

where this phase transition also occurs at the TeV scale. The parameters D' , E' , T_0' and $\lambda'(T)$ are

$$\begin{aligned}
 D' = & \frac{1}{24v_\eta^2} \left(3m_K^2 + 3m_{K'}^2 + 6m_{K_1^\pm}^2 + 6m_{Y^\pm}^2 + 3m_{Z'}^2 + 3m_{Z''}^2 \right. \\
 & \left. + 6m_{V_1}^2 + 6m_{D_2}^2 + 6m_{D_3}^2 + 2m_{h_1^\pm}^2 + 2m_{h_2^\pm}^2 + m_{H_2^0}^2 \right), \\
 E' = & \frac{1}{12\pi v_\eta^3} \left(6m_{Y^\pm}^3 + 6m_{K_1^\pm}^3 + 3m_{Z'}^3 + 3m_{Z''}^3 \right. \\
 & \left. + 3m_K^3 + 3m_{K'}^3 + 2m_{h_1^\pm}^3 + 2m_{h_2^\pm}^3 + m_{H_2^0}^3 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_0'^2 &= \frac{m_{H_2^0}^2}{4D'} - \frac{1}{32\pi^2 D' v_\eta^2} \left(6m_{Y^\pm}^4 + 6m_{K_1^\pm}^4 + 3m_{Z'}^4 + 3m_{Z''}^4 + 3m_K^4 \right. \\
&\quad \left. + 3m_{K'}^4 - 12m_{U_1}^4 - 12m_{D_2}^4 - 12m_{D_3}^4 + 2m_{h_1^\pm}^4 + 2m_{h_2^\pm}^4 + m_{H_2^0}^4 \right), \\
\lambda'(T) &= \frac{m_{H_2^0}^2}{2v_\eta^2} \left[1 - \frac{1}{8\pi^2 m_{H_2^0}^2 v_\eta^2} \left(6m_{Y^\pm}^4 \log \frac{m_{Y^\pm}^2}{A_B T^2} + 6m_{K_1^\pm}^4 \log \frac{m_{K_1^\pm}^2}{A_B T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3m_{Z'}^4 \log \frac{m_{Z'}^2}{A_B T^2} + 3m_{Z''}^4 \log \frac{m_{Z''}^2}{A_B T^2} + 3m_K^4 \log \frac{m_K^2}{A_B T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3m_{K'}^4 \log \frac{m_{K'}^2}{A_B T^2} - 12m_{U_1}^4 \log \frac{m_{U_1}^2}{A_F T^2} - 12m_{D_2}^4 \log \frac{m_{D_2}^2}{A_F T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 12m_{D_3}^4 \log \frac{m_{D_3}^2}{A_F T^2} + 2m_{h_1^\pm}^4 \log \frac{m_{h_1^\pm}^2}{A_B T^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2m_{h_2^\pm}^4 \log \frac{m_{h_2^\pm}^2}{A_B T^2} + m_{H_2^0}^4 \log \frac{m_{H_2^0}^2}{A_B T^2} \right) \right], \tag{56}
\end{aligned}$$

where the critical temperature T_{c_2} is given by

$$T_{c_2} = \frac{T_0'}{\sqrt{1 - E'^2/\lambda' D'}} \tag{57}$$

and the condition of first EWPT is

$$E' \geq \frac{\lambda'(T_{c_2})}{2}. \tag{58}$$

3.2.3. The third step phase transition

The effective potential at finite temperature of the third step of phase transition ($SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{v_\rho} U(1)_{\text{QED}}$) has the form

$$V_{\text{eff}}(v_\rho) = D''(T^2 - T_0''^2)v_\rho^2 - E''T v_\rho^3 + \frac{\lambda''(T)}{4}v_\rho^4, \tag{59}$$

where this phase transition happens at the GeV scale and the coefficients D'' , E'' , T_0'' and $\lambda''(T)$ are

$$\begin{aligned}
D'' &= \frac{1}{24v_\rho^2} \left(6m_{W^\pm}^2 + 6m_{K_1^\pm}^2 + 6m_{V^{\pm\pm}}^2 + 3m_Z^2 \right. \\
&\quad \left. + m_{H_1^0}^2 + 2m_{h_1^\pm}^2 + 2m_{h^{\pm\pm}}^2 + 6m_t^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E'' &= \frac{1}{12\pi v_\rho^3} \left(6m_{W^\pm}^3 + 6m_{K_1^\pm}^3 + 6m_{V^{\pm\pm}}^3 \right. \\
 &\quad \left. + 3m_Z^3 + m_{H_1^0}^3 + 2m_{h_1^\pm}^3 + 2m_{h^{\pm\pm}}^3 \right), \\
 T_0''^2 &= \frac{m_{H_1^0}^2}{4D''} - \frac{1}{32D''\pi^2 v_\rho^2} \left(6m_{W^\pm}^4 + 6m_{K_1^\pm}^4 + 6m_{V^{\pm\pm}}^4 \right. \\
 &\quad \left. + 3m_Z^4 + m_{H_1^0}^4 + 2m_{h_1^\pm}^4 + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 - 12m_t^4 \right), \\
 \lambda''(T) &= \frac{m_{H_1^0}^2}{2v_\rho^2} \left[1 - \frac{1}{8\pi^2 m_{H_1^0}^2 v_\rho^2} \left(6m_{W^\pm}^4 \log \frac{m_{W^\pm}^2}{ABT^2} + 6m_{K_1^\pm}^4 \log \frac{m_{K_1^\pm}^2}{ABT^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 6m_{V^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{V^{\pm\pm}}^2}{ABT^2} + 3m_Z^4 \log \frac{m_Z^2}{ABT^2} + m_{H_1^0}^4 \log \frac{m_{H_1^0}^2}{ABT^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2m_{h_1^\pm}^4 \log \frac{m_{h_1^\pm}^2}{ABT^2} + 2m_{h^{\pm\pm}}^4 \log \frac{m_{h^{\pm\pm}}^2}{ABT^2} - 12m_t^4 \log \frac{m_t^2}{AF T^2} \right) \right] \quad (60)
 \end{aligned}$$

with the critical temperature T_{c_3} is given by

$$T_{c_3} = \frac{T_0''}{\sqrt{1 - E''^2/\lambda'' D''}} \quad (61)$$

and the condition of the third step of phase transition is

$$E'' \geq \frac{\lambda''(T_{c_3})}{2}. \quad (62)$$

4. Numerical Results

Before proceeding, we must first diagonalize the scalar potential $V(\eta, \rho, \chi)$. To do so, we must find the eigenvalues of the block matrix $M_{6 \times 6}$ written in the basis $\Phi_1 = \eta^\dagger \eta$, $\Phi_2 = \rho^\dagger \rho$, $\Phi_3 = \chi^\dagger \chi$, $\Phi_4 = \rho^\dagger \eta$, $\Phi_5 = \chi^\dagger \eta$, $\Phi_6 = \chi^\dagger \rho$:

$$M_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_4/2 & \lambda_5/2 \\ \lambda_4/2 & \lambda_2 & \lambda_6/2 \\ \lambda_5/2 & \lambda_6/2 & \lambda_3 \end{pmatrix} & & \\ & 0_{3 \times 3} & \\ & & \begin{pmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Straightforward but tedious calculations give the following eigenvalues:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \pm \frac{\lambda_9}{2}, & V_2 &= \pm \frac{\lambda_8}{2}, & V_3 &= \pm \frac{\lambda_7}{2}, \\
V_4 &= \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{2}{27}\beta^3 - \frac{\gamma\beta}{3} + \delta\right) / 2 \\ -\left[\left(\frac{4(\gamma - \beta^3/3)^3}{+27\left(\frac{2}{27}\beta^3 - \frac{\gamma\beta}{3} + \delta\right)^2} \right) / 27 \right]^{1/2} / 2 \end{array} \right\}^{1/3} \\
&\quad + \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{2}{27}\beta^3 - \frac{\gamma\beta}{3} + \delta\right) / 2 \\ +\left[\left(\frac{4(\gamma - \beta^3/3)^3}{+27\left(\frac{2}{27}\beta^3 - \frac{\gamma\beta}{3} + \delta\right)^2} \right) / 27 \right]^{1/2} / 2 \end{array} \right\}^{1/3}, \\
V_5 &= \frac{(-V_4 + \sqrt{\Delta})}{2}, & V_6 &= \frac{(-V_4 - \sqrt{\Delta})}{2},
\end{aligned} \tag{64}$$

where

$$\begin{aligned}
\beta &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\
\gamma &= ((\lambda_6^2 + \lambda_5^2 + \lambda_4^2)/4 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3), \\
\delta &= ((\lambda_6^2\lambda_1 + \lambda_5^2\lambda_2 + \lambda_4^2\lambda_3)/4 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_4\lambda_5\lambda_6)/3).
\end{aligned} \tag{65}$$

Now, in order to make our study clear, viable and self-consistent, some theoretical constraints have to be imposed on the scalar potential dimensionless couplings $V_i (i = \overline{1, 6})$.

- (1) V_i 's have to be real such that the masses of all particles are real and positive (no ghost masses in the model).
- (2) The potential has to be bounded from below and this will impose the stability conditions $V_i > 0 (i = \overline{1, 6})$.
- (3) In order to preserve the perturbative unitarity, V_i 's have to verify the constraints $0 < V_i < 8\pi (i = \overline{1, 6})$.

In what follows, we identify the lightest scalar as neutral Higgs-like boson with mass $m_{H_1^0} = 125.616$ GeV, and take the top quark mass $m_t = 172.4466$ GeV, the W^\pm, Z gauge bosons masses $m_{W^\pm} = 80.40$ GeV, $m_Z = 91.6838$ GeV, the VeV $\nu_\rho = 246$ GeV and the gauge coupling of the SM $g_L \simeq g_X \simeq 0.65$. Taking the Yukawa coupling randomly and using a Monte Carlo simulation after imposing the constraint of a strong first-order phase transition, we obtain

$$\begin{aligned}
\lambda_{33}^u &= 0.9913, & 0.385 &\leq \lambda_{11}^J \leq 0.54, & 0.382 &\leq \lambda_{22}^J \leq 0.536, \\
0.386 &\leq \lambda_{33}^J \leq 0.542, & 0.42 &\leq \lambda_{11}^U \leq 0.61, \\
0.4 &\leq \lambda_{22}^D \leq 0.54, & 0.41 &\leq \lambda_{33}^D \leq 0.56.
\end{aligned} \tag{66}$$

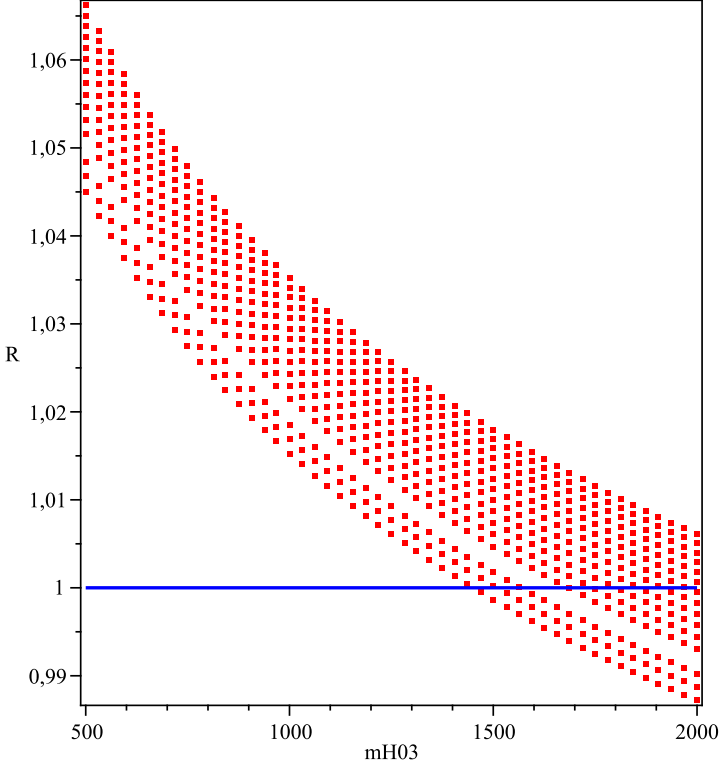


Fig. 1. The ratio $R_1 = \frac{v_{c_1}}{T_{c_1}} = \frac{2E}{\lambda(T_{c_1})}$ as a function of $m_{H_3^0}$ for different values of T_{c_1} between 1300–2000 GeV, for the allowed strong first-order EWPT region. The first curve from the bottom is for $T_{c_1} = 1300$ GeV (density plot).

Moreover, using the fact that the VeVs take the values $v_\chi \sim v_\eta \sim 2\text{--}5$ TeV (in order to avoid the Landau pole^{35,36}), and the masses of the exotic quarks $U, J_1, J_2, J_3, D_2, D_3$ are in the range of 600–700 GeV which are compatible with the LHC results giving the lower band reproducing the experimental results and imposing the theoretical constraints mentioned previously, we get the following stringent conditions on the scalar potential dimensionless coupling constants:

$$\begin{aligned}
 \left(\lambda_2 + \frac{[\lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_6(\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_4 \lambda_5)]}{\lambda_5^2 - 4\lambda_1 \lambda_3} \right) &= 0.259, \\
 0.064 &\leq \left(\lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) \leq 0.168, \\
 0.1032 &\leq \left(\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) \leq 0.294, \\
 0.083 &\leq (\lambda_1 + \lambda_3) \leq 0.231, \quad 0.00038 \leq ((\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2) \leq 0.0039, \\
 0.156 &\leq \lambda_7 \leq 0.31, \quad 0.16 \leq \lambda_8 \leq 0.27, \quad 0.167 \leq \lambda_9 \leq 0.32.
 \end{aligned} \tag{67}$$

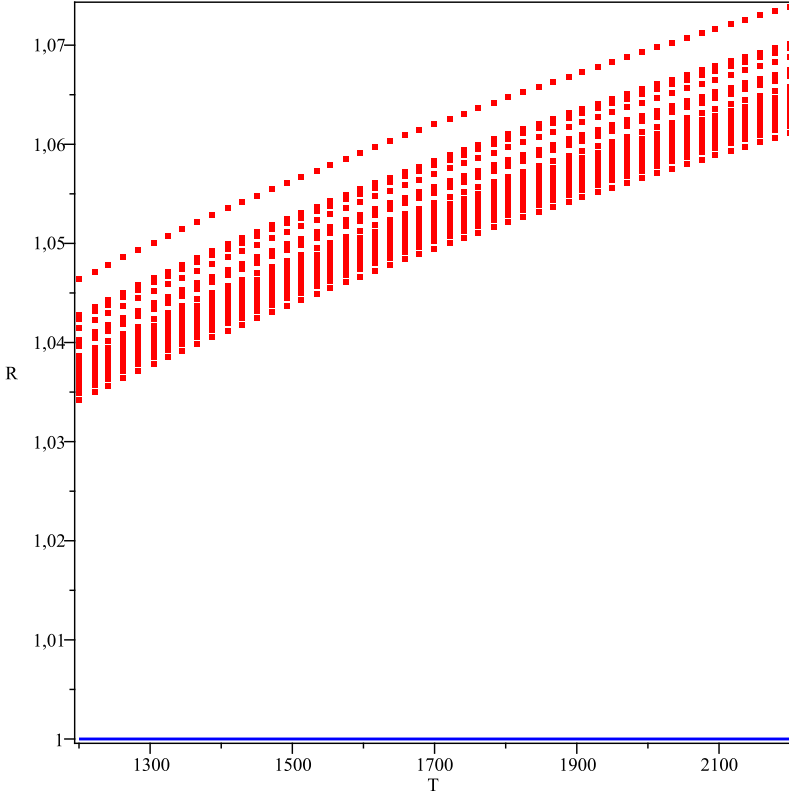


Fig. 2. The ratio $R_1 = \frac{v_{c_1}}{T_{c_1}} = \frac{2E}{\lambda(T_{c_1})}$ versus T_{c_1} for different values of v_χ between 1700–2250 GeV, for the allowed strong first-order EWPT region. The first curve from the top is for $v_\chi = 1700$ GeV (density plot).

Figure 1 represents the allowed region of the first step of the EWPT for the ratio $R_1 = \frac{2E}{\lambda(T_{c_1})} = \frac{v_{c_1}}{T_{c_1}}$ as a function of the heavy neutral Higgs boson mass $m_{H_3^0}$, where the critical temperature T_{c_1} takes values in the interval $T_{c_1} \sim 1200\text{--}2000$ GeV. It is worth mentioning that the confidence band comes from the fact that at a given value of $m_{H_3^0}$ we still have many choices of the scalar couplings λ_i 's combined to give the same value of the ratio R_1 and vice versa. Figure 2 displays the variation of the ratio R_1 within the allowed region of the parameters space in terms of the critical temperature T_{c_1} fulfilling the strong first-order EWPT. Figure 3 is similar to Fig. 2 but for the second step of EWPT, where $T_{c_2} \sim 989\text{--}1549$ GeV. Note that in this case the allowed region is narrower than the one of the first step, this is due to the fact that the parameters space is more constrained. Figure 4 is similar to Fig. 2 but for the third step of the EWPT, where $T_{c_3} \sim 120\text{--}235$ GeV. For the sake of illustration, and in order to reproduce, first: all the results of the SM, namely the masses of, the Higgs boson, charged fermions, quarks, gauge bosons, and second: always remaining in the authorized region of the LHC for all other particles of the

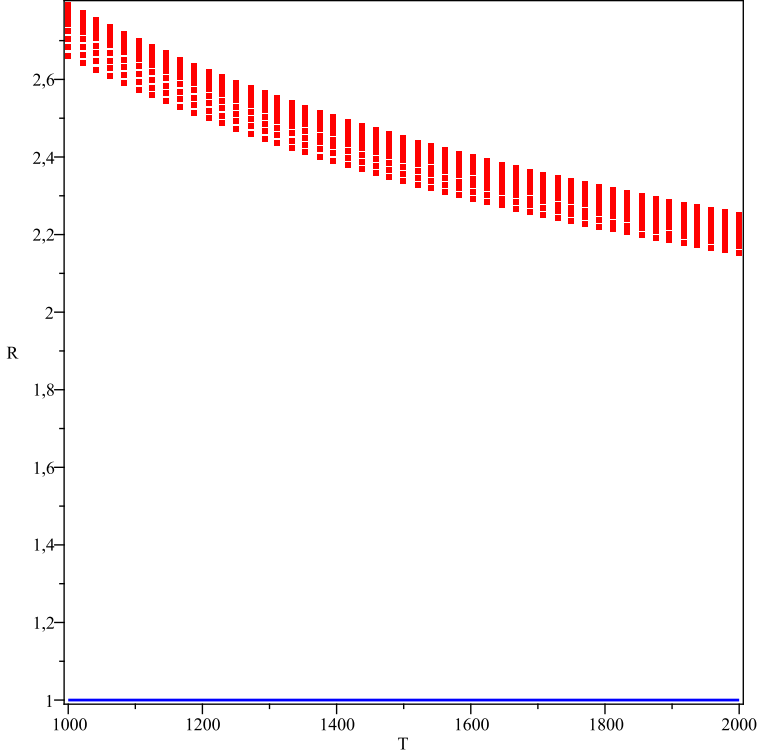


Fig. 3. The ratio $R_2 = \frac{v_{c2}}{T_{c2}} = \frac{2E'}{\lambda'(T_{c2})}$ in terms of T_{c2} for different values of v_η between 1700–2150 GeV, for the allowed strong first-order EWPT region. The first curve from the bottom is for $v_\eta = 1700$ GeV (density plot).

compact 341 model, we set

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0741, & \lambda_2 &= 0.335, & \lambda_3 &= 0.05, & \lambda_4 &= 0.084, & \lambda_5 &= 0.01, \\ \lambda_6 &= 0.107, & \lambda_7 &= 0.195, & \lambda_8 &= 0.209, & \lambda_9 &= 0.228, \\ v_\chi &= 2200 \text{ GeV}, & v_\eta &= 2100 \text{ GeV} & \text{and} & v_\rho &= 246 \text{ GeV} \end{aligned}$$

we obtain^a

$$m_{H_3^0} \approx 602.781 \text{ GeV}, \quad m_{H_2^0} \approx 464.87 \text{ GeV} \quad \text{and} \quad m_{H_1^0} \approx 125.46 \text{ GeV}.$$

Moreover, if we take the Yukawa couplings as

$$\begin{aligned} \lambda_{33}^u &= 0.9913, & \lambda_{22}^D &= 0.445, & \lambda_{33}^D &= 0.468, & \lambda_{11}^U &= 0.453, \\ \lambda_{11}^J &= 0.456, & \lambda_{22}^J &= 0.453, & \lambda_{33}^J &= 0.457, \end{aligned}$$

all the exotic quarks get a mass in the range of 600–700 GeV.

^aIt is important to note that we can set $v_\chi \sim v_\eta \sim \Lambda_{\text{cutoff}} \sim 2\text{--}5 \text{ TeV}$ due to the existence of the Landau pole, which can increase the masses of the different particles.

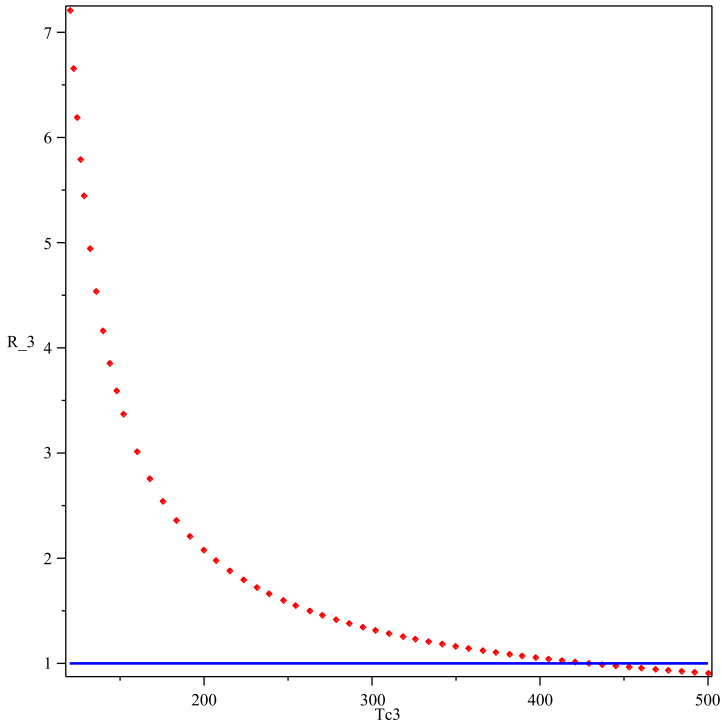


Fig. 4. The ratio $R_3 = \frac{v_{c3}}{T_{c3}} = \frac{2E''}{\lambda'(T_{c3})}$ in terms of T_{c3} for $v_\rho = 246$ GeV.

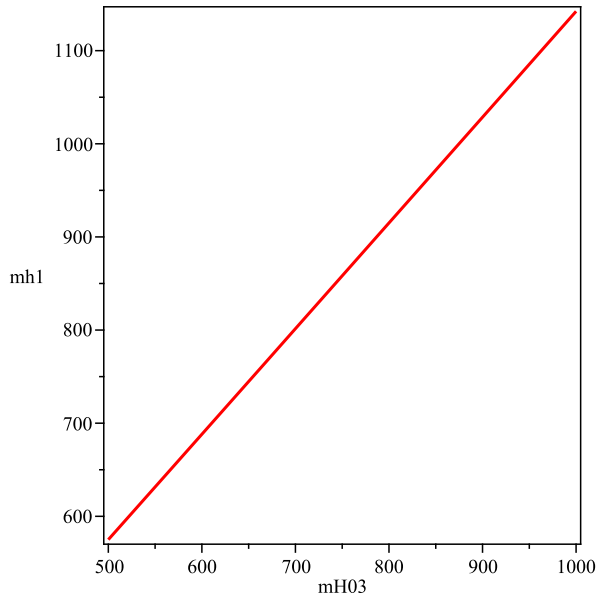


Fig. 5. Variation of $m_{h_{\pm}}$ as a function of $m_{H_3^0}$ verifying EWPT and theoretical constraints.

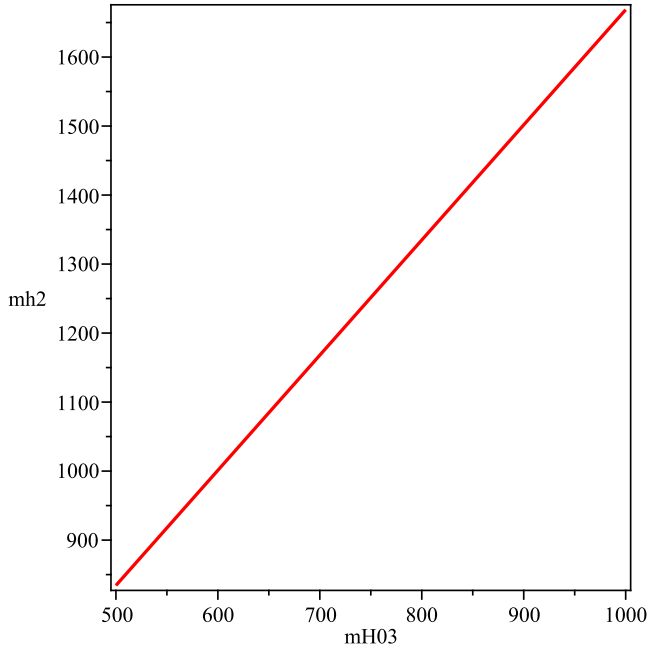


Fig. 6. Variation of $m_{h_2^\pm}$ as a function of $m_{H_3^0}$.

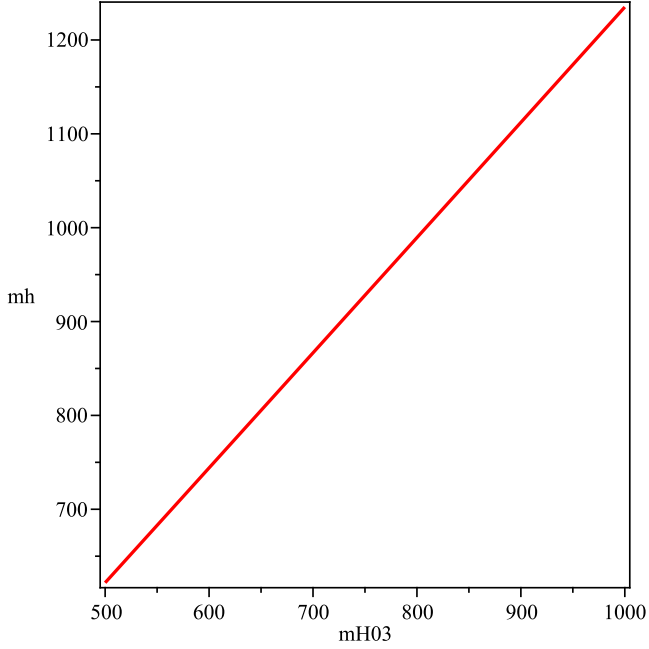


Fig. 7. Variation of $m_{h_{\pm\pm}}$ as a function of $m_{H_3^0}$.

Now, for $1200 \text{ GeV} \leq T_{c_1} \leq 2000 \text{ GeV}$, $1000 \text{ GeV} \leq T_{c_2} \leq 1900 \text{ GeV}$ and $120 \text{ GeV} \leq T_{c_3} \leq 250 \text{ GeV}$, we have $R_i = \frac{2^* E_i}{\lambda_i(T_c)} = \frac{v_{c_i}}{T_{c_i}} \geq 1$, ($i = 1, 2, 3$), as it is shown in Figs. 2–4, this ratio fulfills the necessary condition for a strong first-order phase transition for the three steps of the SSBs.

Figures 5–7 represent the variation of the heavy charged and double charged Higgs masses ($m_{h_1^\pm}, m_{h_2^\pm}$) and $m_{h^{\pm\pm}}$, respectively of the model as a function of the heavy neutral Higgs mass $m_{H_3^0}$ fulfilling the theoretical constraints and the strong first-order EWPT.

5. Sphaleron Rate in the Compact 341 Model

As it is well-established in the literature^{38,49–53} and in order to describe correctly the EWBG one has to know the following aspects:

- (i) the type of the phase transition (first, second order, etc.);
- (ii) the critical and bubbles nucleation temperatures (giving information about the occurrence of phase transitions);
- (iii) the sphaleron rate necessary to generate the baryon number asymmetry.

In the previous sections, we have discussed extensively the phase transition in the context of the compact 341 model. Furthermore, and as it was mentioned before, sphalerons are one of the most important ingredients in the study of EWBG because the sphaleron rate controls the rate of the baryon number density in the early universe. It should be noted that the sphaleron phenomenon occurs if one has the transition from the zero VeV crossing the barrier to a nonzero VeV without tunneling (classically).

Following Ref. 38, the sphaleron rate Γ by unit time is related to the sphaleron energy ε via the relation

$$\frac{\Gamma}{V} = \alpha^4 T^4 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right) \quad (68)$$

where T is the temperature, ε is the sphaleron energy, $\alpha = 1/30$ is a constant and V is the volume of the EWPT region, $V = \frac{4\pi r^3}{3} \sim \frac{1}{T^3}$. To calculate the energy ε , we start from the gauge-Higgs Lagrangian density of the compact 341 model

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge-Higgs}} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) \\ & + (D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) + (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) - V(\chi, \eta, \rho) \end{aligned} \quad (69)$$

then we derive the Hamiltonian density and deduce the energy ε to get at the end the following form:³⁸

$$\varepsilon = \int d^3x [(D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) + (D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) + (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) + V(\chi, \eta, \rho)] \quad (70)$$

using the effective potential analysis at finite temperature with VeV v_χ , v_η and v_ρ discussed in Sec. 3, Eq. (70) can be rewritten as

$$\varepsilon = 4\pi \int_0^\infty d^3x \left[\frac{1}{2}(\nabla v_\chi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla v_\eta)^2 + \frac{1}{2}(\nabla v_\rho)^2 + V_{\text{eff}}(\chi, \eta, \rho, T) \right] \quad (71)$$

using the static field approximation³⁸

$$\frac{\partial v_\chi}{\partial t} = \frac{\partial v_\eta}{\partial t} = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} = 0 \quad (72)$$

together with the equations of motion of the VeVs v_χ , v_η and v_ρ , leads to the following expressions of the sphaleron energy ε for each step of the phase transition:

$$\varepsilon_{\text{sph}(SU(4),SU(3),SU(2))} = 4\pi \int \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 v_{\chi,\eta,\rho}}{dr^2} + V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho}, T) \right] r^2 dr. \quad (73)$$

To estimate the sphaleron rate Γ , and as it was done in Ref. 38 concerning the 331 model, we proceed with the following approximation:

- (1) *Static approximation:* We assume that the VeVs of Higgs fields do not change from point to point of the universe, that is $\nabla v_{\chi,\eta,\rho} = 0$ corresponding to the extremal of V_{eff} when using the field equations. The latter are shown to be reduced to

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho})}{\partial v_{\chi,\eta,\rho}} = 0. \quad (74)$$

Thus, the sphaleron energies of Eq. (73) are simplified and obtain

$$\varepsilon_{\text{sph}(SU(4),SU(3),SU(2))} = \frac{4\pi r^3}{3} V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho}, T) \Big|_{v_{\chi_m,\eta_m,\rho_m}}. \quad (75)$$

Using Eqs. (51), (55) and (59) together with $\nabla v_{\chi,\eta,\rho} = 0$, we get the following expressions for the sphaleron rates:

$$\Gamma = \begin{cases} \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E^4}{4\lambda_T^3}\right) & \text{for } SU(4) \rightarrow SU(3), \\ \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E'^4}{4\lambda_T'^3}\right) & \text{for } SU(3) \rightarrow SU(2), \\ \alpha^4 T \exp\left(-\frac{E''^4}{4\lambda_T''^3}\right) & \text{for } SU(2) \rightarrow U(1). \end{cases} \quad (76)$$

It is worth mentioning that, for the heavy particles of the 341 model within the allowed regions where the strong first order phase transitions occur, the quantities E (respectively E' , E'') and λ (respectively λ' , λ'') are almost constant. Thus, in this approximation Γ becomes linear function of T as illustrated in

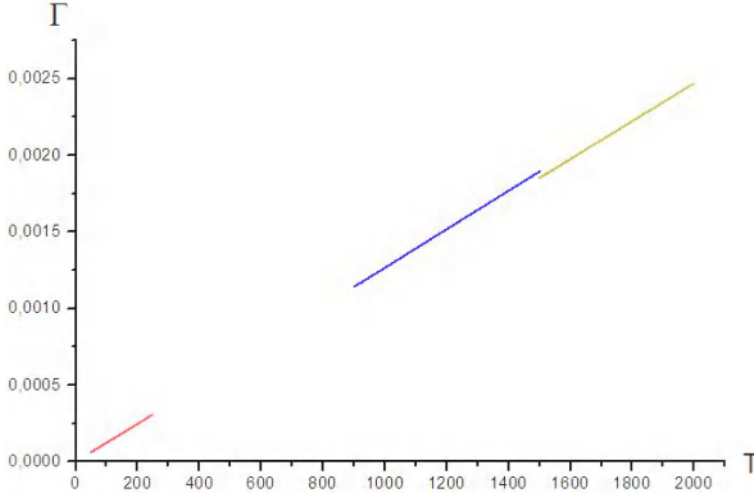


Fig. 8. The sphaleron rate Γ as a function of the temperature T for the three steps of the phase transition.

Fig. 8. Moreover, numerical results show that for temperatures below that of the phase transition T_c where the universe switches to the symmetry breaking phase, the sphaleron rate is still much larger than the Hubble parameter and this leads to the washout of the B -violation. Figure 8 displays the sphaleron rate as a function of the temperature for the three steps of the SSB. Note that for the first step, if we take $T = 1700 \text{ GeV} < T_{c_1} \sim 1800 \text{ GeV}$, $\Gamma \sim 2.0985 \times 10^{-3} \gg H$, and for the second step, if we take $T = 900 \text{ GeV} < T_{c_2} \sim 1000 \text{ GeV}$, $\Gamma \sim 1.1401 \times 10^{-3} \gg H$. Likewise for the third step, if we take $T = 70 \text{ GeV} < T_{c_3} \sim 122 \text{ GeV}$, $\Gamma \sim 8.654 \times 10^{-4} \gg H$. Consequently, in this approximation the sphaleron decoupling condition cannot be satisfied (same result was obtained by the authors of Ref. 38 in the case of the 331 model).

(2) *Thin wall approximation:* Following Ref. 38, we assume that

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho})}{\partial v_{\chi,\eta,\rho}} = C_{\chi,\eta,\rho} = \text{const}, \quad (77)$$

where $v_{\chi,\eta,\rho}$ are the second minima of the effective potential V_{eff} in the bubble phase transition $SU(4) \rightarrow SU(3)$, $SU(3) \rightarrow SU(2)$ and $SU(2) \rightarrow U(1)$, respectively. In this case the field equations of the VEVs $v_{\chi,\eta,\rho}$ read

$$\frac{d^2 v_{\chi,\eta,\rho}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv_{\chi,\eta,\rho}}{dr} = C_{\chi,\eta,\rho} \quad (78)$$

with the boundary conditions

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_{\chi,\eta,\rho}(r) = 0, \quad \left. \frac{dv_{\chi,\eta,\rho}(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (79)$$

The solutions of Eqs. (78) and (79) are given by³⁸

$$v_{\chi,\eta,\rho} = \frac{C_{\chi,\eta,\rho}}{6} r^2 - \frac{A_{\chi,\eta,\rho}}{r} + B_{\chi,\eta,\rho}, \quad (80)$$

where $A_{\chi,\eta,\rho}$, $B_{\chi,\eta,\rho}$ are integration constants. To be more specific if the sphaleron has a radius $R_{\chi,\eta,\rho}$ and a thickness $\Delta l_{\chi,\eta,\rho}$ the solution $v_{\chi,\eta,\rho}$ can be expressed as

$$v_{\chi,\eta,\rho}(r) = \begin{cases} v_{\chi,\eta,\rho c} & \text{when } r \leq R_{\chi,\eta,\rho}, \\ \frac{C_{\chi,\eta,\rho}}{6} r^2 - \frac{A_{\chi,\eta,\rho}}{r} + B_{\chi,\eta,\rho} & \text{when } R_{\chi,\eta,\rho} < r \leq R_{\chi,\eta,\rho} + \Delta l_{\chi,\eta,\rho}, \\ 0 & \text{when } R_{\chi,\eta,\rho} + \Delta l_{\chi,\eta,\rho} < r. \end{cases} \quad (81)$$

Here, $v_{\chi,\eta,\rho c}$ stands for the second minimum for the three steps of the phase transition. In order to proceed further the constant $C_{\chi,\eta,\rho}$ can be approximated as

$$C_{\chi,\eta,\rho} \sim \frac{\Delta V_{\text{eff}}(v_{\chi,\eta,\rho})}{\Delta v_{\chi,\eta,\rho}}, \quad (82)$$

where $\Delta V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}c}(v_{\chi,\eta,\rho c})$ and $\Delta v_{\chi,\eta,\rho} = v_{\chi,\eta,\rho c}$. Now, for the numerical results and in order to avoid the washout of the baryonic asymmetry after the phase transition one has to assume that the sphaleron rate Γ has to be equal to the Hubble parameter H at the critical temperature T_c . Of course Γ has to be larger than H at $T > T_c$ and smaller at $T < T_c$, see Refs. 38, 54 and 55.

Analyzing Figs. 9–11 a general behavior was observed for all the EWPT $SU(4) \rightarrow SU(3)$, $SU(3) \rightarrow SU(2)$ and $SU(2) \rightarrow U(1)$: as T decreases from the bubble nucleation temperature T_1 where the strong first-order phase transition starts the radius R and the energy ε of the bubble increase while the sphaleron rate Γ decreases such that the ratio $\frac{\Gamma}{H}$ is bigger (respectively smaller) than 1 for $T_c < T < T_1$ (respectively $T_0 < T \leq T_c$). To be more precise, we note that the gauge symmetries, respectively $SU(4) \rightarrow SU(3)$, $SU(3) \rightarrow SU(2)$ and $SU(2) \rightarrow U(1)$ start to be broken spontaneously at the bubble nucleation temperature $T_1 \sim 1823, 1309.35, 194.94$ GeV ($\hbar = c = k = 1$). Then, a small bubble with radius $R \sim 13.53 \times 10^{-4}, 4.5 \times 10^{-5}, 11.97 \times 10^{-4}$ GeV $^{-1}$ and thickness $\Delta l \sim 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-4}$ (GeV $^{-1}$) appears and stores the nonvanishing VeVs $v_{\chi,\eta,\rho}$ inside. It is very important to mention that as it was pointed out in Sec. 3, if the two minima are separated by a potential barrier the phase transition will occur with bubbles nucleation governed by thermal channeling from a local minimum at $\phi = 0$ (false vacuum), to a deeper minimum at $\phi \neq 0$ (true vacuum). The nonthermal equilibrium is induced by the rapidly expanding bubble walls through the cosmological plasma, and B -violation arises from the rapid sphaleron transition in the symmetrical phase. At this temperature, the sphaleron rate Γ gets the values $4.8456 \times 10^{11}, 2.8493 \times 10^{11}, 3.11674 \times 10^{10}$ GeV, which are larger than the values of $H \sim 4.6769 \times 10^{-12}$,

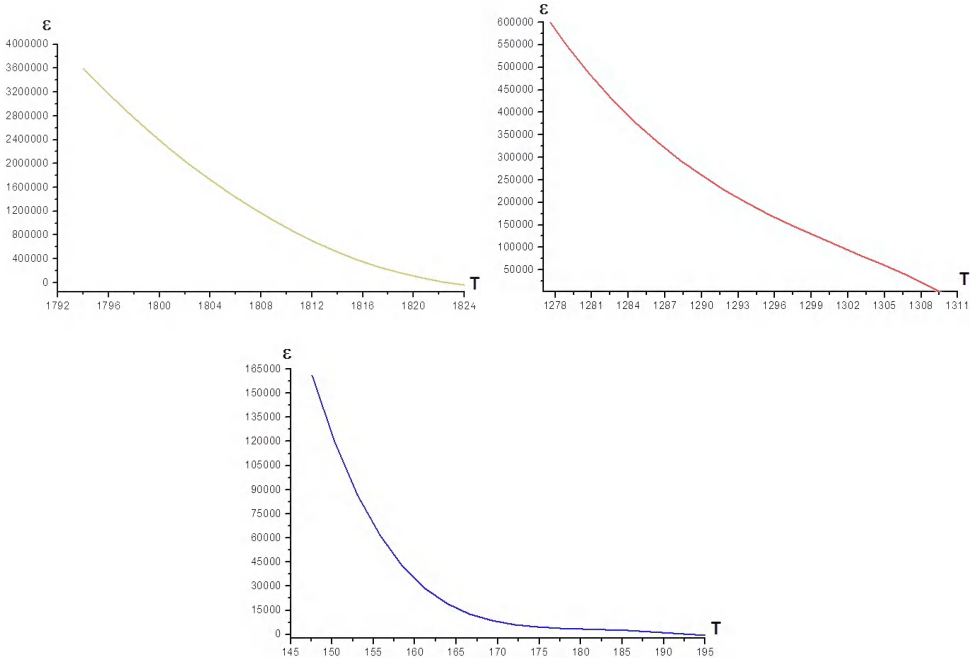


Fig. 9. The sphaleron energy ε as a function of the temperature T for the three steps of the phase transition.

2.4126×10^{-12} , 5.34795×10^{-12} GeV. When the temperature decreases from $T_1 \sim 1823, 1309.35, 194.94$ GeV to $T_c \sim 1820, 1306, 167.5$ GeV, the bubble volume and energy increases and decreases, respectively. Moreover, the rate Γ decreases but the ratio $\frac{\Gamma}{H}$ remain greater than 1 allowing the bubbles to collide and fill all the space. This phenomenon is very violent leading to a huge deviation from thermal equilibrium. The baryon production takes place in the neighborhood of the expanding bubbles walls generating CP and C violation (which is not the scope of our paper). In fact, for an illustration if $T = 1822, 1308, 180$ GeV, $R = 13.91 \times 10^{-4}, 9.5 \times 10^{-5}, 13.55 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 17398.496, 24853.266, 3711.643$ GeV, $\Gamma = 3.7084 \times 10^7, 2091.05642, 56.98872$ GeV and $\frac{\Gamma}{H} = 7.9379 \times 10^{18}, 8.6848 \times 10^{14}, 1.2498 \times 10^{15}$. Of course, as it was assumed before at $T = T_c$ the sphaleron rate $\Gamma = H = 4.66178 \times 10^{-12}, 2.3913 \times 10^{-12}, 3.94764 \times 10^{-14}$ GeV. When T becomes smaller than T_c ($T = 1811.5, 1300, 158$ GeV) Γ decreases rapidly and the ratio $\frac{\Gamma}{H}$ becomes less than 1 ($\frac{\Gamma}{H} = 3.19962 \times 10^{-210}, 3.2444 \times 10^{-19}, 1.8254 \times 10^{-109}$). As the temperature reaches the transition ending temperature $T_0 = 1796.625, 1280.02, 151.89$ GeV, only the broken phase remains and the sphaleron transitions $SU(4) \rightarrow SU(3), SU(3) \rightarrow SU(2)$ and $SU(2) \rightarrow U(1)$ are totally shut off.

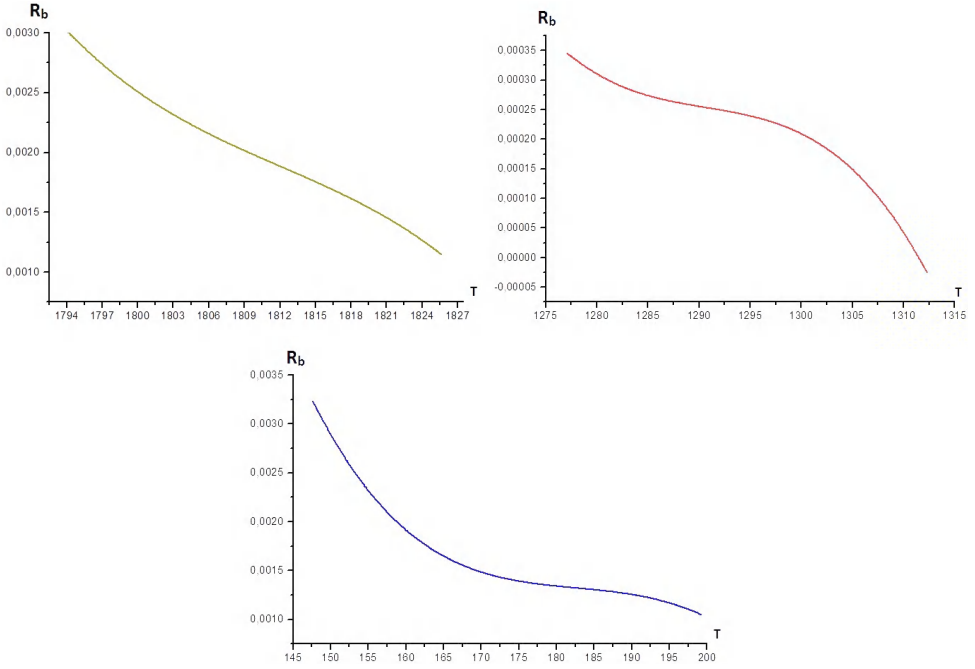


Fig. 10. The radii of the bubbles R as a function of the temperature T for the three steps of the phase transition.

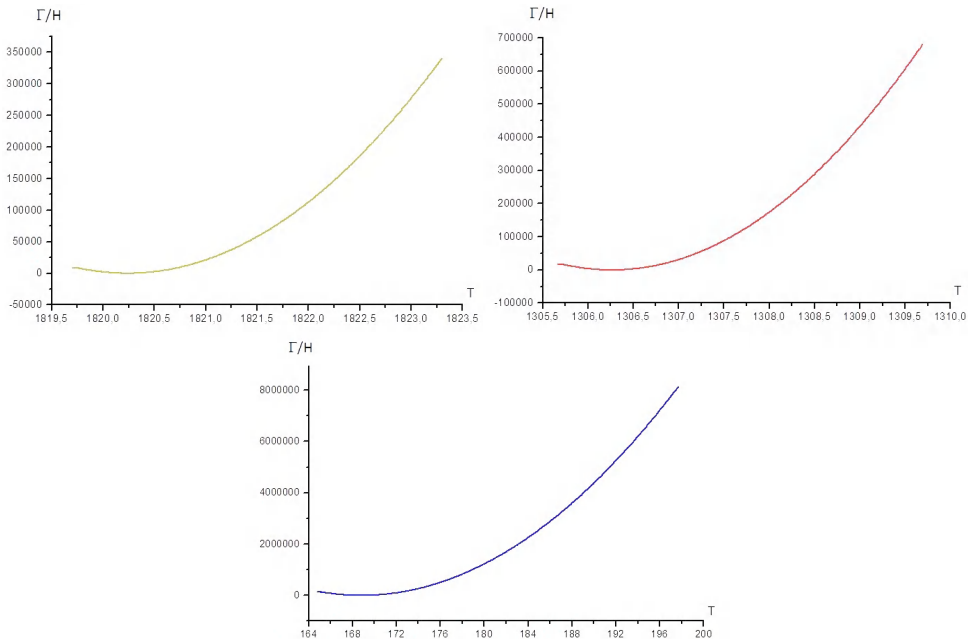


Fig. 11. The ratio $\frac{\Gamma}{H}$ as a function of the temperature T for the three steps of the phase transition.

6. Conclusion

Throughout this paper, and in order to be self-consistent, theoretical constraints on the potential parameters such as the unitarity, stability, and boundless have been imposed. Moreover, using a Monte Carlo simulation, we have bound the various allowed regions of the parameter space verifying the first-order phase transition criteria at $v_\chi \sim v_\eta \sim 2$ TeV and $v_\rho = 246$ GeV for the three steps $SU(4) \rightarrow SU(3)$, $SU(3) \rightarrow SU(2)$ and $SU(2) \rightarrow U(1)$, respectively, leading to an effective potential and confidence bands where masses of the heavy Higgs bosons are in the range of 700–1300 GeV. Moreover, we have derived the expressions of the effective potential, nucleation, critical and ending temperatures in terms of particle masses and temperature for each step of the EWPT. Furthermore, the baryogenesis study using the sphaleron approach was also investigated, where it is shown that the static approximation cannot give consistent results for the ratio $\frac{\Gamma}{H}$ for $T < T_c$ why the thin wall approximation does. Finally, we can conclude that we have obtained the same conclusions as those of Ref. 38 but within the framework of the 331 model. It is very important to stress out that, the authors of Ref. 38 did not impose the theoretical constraints on the potential parameters as we did. Further investigations on CP violation in this model are under consideration.

Acknowledgments

The authors would like to thank the Algerian Ministry of Higher Education and Scientific Research as well as the DGRSDT for financial supports.

References

1. D. Kazakov, S. Lavignac and J. Dalibard, *Particle Physics Beyond the Standard Model* (Elsevier, 2006).
2. M. Bastero-Gil, C. Hugonie, S. F. King, D. P. Roy and S. Vempati, *Phys. Lett. B* **489**, 359 (2000).
3. A. Menon, D. E. Morrissey and C. E. M. Wagner, *Phys. Rev. D* **70**, 035005 (2004).
4. S. W. Ham, S. K. Oh, C. M. Kim, E. J. Yoo and D. Son, *Phys. Rev. D* **70**, 075001 (2004).
5. V. Zarikas, *Phys. Lett. B* **384**, 180 (1996).
6. D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory* (Taylor & Francis, 1993).
7. W. N. C. Cottingham and D. A. Greenwood, *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics* (Cambridge University Press, 1998).
8. F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory* (Wiley-Interscience Publication, 1984).
9. J. C. Taylor, *Gauge Theory of Weak Theories* (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
10. U. Ellwanger, *From the Universe to the Elementary Particles: A First Introduction to Cosmology and the Fundamental Interactions* (Springer-Verlag, Berlin, 2012).
11. A. I. Bochkarev and M. E. Shaposhnikov, *Mod. Phys. Lett. A* **2**, 417 (1987).
12. K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B* **466**, 189 (1996).
13. K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2887 (1996).

14. CMS Collab. (S. Chatrchyan *et al.*), *Phys. Lett. B* **716**, 30 (2012).
15. M. Giovannini and M. Shaposhnikov, *Phys. Rev. D* **57**, 2186 (1998).
16. V. Semikoz and J. Valle, *J. High Energy Phys.* **03**, 067 (2008).
17. V. Semikoz, D. D. Sokoloff and J. W. F. Valle, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 008 (2012).
18. V. B. Semikoz and D. Sokoloff, *Astron. Astrophys.* **433**, L53 (2005).
19. M. B. Gavela, P. Hernandez, J. Orlo and O. Pene, *Mod. Phys. Lett. A* **9**, 795 (1994).
20. P. Huet and E. Sather, *Phys. Rev. D* **51**, 379 (1995).
21. M. B. Gavela, P. Hernandez, J. Orlo, O. Pene and C. Quimbay, *Nucl. Phys. B* **430**, 382 (1994).
22. G. Aliferis and V. Zariikas, *Phys. Rev. D* **103**, 023509 (2021).
23. G. Aliferis, G. Kofinas and V. Zariikas, *Phys. Rev. D* **91**, 045002 (2015).
24. J. K. Mizukoshi, C. A. de S. Pires, F. S. Queiroz and P. S. Rodrigues da Silva, *Phys. Rev. D* **83**, 065024 (2011).
25. C. A. de S. Pires and P. S. Rodrigues da Silva, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0712**, 012 (2007).
26. W. A. Ponce and L. A. Sánchez, *Mod. Phys. Lett. A* **6**, 435 (2007).
27. A. G. Dias, P. R. D. Pinheiro, C. A. de S. Pires and P. S. Rodrigues da Silva, *Ann. Phys.* **349**, 232 (2014).
28. S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, 1988).
29. R. H. Brandenberger, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 1 (1985).
30. M. Sher, *Phys. Rep.* **179**, 273 (1989).
31. M. E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B* **287**, 757 (1987).
32. M. E. Shaposhnikov and G. R. Farrar, *Nucl. Phys. B* **299**, 797 (1988).
33. F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **46**, 410 (1992).
34. R. Foot, H. N. Long and T. A. Tran, *Phys. Rev. D* **50**, R34 (1994).
35. A. G. Dias, R. Martinez and V. Pleitez, *Eur. Phys. J. C* **39**, 101 (2005).
36. A. G. Dias, *Phys. Rev. D* **71**, 015009 (2005).
37. S. R. Coleman and E. J. Weinberg, *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973).
38. V. Q. Phong, H. N. Long, V. T. Van and N. C. Thanh, *Phys. Rev. D* **90**, 085019 (2014).
39. L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9**, 3320 (1974).
40. A. D. Linde, *Contemp. Concepts Phys.* **5**, 1 (2005).
41. A. D. Linde, *Rep. Prog. Phys.* **42**, 389 (1979).
42. M. Quiros, arXiv:hep-ph/9901312v1.
43. W. Siegel, *Phys. Lett. B* **84**, 193 (1979).
44. G. W. Anderson and L. J. Hall, *Phys. Rev. D* **45**, 2685 (1992).
45. A. D. Sakharov, *JETP Lett.* **5**, 24 (1967).
46. V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, 2005).
47. V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **155**, 36 (1985).
48. A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **70**, 306 (1977).
49. F. Csikor, Z. Fodor and J. Heitger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 21 (1999).
50. J. Grant and M. Hindmarsh, *Phys. Rev. D* **64**, 016002 (2001).
51. P. Arnold and L. McLerran, *Phys. Rev. D* **36**, 581 (1987).
52. P. Arnold and L. McLerran, *Phys. Rev. D* **37**, 1020 (1988).
53. Y. Brihaye and J. Kunz, *Phys. Rev. D* **48**, 3884 (1993).
54. M. Joyce, *Phys. Rev. D* **55**, 1875 (1997).
55. M. D'Onofrio, K. Rummukainen and A. Tranberg, *J. High Energy Phys.* **08**, 123 (2012).

بعض النماذج خارج النموذج القياسي ومشكل تكوين الباريوجين

ملخص

الهدف من هذا العمل هو محاولة إيجاد حل لمشكل تكوين الباريوجين عن طريق انتقال الطور الكهروضعيف الذي يشترط فيه أن يكون قوي و من الدرجة الأولى للحصول على شرط سخاروف الثالث، إذ وجدنا أنها محققة لكل مراحل الانكسار التلقائي لتمائل المقياس في ثلاثة نماذج ناتجة عن تمديد النموذج القياسي و هي (النموذج المدمج 341، نموذج الحد الأدنى 331 و النموذج الاقتصادي 331 مع النيوترينوات اليمنى). كذلك تم التأكيد على انتهاك الباريون عبر سفاليرون و ذلك بحساب معدل سفاليرون Γ و مقارنته مع ثابت هابل H الذي يتعلق بتمدد كوننا عند درجات حرارة T .

الكلمات المفتاحية: تكوين الباريوجين، انتقال الطور الكهروضعيف، ما وراء النموذج القياسي، سفاليرون و انتهاك الباريون.

Some Models Beyond the Standard Model and the Problem of Electroweak Baryogenesis.

Abstract

In this work, we studied the electroweak baryogenesis through the electroweak phase transition (EWPT) which is required to be strong and of the first order to fulfill the third Sakharov condition, the existence of (EWPT) has been shown and checked numerically at all stages of the spontaneous breakdown of the gauge symmetry of three models beyond the standard model (i.e. the compact 341, the minimal 331, the economical 331 with right-handed neutrinos). Additionally, baryon number violation via sphalerons was emphasized by calculating the sphaleron rate Γ and comparing it with the Hubble constant H which is related to the expansion of our universe at temperature T .

Keywords: Baryogenesis, electroweak phase transition, beyond standard model, sphaleron and the baryon violation.

Résumé

Dans ce travail, on a étudié le problème de baryogénèse électrofaible par la transition de phase électrofaible qui doit être forte et du premier ordre pour obtenir la troisième condition de Sakharov, l'existence d'une transition de phase du premier ordre a été mise en évidence et vérifiée numériquement pendant toutes les étapes de la brisure spontanée de la symétrie de jauge des trois modèles au-delà du modèle standard (compact 341, minimal 331, économique 331 avec neutrinos de chiralité droite). De plus, la violation du nombre baryonique via les sphalérons a été confirmée par le calcul du taux de sphaléron et il est comparé avec la constante de Hubble H qui dépend de l'expansion de notre univers à des températures T .

Mots-clés : Baryogénèse, transition de phase électrofaible, au-delà du modèle standard, sphaléron et la violation du baryon.