RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÈRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ CONSTANTINE 1

THÈSE

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Option: Analyse / Équations Différentielles

Présentée par

SMAKDJI MOHAMED EL HADI

Sur Quelques Problèmes de Transmissions non Locaux

Soutenue le 09 / 03 / 2023

Composition du jury :

- A. HAMEIDA	Professeur, Université Constantine 1	**Président**
- M. DENCHE	Professeur, Université Constantine 1	**Rapporteur**
- H. KHELLAF	Professeur, Université Constantine 1	**Examinateur**
- L. AIT KAKI	Maître de conférences, ENS Constantine	**Examinatrice**
- K. AKROUT	Professeur, Université de Tebessa	**Examinateur**
- K. BERRAH	Maître de conférences, Université de Tebessa	**Examinateur**

Remerciements

Merci Merci

Dédicaces

A toute ma famille.

Table des matières

Introduction

L'étude des problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires est une branche très importante des mathématiques qu'on peut rencontrer dans les différents domaines des sciences physiques et des mathématiques appliquées. Dans certains de ces problèmes, les conditions aux limites sont imposées localement alors que dans d'autres cas elles sont non-locales. Il est souvent préférable d'imposer des conditions non-locales puisque les mesures nécessaires à un tel type de conditions peut être plus précis que la mesure donnée par une condition locale, par exemple [26–28]
L'objectif de ce travail est l'étude de quelques problèmes du type Sturm-Liouville avec des conditions aux limites et des conditions de transmission en un ou plusieurs points de discontinuité. Les résultats présentés dans ce travail sont illustrés et complétés par des estimations quantitatives, basées essentiellement sur la théorie des inégalités intégrales, en appliquant la dite théorie, nous montrons l'estimation des solutions de quelques problèmes aux limites.
Ce travail utilise beaucoup d'outils d'analyse, en particulier la théorie spectrale, les équations différentielles et la théorie des inégalités. (par exemple voir [1, 3, 10]).
Les techniques d'estimations intégrales utilisées dans ce travail s'inspirent beaucoup de travaux ayant trait a l'étude des problèmes de transmission de type Sturm-Liouville et des inégalités intégrales généralisées, on cite a titre indicatif les travaux récents développés dans [3, 10–12].

Cette thèse est constituée de trois chapitres : Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques résultats classiques sur les problèmes de Sturm-Liouville réguliers où le paramètre spectral figure non seulement dans l'équation, mais aussi dans les conditions aux limites et dans les conditions de transmission. Dans la première partie on a présenté les travaux de Mukhtarov et Kadakal [18] où le paramètre spectral apparaît dans l'équation différentielle ainsi que dans l'une des conditions aux limites. Les résultats présentés dans la deuxièmes partie sont basés essentiellement sur le travail [9]. Dans la troisième partie on considère le cas où le paramètre spectral apparaît dans les deux conditions aux limites et l'une des conditions de transmission [4]. Finalement par certaines modifications des techniques développées dans[7, 24, 25], nous obtenons des formules asymptotiques pour les valeurs propres et les fonctions propres

normalisées de ce problème.
Le deuxième chapitre contient deux parties, dont l'une est consacrée à l'étude de problèmes de type Sturm-Liouville avec les conditions aux limites et les conditions de transmission en deux points de discontinuité, et l'autre est dédiée à l'étude du même problème avec plusieurs points de discontinuité. Notons que ces résultats vont être améliorés dans une prochaine publication. Les méthodes utilisées dans ce chapitre s'inspirent beaucoup de travaux ayant trait a l'étude des problèmes de transmission à un ou plusieurs points de discontinuité [2, 7, 14, 20].
Le troisième chapitre est consacré à la présentation et à la discussion des résultats obtenus à l'issue de l'étude quantitative de certains problèmes, en appliquant la théorie des inégalités intégrales, nous montrons l'estimation des solutions de quelques problèmes aux limites abordés. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication internationale dans le journal AJMAA [23] et une autre sera soumise pour publication.
Enfin, nous avons mentionné les références les plus importantes sur lesquelles ce travail est basé. Beaucoup de travaux restent ouverts dans ce domaine, comme la présence du paramètre dans l'équation et toutes les conditions aux limites et les conditions de transmissions.

Chapitre 1

Étude de Quelques Problèmes de Transmission

Nous consacrerons ce chapitre à la présentation de quelques résultats sur les problèmes de Sturm-Liouville où le paramètre spectral figure non seulement dans l'équation, mais aussi dans les conditions aux limites et dans les conditions de transmission. Nous nous concentrerons davantage sur la présentation des résultats sans aborder les preuves.

Dans la première partie on va citer les travaux de Mukhtarov et Kadakal [18] où le paramètre spectral apparaît dans l'équation différentielle ainsi que dans l'une des conditions aux limites.

L'équation différentielle dans la deuxième partie et les conditions de transmissions sont plus généralisées, c'est le travail de Kadakal et Mukhtarov [9].

Dans la troisième partie, le paramètre spectral apparaît dans les deux conditions aux limites et l'une des condition de transmission, voir Demirci, Akdogan et Mokhtarov [4].

1 Étude des valeurs propres et des vecteur propres d'un problème de transmission

On considère l'équation différentielle suivante

$$\tau u = -u'' + q\left(x\right)u = \lambda u; x \in \left[-1, 0[\cup]0, 1\right], \tag{1.1}$$

avec les conditions aux limites

$$L_1\left(u\right) = \alpha_1 u\left(-1\right) + \alpha_2 u'\left(-1\right) = 0, \tag{1.2}$$

$$L_2\left(u\right) = \lambda\left(\beta_1' u\left(1\right) - \beta_2' u'\left(1\right)\right) + \left(\beta_1 u\left(1\right) - \beta_2 u'\left(1\right)\right) = 0, \tag{1.3}$$

et les conditions de transmission

$$L_3\left(u\right) = u\left(-0\right) - \delta u\left(+0\right) = 0, \tag{1.4}$$

$$L_4\left(u\right) = u'\left(-0\right) - \delta u'\left(+0\right) = 0. \tag{1.5}$$

λ Est un paramètre complexe, la fonction $q\left(x\right)$ est une fonction réelle continue dans $[-1, 0[\cup]0, 1]$ et les limites

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} q\left(x\right) = q\left(\pm 0\right).$$

existent et sont finies, $\alpha_i, \beta_i, \delta, (i = 1, 2)$ sont des nombres réels tels que :

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \delta \neq 0,$$

on suppose que

$$\rho = \beta_1' \beta_2 - \beta_2' \beta_1 > 0.$$

1.1 Formulation opératorielle dans un espace de Hilbert

Nous introduisons un produit scalaire dans l'espace de Hilbert

$$H = L_2 (-1, 0) \oplus L_2 (-1, 1) \oplus \mathbb{C},$$

et un operateur symétrique

$$A : H \to H$$

tel que le problème (1.1)-(1.5) peut être considéré comme problème aux valeurs propres de cet opérateur.

Dans l'espace de Hilbert H nous définissons le produit scalaire suivant

$$(F, G) = \int_{-1}^{0} f(x) \overline{g(x)} dx + \delta^2 \int_{0}^{1} f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{\delta^2}{\rho} f_1 \overline{g_1}, \tag{1.6}$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 \end{pmatrix} \in H.$$

On note

$$\begin{aligned} R_1(u) &= \beta_1 u(1) - \beta_2 u'(1), \\ R_1'(u) &= \beta_1' u(1) - \beta_2' u'(1). \end{aligned}$$

La fonction $f(x)$ est continue dans $[-1, 0[\cup]0, 1]$ et à des limites finies

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = f(\pm 0).$$

Dans l'espace de Hibert H, considérons l'opérateur A de domaine de définition

$$D(A)=\left\{F=\left(\begin{array}{c} f(x) \\ R_1'(f) \end{array}\right), f \text{ et } f' \text{ sont absolument continues dans } [-1,0[\cup]0,1]\right.$$

$$\left.\text{et ont des limites finies quand } x\to\pm 0, \tau f\in L_2[-1,1], L_1 f=l_3 f=L_4 f=0\right\},$$

$$AF=\left(\begin{array}{c} \tau f \\ -R_1(f) \end{array}\right).$$

à présent on peut écrire le prblème (1.1)-(1.5) sous la forme

$$AU=\lambda U,$$

où

$$U=\left(u(x), R_1'(u)\right).$$

Remarque 1.1 *Les valeurs propres et les vecteurs propres du problème (1.1)-(1.5) coïncident avec les valeurs et les vecteurs propres de l'opérateur A.*

Théorème 1.1 *L'opérateur A est symétrique.*

Démonstration. *Pour montrer que A est un opérateur symétrique il suffit de montrer que*

$$(AF,G)=(F,AG).$$

on intègre deux fois par parties puis on applique les conditions de transmission.

Corollaire 1.1 *Les valeurs propres du problème (1.1)-(1.5) sont réelles.*

Nous pouvons supposer maintenant que toutes les fonctions propres du problème (1.1)-(1.5) sont réelles.

1.2 Quelques propriétés de base pour les valeurs et les vecteurs propres

Considérons le problème aux valeurs initiales suivant

$$-u''(x)+q(x)u(x)=\lambda u(x), x\in[-1,0],$$

$$u(-1) = \alpha_2, u'(-1) = -\alpha_1.$$

d'après le théorème 1.5 dans [21] ce problème a une solution unique $u = \Phi_1(x, \lambda)$, est une fonction entière en λ pour chaque x fixé dans l'intervalle $[-1, 0]$.

De même, en employant la même méthode que dans la preuve de théorème 1.5 dans [21], on voit que le problème

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), x \in [0, 1]$$

$$u(1) = \beta_2'\lambda + \beta_2, u'(1) = \beta_1'\lambda + \beta_1.$$

a une solution unique $u = \chi_2(x, \lambda)$, est une fonction entière en λ pour chaque x fixé dans l'intervalle $[0, 1]$.

Nous définirons les fonctions $\Phi_2(x, \lambda)$ et $\chi_1(x, \lambda)$ en utilisant les fonctions $\Phi_1(x, \lambda)$ et $\chi_2(x, \lambda)$, respectivement. En modifiant la méthode de preuve du théorème 1.5 dans [21], nous pouvons prouver que le problème aux valeurs initiales de type spécial,

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), x \in [0, 1],$$

$$u(0) = \delta^{-1}\Phi_1(0, \lambda), u'(0) = \delta^{-1}\Phi_1'(0, \lambda),$$

a une solution unique $u = \Phi_2(x, \lambda)$. De même, le problème suivant a aussi une solution unique $u = \chi_1(x, \lambda)$:

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), x \in [-1, 0],$$

$$u(0) = \delta\chi_1(0, \lambda), u'(0) = \delta\chi_1'(0, \lambda).$$

Lemme 1.1 *L'égalité*

$$w_1(\lambda) = \delta^2 w_2(\lambda)$$

est vérifie pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$. Où

$$w_1(\lambda) = W(\Phi_1(x, \lambda), \chi_1(x, \lambda)), w_2(\lambda) = W(\Phi_2(x, \lambda), \chi_2(x, \lambda)).$$

Corollaire 1.2 *Les zéros des fonctions $w_1(\lambda)$ et $w_2(\lambda)$ coïncident.*

Construisons deux solutions de base de l'équation (1.1)

$$\Phi(x,\lambda)=\begin{cases}\Phi_1(x,\lambda), x\in[-1,0[\\ \Phi_2(x,\lambda), x\in]0,1]\end{cases}, \chi(x,\lambda)=\begin{cases}\chi_1(x,\lambda), x\in[-1,0[\\ \chi_2(x,\lambda), x\in]0,1]\end{cases}.$$

Corollaire 1.3 *le Wronskien des fonctions* $\Phi(x,\lambda)$ *et* $\chi(x,\lambda)$ *est indépendant de la variable* x *sur l'ensemble* $[-1,0[\cup]0,1]$.

Théorème 1.2 *Les valeurs propres du problème aux limites* (1.1)-(1.5) *coïncident avec les zéros de la fonction* $w(\lambda)$, *où*

$$w(\lambda)=W(\Phi(x,\lambda),\chi(x,\lambda)).$$

Théorème 1.3 *Soit*

$$\lambda=s^2, s=\sigma+it.$$

Alors, les égalités asymptotiques suivantes sont valables pour $|\lambda|\to\infty$:

1) Si $\alpha_2\neq 0$,

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(k)}(x,\lambda) &= O\left(|s|^k e^{|t|(x+1)}\right), k=0,1,\\ \Phi_2^{(k)}(x,\lambda) &= O\left(|s|^k e^{|t|(x+1)}\right), k=0,1,\end{aligned}$$

2) Si $\alpha_2=0$,

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(k)}(x,\lambda) &= O\left(|s|^{-1+k} e^{|t|(x+1)}\right), k=0,1,\\ \Phi_2^{(k)}(x,\lambda) &= O\left(|s|^{-1+k} e^{|t|(x+1)}\right), k=0,1,\end{aligned}$$

De plus, chacune de ces égalités est uniformément valable pour x.

Théorème 1.4 *Soit*

$$\lambda=s^2, s=\sigma+it.$$

Alors, les formules asymptotiques suivantes sont valables pour les valeurs propres du problème de transmission (1.1)-(1.5) :

Cas 1 : $\beta_2'\neq 0, \alpha_2\neq 0$,

$$s_n=\frac{1}{2}\pi n+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 2 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0,$

$$s_n = \frac{1}{2}\pi\left(n - \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 3 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$s_n = \frac{1}{2}\pi\left(n - \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 4 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0,$

$$s_n = \frac{1}{2}\pi n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème 1.5 *les formules asymptotiques suivantes sont valables pour les fonctions propres* $\Phi(x,\lambda)$ *du problème* (1.1)-(1.5) *:*
Cas 1 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\Phi(x,\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi n(x+1)\right), x \in [-1,0[\\ \alpha_2 \frac{1}{\delta}\cos\left(\frac{1}{2}\pi n(x+1)\right), x \in]0,1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 2 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0,$

$$\Phi(x,\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} -2\alpha_1 \frac{1}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x \in [-1,0[\\ -2\alpha_1 \frac{1}{\delta}\frac{1}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x \in]0,1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 3 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\Phi(x,\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x \in [-1,0[\\ \alpha_2 \frac{1}{\delta}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x \in]0,1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 4 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0,$

$$\Phi(x,\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} -2\alpha_1 \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{1}{2}\pi n(x+1)\right), x \in [-1,0[\\ -2\alpha_1 \frac{1}{\delta}\frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{1}{2}\pi n(x+1)\right), x \in]0,1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Toutes ces formules asymptotiques sont uniformément valables pour x.

1.3 Formules asymptotiques pour les normes des fonctions propres

Dans cette sous-section, nous obtiendrons les normes des éléments propres

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \Phi\left(x, \lambda_n\right) \\ R_1'\left(\Phi\left(x, \lambda_n\right)\right) \end{pmatrix}, n = 0, 1, 2, ...,$$

sont les fonctions propres de l'opérateur A correspondant aux valeurs propres λ_n. Pour $n \neq m$,

$$\left(\Phi_n, \Phi_m\right) = 0, n, m = 0, 1, 2, ...,$$

puisque l'opérateur A est symétrique. On note :

$$\Psi_n\left(x\right) = \frac{\Phi\left(x, \lambda_n\right)}{\left\|\Phi_n\right\|_H},$$

on voit facilement que les fonctions propres

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \Psi_n\left(x\right) \\ R_1'\left(\Psi_n\left(x\right)\right) \end{pmatrix}, n = 0, 1, 2, ...,$$

sont orthonormées.

Lemme 1.2 *Les égalités asymptotiques suivantes ont lieu :*
1) pour $\alpha_2 \neq 0$,

$$R_1'\left(\Phi\left(x, \lambda_n\right)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

2) pour $\alpha_2 = 0$,

$$R_1'\left(\Phi\left(x, \lambda_n\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Théorème 1.6 *Les formules asymptotiques suivantes sont valables pour les normes* $\left\|\Phi_n\right\|_H$ *des fonctions propre* Φ_n *:*
Cas 1 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0$,

$$\left\|\Phi_n\right\|_H = \frac{\left|\alpha_2\right|}{\left|\delta\right|}\sqrt{\frac{\delta^2+1}{2}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 2 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0$,

$$\left\|\Phi_n\right\|_H = 2\left|-\alpha_1\right| \frac{1}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{\delta^2+1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Cas 3 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0$,

$$\|\Phi_n\|_H = \frac{|\alpha_2|}{|\delta|}\sqrt{\frac{\delta^2+1}{2}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 4 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0$,

$$\|\Phi_n\|_H = 2\left|-\alpha_1\right| \frac{1}{\pi n}\sqrt{\frac{\delta^2+1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1.4 Formules asymptotiques pour les fonctions propres normalisées

Théorème 1.7 *Les premières composantes des fonction s propres normalisés $\Psi_n(x)$ ont la représentation asymptotique suivante pour $n \to \infty$:*
Cas 1 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0$,

$$\Psi_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} \delta sgn\left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right)\sqrt{\frac{2}{\delta^2+1}}\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\left(x+1\right)\right), x \in [-1,0[\\ sgn\left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right)\sqrt{\frac{2}{\delta^2+1}}\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\left(x+1\right)\right), x \in]0,1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 2 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0$,

$$\Psi_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} sgn\left(-\alpha_1\right)\sqrt{\frac{2}{\delta^2+1}}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(x+1\right)\right), x \in [-1,0[\\ \frac{1}{\delta}sgn\left(-\alpha_1\right)\sqrt{\frac{2}{\delta^2+1}}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(x+1\right)\right), x \in]0,1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 3 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0$,

$$\Psi_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} \delta sgn\left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right)\sqrt{\frac{2}{\delta^2+1}}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(x+1\right)\right), x \in [-1,0[\\ sgn\left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right)\sqrt{\frac{2}{\delta^2+1}}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(x+1\right)\right), x \in]0,1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 4 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0$,

$$\Psi_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} sgn\left(-\alpha_1\right)\sqrt{\frac{2}{\delta^2+1}}\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\left(x+1\right)\right), x \in [-1,0[\\ \frac{1}{\delta}sgn\left(-\alpha_1\right)\sqrt{\frac{2}{\delta^2+1}}\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\left(x+1\right)\right), x \in]0,1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2 Comportement asymptotique des solutions d'un problème de Strum-Liouville

Nous étudierons le problème aux limites suivant :

$$\tau u = -p(x)\, u'' + q(x)\, u = \lambda u; x \in [-1, 0[\cup]0, 1], \tag{1.7}$$

avec les conditions aux limites

$$L_1(u) = \alpha_1 u(-1) + \alpha_2 u'(-1) = 0, \tag{1.8}$$

$$L_2(u) = \lambda(\beta_1' u(1) - \beta_2' u'(1)) + (\beta_1 u(1) - \beta_2 u'(1)) = 0, \tag{1.9}$$

et les conditions de transmission

$$L_3(u) = \gamma_1 u(-0) - \delta_1 u(+0) = 0, \tag{1.10}$$

$$L_4(u) = \gamma_2 u'(-0) - \delta_2 u'(+0) = 0. \tag{1.11}$$

Dans l'espace de Hilbert $L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$, où

$$p(x) = \begin{cases} p_1^2, x \in [-1, 0[\\ p_2^2, x \in]0, 1] \end{cases},$$

p_1, p_2 sont des nombres réels strictement positifs, λ est un paramètre complexe, la fonction $q(x)$ est une fonction réelle continue dans $[-1, 0[\cup]0, 1]$ et

$$\lim_{x \to 0^\pm} q(x) = q(\pm 0).$$

existent et sont finies, $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i, (i = 1, 2)$ sont des nombres réels tels que :

$$\begin{cases} |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \\ |\gamma_1| + |\delta_1| \neq 0, \quad i = 1, 2 \\ |\gamma_2| + |\delta_2| \neq 0, \end{cases}$$

$$|\beta_1'| + |\beta_2'| + |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, i = 1, 2$$

on suppose que

$$\rho = \beta_1' \beta_2 - \beta_2' \beta_1 > 0.$$

2.1 Formulation opératorielle dans un espace de Hilbert

Nous introduisons un produit scalaire dans l'espace de Hilbert

$$H = L_2\left[-1,1\right] \oplus \mathbb{C},$$

et un opérateur symétrique

$$A : H \to H$$

tel que le problème (1.7)-(1.11) peut étre considéré comme problème aux valeur propres de cet opérateur.

Dans l'espace de Hilbert nous définission le produit scalaire suivant

$$(F,G)_H = \frac{1}{p_1^2}\int\limits_{-1}^{0} f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx + \frac{1}{p_2^2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx + \frac{1}{\rho}f_1\overline{g_1}, \tag{1.12}$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} f\left(x\right) \\ f_1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g\left(x\right) \\ g_1 \end{pmatrix} \in H.$$

On note

$$\begin{aligned} R_1\left(u\right) &= \beta_1 u\left(1\right) - \beta_2 u'\left(1\right), \\ R_1'\left(u\right) &= \beta_1' u\left(1\right) - \beta_2' u'\left(1\right). \end{aligned}$$

La fonction $f\left(x\right)$ est continue dans $\left[-1,0\right[\cup\left]0,1\right]$ et à des limites finies

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f\left(x\right) = f\left(\pm 0\right).$$

Dans l'espace de Hibert H considérons l'opérateur A de domaine de définition

$$D\left(A\right) = \left\{ F = \begin{pmatrix} f\left(x\right) \\ R_1'\left(f\right) \end{pmatrix}, f \text{ et } f' \text{ sont absolument continues dans } \left[-1,0\right[\cup\left]0,1\right] \right.$$

$$\left. \text{et ont des limites finies quand } x\to\pm 0, \tau f \in L_2\left(-1,0\right)\oplus L_2\left(0,1\right), L_1 f = l_3 f = L_4 f = 0 \right\},$$

$$AF = \begin{pmatrix} \tau f \\ -R_1\left(f\right) \end{pmatrix}.$$

à présent on peut écrire le problème (1.7)-(1.11) sous la forme

$$AU = \lambda U,$$

où

$$U = (u(x), R'_1(u)).$$

Remarque 2.1 *Les valeurs propres et les vecteurs propres du problème(1.7)-(1.11) coïncident avec les valeurs et les vecteurs propres de l'opérateur A.*

Théorème 1.8 *Soit*

$$\gamma_1\gamma_2 = \delta_1\delta_2.$$

Alor l'operateur A est symétrique,c'est à dire que

$$(AF, G) = (F, AG).$$

Corollaire 1.4 *Les valeurs propres du prblème(1.7)-(1.11) sont réelles.*

2.2 Comportement asymptotique des valeurs propres

Considérons le problème aux valeurs initiales

$$-p_1^2 u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), x \in [-1, 0],$$

$$u(-1) = \alpha_2, u'(-1) = -\alpha_1.$$

D'après le théorème 1.5 dans [10] ce problème a une solution unique $u = \Phi_1(x, \lambda)$, c'est une fonction entière en λ pour chaque x fixé dans l'intervalle $[-1, 0]$.

De même, en utilisant la même méthode que dans la preuve de théorème 1.5 dans [10], on voit que le problème

$$-p_2^2 u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), x \in [0, 1]$$

$$u(1) = \beta'_2\lambda + \beta_2, u'(1) = \beta'_1\lambda + \beta_1.$$

a une solution unique $u = \chi_2(x, \lambda)$, c'est une fonction entière en λ pour chaque x fixé dans l'intervalle $[0, 1]$.

Nous définirons les fonctions $\Phi_2(x,\lambda)$ et $\chi_1(x,\lambda)$ en utilisant les fonctions $\Phi_1(x,\lambda)$ et $\chi_2(x,\lambda)$, respectivement. En modifiant la méthode de preuve du théorème, nous pouvons prouver que le problème aux valeurs initiales de type spécial,

$$-p_1^2 u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x)\,, x \in [0,1]\,,$$

$$u(0) = \frac{\gamma_1}{\delta_1}\Phi_1(0,\lambda)\,, u'(0) = \frac{\gamma_2}{\delta_2}\Phi_1'(0,\lambda)\,,$$

qui contient les fonctions entières du paramètre λ dans le membre de droite est équivalent à l'équation intégrale

$$u(x) = \frac{\gamma_1}{\delta_1}\Phi_1(0,\lambda)\cos\frac{8x}{p_2} + \frac{p_2}{8}\Phi_1'(0,\lambda)\sin\frac{8x}{p_2} + \frac{1}{p_2 8}\int_0^x \sin\frac{8(x-y)}{p_2} q(y)\,u(y)\,dy,$$

et possède une solution unique $u = \Phi_2(x,\lambda)$. De même, le problème suivant a aussi une solution unique $u = \chi_1(x,\lambda)$:

$$-p_1^2 u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x)\,, x \in [-1,0]\,,$$
$$u(0) = \frac{\delta_1}{\gamma_1}\chi_1(0,\lambda)\,, u'(0) = \frac{\delta_2}{\gamma_2}\chi_1'(0,\lambda)\,.$$

Lemme 1.3 *Si la condition*

$$\gamma_1\gamma_2 = \delta_1\delta_2,$$

est satisfaite, alors on a l'égalité

$$w_1(\lambda) = w_2(\lambda)$$

pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$*. Où*

$$w_1(\lambda) = W(\Phi_1(x,\lambda)\,,\chi_1(x,\lambda))\,, w_2(\lambda) = W(\Phi_2(x,\lambda)\,,\chi_2(x,\lambda))\,.$$

Corollaire 1.5 *Les zéros des fonctions* $w_1(\lambda)$ *et* $w_2(\lambda)$ *coïncident.*

Construisons deux solutions de base de l'équation (1.1)

$$\Phi(x,\lambda) = \begin{cases} \Phi_1(x,\lambda)\,, x \in [-1,0[\\ \Phi_2(x,\lambda)\,, x \in\,]0,1] \end{cases}, \chi(x,\lambda) = \begin{cases} \chi_1(x,\lambda)\,, x \in [-1,0[\\ \chi_2(x,\lambda)\,, x \in\,]0,1] \end{cases}.$$

Corollaire 1.6 *Le Wronskien des fonctions* $\Phi(x,\lambda)$ *et* $\chi(x,\lambda)$ *est indépendant de la variable*

x sur l'ensemble $[-1,0[\cup]0,1]$.

Théorème 1.9 *Les valeurs propres de (1.7)-(1.11) coïncident avec les zéros de la fonction $w(\lambda)$, où*

$$w(\lambda) = W(\Phi(x,\lambda), \chi(x,\lambda)).$$

Théorème 1.10 *Soient*

$$\rho > 0, \gamma_i \neq 0, \delta_i \neq 0, (i=1,2) \text{ et } \lambda = s^2, s = \sigma + it.$$

Alors, les égalités asymptotiques suivantes sont valables pour $|\lambda| \to \infty$:
1) Si $\alpha_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(k)}(x,\lambda) &= O\left(|s|^k e^{\frac{|t|(x+1)}{p_1}}\right), k=0,1, \\
\Phi_2^{(k)}(x,\lambda) &= O\left(|s|^k e^{\frac{|t|(p_1x+p_2)}{p_1p_2}}\right), k=0,1,
\end{aligned}$$

2) Si $\alpha_2 = 0$,

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(k)}(x,\lambda) &= O\left(|s|^{-1+k} e^{\frac{|t|(x+1)}{p_1}}\right), k=0,1, \\
\Phi_2^{(k)}(x,\lambda) &= O\left(|s|^{-1+k} e^{\frac{|t|(p_1x+p_2)}{p_1p_2}}\right), k=0,1,
\end{aligned}$$

De plus, chacune de ces égalités est uniformément valable pour tout x.

Théorème 1.11 *On note*

$$\lambda = s^2, s = \sigma + it.$$

Et supposons que les conditions

$$\rho > 0, \delta_1\delta_2 - \gamma_1\gamma_2 > 0, p_1\gamma_1\delta_2 - p_2\gamma_2\delta_1 = 0$$

sont satisfaites. Alors, les formules asymptotiques suivantes sont valables pour les valeurs propres du problème de transmission (1.7)-(1.11) :
Cas 1 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0$,

$$s_n = \frac{p_1p_2}{p_1+p_2}\pi(n-1) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 2 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0$,

$$s_n = \frac{p_1p_2}{p_1+p_2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 3 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$s_n = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}\pi\left(n - \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 4 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0,$

$$s_n = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}\pi n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème 1.12 *Supposons que les conditions*

$$\rho > 0, \delta_1\delta_2 - \gamma_1\gamma_2 > 0, p_1\gamma_1\delta_2 - p_2\gamma_2\delta_1 = 0$$

sont satisfaites. Alors, les formules asymptotiques suivantes sont valables pour les fonctions propres $\Phi(x, \lambda)$ *du problème* (1.7)-(1.11) *:*
Cas 1 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\Phi(x, \lambda) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_2 \cos\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\pi(n-1)(x+1)\right), x \in [-1, 0[\\ \alpha_2 \frac{\gamma_1}{\delta_1} \cos\left(\frac{1}{p_1+p_2}\pi(n-1)(p_1 x + p_2)\right), x \in]0, 1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 2 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0,$

$$\Phi(x, \lambda) = \left\{ \begin{array}{c} -\alpha_1 \frac{p_1+p_2}{p_2} \frac{1}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sin\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x \in [-1, 0[\\ -\alpha_1 \frac{\gamma_1}{\delta_1} \frac{p_1+p_2}{p_2} \frac{1}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sin\left(\frac{1}{p_1+p_2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(p_1 x + p_2)\right), x \in]0, 1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Cas 3 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\Phi(x, \lambda) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_2 \cos\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x \in [-1, 0[\\ \alpha_2 \frac{\gamma_1}{\delta_1} \cos\left(\frac{1}{p_1+p_2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(p_1 x + p_2)\right), x \in]0, 1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 4 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0,$

$$\Phi(x, \lambda) = \left\{ \begin{array}{c} -\alpha_1 \frac{p_1+p_2}{p_2} \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\pi n(x+1)\right), x \in [-1, 0[\\ -\alpha_1 \frac{\gamma_1}{\delta_1} \frac{p_1+p_2}{p_2} \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{1}{p_1+p_2}\pi n(p_1 x + p_2)\right), x \in]0, 1] \end{array} \right. + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Toutes ces formules asymptotiques sont uniformément valables pour tout x.

2.3 Formules asymptotiques pour les normes des fonctions propres

Dans cette sous-section, nous obtiendrons les normes des fonctions propres

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \Phi(x, \lambda_n) \\ R_1'(\Phi(x, \lambda_n)) \end{pmatrix}, n = 0, 1, 2, ...,$$

qui sont les fonctions propres de l'opérateur A correspondant aux valeurs propres λ_n. Pour $n \neq m$,

$$(\Phi_n, \Phi_m) = 0, n, m = 0, 1, 2, ...,$$

puisque l'opérateur A est symétrique. On note :

$$\Psi_n(x) = \frac{\Phi(x, \lambda_n)}{\|\Phi_n\|_H},$$

on voit facilement que les fonctions propres

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \Psi_n(x) \\ R_1'(\Psi_n(x)) \end{pmatrix}, n = 0, 1, 2, ...,$$

sont orthonormées.

Lemme 1.4 *Supposons que les conditions*

$$\rho > 0, \delta_1\delta_2 - \gamma_1\gamma_2 > 0, p_1\gamma_1\delta_2 - p_2\gamma_2\delta_1 = 0$$

sont satisfaites. Alors, les égalités asymptotiques suivantes ont lieu :
1) pour $\alpha_2 \neq 0$,

$$R_1'(\Phi(x, \lambda_n)) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

2) pour $\alpha_2 = 0$,

$$R_1'(\Phi(x, \lambda_n)) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Théorème 1.13 *Supposons que les conditions*

$$\rho > 0, \delta_1\delta_2 - \gamma_1\gamma_2 > 0, p_1\gamma_1\delta_2 - p_2\gamma_2\delta_1 = 0$$

sont satisfaites. Alors, les formules asymptotiques suivantes ont lieu pour les normes $\|\Phi_n\|_H$ *des fonctions propres* Φ_n *:*

Cas 1 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\|\Phi_n\|_H = \frac{|\alpha_2|}{|\delta_1|}\frac{1}{p_1p_2}\sqrt{\frac{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}{2}}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 2 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0,$

$$\|\Phi_n\|_H = |-\alpha_1|\,\frac{p_1+p_2}{p_2}\frac{1}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{p_1p_2}\sqrt{\frac{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}{2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Cas 3 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\|\Phi_n\|_H = \frac{|\alpha_2|}{|\delta_1|}\frac{1}{p_1p_2}\sqrt{\frac{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}{2}}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 4 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0,$

$$\|\Phi_n\|_H = |-\alpha_1|\,\frac{p_1+p_2}{p_2}\frac{1}{\pi n}\frac{1}{p_1p_2}\sqrt{\frac{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}{2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2.4 Formules asymptotiques pour les fonctions propres normalisées

Théorème 1.14 *Les premières composantes des fonctions propres normalisées* $\Psi_n(x)$ *ont la représentation asymptotique suivante pour* $n \to \infty$ *:*
Cas 1 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\Psi_n(x) = \left\{\begin{array}{c} \delta_1 sgn\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)\sqrt{\frac{2p_1^2p_2^2}{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}}\cos\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\pi(n-1)(x+1)\right), x\in[-1,0[\\ \gamma_1 sgn\left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right)\sqrt{\frac{2p_1^2p_2^2}{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}}\cos\left(\frac{1}{p_1+p_2}\pi(n-1)(x+1)\right), x\in]0,1] \end{array}\right. +O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 2 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0,$

$$\Psi_n(x) = \left\{\begin{array}{c} sgn(-\alpha_1)\sqrt{\frac{2p_1^2p_2^2}{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}}\sin\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x\in[-1,0[\\ \frac{\gamma_1}{\delta_1}sgn(-\alpha_1)\sqrt{\frac{2p_1^2p_2^2}{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}}\sin\left(\frac{1}{p_1+p_2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x\in]0,1] \end{array}\right. +O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 3 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} \delta_1 sgn\left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right)\sqrt{\frac{2p_1^2p_2^2}{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}}\cos\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x\in[-1,0[\\ \gamma_1 sgn\left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right)\sqrt{\frac{2p_1^2p_2^2}{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}}\cos\left(\frac{1}{p_1+p_2}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right), x\in]0,1] \end{cases} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Cas 4 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0,$

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} sgn(-\alpha_1)\sqrt{\frac{2p_1^2p_2^2}{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}}\sin\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\pi n(x+1)\right), x\in[-1,0[\\ \frac{\gamma_1}{\delta_1} sgn(-\alpha_1)\sqrt{\frac{2p_1^2p_2^2}{(p_2\delta_1)^2+(p_1\gamma_1)^2}}\sin\left(\frac{1}{p_1+p_2}\pi n(x+1)\right), x\in]0,1] \end{cases} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

3 Étude estimative des problèmes aux limites

Dans cette étude, nous considérons un problème aux valeurs propres discontinues qui consiste en l'équation de Sturm-Liouville ci-dessous

$$\tau u = -p(x)u'' + q(x)u = \lambda u; x\in[a,c[\cup]c,b], \tag{1.13}$$

avec les conditions aux limites

$$L_1(u) = \lambda(\alpha_1' u(a) - \alpha_2' u'(a)) - (\alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a)) = 0, \tag{1.14}$$

$$L_2(u) = \lambda(\beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b)) + (\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) = 0, \tag{1.15}$$

et les conditions de transmission

$$L_3(u) = u(c+0) - u(c-0) = 0, \tag{1.16}$$

$$L_4(u) = u'(c+0) - u'(c-0) + \lambda\delta = 0. \tag{1.17}$$

Où

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{p_1^2}, x\in[a,c[\\ \frac{1}{p_2^2}, x\in]c,b] \end{cases},$$

λ est un paramètre complexe, la fonction $q(x)$ est une fonction réelle continue dans $[a,c[\cup]c,b]$ et les limites

$$\lim_{x\to c^{\pm}} q(x) = q(c\pm 0).$$

existent et sont finies, $p_i, \alpha_i', \alpha_i, \beta_i, \beta_i', (i = 1, 2)$ sont des nombres réels, on suppose que : $\delta > 0$ et

$$\rho_1 = \beta_1'\beta_2 - \beta_2'\beta_1 > 0.\rho_2 = \alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1 > 0.$$

Les problèmes aux valeurs limites avec condition de transmission sont rencontrés dans la théorie du transfert de chaleur et de masse et dans un assortiment varié de problèmes de transfert physique (voir par exemple [20]). Notons que certains problèmes discontinus avec les conditions de transmission ont été étudiés dans [4, 9, 18, 19].

3.1 Formulation opératorielle dans un espace de Hilbert

Nous introduisons un produit scalaire dans l'espace de Hilbert

$$H = L_2\left[a, b\right] \oplus \mathbb{C}^2,$$

et un opérateur symétrique

$$A : H \to H$$

tel que le problème (1.13)-(1.17) peut être considéré comme problème aux valeurs propres de cet opérateur.

dans l'espace de Hilbert nous définissions le produit scalaire suivant

$$\left(F, G\right)_H = p_1^2 \int_a^c f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx + p_1^2 \int_c^b f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx + \frac{1}{\rho_1} f_1\overline{g_1} + \frac{1}{\rho_2} f_2\overline{g_2} + \frac{1}{\delta} f_3\overline{g_3}, \tag{1.18}$$

avec

$$F = \left(f\left(x\right), f_1, f_2, f_3\right), G = \left(g\left(x\right), g_1, g_2, g_3\right) \in H.$$

On note

$$\begin{aligned}
B_a\left(u\right) &= \alpha_1 u\left(a\right) - \alpha_2 u'\left(a\right), \\
B_a'\left(u\right) &= \alpha_1' u\left(a\right) - \alpha_2' u'\left(a\right), \\
B_b\left(u\right) &= \beta_1 u\left(b\right) - \beta_2 u'\left(b\right), \\
B_b'\left(u\right) &= \beta_1' u\left(b\right) - \beta_2' u'\left(b\right), \\
T_c\left(u\right) &= u'\left(c+0\right) - u'\left(c-0\right), \\
T_c'\left(u\right) &= -\delta u\left(c\right).
\end{aligned}$$

La fonction $f(x)$ est continue dans $[a,c[\cup]c,b]$ et à des limites finies

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = f(c \pm 0).$$

Dans l'espace de Hibert H, considérons l'opérateur A de domaine de définition

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} F = \begin{pmatrix} f(x) \\ R_1'(f) \end{pmatrix}, f \text{ est absolument continue dans } [a,b] \text{ et } f' \\ \text{est absolument continue dans } [a,c[\cup]c,b] \\ \text{et ont des limites finies quand } x \to \pm 0, \tau f \in L_2[a,b], \\ f_1 = B_a'(f), f_2 = B_b'(f), f_3 = T_c'(f). \end{array} \right\},$$

$$AF = (\tau f, B_a(f), B_b(f), T_c(f)).$$

À présent on peut écrire le problème (1.13)-(1.17) sous la forme

$$AF = \lambda F,$$

Remarque 3.1 *Les valeurs propres et les vecteurs propres du problème* (1.13)-(1.17) *coïncident avec les valeurs et les vecteurs propres de l'opérateur A.*

Théorème 1.15 *L'opérateur A est symétrique.*

Corollaire 1.7 *Les valeurs propres du problème* (1.13)-(1.17) *sont réelles.*

Corollaire 1.8 *Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres différentes du problème* (1.13)-(1.17). *Alors les fonctions propres correspondantes u_1 et u_2 de ce problème sont orthogonales au sens du produit scalaire*

$$p_1^2 \int_a^c u_1(x) u_2(x)\, dx + p_1^2 \int_c^b u_1(x) u_2(x)\, dx + \frac{1}{\rho_1} B_a'(u_1) B_a'(u_2) + \frac{1}{\rho_2} B_b'(u_1) B_b'(u_2) + \frac{1}{\delta} T_c'(u_1) T_c'(u_2) = 0$$

3.2 Comportement asymptotique des valeurs propres

Considérons le problème aux valeurs initiales

$$-p(x) u''(x) + q(x) u(x) = \lambda u(x), x \in [a,c],$$

$$u(a) = -\alpha_2 + \lambda \alpha_2', u'(a) = -\alpha_1 + \lambda \alpha_1'.$$

D'après le théorème 1.5 dans [10], ce problème a une solution unique $u = \Phi_1(x,\lambda)$, c'est une fonction entière en λ pour chaque x fixé dans l'intervalle $[a,c]$.

De même, on voit que le problème

$$-p(x)\,u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x)\,, x \in [c,b]$$

$$u(b) = \beta_2'\lambda + \beta_2, u'(b) = \beta_1'\lambda + \beta_1.$$

a une solution unique $u = \chi_2(x,\lambda)$, c'est une fonction entière en λ pour chaque x fixé dans l'intervalle $[c,b]$.

Nous définirons les fonctions $\Phi_2(x,\lambda)$ et $\chi_1(x,\lambda)$ en utilisant les fonctions $\Phi_1(x,\lambda)$ et $\chi_2(x,\lambda)$, respectivement. En modifiant la méthode de la preuve du théorème, nous pouvons prouver que le prochain problème aux valeurs initiales de type spécial,

$$-p(x)\,u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x)\,, x \in [c,b]\,,$$

$$u(c) = \Phi_1(c,\lambda)\,, u'(c) = \Phi_1'(c,\lambda) - \lambda u(c)\,,$$

a une solution unique $u = \Phi_2(x,\lambda)$. De même, le problème suivant a aussi une solution unique $u = \chi_1(x,\lambda)$:

$$-p(x)\,u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x)\,, x \in [a,c]\,,$$

$$u(c) = \chi_1(c,\lambda)\,, u'(c) = \chi_1'(c,\lambda) + \lambda u(c)\,.$$

On a l'égalité

$$w_1(\lambda) = w_2(\lambda)$$

pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$. Où

$$w_1(\lambda) = W(\Phi_1(x,\lambda)\,, \chi_1(x,\lambda))\,, w_2(\lambda) = W(\Phi_2(x,\lambda)\,, \chi_2(x,\lambda))\,.$$

Corollaire 1.9 *Les zéros des fonctions $w_1(\lambda)$ et $w_2(\lambda)$ coïncident.*

Théorème 1.16 *Les valeurs propres du problème (1.13)-(1.17) coïncident avec les zéros de la fonction*

$$w(\lambda) = W(\Phi(x,\lambda)\,, \chi(x,\lambda))\,.$$

et

$$w(\lambda) + \lambda\delta\chi_2(x,\lambda)\,\Phi_2(x,\lambda)$$

Lemme 1.5 *Soit*

$$\lambda = s^2, s = \sigma + it.$$

Alors, l'équation intégrale suivante est valable pour $k = 0$ et $k = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) &= \left(-\alpha_2 + s^2\alpha_2'\right)\frac{d^k}{dx^k}\cos\left(p_1 s\left(x-a\right)\right)\\&-\frac{1}{p_1 s}\left(-\alpha_1 + s^2\alpha_1'\right)\frac{d^k}{dx^k}\sin\left(p_1 s\left(x-a\right)\right)\\&+\frac{p_1}{s}\int_a^x \frac{d^k}{dx^k}\sin\left(p_1 s\left(x-y\right)\right)q\left(y\right)\Phi_1\left(y,\lambda\right)dy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) &= \Phi_1(c,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\cos\left(p_2 s\left(x-c\right)\right)\\&+\frac{1}{p_1 s}\left(\Phi_1'(c,\lambda) + s^2\delta\Phi_1(c,\lambda)\right)\frac{d^k}{dx^k}\sin\left(p_2 s\left(x-c\right)\right)\\&+\frac{p_1}{s}\int_a^x \frac{d^k}{dx^k}\sin\left(p_2 s\left(x-y\right)\right)q\left(y\right)\Phi_2\left(y,\lambda\right)dy.\end{aligned}$$

Théorème 1.17 *Soit*

$$\lambda = s^2, s = \sigma + it.$$

Alors, les égalités asymptotiques suivantes sont valables pour $|\lambda| \to \infty, k = 0, 1$:

1) $\alpha_2' \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) &= s^2\alpha_2'\frac{d^k}{dx^k}\cos\left(p_1 s\left(x-a\right)\right) + O\left(|s|^{k+1}e^{|t|p_{1(x-a)}}\right),\\\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) &= -s^3\alpha_2'\frac{\delta}{p_2}\cos\left(p_1 s\left(c-a\right)\right)\frac{d^k}{dx^k}\sin\left(p_2 s\left(x-c\right)\right)\\&+O\left(|s|^{k+1}e^{|t|\left(p_2(x-c)+p_1(c-a)\right)}\right).\end{aligned}$$

2) $\alpha'_2 = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) &= -\frac{s\alpha'_1}{p_1}\frac{d^k}{dx^k}\sin\left(p_1 s\left(x-a\right)\right) + O\left(\left|s\right|^k e^{\left|t\right| p_{1(x-a)}}\right), \\
\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) &= \frac{s^2\alpha'_1\delta}{p_1 p_2}\cos\left(p_1 s\left(c-a\right)\right)\frac{d^k}{dx^k}\sin\left(p_2 s\left(x-c\right)\right) \\
&\quad + O\left(\left|s\right|^{-1+k} e^{\frac{\left|t\right|\left(p_1 x + p_2\right)}{p_1 p_2}}\right),
\end{aligned}$$

De plus, chacune de ces égalités est uniformément valable en x.

Théorème 1.18 *Le problème de transmission des valeurs aux limites (1.13)-(1.17) a un nombre dénombrable de valeurs propres réelles, dont le comportement peut être exprimé par deux suites (s'_n) et (s''_n) satisfaisant les formules asymptotiques suivantes quand $n \to \infty$:*
Cas 1 : $\beta'_2 \neq 0, \alpha'_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
s'_n &= \frac{\pi}{p_2\left(b-c\right)}\left(n-\frac{5}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\
s''_n &= \frac{\pi}{p_1\left(c-a\right)}\left(n+\frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Cas 2 : $\beta'_2 \neq 0, \alpha'_2 = 0$,

$$\begin{aligned}
s'_n &= \frac{\pi}{p_2\left(b-c\right)}\left(n+\frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\
s''_n &= \frac{\pi}{p_1\left(c-a\right)}\left(n+2\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Cas 3 : $\beta'_2 = 0, \alpha'_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
s'_n &= \frac{\pi}{p_2\left(b-c\right)}\left(n-2\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\
s''_n &= \frac{\pi}{p_1\left(c-a\right)}\left(n+\frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Cas 4 : $\beta'_2 = 0, \alpha'_2 = 0$,

$$\begin{aligned}
s'_n &= \frac{\pi}{p_2\left(b-c\right)}\frac{\pi}{p_1\left(b-c\right)} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\
s''_n &= \frac{\pi}{p_1\left(c-a\right)}n + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

3.3 Formules d'approximation asymptotique pour les fonctions propres

Théorème 1.19 *On a les formules asymptotiques suivantes pour les fonctions propres $\Phi(x,\lambda)$ du problème (1.13)-(1.17) :*
Cas 1 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\Phi(x,\lambda_n') = \begin{cases} \alpha_2' \left[\frac{\pi}{p_2(b-c)}\left(n-\frac{5}{2}\right)\right]^2 \cos\left(\pi\left(n-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right) + O(n), x \in [a,c[\\ -\frac{1}{p_2}\alpha_2'\delta\left[\frac{\pi}{p_2(b-c)}\left(n-\frac{5}{2}\right)\right]^2 \cos\left(\pi\left(n-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right)\sin\left(\pi\left(n-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right) \\ +O(n^2), x \in]c,b] \end{cases}$$

$$\Phi(x,\lambda_n'') = \begin{cases} \alpha_2'\left[\frac{\pi}{p_1(c-a)}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2 \cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-a}{c-a}\right)\right) + O(n), x \in [a,c[\ , \\ O(n^2) \qquad , x \in]c,b] \end{cases}$$

Cas 2 : $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0,$

$$\Phi(x,\lambda_n') = \begin{cases} -\frac{1}{p_1}\alpha_1'\left[\frac{\pi}{p_2(b-c)}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right) + O(1), x \in [a,c[\\ -\frac{1}{p_1}\alpha_1'\delta\left[\frac{\pi}{p_2(b-c)}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^3 \sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-b}{b-c}\right)\right) + O(n^2), x \in]c,b] \end{cases},$$

$$\Phi(x,\lambda_n'') = \begin{cases} -\frac{1}{p_1}\alpha_1'\left[\frac{\pi}{p_1(c-a)}(n-2)\right]\sin\left(\pi(n-2)\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right) + O(1), x \in [a,c[\\ -\frac{1}{p_1}\alpha_1'\delta\left[\frac{\pi}{p_1(c-a)}(n-2)\right]^3 \sin\left(\pi(n-2)\left(\frac{x-b}{b-c}\right)\right) + O(n^2), x \in]c,b] \end{cases},$$

Cas 3 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0,$

$$\Phi(x,\lambda_n') = \begin{cases} \alpha_2'\left[\frac{\pi}{p_1(c-a)}(n-2)\right]^2 \cos\left(\pi(n-2)\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right) + O(n), x \in [a,c[, \\ \alpha_2'\left[\frac{\pi}{p_1(c-a)}(n-2)\right]^3 \cos\left(\pi(n-2)\left(\frac{x-b}{b-c}\right)\right)\sin\left(\pi(n-2)\left(\frac{x-b}{b-c}\right)\right) + O(n^2), x \in]c,b] \end{cases},$$

$$\Phi(x,\lambda_n'') = \begin{cases} \alpha_2'\left[\frac{\pi}{p_1(c-a)}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2 \cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-a}{c-a}\right)\right) + O(n), x \in [a,c[, \\ O(n^2), \qquad x \in]c,b] \end{cases},$$

Cas 4 : $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0,$

$$\Phi(x,\lambda_n') = \begin{cases} -\alpha_1\left[\frac{\pi}{p_2(b-c)}(n-2)\right]^2 \sin\left(\pi(n-2)\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right) + O(n), x \in [a,c[\\ -\frac{1}{p_2}\alpha_1\delta\left[\frac{\pi}{p_2(b-c)}(n-2)\right]^3 \cos\left(\pi(n-2)\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right)\sin\left(\pi(n-2)\left(\frac{x-c}{b-c}\right)\right) \\ +O(n^2), \qquad x \in]c,b]. \end{cases}.$$

$$\Phi\left(x,\lambda_n''\right)=\begin{cases} -\alpha_1\left[\frac{\pi n}{p_1(c-a)}\right]^2\sin\left(\pi n\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right)+O\left(n\right), \qquad x\in\left[a,c\right[\\ -\frac{1}{p_2}\alpha_1\delta\left[\frac{\pi n}{p_1(c-a)}\right]^3\sin\left(\pi n\left(\frac{p_{1(x-a)}}{p_2(b-c)}\right)\right)+O\left(n^2\right), x\in\left]c,b\right]. \end{cases}.$$

Toutes ces formules asymptotiques sont uniformément valables pour x.

Chapitre 2

Étude de Deux Problèmes de Transmission Généralisés

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats obtenus par généralisation des études précédentes [4, 9, 18] où on suppose qu'il y a deux ou plusieurs points de discontinuité.

Ce chapitre contient deux parties, dont l'une est consacrée à l'étude de problème de type Sturm-Liouville avec les conditions aux limites et les conditions de transmission en deux points de discontinuité, et l'autre est dédiée à l'étude du même problème avec plusieurs points de discontinuité.

Nous présenterons les résultats avec des preuves, parfois détaillées et d'autres fois brèves.

Notons que ces résultats vont être améliorés pour une prochaine et nouvelle publication.

1 Problème de transmission avec deux points de discontinuité

On considère dans cette section le problème de Sturm-Liouville avec l'existence du paramètre λ dans l'équation différentielle et dans l'une des conditions aux limites et l'une des conditions de transmission, sur un intervalle avec deux points de discontinuité.

Donc nous étudierons l'équation différentielle

$$\tau u = -p\,(x)\,u'' + q\,(x)\,u = \lambda u; x \in [a, c[\cup]c, d[\cup]d, b]\,, \tag{2.1}$$

Avec la condition aux limites en $x = a$,

$$L_1\,(u) = \alpha_1 u\,(a) + \alpha_2 u'\,(a) = 0, \tag{2.2}$$

et la condition aux limites en $x = b$,

$$L_2\,(u) = \lambda\,(\beta_1' u\,(b) - \beta_2' u'\,(b)) + (\beta_1 u\,(b) - \beta_2 u'\,(b)) = 0, \tag{2.3}$$

Les conditions de transmission au point de discontinuité $x = c$:

$$L_{3i}\,(u) = u\,(c-0) - \delta_1 u\,(c+0) = 0, \tag{2.4}$$

$$L_{4i}\,(u) = u'\,(c-0) - \delta_2 u'\,(c+0) = 0, \tag{2.5}$$

et les conditions de transmission au point de discontinuité $x = d$,

$$L_5(u) = u(d-0) - \sigma u(d+0) = 0, \tag{2.6}$$

$$L_5(u) = u'(d-0) - u'(d+0) - \lambda u(d-0) = 0. \tag{2.7}$$

Où

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{p_1^2}; x \in [a, c[\\ \frac{1}{p_{i21}^2}; x \in]c, d[\\ \frac{1}{p_3^2}; x \in]d, b] . \end{cases}$$

λ est un paramètre spectral complexe. La fonction $q(x)$ est une fonction à valeurs réelles continue dans $[a, c[\cup]c, d[\cup]d, b]$ et a des limites finies

$$q(c \pm 0) = \lim_{x \to c^{\pm}} q(x); q(d \pm 0) = \lim_{x \to d^{\pm}} q(x);$$

σ et $\alpha_j, \beta_j, \beta_i', \delta_i$, $(i = 1, 2)$ sont des nombres réels ; et nous supposons que

$$\begin{aligned} |\alpha_1| + |\alpha_2| &\neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \delta_i \neq 0, (i = 1, 2), \\ \sigma &\neq 0, \rho = \beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2' > 0. \end{aligned}$$

1.1 Formulation opératorielle du problème

Nous introduisons l'espace Hilbert

$$H = L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^2$$

et un opérateur linéaire symétrique

$$A : H \to H,$$

tel que le problème (2.1)-(2.7) peut être considéré comme le problème aux valeurs propres de cet opérateur.

Dans cet espace de Hilbert H nous définissons un produit scalaire par

$$\begin{aligned}\langle F,G\rangle &= p_1^2\int\limits_a^{c-0} f(x)\,\overline{g(x)}dx+\delta_1\delta_2p_2^2\int\limits_{c+0}^{d-0} f(x)\,\overline{g(x)}dx+\delta_1\delta_2\sigma p_3^2\int\limits_{d+0}^{b} f(x)\,\overline{g(x)}dx\\ &\quad+\frac{\delta_1\delta_2\sigma}{\rho}f_1\overline{g_1}+\delta_1\delta_2f_2\overline{g_2},\end{aligned}$$

pour

$$F=(f(x),f_1,f_2)\,,G=(g(x),g_1,g_2)\in H.$$

Par commodité, nous utiliserons les notations :

$$\begin{aligned}R(u) &= \beta_1u(b)-\beta_2u'(b)\,,\\ R'(u) &= \beta_1'u(b)-\beta_2'u'(b)\,,\\ T(u) &= u'(d-0)-u'(d+0)\,,\\ T'(u) &= u(d-0)\,.\end{aligned}$$

Dans l'espace de Hilbert H, on considère l'opérateur A avec le domaine de définition

$$D(A)=\left\{\begin{array}{c}F=(f(x),f_1,f_2):\ \text{où } f \text{ et } f' \text{ sont absolument continues dans}\\ [a,c[\cup]c,d[\cup]d,b]\,,\text{ et ont des limites finies quand}\\ x\to d\pm0,\ x\to c\pm0,(i=1,2)\,,\tau f\in L_2[a,b]\,,f_1=R'(f)\,,f_2=T'(f)\,,\\ L_i(f)=0,:(i=1,3,4,5)\,.\end{array}\right\}$$

$$AF=(\tau f,-R(f)\,,T(f))\,.$$

On peut maintenant considérer le problème (2.1)-(2.7) sous forme opératorielle :

$$AF=\lambda F,$$

Où

$$F=(f(x),R'(f)\,,T'(f))\in D(A)\,.$$

Les valeurs propres et les fonctions propres du problème (2.1)-(2.7) sont définis comme les valeurs propres et les premières composantes des vecteurs propres correspondants a l'opérateur A respectivement.

Théorème 2.1 *L'opérateur A est symétrique.*

Démonstration. *Soient $F, G \in D(A)$. On intègre deux fois par parties on obtient*

$$\begin{aligned}\langle AF, G\rangle &= \langle F, AG\rangle + W(f, \overline{g}, c-0) - W(f, \overline{g}, a) - \delta_1\delta_2 W(f, \overline{g}, c+0) \\ &\quad + \delta_1\delta_2 W(f, \overline{g}, d-0) + \delta_1\delta_2\sigma W(f, \overline{g}, d+0) - \delta_1\delta_2\sigma W(f, \overline{g}, b) \\ &\quad + \frac{\delta_1\delta_2\sigma}{\rho}\left(R(\overline{g}) R'(f) - R'(\overline{g}) R(f)\right) \\ &\quad + \delta_1\delta_2\left(T'(\overline{g}) T(f) - T(\overline{g}) T'(f)\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Où, comme d'habitude, on note par $W(f, g, x)$ le Wronskien des fonctions f et g :

$$W(f, g, x) = f(x) g'(x) - f'(x) g(x).$$

puisque f et $\overline{g}$ vérifient les conditions aux limites (2.2) et (2.3), et les conditions de transmission (2.4)-(2.7), on a

$$\begin{aligned} W(f, \overline{g}, a) &= 0 \\ W(f, \overline{g}, c-0) &= \delta_1\delta_2 W(f, \overline{g}, c+0) \\ R(\overline{g}) R'(f) - R'(\overline{g}) R(f) &= -\sigma W(f, \overline{g}, b) \\ T'(\overline{g}) T(f) - T(\overline{g}) T'(f) &= \sigma W(f, \overline{g}, d+0) - W(f, \overline{g}, d-0). \end{aligned} \tag{2.9}$$

finalement substitutions (2.9) dans (2.8). Nous avons

$$\langle AF, G\rangle = \langle F, AG\rangle, \;\; F, G \in D(A),$$

donc A et symétrique.

Corollaire 2.1 *Toutes les valeurs propres du problème(2.1)-(2.7) sont réelles.*

On peut supposer que toutes les fonctions propres du problème (2.1)-(2.7) ont des valeurs réelles.

1.2 Approximations asymptotiques des solutions fondamentales

Lemme 2.1 *Soit la fonction à valeur réelle $q(x)$ continue dans $[a, b]$ et $f(\lambda), g(\lambda)$ sont des fonctions entières. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ l'équation :*

$$\tau u = -p(x) u'' + q(x) u = \lambda u; x \in [a, b],$$

a une solution unique $u(x,\lambda)$ satisfaisant aux conditions initiales

$$u(a) = f(\lambda), u'(a) = g(\lambda)$$

où

$$u(b) = f(\lambda), u'(b) = g(\lambda).$$

Pour chaque $x \in [a,b]$ fixé, est une fonction entière de λ.

Considérons le problème aux valeurs initiales suivant

$$\tau u = -p(x) u'' + q(x) u = \lambda u; x \in [a,c],$$

$$u(a) = \alpha_1, u'(a) = \alpha_2. \tag{2.10}$$

Ce problème a une solution unique $\Phi_1(x,\lambda)$.

Après avoir défini cette solution, nous pouvons définir la solution $\Phi_2(x,\lambda)$ de l'équation (2.1) dans l'intervalle $[c,d]$ par les conditions initiales

$$u(c) = \delta_1^{-1}\Phi_1(c,\lambda), u'(c) = \delta_2'^{-1}\Phi_1(c,\lambda);. \tag{2.11}$$

Nous définirons la fonction $\Phi_3(x,\lambda)$ on utilisant $\Phi_2(x,\lambda)$.

Nous pouvons prouver que le problème aux valeurs initiales suivant

$$\begin{aligned} \tau u &= -p(x) u'' + q(x) u = \lambda u; x \in [d,b] \\ u(d) &= \sigma^{-1}\Phi_2(d,\lambda), \\ u'(d) &= \Phi_2'(d,\lambda) - \lambda\Phi_2(d,\lambda), \end{aligned} \tag{2.12}$$

a une solution unique $\Phi_3(x,\lambda)$.

Soit $\Psi_3(x,\lambda)$ la solution de l'équation (2.1) dans l'intervalle $[d,b]$, satisfaisant aux conditions initiales

$$u(b) = \beta_2 + \lambda\beta_2', u'(b) = \beta_1 + \lambda\beta_1'. \tag{2.13}$$

Soit $\Psi_2(x,\lambda)$ la solution de l'équation (2.1) dans l'intervalle $[c,d]$, satisfaisant aux conditions initiales

$$u(d) = \sigma\Psi_3(d,\lambda), u'(d) = \Psi_3'(d,\lambda) + \lambda u(d). \tag{2.14}$$

Après avoir défini cette solution, nous pouvons définir la solution $\Psi_1(x,\lambda)$ de l'équation (2.1) dans l'intervalle $[c, d]$, satisfaisant aux conditions initiales

$$u(c) = \delta_1 \Psi_{21}(c, \lambda), u'(c) = \delta_2 \Psi'_2(c, \lambda). \tag{2.15}$$

Considérons les Wronskiens

$$W_i(\lambda) = W(\Phi_i(x, \lambda), \Psi_i(x, \lambda)) = \Phi_i(x, \lambda).\Psi'_i(x, \lambda) - \Phi'_i(x, \lambda).\Psi_i(x, \lambda).; x \in \Omega_i, i = 1, 2, 3,$$

qui sont indépendants de $x \in \Omega$, et sont des fonctions entières de λ, où

$$\Omega_1 = [a, c], \Omega_2 = [c, d], \Omega_3 = [d, b].$$

Lemme 2.2 *Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ on a l'égalité*

$$w_1(\lambda) = \delta_1 \delta_2 w_2(\lambda) = \delta_1 \delta_2 w_3(\lambda);.$$

Prenant en compte des équations (2.11), (2.12), (2.14) et (2.15), un simple calcul donne immédiatement

$$w_1(\lambda) = \delta_1 \delta_2 w_2(\lambda) = \delta_1 \delta_2 \sigma w_3(\lambda);.$$

Corollaire 2.2 *Les zéros des fonctions $w_i(\lambda)$ $i = 1, 2, 3$ coïncident.*

Construisons deux solutions de base de l'équation (2.1) comme

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{cases} \Phi_1(x, \lambda); x \in [a, c[\\ \Phi_2(x, \lambda); x \in]c, d[, \\ \Phi_{31}(x, \lambda); x \in]d, b]. \end{cases}$$

$$\Psi(x, \lambda) = \begin{cases} \Psi_1(x, \lambda); x \in [a, c[\\ \Psi_i(x, \lambda); x \in]c, d[, \\ \Psi_{n+1}(x, \lambda); x \in]d, b]. \end{cases}$$

Notons par $W(\lambda)$ le Wronskien des fonctions $\Phi(x, \lambda)$ et $\Psi(x, \lambda)$,

$$W(\lambda) = W(\Phi(x, \lambda), \Psi(x, \lambda)).$$

Théorème 2.2 *Les valeurs propres du problème (2.1)-(2.7) sont constituées des zéros de la fonction $W(\lambda)$.*

Démonstration. *Soit* $W(\lambda_0) = 0$. *Nous allons montrer que* $\Psi(x, \lambda_0)$ *est une fonction propre. Par définition de cette solution,* $\Psi(x, \lambda_0)$ *satisfait la condition aux limites* (2.3). *De plus,* $W(\lambda_0) = 0$, *les fonctions* $\Phi_1(x, \lambda_0)$ *et* $\Psi_1(x, \lambda_0)$ *sont linéairement dépendantes, i.e.*

$$\Phi_1(x, \lambda_0) = k\Psi_1(x, \lambda_0), x \in [a, c[,$$

pour $k \neq 0$. *Par conséquent, la fonction* $\Psi(x, \lambda_0)$ *satisfait aussi la condition aux limites* (2.2). *Rappelons que cette solution* $\Psi(x, \lambda_0)$ *satisfait les deux conditions de transmission* (2.4)-(2.7), *on a* $\Psi(x, \lambda_0)$ *est une fonction propre du problème* (2.1)-(2.7) *correspondant à la valeur propre* λ_0.
Maintenant, soit $u_0(x)$ *la fonction propre correspondant à la valeur propre* λ_0 *avec* $W(\lambda_0) \neq 0$. *Alors la fonction* $u_0(x)$ *peut être représentée sous la forme*

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1\Phi_1(x, \lambda_0) + c_2\Psi_1(x, \lambda_0); & x \in [a, c_1[, \\ c_3\Phi_2(x, \lambda_0) + c_4\Psi_2(x, \lambda_0); & x \in]c_i, c_{i+1}[, \\ c_5\Phi_3(x, \lambda_0) + c_6\Psi_3(x, \lambda_0); & x \in]c_n, b], \end{cases}$$

où au moins une des constantes c_i, $\left(i = \overline{1,6}\right)$ *n'est pas nul. L'application des conditions de transmission* (2.4) *et* (2.5) *à cette représentation de* $u_0(x)$ *donne*

$$u_0(x) = \begin{cases} (c_1 - c_3)\Phi_1(x, \lambda_0) + (c_2 - c_4)\Psi_1(x, \lambda_0) = 0, \\ (c_1 - c_3)\Phi_1'(x, \lambda_0) + (c_2 - c_4)\Psi_1'(x, \lambda_0) = 0. \end{cases}$$

Considérant ces égalités comme un système homogène d'équations linéaires des variables $c_1 - c_3$ *et* $c_2 - c_4$, *nous avons*

$$c_1 = c_3, c_2 = c_4.$$

Appliquons les conditions de transmission (2.6) *et* (2.7) *à cette représentation de* $u_0(x)$, *on obtient*

$$u_0(x) = \begin{cases} (c_3 - c_5)\Phi_3(x, \lambda_0) + (c_4 - c_6)\Psi_3(x, \lambda_0) = 0, \\ (c_3 - c_5)\Phi_3'(x, \lambda_0) + (c_4 - v_6)\Psi_3'(x, \lambda_0) = 0. \end{cases}$$

En considérant ces égalités comme un système homogène d'équations linéaires des variables $c_3 - c_5$ *et* $c_4 - c_6$ *Nous avons*

$$c_3 = c_5, c_4 = c_6.$$

Donc

$$c_1 = c_5 = c_3, c_2 = c_6 = c,$$

Par conséquent la fonction propre $u_0(x)$ est représentée sous la forme

$$u_0(x) = c_1\Phi(x,\lambda_0) + c_2\Psi(x,\lambda_0), c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

Maintenant, en appliquant les conditions aux limites (2.2) *et* (2.3) *à cette représentation, on a*

$$\begin{aligned} L_1(u_0(x)) &= c_2 w_1(\lambda_0) = 0, \\ L_2(u_0(x)) &= c_1 w_3(\lambda_0) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $c_2 = 0$ *et* $c_1 = 0$. *Ainsi on obtient la contradiction* $c_1 = c_5 = c_3 = c_2 = c_6 = c_4 = 0$, *ce qui achève la preuve.*

Lemme 2.3 *Soit* $\lambda = s^2$. *Alors les équations intégrales suivantes sont valables pour* $k = 0$ *et* $k = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) &= \alpha_2 \frac{d^k}{dx^k}\cos[sp_1(x-a)] - \frac{\alpha_1}{sp_1}\frac{d^k}{dx^k}\sin[sp_1(x-a)] \\ &+ \frac{p_1}{s}\int_a^x \frac{d^k}{dx^k}\sin[sp_1(x-y)]\,q(y)\,\Phi_1(y,\lambda)\,dy, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) &= \delta_1^{-1}\Phi_1(c,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\cos[sp_2(x-c)] \\ &+ \frac{\delta_i'^{-1}}{sp_2}\Phi_1'(c_i,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\sin[sp_2(x-c)] \\ &+ \frac{p_2}{s}\int_a^x \frac{d^k}{dx^k}\sin[sp_2(x-y)]\,q(y)\,\Phi_2(y,\lambda)\,dy; \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}\Phi_3(x,\lambda) &= \sigma^{-1}\Phi_2(d,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\cos[sp_3(x-d)] \\ &- \frac{1}{sp_3}\left[\Phi_2'(d,\lambda) - \Phi_2(d,\lambda)\right]\lambda\frac{d^k}{dx^k}\sin[sp_3(x-d)] \\ &+ \frac{p_3}{s}\int_a^x \frac{d^k}{dx^k}\sin[sp_3(x-y)]\,q(y)\,\Phi_3(y,\lambda)\,dy; \end{aligned} \tag{2.18}$$

Démonstration. *Il suffit de substituer* $s^2\Phi_i(y,\lambda) + p(y)\,\Phi_i''(y,\lambda)$ $(i = 1,2,3)$ *à la place de*

$q(y)\,\Phi_i(y,\lambda)$ $(i=1,2,3)$ *dans les termes intégraux de la* (2.16), (2.17) *et* (2.18) *respectivement et intégrer deux fois par parties.*

Pour la prochaine considération, nous supposons que $\delta_1 p_1 = \delta_2 p_2$.

Lemme 2.4 *Soit* $\lambda = s^2, \Im m s = t$. *Alors, les égalités asymptotiques suivantes sont valables pour* $|\lambda| \to \infty$:
1) Pour $\alpha_2 \neq 0$,

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) = \alpha_2 \frac{d^k}{dx^k}\cos\left[sp_1(x-a)\right] + O\left(|s|^{k-1} e^{|t|p_1(x-a)}\right), \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) &= \alpha_2\delta_1^{-1}\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[s\left(p_2(x-c)+p_1(c-a_i)\right)\right] \\ &\quad +O\left(|s|^{k-1} e^{|t|(p_2(x-c)+p_1(c-a_i))}\right);\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_3(x,\lambda) &= -\frac{s\delta_1^{-1}\alpha_2}{p_3}\cos\left[s\left(p_2(d-c)+p_1(c-a)\right)\right]\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[sp_3(x-d)\right] \\ &\quad +O\left(|s|^{k-1} e^{|t|((p_2(d-c)+p_1(c-a))+p_3(x-d))}\right).\end{aligned} \tag{2.21}$$

2) Pour $\alpha_2 = 0$,

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) = -\frac{\alpha_1}{sp_1}\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[sp_1(x-a)\right] + O\left(|s|^{k-2} e^{|t|p_1(x-a)}\right) \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) &= -\frac{\alpha_1\delta_1^{-1}}{sp_2}\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[s\left(p_1(c-a)+p_2(x-c)\right)\right] \\ &\quad +O\left(|s|^{k-2} e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(x-c))}\right);\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_3(x,\lambda) &= \frac{\alpha_1\delta_1^{-1}}{p_1p_2}\sin\left[s\left(p_2(d-c)+p_1(c-a)\right)\right]\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[sp_3(x-c_n)\right] \\ &\quad +O\left(|s|^{k-1} e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(x-c))}\right).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Démonstration. *Soit* $\alpha_2 \neq 0$*, en remplaçant* (2.20) *dans* (2.18) *(pour* $k=0$*), on a*

$$\begin{aligned}\Phi_3(x,\lambda) &= \sigma^{-1}\delta_1^{-1}\alpha_2\cos\left[s\left(p_1(d-c)+p_2(c-a)\right)\right]\cos\left[sp_3(x-d)\right] \\ &-\frac{p_2}{p_3}\delta_1^{-1}\alpha_2\sin\left[s\left(p_1(d-c)+p_2(c-a)\right)\right]\sin\left[sp_3(x-d)\right] \\ &-\frac{s\delta_1^{-1}\alpha_2}{p_3}\cos\left[s\left(p_1(d-c)+p_2(c-a)\right)\right]\sin\left[sp_3(x-d)\right] \\ &+\frac{p_3}{s}\int_d^x\sin\left[sp_3(x-y)\right]q(y)\Phi_3(y,\lambda)\,dy \\ &+O\left(|s|^{-1}e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(x-c))}\right)\end{aligned} \tag{2.25}$$

En multipliant par $\left[|s|^{-1}e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(x-c))}\right]$ *et en posant*

$$F(x,\lambda)=\Phi_3(x,\lambda)\left[|s|^{-1}e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(x-c))}\right],$$

On a l'équation intégrale asymptotique suivante

$$\begin{aligned}F(x,\lambda) &= \frac{\sigma^{-1}\delta_1^{-1}\alpha_2}{s}\cos\left[s\left(p_1(d-c)+p_2(c-a)\right)\right]\cos\left[sp_3(x-d)\right]\left[e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(x-c))}\right] \\ &-\frac{p_2}{sp_3}\delta_1^{-1}\alpha_2\sin\left[s\left(p_1(d-c)+p_2(c-a)\right)\right]\sin\left[sp_3(x-d)\right]\left[e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(x-c))}\right] \\ &-\frac{\delta_1^{-1}\alpha_2}{p_3}\cos\left[s\left(p_1(d-c)+p_2(c-a)\right)\right]\sin\left[sp_3(x-d)\right]\left[e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(x-c))}\right] \\ &+\frac{p_3}{s}\int_d^x\sin\left[sp_3(x-y)\right]q(y)F(y,\lambda)\,dy+O\left(\frac{1}{|s|}\right) \\ &+O\left(|s|^{-1}e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(x-c))}\right).\end{aligned}$$

On note

$$M(\lambda)=\max_{x\in[d,b]}|F(x,\lambda)|$$

de la dernière équation on obtient,

$$M(\lambda)\leq\left|\frac{\delta_1^{-1}\alpha_2}{p_3}\right|+\frac{M_0}{|s|}$$

pour un certain M_0*. Par conséquent*

$$M(\lambda)=O(1)\ \ \textit{quand}\ \ |\lambda|\to\infty,$$

donc

$$\Phi_3(x,\lambda) = O\left(|s|^{-1} e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(x-c))}\right) \text{ quand } |\lambda| \to \infty.$$

En remplaçant dans (2.25), on obtient (2.21) pour $k=0$. le cas $k=1$ de (2.21) en appliquant la même procédure que dans le cas $k=0$. La preuve de (2.24) est similaire à celle de (2.21)

1.3 Formules asymptotiques pour les valeurs propres

Théorème 2.3 *Soit $\lambda = s^2, \Im ms = t$. Alors, les formules asymptotiques suivantes s'appliquent aux valeurs propres du problème de transmission et aux valeurs limites (2.1)-(2.7).*
1) $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\begin{cases} s_n' = \left(n - \frac{5}{2}\right) \frac{\pi}{p_2(d-c)+p_1(c-a)} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s_n'' = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{p_3(b-d)} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases} \tag{2.26}$$

2) $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$\begin{cases} s_n' = (n-1) \frac{\pi}{p_2(d-c)+p_1(c-a)} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s_n'' = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{p_3(b-d)} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases} \tag{2.27}$$

3) $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\begin{cases} s_n' = \left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{p_2(d-c)+p_1(c-a)} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s_n'' = n \frac{\pi}{p_3(b-d)} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases} \tag{2.28}$$

4) $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$\begin{cases} s_n' = (n-1) \frac{\pi}{p_2(d-c)+p_1(c-a)} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s_n'' = n \frac{\pi}{p_3(b-d)} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases} \tag{2.29}$$

Démonstration. *Considérons le cas 1 uniquement. En mettant $x=b$ dans*

$$w(\lambda) = \delta_1\delta_2\sigma\left(\Phi_3(x,\lambda)\Psi_3'(x,\lambda) - \Phi_3'(x,\lambda)\Psi_3(x,\lambda)\right).$$

puis en remplaçant

$$\Psi_3(b,\lambda) = \beta_2 + \lambda\beta_2', \Psi_3'(b,\lambda) = \beta_1 + \lambda\beta_1',$$

on a la représentation suivante pour $w(\lambda)$

$$w(\lambda) = \delta_1\delta_2\sigma\left(\Phi_3(b,\lambda)(\beta_1 + \lambda\beta_1') - \Phi_3'(x,\lambda)(\beta_2 + \lambda\beta_2')\right). \tag{2.30}$$

Maintenant, en mettant $x = b$ *dans* (2.21) *puis en remplaçant dans* (2.30) *nous dérivons*

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \beta_2'\delta_2\sigma\alpha_2 s^4 \cos\left[s\left(p_2(d-c) + p_1(c-a)\right)\right]\cos\left[sp_3(d-b)\right] \\ &\quad + O\left(|s|^3 e^{|t|(p_2(d-c)+p_1(c-a)+p_3(d-b))}\right). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Désignant par $w_1(\lambda)$ *et* $w_2(\lambda)$ *le premier et le second terme de* (2.31). *Nous appliquerons le théorème bien connu de Rouche qui affirme que si* $f(s)$ *et* $g(s)$ *sont analytiques à l'intérieur et sur un contour fermé* Γ, *et* $|f(s)| \geq |g(s)|$ *sur* Γ, *alors* $f(s)$ *et* $f(s)+g(s)$ *ont le même nombre de zéros à l'intérieur de* Γ, *à condition que chaque zéro soit compté selon sa multiplicité. Il est facile de montrer que* $w_1(s) > w_2(s)$ *sur*

$$\begin{aligned} \Gamma_n' &= \left\{ s' = \sigma' + it' / |\sigma'| \leq \frac{\pi(n+1)}{p_2(d-c) + p_1(c-a)}, |t'| \leq \frac{\pi(n+1)}{p_2(d-c) + p_1(c-a)} \right\}, \\ \Gamma_n'' &= \left\{ s'' = \sigma'' + it'' / |\sigma''| \leq \frac{\pi(n+1)}{p_3(d-b)}, |t''| \leq \frac{\pi(n+1)}{p_3(d-b)} \right\}, \end{aligned}$$

pour n *suffisamment grand.*
Soient

$$\lambda_0' \leq \lambda_1' \leq \lambda_3' \leq \ldots \text{ et } \lambda_0'' \leq \lambda_1'' \leq \lambda_3'' \leq \ldots$$

sont des zéros de $w(s)$, *et*

$$\lambda_n' = s_n'^2, \lambda_n'' = s_n''^2.$$

Alors en appliquant le théorème de Rouche on a

$$\begin{aligned} s_n' &= \left(n - \frac{5}{2}\right)\frac{\pi}{p_2(d-c) + p_1(c-a)} + \eta_n', \\ s_n'' &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{p_3(d-b)} + \eta_n'', \end{aligned}$$

où

$$\eta_n' = O(1), \eta_n'' = O(1),$$

plus précisément

$$|\eta_n'| \leq \frac{\pi}{2\left(p_2(d-c) + p_1(c-a)\right)}, |\eta_n'| \leq \frac{\pi}{2p_3(d-b)}$$

pour n suffisamment grand. En remplaçant dans (2.31) nous pouvons déduire que

$$\eta_n' = O(1), \ \eta_n'' = O(1).$$

Cette preuve est terminée pour le cas 1. Les preuves pour les autres cas sont similaires.

1.4 Formules d'approximations asymptotiques pour les fonctions propres

Théorème 2.4 *Les formules asymptotiques suivantes des fonctions propres $\Phi(x,\lambda)$ du problème (2.1)-(2.7).*

1) Si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda') = \begin{cases} \alpha_2 \cos\left[\left(n-\frac{5}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{p_2(d-c)+p_1(c-a)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in [a,c[\\ \alpha_2\delta_1^{-1} \cos\left[\left(n-\frac{5}{2}\right)\frac{p_{1i}(x-c)+p_2(c-a)}{p_2(d-c)+p_1(c-a)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in]c,d[, \\ O(1); & x \in]d,b]. \end{cases}$$

$$\Phi(x,\lambda'') = \begin{cases} \alpha_2 \cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{p_3(b-d)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in [a,c[\\ \alpha_2\delta_1^{-1} \cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p_2(c-a)+p_1(x-c)}{p_3(b-d)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in]c,d[, \\ -\frac{\alpha_2\delta_1^{-1}}{p_{n+1}}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{p_3(b-d)} \cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p_2(d-c)+p_1(c-a)}{p_3(b-d)}\pi\right] \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x-d}{b-d}\right] + O(1); & x \in]d,b]. \end{cases}$$

2) Si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda') = \begin{cases} -\frac{\alpha_1}{p_1}\frac{p_2(d-c)+p_1(c-a)}{(n-1)\pi} \sin\left[(n-1)\frac{p_1(x-a)}{p_2(d-c)+p_1(c-a)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & x \in [a,c[\\ -\frac{\alpha_1\delta_1^{-1}}{p_1}\frac{p_2(d-c)+p_1(c-a)}{(n-1)\pi} \sin\left[(n-1)\frac{p_2(x-c)+p_1(c-a)}{p_2(d-c)+p_1(c-a)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x \in]c,d[, \\ O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in]d,b]. \end{cases}$$

$$\Phi(x,\lambda'') = \begin{cases} -\frac{\alpha_1}{p_1}\frac{p_3(b-d)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{p_3(b-c_n)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x \in [a,c[\\ -\frac{\alpha_1\delta_1^{-1}}{p_1}\frac{p_3(b-d)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p_2(x-c)+p_1(c-a)}{p_3(b-c_n)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x \in]c,d[, \\ \frac{\alpha_1}{p_1 p_{n+1}}\prod_{i=1}^{n}\delta_j^{-1} \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p_2(d-c)+p_1(c-a)}{p_3(b-c_n)}\pi\right] \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x-d}{b-d}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in]d,b]. \end{cases}$$

3) Si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda') = \begin{cases} \alpha_2 \cos\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{p_2(d-c)+p_1(c-a)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in [a,c[\\ \alpha_2\delta_1^{-1} \cos\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\frac{p_2(x-c)+p_1(c-a)}{p_2(d-c)+p_1(c-a)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in]c,d[, \\ O(1); & x \in]d,b]. \end{cases}$$

$$\Phi\left(x,\lambda''\right)=\begin{cases}\alpha_2\cos\left[n\frac{p_1(x-a)}{p_3(b-d)}\pi\right]+O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in[a,c[\\ \alpha_2\delta_1^{-1}\cos\left[n\frac{p_2(x-c)+p_1(c-a)}{p_3(b-d)}\pi\right]+O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in]c,d[,\\ -\frac{\alpha_2\delta_1^{-1}}{p_1p_{n+1}}\frac{n\pi}{p_3(b-d)}\cos\left[n\frac{p_2(d-c)+p_1(c-a)}{p_3(b-d)}\pi\right]\sin\left[n\frac{x-d}{b-d}\right]+O\left(1\right); & x\in]d,b].\end{cases}$$

4) Si $\beta_2'=0$ et $\alpha_2=0$, alors

$$\Phi\left(x,\lambda'\right)=\begin{cases}-\frac{\alpha_1}{p_1}\frac{p_2(d-c)+p_{1(c-a)}}{(n-1)\pi}\sin\left[\left(n-1\right)\frac{p_1(x-a)}{p_2(d-c)+p_{1(c-a)}}\pi\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x\in[a,c[\\ -\frac{\alpha_1\delta_1^{-1}}{p_1}\frac{p_2(d-c)+p_{1(c-a)}}{(n-1)\pi}\sin\left[\left(n-1\right)\frac{p_2(x-c)+p_1(c-a)}{p_2(d-c)+p_{1(c-a)}}\pi\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x\in]c,d[,\\ O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in]d,b].\end{cases}$$

$$\Phi\left(x,\lambda''\right)=\begin{cases}-\frac{\alpha_1}{p_1}\frac{p_3(b-d)}{n\pi}\sin\left[n\frac{p_1(x-a)}{p_3(b-d)}\pi\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x\in[a,c[\\ -\frac{\alpha_1\delta_1^{-1}}{p_1}\frac{p_3(b-d)}{n\pi}\sin\left[n\frac{p_2(x-c)+p_1(c-a)}{p_3(b-d)}\pi\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x\in]c,d[,\\ \frac{\alpha_1\delta_1^{-1}}{p_1p_3}\sin\left[n\frac{p_2(x-c)+p_1(c-a)}{p_3(b-d)}\pi\right]\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x-d}{b-d}\right]+O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in]d,b].\end{cases}$$

Démonstration. *Considérons le cas 1 uniquement.*
En substituant (2.26) dans (2.19), (2.20) et (2.21), nous obtenons les résultats immédiatement. La preuve pour les autres cas est similaire.

2 Problème de transmission avec n points de discontinuité

Cette section est similaire a la section précédente avec une légère différence : cette section est basée sur l'étude du problème de type Sturm-Liouville en présence de plusieurs points de discontinuité.

Nous étudierons l'équation différentielle

$$\tau u=-p\left(x\right)u''+q\left(x\right)u=\lambda u;\quad x\in\bigcup_{i=1}^{n-1}\left[a,c_1\right[\cup\left]c_i,c_{i+1}\right[\cup\left]c_n,b\right],\tag{2.32}$$

Avec les conductions aux limites en $x=a$ et $x=b$,

$$L_1\left(u\right)=\alpha_1u\left(a\right)+\alpha_2u'\left(a\right)=0,\tag{2.33}$$

$$L_2\left(u\right)=\lambda\left(\beta_1'u\left(b\right)-\beta_2'u'\left(b\right)\right)+\left(\beta_1u\left(b\right)-\beta_2u'\left(b\right)\right)=0,\tag{2.34}$$

Conditions de transmission aux points de discontinuités $x = c_i; i = \overline{1, n-1}$,

$$L_{3i}(u) = u(c_i - 0) - \delta_i u(c_i + 0) = 0, \tag{2.35}$$

$$L_{4i}(u) = u'(c_i - 0) - \delta_i' u'(c_i + 0) = 0, \tag{2.36}$$

Conditions de transmission au point de discontinuité $x = cn$,

$$L_5(u) = u(c_n - 0) - \sigma u(c_n + 0) = 0, \tag{2.37}$$

$$L_5(u) = u'(c_n - 0) - u'(c_n + 0) - \lambda u(c_n - 0) = 0. \tag{2.38}$$

Où

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{p_1^2}; x \in [a, c_1[\\ \frac{1}{p_{i+1}^2}; x \in]c_i, c_{i+1}[\,; i = \overline{1, n-1} \\ \frac{1}{p_{n+1}^2}; x \in]c_n, b]. \end{cases}$$

λ est un paramètre spectral complexe. La fonction $q(x)$ est continue à valeurs réelles dans $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} [a, c_1[\cup]c_i, c_{i+1}[\cup]c_n, b]$ et a des limites finies

$$q(c_i \pm 0) = \lim_{x \to c_i} q(x); i = \overline{1, n},$$

σ et $\alpha_j, \beta_j, \delta_i, \delta_i'$ $\left(j = 1, 2; i = \overline{1, n-1}\right)$ sont des nombres réels ; nous supposons que

$$\begin{aligned} |\alpha_1| + |\alpha_2| &\neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \\ \delta_i &\neq \left(j = 1, 2; i = \overline{1, n-1}\right), \\ \sigma &\neq 0, \rho = \beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2' > 0. \end{aligned}$$

2.1 Formulation opératorielle du problème

Nous introduisons l'espace Hilbert

$$H = L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^2$$

et l'opérateur linéaire

$$A : H \to H,$$

tel que le problème (2.32)-(2.38) peut être considéré comme un problème aux valeurs propres de cet opérateur.

Dans cet espace de Hilbert H, nous définissons un produit scalaire par

$$\begin{aligned} \langle F, G\rangle &= p_1^2 \int_a^{c_1-0} f(x)\overline{g(x)}dx + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{i}\delta_j\delta_j'\right)p_{i+1}\int_{c_1+0}^{c_{1+1}-0} f(x)\overline{g(x)}dx \\ &+ \left(\prod_{i=1}^{n-1}\delta_i\delta_i'\right)\sigma p_{n+1}\int_{c_n+0}^{b} f(x)\overline{g(x)}dx + \frac{\prod_{i=1}^{n-1}\delta_i\delta_i'\sigma}{\rho} f_1\overline{g_1} + \prod_{i=1}^{n-1}\delta_i\delta_i' f_2\overline{g_2}, \end{aligned}$$

pour

$$F = (f(x), f_1, f_2), G = (g(x), g_1, g_2) \in H.$$

Par commodité, nous utiliserons les notations :

$$\begin{aligned} R(u) &= \beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b), \\ R'(u) &= \beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b), \\ T(u) &= u'(c_n - 0) - u'(c_n + 0), \\ T'(u) &= u(c_n - 0). \end{aligned}$$

Dans l'espace de Hilbert H, considérons l'opérateur A avec le domaine de définition

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{c} F = (f(x), f_1, f_2) : \text{ où } f \text{ et } f' \text{ sont absolument continues dans} \\ \bigcup_{i=1}^{n-1} [a, c_1[\cup]c_i, c_{i+1}[\cup]c_n, b], \text{ et ont des limites finies quand} \\ x \to c_i \pm 0, \left(i = \overline{1,n}\right), \tau f \in L_2[a,b], f_1 = R'(f), f_2 = T'(f), \\ L_1 = 0, L_5 = 0, L_{3i} = 0, L_{4i} = 0 : \left(i = \overline{1, n-1}\right). \end{array} \right\}$$

$$AF = (\tau f, -R(f), T(f)).$$

On peut maintenant réécrire le problème considéré (2.32)-(2.38) sous forme opératorielle comme

$$AF = \lambda F,$$

où

$$F = (f(x), R'(f), T'(f)) \in D(A).$$

Les valeurs propres et les fonctions propres du problème (2.32)-(2.38) sont définis comme les valeurs propres et les premières composantes des vecteurs propres correspondants de l'opérateur A respectivement.

Théorème 2.5 *L'opérateur A est symétrique.*

Démonstration. *Soient $F, G \in D(A)$. Par deux intégrations partielles on obtient*

$$\begin{aligned}\langle AF, G\rangle &= \langle F, AG\rangle + W(f,\overline{g},c_1-0) - W(f,\overline{g},a) - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{i}\delta_j\delta_j'\right)W(f,\overline{g},c_i+0) \qquad (2.39)\\ &+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{i}\delta_j\delta_j'\right)W(f,\overline{g},c_i-0) - \left(\prod_{i=1}^{n-1}\delta_i\delta_i'\right)\sigma W(f,\overline{g},c_n+0)\\ &+\left(\prod_{i=1}^{n-1}\delta_i\delta_i'\right)\sigma W(f,\overline{g},b) + \frac{\prod_{i=1}^{n-1}\delta_i\delta_i'\sigma}{\rho}\left(R(\overline{g})R'(f) - R'(\overline{g})R(f)\right)\\ &+\prod_{i=1}^{n-1}\delta_i\delta_i'\left(T'(\overline{g})T(f) - T(\overline{g})T'(f)\right).\end{aligned}$$

Où, $W(f,g,x)$ le Wronskian des fonctions f et g :

$$W(f,g,x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

Comme f et $\overline{g}$ satisfont les conditions aux limites (2.33)-(2.34), et les conditions de transmission (2.35)-(2.38) on a

$$\begin{aligned} W(f,\overline{g},a) &= 0 \qquad (2.40)\\ W(f,\overline{g},c_1-0) &= \delta_1\delta_1' W(f,\overline{g},c_1+0)\\ \left(\prod_{j=1}^{i}\delta_j\delta_j'\right)W(f,\overline{g},c_i-0) &= \left(\prod_{j=1}^{i+1}\delta_j\delta_j'\right)W(f,\overline{g},c_i+0)\,;\, i=\overline{2,n-1}\\ R(\overline{g})R'(f) - R'(\overline{g})R(f) &= -\sigma W(f,\overline{g},b)\\ T'(\overline{g})T(f) - T(\overline{g})T'(f) &= \sigma W(f,\overline{g},c_n+0) - W(f,\overline{g},c_n-0).\end{aligned}$$

Substituant enfin (2.40) *dans* (2.39) *on obtient*

$$\langle AF, G\rangle = \langle F, AG\rangle \, ; F, G \in D\,(A)\,,$$

donc A et symétrique.

Corollaire 2.3 *Toutes les valeurs propres du problème* (2.32)-(2.38) *sont réelles.*

On peut supposer que toutes les fonctions propres du problème (2.32)-(2.38) ont des valeurs réelles.

2.2 Approximations asymptotiques des solutions fondamentales

Lemme 2.5 *Soit la fonction à valeur réelle $q\,(x)$ continue dans $[a, b]$ et $f\,(\lambda)\,, g\,(\lambda)$ des fonctions entières. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equation*

$$\tau u = -p\,(x)\, u'' + q\,(x)\, u = \lambda u; \quad x \in [a, b]\,,$$

a une solution unique $u\,(x, \lambda)$ satisfaisant les conditions initiales

$$u\,(a) = f\,(\lambda)\,, u'\,(a) = g\,(\lambda)$$

ou

$$u\,(b) = f\,(\lambda)\,, u'\,(b) = g\,(\lambda)\,.$$

Pour chaque $x \in [a, b]\,$, fixe, est une fonction entière de λ.

Considérons le problème aux valeurs initiales suivant

$$\tau u = -p\,(x)\, u'' + q\,(x)\, u = \lambda u; \quad x \in [a, c_1]$$

$$u\,(a) = \alpha_1, u'\,(a) = \alpha_2. \tag{2.41}$$

Ce problème a une solution unique $\Phi_1\,(x, \lambda)\,.$

Après avoir défini cette solution, nous pouvons définir les solutions $\Phi_{i+1}\,(x, \lambda)$ de l'équation (2.32) dans les intervalles $[c_i, c_{i+1}]$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$ avec les conditions initiales

$$u\,(c_i) = \delta_i^{-1}\Phi_{i+1}\,(c_i, \lambda)\,, u'\,(c_i) = \delta_i'^{-1}\Phi_{i+1}\,(c_i, \lambda)\,; \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{2.42}$$

Nous définirons la fonction $\Phi_{n+1}(x,\lambda)$ en utilisant $\Phi_n(x,\lambda)$.

Nous pouvons prouver que le problème aux valeurs initiales de type spécial suivant

$$\tau u = -p(x)u'' + q(x)u = \lambda u; x \in [c_n, b]$$

$$\begin{aligned} u(c_n) &= \sigma^{-1}\Phi_n(c_n,\lambda), \\ u'(c_n) &= \Phi'_n(c_n,\lambda) - \lambda\Phi_n(c_n,\lambda), \end{aligned} \tag{2.43}$$

a une solution unique $\Phi_{n+1}(x,\lambda)$.

Soit $\Psi_{n+1}(x,\lambda)$ la solution de l'équation (2.32) dans intervalle $[c_n, b]$, satisfaisant aux conditions initiales

$$u(b) = \beta_2 + \lambda\beta'_2, u'(b) = \beta_1 + \lambda\beta'_1. \tag{2.44}$$

Soit $\Psi_n(x,\lambda)$ la solution de l'équation (2.32) dans l'intervalle $[c_{n-1}, c_n]$, satisfaisant aux conditions initiales

$$u(c_n) = \sigma\Psi_{n+1}(c_n,\lambda), u'(c_n) = \Psi'_{n+1}(c_n,\lambda) - \lambda u(c_n). \tag{2.45}$$

Soient $\Psi_i(x,\lambda)$ les solutions de l'équation (2.32) dans les intervalles $[c_{i-1}, c_i], \left(i = \overline{1, n-1}\right)$, satisfaisant aux conditions initiales

$$u(c_i) = \delta_i\Psi_{i+1}(c_i,\lambda), u'(c_i) = \delta_i\Psi'_{i+1}(c_i,\lambda). \tag{2.46}$$

Considérons les Wronskiens

$$W_i(\lambda) = W(\Phi_i(x,\lambda), \Psi_i(x,\lambda)) = \Phi_i(x,\lambda).\Psi'_i(x,\lambda) - \Phi'_i(x,\lambda).\Psi_i(x,\lambda).; x \in \Omega_i, i = \overline{1, n}$$

qui sont indépendants en $x \in \Omega$, et sont des fonctions entières de λ, où

$$\Omega_1 = [a, c_1], \Omega_i = [c_i, c_{i+1}]; \left(i = \overline{1, n-1}\right), \Omega_n = [c_n, b].$$

Lemme 2.6 *On a l'égalité*

$$W(\lambda) = W_i(\lambda) = \prod_{j=1}^{i} \delta_j\delta'_j W_{i+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n+1} \delta_i\delta'_i\sigma W_{n+1}(\lambda); i = \overline{1, n-1}.$$

pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$.

En prenant en compte les équations (2.42), (2.43), (2.45) et (2.46), un simple calcul donne immédiatement.

$$W(\lambda) = W_i(\lambda) = \prod_{j=1}^{i-1} \delta_j \delta'_j W_{i+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \delta_i \delta'_i \sigma W_{n+1}(\lambda)\,; i = \overline{1, n-1}.$$

Lemme 2.7 *Les zéros des fonctions $W_i(\lambda)$ $i = \overline{1, n}$ coïncident.*

Construisons deux solutions de base de l'équation (2.32), on a

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{cases} \Phi_1(x, \lambda)\,; & x \in [a, c_1[\\ \Phi_i(x, \lambda)\,; & x \in]c_i, c_{i+1}[\,, i = \overline{1, n-1} \\ \Phi_{n+1}(x, \lambda)\,; & x \in]c_n, b]\,. \end{cases}$$

$$\Psi(x, \lambda) = \begin{cases} \Psi_1(x, \lambda)\,; & x \in [a, c_1[\\ \Psi_i(x, \lambda)\,; & x \in]c_i, c_{i+1}[\,, i = \overline{1, n-1} \\ \Psi_{n+1}(x, \lambda)\,; & x \in]c_n, b]\,. \end{cases}$$

Notons $W(\lambda)$ le Wronskien des fonctions $\Phi(x, \lambda)$ et $\Psi(x, \lambda)$,

$$W(\lambda) = W(\Phi(x, \lambda), \Psi(x, \lambda))\,.$$

Théorème 2.6 *Les valeurs propres du problème* (2.32)-(2.38) *sont constitués des zéros de la fonction $W(\lambda)$.*

Démonstration. *Soit $W(\lambda_0) = 0$. Nous allons montrer que $\Psi(x, \lambda_0)$ est une fonction propre. par définition de cette solution, $\Psi(x, \lambda_0)$ satisfait la condition aux limites* (2.34)*. De plus, $W(\lambda_0) = 0$, les fonctions $\Phi_1(x, \lambda_0)$ et $\Psi_1(x, \lambda_0)$ sont linéairement dépendants, i.e.*

$$\Phi_1(x, \lambda_0) = k\Psi_1(x, \lambda_0)\,, x \in [a, c_1[\,,$$

pour $k \neq 0$.
Par conséquent, la fonction $\Psi(x, \lambda_0)$ satisfait aussi la condition aux limites (2.33)*.*
Rappelons que cette solution $\Psi(x, \lambda_0)$ satisfait les deux conditions de transmission (2.35)-(2.38)*, $\Psi(x, \lambda_0)$ est la fonction propre du problème* (2.32)-(2.38) *correspondant à la valeur propre λ_0. Maintenant, soit $u_0(x)$ la fonction propre correspondante à la valeur propre λ_0, avec $W(\lambda_0) \neq$*

0. *Alors la fonction* $u_0(x)$ *peut être représentée sous la forme*

$$u_0(x) = \begin{cases} d_1\Phi_1(x,\lambda_0) + d_2\Psi_1(x,\lambda_0); & x \in [a, c_1[, \\ d_{3i}\Phi_i(x,\lambda_0) + d_{4i}\Psi_i(x,\lambda_0); & x \in]c_i, c_{i+1}[, i = \overline{1, n-1}, \\ d_5\Phi_{n+1}(x,\lambda_0) + d_6\Psi_{n+1}(x,\lambda_0); & x \in]c_n, b], \end{cases}$$

où au moins une des constantes $d_1, d_2, d_5, d_6, d_{3i}, d_{4i}; \left(i = \overline{1, n-1}\right)$ *n'est pas nulle. L'application des conditions de transmission* (2.35) *et* (2.36) *à cette représentation de* $u_0(x)$,*nous donne*

$$u_0(x) = \begin{cases} (d_1 - d_{3i})\Phi_1(x,\lambda_0) + (d_2 - d_{4i})\Psi_1(x,\lambda_0) = 0, \\ (d_1 - d_{3i})\Phi_1'(x,\lambda_0) + (d_2 - d_{4i})\Psi_1'(x,\lambda_0) = 0. \end{cases}$$

En considérant ces égalités comme un système homogène d'équations linéaires des variables $d_1 - d_{3i}$ *et* $d_2 - d_{4i}$, *nous avons*

$$d_1 = d_{3i}, d_2 = d_{4i}, \left(i = \overline{1, n-1}\right).$$

Par application des conditions de transmission (2.37) *et* (2.38) *à cette représentation de* $u_0(x)$, *on a*

$$u_0(x) = \begin{cases} (d_{3i} - d_5)\Phi_3(x,\lambda_0) + (d_{4i} - d_6)\Psi_3(x,\lambda_0) = 0, \\ (d_{3i} - d_5)\Phi_3'(x,\lambda_0) + (d_{4i} - d_6)\Psi_3'(x,\lambda_0) = 0. \end{cases}$$

En considérant ces égalités comme un système homogène d'équations linéaires des variables $d_{3i} - d_5$ *et* $d_{4i} - d_6$ *on a*

$$d_{3i} = d_5, d_{4i} = d_6, \left(i = \overline{1, n-1}\right).$$

Donc

$$d_1 = d_5 = d_{3i}, d_2 = d_6 = d_{4i}, \left(i = \overline{1, n-1}\right)$$

Par conséquent la fonction propre $u_0(x)$ *est représentée sous la forme*

$$u_0(x) = d_1\Phi(x,\lambda_0) + d_2\Psi(x,\lambda_0), d_1^2 + d_2^2 \neq 0.$$

Maintenant, en appliquant les conditions aux limites (2.33) *et* (2.34) *à cette représentation, on a*

$$\begin{aligned} L_1(u_0(x)) &= d_2 W_1(\lambda_0) = 0, \\ L_2(u_0(x)) &= d_1 W_3(\lambda_0) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $d_2 = 0$ *et* $d_1 = 0$*. Ainsi on obtient la contradiction* $d_1 = d_5 = d_{3i} = d_2 = d_6 = d_{4i} = 0, \left(i = \overline{1, n-1}\right)$*, ce qui achève la preuve.*

Lemme 2.8 *Soit* $\lambda = s^2$*. Alors les équations intégrales suivantes sont valables pour* $k = 0$ *et* $k = 1$*.*

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) &= \alpha_2 \frac{d^k}{dx^k}\cos\left[sp_1(x-a)\right] - \frac{\alpha_1}{sp_1}\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[sp_1(x-a)\right] \\ &+ \frac{p_1}{s}\int_a^x \frac{d^k}{dx^k}\sin\left[sp_1(x-y)\right] q(y)\,\Phi_1(y,\lambda)\,dy, \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}\Phi_{i+1}(x,\lambda) &= \delta_i^{-1}\Phi_i(c_i,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[sp_{i+1}(x-a)\right] \\ &+ \frac{\delta_i'^{-1}}{sp_{i+1}}\Phi_i'(c_i,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[sp_{i+1}(x-c_i)\right] \\ &+ \frac{p_{i+1}}{s}\int_a^x \frac{d^k}{dx^k}\sin\left[sp_{i+1}(x-y)\right] q(y)\,\Phi_{i+1}(y,\lambda)\,dy; \left(i = \overline{1, n-1}\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}\Phi_{n+1}(x,\lambda) &= \sigma^{-1}\Phi_n(c_n,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[sp_{n+1}(x-a)\right] \\ &- \frac{1}{sp_{n+1}}\left[\Phi_n'(c_n,\lambda) - \Phi_n(c_n,\lambda)\right]\lambda\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[sp_{n+1}(x-c_n)\right] \\ &+ \frac{p_{n+1}}{s}\int_a^x \frac{d^k}{dx^k}\sin\left[sp_{n+1}(x-y)\right] q(y)\,\Phi_{n+1}(y,\lambda)\,dy; \end{aligned} \tag{2.49}$$

Démonstration. *Pour la preuve, il suffit de substituer* $s^2\Phi_i(y,\lambda) + p(y)\,\Phi_i''(y,\lambda)$ $\left(i = \overline{1, n+1}\right)$ *à la place de* $q(y)\,\Phi_i(y,\lambda)$ $\left(i = \overline{1, n+1}\right)$ *dans les termes intégraux de la formule (2.47), (2.48) et (2.49) respectivement et intégrer deux fois par parties.*

Pour la prochaine considération, nous supposons que $\delta_i p_i = \delta_i' p_{i+1}$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$.

Lemme 2.9 *Soit* $\lambda = s^2, \Im ms = t$*. Alors, les égalités asymptotiques suivantes sont valables pour* $|\lambda| \to \infty$ *:*

1) Pour $\alpha_2 \neq 0$*,*

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) = \alpha_2\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[sp_1(x-a)\right] + O\left(|s|^{k-1}e^{|t|p_1(x-a)}\right), \tag{2.50}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_{i+1}(x,\lambda) = \alpha_2 \prod_{j=1}^{i} \delta_j^{-1} \frac{d^k}{dx^k} \cos\left[s\left(\sum_{j=1}^{i} p_j (c_j - c_{j-1}) + p_{i+1}(x - c_i)\right)\right] + O\left(|s|^{k-1} e^{|t|\left(\sum_{j=1}^{i} p_j (c_j - c_{j-1}) + p_{i+1}(x - c_i)\right)}\right); \left(i = \overline{1, n-1}\right) \tag{2.51}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_{n+1}(x,\lambda) = -\frac{s}{p_{n+1}} \alpha_2 \prod_{i=1}^{n-1} \delta_i^{-1} \cos\left[s \sum_{i=1}^{n} p_i (c_i - c_{i-1})\right] \frac{d^k}{dx^k} \sin\left[s p_{n+1}(x - c_n)\right] + O\left(|s|^{k-1} e^{|t|\left(\sum_{i=1}^{n} p_i (c_i - c_{i-1}) + p_{n+1}(x - c_n)\right)}\right). \tag{2.52}$$

2) Pour $\alpha_2 = 0$,

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) = -\frac{\alpha_1}{s p_1} \frac{d^k}{dx^k} \sin\left[s p_1 (x - a)\right] + O\left(|s|^{k-2} e^{|t| p_1 (x-a)}\right) \tag{2.53}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_{i+1}(x,\lambda) = -\frac{\alpha_1}{s p_{i+1}} \prod_{j=1}^{i} \delta_j'^{-1} \frac{d^k}{dx^k} \sin\left[s\left(\sum_{j=1}^{i} p_j (c_j - c_{j-1}) + p_{i+1}(x - c_i)\right)\right] + O\left(|s|^{k-2} e^{|t|\left(\sum_{j=1}^{i} p_j (c_j - c_{j-1}) + p_{i+1}(x - c_i)\right)}\right); \left(i = \overline{1, n-1}\right) \tag{2.54}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_{n+1}(x,\lambda) = \frac{\alpha_1}{p_1 p_{n+1}} \prod_{j=1}^{i} \delta_j^{-1} \sin\left[s \sum_{i=1}^{n} p_i (c_i - c_{i-1})\right] \frac{d^k}{dx^k} \sin\left[s p_{n+1}(x - c_n)\right] + O\left(|s|^{k-1} e^{|t|\left(\sum_{i=1}^{n} p_i (c_i - c_{i-1}) + p_{n+1}(x - c_n)\right)}\right). \tag{2.55}$$

2.3 Formules asymptotiques pour les valeurs propres

Théorème 2.7 *Soit $\lambda = s^2, \Im m s = t$. Alors, les formules asymptotiques suivantes sont valables pour les valeurs propres du problème de transmission et aux limites (2.32)-(2.38).*
1) Si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\begin{cases} s_n' = \left(n - \frac{5}{2}\right) \frac{\pi}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i - c_{i-1})} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s_n'' = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{p_{n+1}(b-c_n)} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

2) Si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$\begin{cases} s_n' = (n-1) \frac{\pi}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i - c_{i-1})} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s_n'' = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{p_{n+1}(b-c_n)} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

3) Si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\begin{cases} s_n' = \left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i - c_{i-1})} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s_n'' = n \frac{\pi}{p_{n+1}(b-c_n)} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

4) Si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$\begin{cases} s_n' = (n-1) \frac{\pi}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i - c_{i-1})} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s_n'' = n \frac{\pi}{p_{n+1}(b-c_n)} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

2.4 Formules d'approximation asymptotique pour les fonctions propres

Théorème 2.8 *On a les formules asymptotiques suivantes pour les fonctions propres $\Phi(x, \lambda)$ du problème (2.32)-(2.38).*

1) Si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda') = \begin{cases} \alpha_2 \cos\left[\left(n-\frac{5}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in [a,c_1[\\ \alpha_2 \prod\limits_{j=1}^{i} \delta_j^{-1} \cos\left[\left(n-\frac{5}{2}\right)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in]c_i,c_{i+1}[\,,\left(i=\overline{1,n-1}\right) \\ O(1); & x \in]c_n,b]. \end{cases}$$

$$\Phi(x,\lambda'') = \begin{cases} \alpha_2 \cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right) & x \in [a,c_1[\\ \alpha_2 \prod\limits_{j=1}^{i} \delta_j^{-1} \cos\left[\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i)}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in]c_i,c_{i+1}[\,, \\ & \left(i=\overline{1,n-1}\right) \\ -\frac{\alpha_2}{p_{n+1}} \prod\limits_{i=1}^{n} \delta_j^{-1} \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)}{p_{n+1}(b-c_n)} \cos\left[\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right] \sin\left[\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)(x-c_n)}{b-c_n}\right] + O(1); & x \in]c_n,b]. \end{cases}$$

2) Si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda') = \begin{cases} -\frac{\alpha_1}{p_1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}{(n-1)\pi} \sin\left[(n-1)\frac{p_1(x-a)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x \in [a,c_1[\\ -\frac{\alpha_1}{p_1} \prod\limits_{j=1}^{i} \delta_j^{-1} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}{(n-1)\pi} \sin\left[(n-1)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x \in]c_i,c_{i+1}[\,, \\ & \left(i=\overline{1,n-1}\right) \\ O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in]c_n,b]. \end{cases}$$

$$\Phi(x,\lambda'') = \begin{cases} -\frac{\alpha_1}{p_1}\frac{p_{n+1}(b-c_n)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x \in [a,c_1[\\ -\frac{\alpha_1}{p_1} \prod\limits_{j=1}^{i} \delta_j^{-1} \frac{p_{n+1}(b-c_n)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x \in]c_i,c_{i+1}[\,, \\ & \left(i=\overline{1,n-1}\right) \\ \frac{\alpha_1}{p_1 p_{n+1}} \prod\limits_{i=1}^{n} \delta_j^{-1} \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right] \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x-c_n}{b-c_n}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x \in]c_n,b]. \end{cases}$$

3) Si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda') = \begin{cases} \alpha_2 \cos\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in[a,c_1[\\ \alpha_2 \prod\limits_{j=1}^{i}\delta_j^{-1}\cos\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in]c_i,c_{i+1}[,\ \left(i=\overline{1,n-1}\right) \\ O(1); & x\in]c_n,b]. \end{cases}$$

$$\Phi(x,\lambda'') = \begin{cases} \alpha_2 \cos\left[n\frac{p_1(x-a)}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in[a,c_1[\\ \alpha_2 \prod\limits_{j=1}^{i}\delta_j^{-1}\cos\left[n\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i)}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in]c_i,c_{i+1}[, \\ & \left(i=\overline{1,n-1}\right) \\ -\frac{\alpha_2}{p_1p_{n+1}}\prod\limits_{i=1}^{n-1}\delta_i^{-1}\frac{n\pi}{p_{n+1}(b-c_n)}\cos\left[n\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right]\sin\left[n\frac{x-c_n}{b-c_n}\right] + O(1); & x\in]c_n,b]. \end{cases}$$

4) Si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda') = \begin{cases} -\frac{\alpha_1}{p_1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}{(n-1)\pi}\sin\left[(n-1)\frac{p_1(x-a)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x\in[a,c_1[\\ -\frac{\alpha_1}{p_1}\prod\limits_{j=1}^{i}\delta_j^{-1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}{(n-1)\pi}\sin\left[(n-1)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(c_i-c_{i-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x\in]c_i,c_{i+1}[, \\ & \left(i=\overline{1,n-1}\right) \\ O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in]c_n,b]. \end{cases}$$

$$\Phi(x,\lambda'') = \begin{cases} -\frac{\alpha_1}{p_1}\frac{p_{n+1}(b-c_n)}{n\pi}\sin\left[n\frac{p_1(x-a)}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x\in[a,c_1[\\ -\frac{\alpha_1}{p_1}\prod\limits_{j=1}^{i}\delta_j^{-1}\frac{p_{n+1}(b-c_n)}{n\pi}\sin\left[n\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})}\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right); & x\in]c_i,c_{i+1}[, \\ & \left(i=\overline{1,n-1}\right) \\ \frac{\alpha_1}{p_1p_{n+1}}\prod\limits_{i=1}^{n}\delta_j^{-1}\sin\left[n\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ji}(c_j-c_{j-1})}{p_{n+1}(b-c_n)}\pi\right]\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x-c_n}{b-c_n}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right); & x\in]c_n,b]. \end{cases}$$

Chapitre 3

Estimations de Quelques Problèmes pour Équations Intégrales

Les inégalités intégrales qui fournissent des limites explicites sur les fonctions inconnues ont joué un rôle fondamental dans le développement de la théorie des équations différentielles et intégrales [21, 22], et peuvent être utilisés comme des outils pratiques dans l' étude de l'existence, de la borne, de l'unicité, de la stabilité et d'autres propriétés qualitatives des solutions d'équations différentielles et intégrales. Au fil des ans, de nombreuses inégalités de Gronwall-Bellman à retard non linéaires ont été discutées par plusieurs auteurs, qui les ont, soit reprouvées, soit généralisées de différentes manières (voir [3, 10, 15, 16]).

1 Préliminaires

Dans son étude de la borne des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre, Pachpatte [21] a établi l'inégalité intégrale non linéaire suivante.

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} f(s)w(u(s))ds, \tag{3.1}$$

où $a > 0$ est une constante. Remplacement t par une fonction $b(t)$ dans (3.1), Lipovan [16] a étudié l'inégalité de Gronwall-Bellman à retard :

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} f(s)w(u(s))ds + \int_{b(t_0)}^{b(t)} g(s)w(u(s))ds.$$

Ces inégalités ont été généralisées à plus d'une variable, voir par exemple [3, 5, 12, 13]. En 2005, Zhao et Meng [29] ont étudié la nouvelle inégalité intégrale à retard non linéaire suivante :

Lemme 3.1 *Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction croissante avec $\varphi(\infty) = \infty$. Let $\psi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction non décroissante et soit c une constante non négative. Let $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ non décroissant avec $\alpha(t) \geq t$ on $\mathbb{R}_+$. Si $u, f \in (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et*

$$\varphi(u(t)) \leq c + \int_{\alpha(x)}^{\infty} f(s)\psi(u(s))ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.2}$$

alors pour $0 \leq T \leq t < \infty$,

$$u(t) \leq \varphi^{-1}\left(G^{-1}\left[G(c) + \int_{\alpha(t)}^{\infty} f(s)ds\right]\right), \tag{3.3}$$

Où $G(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{\psi[\varphi^{-1}(s)]}, \quad z \geq z_0 > 0.$

Il a également établi le résultat principal suivant :

$$\varphi(u(t)) \leq c + \int_{\alpha(t)}^{\infty} [f(s)u(s)\psi(u(s)) + g(s)u(s)]\, ds. \tag{3.4}$$

Semblable à (3.4), en 2016, Hunng et Wang [8] ont établi de nouvelles inégalités intégrales à retard en deux variables indépendantes (Lemme 2.1 et 2.2). Cependant, dans certaines situations, il est souhaitable d'étudier certaines inégalités du type ci-dessus où une constante c est remplacée par une fonction $c(x)$ et le terme linéaire $g(s)u(t)$ en fonctions intégrales dans (3.4) est remplacé par le cas non linéaire $\Phi\,(u(t))\, w(u(x))$.
Dans ce travail, nos résultats concernent les inégalités intégrales impliquant une intégrale infinie pour les fonctions avec une telle fonction $f_j(x)$ terme en dehors des intégrales, ce qui nous donne une autre généralisation sous une forme différente dans le cas des variables $n-$indépendantes comme nous le verrons dans le lemme 3.3, le théorème 3.3 et le théorème 3.4 dans la section 3.
Motivé par les inégalités (3.2) et (3.4) de Zhao et Meng dans [29] et par les travaux de Hunng -Wang et Lipovan présentés dans [8, 17], notre objectif principal ici est d'établir des inégalités intégrales à retard non linéaires impliquant des intégrales infinies à plusieurs variables. Ainsi, dans ce travail, nous discutons des formes plus générales de l'inégalité intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(u(x)) \;\leq\; & c(x) + \sum_{j=1}^{n_1} f_j(x) \int_{\widetilde{\alpha_j}(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t)\Phi\,(u(t))\,dt \\ & + \sum_{k=1}^{n_2} g_k(x) \int_{\widetilde{\beta_k}(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t)\Phi\,(u(t))\,w(u(t))dt, \quad x,t \in \mathbb{R}_+^n, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $c(x) \geq 0$ est une fonction dans $C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$, $f_j(x)$ et $g_k(x)$ sont des fonctions continues non décroissantes pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$ et $\widetilde{\alpha}_j(x) = (\alpha_{j1}(x_1), \alpha_{j2}(x_2), \ldots, \alpha_{jn}(x_n)) \in \mathbb{R}_+^n$, $\widetilde{\beta}_k(x) = (\beta_{k1}(x_1), \beta_{k2}(x_2), \ldots, \beta_{kn}(x_n)) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $j = 1, 2, \ldots, n_1$ et $k = 1, 2, \ldots, n_2$, où $\varphi, \Phi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+\,)$.
De plus, nous montrons que certains résultats de [8, 16, 29] peuvent être déduits de nos résultats dans certains cas particuliers. Comme applications, motivés par les travaux en [8, 16], nous donnons **la borne** des solutions de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm à retard .

2 Inégalités intégrales à deux variables

Dans cette section, nous énonçons et prouvons quelques nouvelles inégalités intégrales à retard non linéaires de type Gronwall-Bellman, qui sont des généralisations supplémentaires pour certains résultats connus dans le cas de deux variables indépendantes. Dans toute la présente section, toutes les fonctions qui apparaissent dans les inégalités sont supposées être des valeurs réelles de deux variables indépendantes non négatives et continues.

Lemme 3.2 *Soit $c \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$, $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction non-décroissante avec $w(u) > 0$ sur $(0, \infty)$ et soit $a_j(x, y, s, t) \in C(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$ des fonctions non-décroissantes en (x, y) pour tout (s, t) fixés pour tout $j = 1, \dots, n_1$. Soit $\alpha_j, \beta_j \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction non-décroissante avec $\alpha_j(x) \geq x$,$\beta_j(y) \geq y$ sur $\mathbb{R}_+$ for $j = 1, 2, \dots, n_1$. Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction strictement croissante avec $lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Si $u \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$ et*

$$\varphi(u(x, y)) \leq c(x, y) + \sum_{j=1}^{n_1} \left(\int_{\alpha_j(x)}^{\infty} \int_{\beta_j(y)}^{\infty} a_j(x, , y, s, t) w(u(s, t)) ds dt \right), \tag{3.6}$$

alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $0 \leq x^* \leq x < \infty$ et $0 \leq y^* \leq y < \infty$, on a

$$u(x) \leq \varphi^{-1} \left(G^{-1} \left[G(c(x, y)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\alpha_j(x)}^{\infty} \int_{\beta_j(y)}^{\infty} a_j(x, , y, s, t) ds dt \right] \right). \tag{3.7}$$

où

$$G(z) = \int_c^z \frac{ds}{w(\varphi^{-1}(z(s)))}, \qquad c > 0, \quad z \in (0, +\infty), \tag{3.8}$$

et φ^{-1}, G^{-1} sont, respectivement, l'inverse de φ et G, à condition que $G(+\infty) = +\infty$, et les nombres réels $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}_+^2$, son choisis tels que $G(c(x, y)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\alpha_j(x)}^{\infty} \int_{\alpha_j(x)}^{\infty} a_j(x, , y, s, t) ds dt \in$ $Dom(G^{-1})$
et $G^{-1} \left[G(c(x, y)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\alpha_j(x)}^{\infty} \int_{\alpha_j(y)}^{\infty} a_j(x, , y, s, t) ds dt \right] \in Dom(\varphi^{-1})$ pour tout $(x, y) \in [x^*, \infty) \times$ $[y^*, \infty)$.

Remarque 2.1 *On peut considérer le lemme 3.2 comme une forme généralisée d'une inégalité de Gronwall-Bellman (3.1) avec argument avancé en deux variables indépendants et intégration infinie.*

Remarque 2.2 *Il est intéressant de noter que dans le cas particulier où $c(x) = c$ (positif constant), $n_1 = j = 1$ et $a_1(x, y, s, t) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ alors l'inégalité (3.6) se réduit à celle dans le travail de Zhao et Meng [29, Lemme 2.1].*

Remarque 2.3 *Puisque les preuves se ressemblent, nous donnons les détails pour le lemme 3.3, le théorème 3.2 et le théorème 3.4 seulement, les preuves du reste des inégalités peuvent être complétées en suivant les preuves des inégalités en variables n-indépendantes (voir section 3).*

Théorème 3.1 *Soit* $c \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$, $w_1, w_2 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *des fonctions non décroissantes avec* $w_1(u)$,
$w_1(u) > 0$ *sur* $(0, \infty)$ *et soit* $a_j(x, y, s, t)$ *et* $b_k(x, y, s, t) \in C(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$ *des fonctions non décroissantes dans* (x, y) *pour chaque* (s, t) *fixe et* $j = 1, 2, \ldots, n_1$, $k = 1, 2, \ldots, n_2$. *Soit* $\alpha_{ji}, \beta_{ki} \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *des fonctions non décroissantes avec* $\alpha_{ji}(x) \geq x$ *et* $\beta_{ki}(y) \geq y$ *on* $\mathbb{R}_+$ *pour* $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots, n_1$, $k = 1, 2, \ldots, n_2$ $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$. *Soit* $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *une fonction strictement croissante avec* $lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$. *Si* $u \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$ *et*

$$\begin{aligned}\varphi(u(x,y)) &\leq c(x,y) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\alpha_{j1}(x)}^{\infty} \int_{\alpha_{j2}(y)}^{\infty} a_j(x,y,s,t) w_1(u(s,t)) ds dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\beta_{k1}(x)}^{\infty} \int_{\beta_{k2}(y)}^{\infty} b_k(x,y,s,t) w_2(u(s,t)) ds dt, \end{aligned} \tag{3.9}$$

alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ *avec* $0 \leq \zeta_1 \leq x < \infty$ *et* $0 \leq \zeta_2 \leq y < \infty$.
(a) *Dans le cas* $w_2(u) \leq w_1(u)$, *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}_+^n$, *il existe* $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}_+^2$, *de sorte que pour tout* $0 \leq \zeta_1 \leq x < \infty$ *et* $0 \leq \zeta_2 \leq y < \infty$, *nous avons*

$$\begin{aligned}u(x) &\leq \varphi^{-1}\left(G_1^{-1}\left[G_1(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\alpha_{j1}(x)}^{\infty} \int_{\alpha_{j2}(y)}^{\infty} a_j(x,y,s,t) ds dt \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\beta_{k1}(x)}^{\infty} \int_{\beta_{k2}(y)}^{\infty} b_k(x,y,s,t) ds dt \right]\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

(b) *Dans le cas* $w_2(u) \geq w_1(u)$, *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}_+^n$, *il existe* $(\widetilde{\zeta}_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}_+^2$, *de sorte que pour tout* $0 \leq \widetilde{\zeta}_1 \leq x < \infty$ *et* $0 \leq \widetilde{\zeta}_2 \leq y < \infty$, *on a*

$$\begin{aligned}u(x) &\leq \varphi^{-1}\left(G_2^{-1}\left[G_2(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\alpha_{j1}(x)}^{\infty} \int_{\alpha_{j2}(y)}^{\infty} a_j(x,y,s,t) ds dt \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\beta_{k1}(x)}^{\infty} \int_{\beta_{k2}(y)}^{\infty} b_k(x,y,s,t) ds dt \right]\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Où

$$G_\tau(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{w_\tau(\varphi^{-1}(s))}, \qquad z \geq z_0 > 0, \quad (\tau = 1, 2), \tag{3.12}$$

et $\varphi^{-1}, G_\tau^{-1}$ *sont respectivement l'inverse de* φ *et* G_τ, *à condition que* $G_\tau(+\infty) = +\infty$, *et les*

nombres réels $\zeta_\tau, \widetilde{\zeta}_\tau \in \mathbb{R}_+$ *sont choisis de sorte que*
$G_\tau(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\alpha_{j1}(x)}^{\infty} \int_{\alpha_{j2}(y)}^{\infty} a_j(x,y,s,t)dsdt + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\beta_{k1}(x)}^{\infty} \int_{\beta_{k2}(y)}^{\infty} b_k(x,y,s,t)dsdt \in Dom(G_\tau^{-1})$
pour tout $x \in [\zeta_\tau, \infty)$ *et* $y \in [\widetilde{\zeta}_\tau, \infty)$ *pour* $(\tau = 1,2)$ *respectivement.*

De nombreux corollaires intéressants peuvent également être obtenus à partir des résultats ci-dessus

Corollaire 3.1 *(inégalité de Gronwall–Bellman à deux variables) Soit* $c(x,y) \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$, *et soit* $a(x,y,s,t)$ *et* $b(x,y,s,t) \in C(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$ *des fonctions non décroissantes en* x, y *pour chaque* s, t *fixé. Où* $\alpha_{ji}, \beta_{ki} \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *sont des fonctions non-décroissantes avec* $\alpha_{ji}(t_i) \geq t_i$ *et* $\beta_{ki}(t_i) \geq t_i$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *pour* $i = 1,2,$ $j = 1,2,\ldots,n_1$ *et* $k = 1,2,\ldots,n_2$. *Soient* p, q *des constantes positives* $(p > q \geq 0)$. *Si* $u \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} u(x,y)^p \;\leq\; & c(x,y) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\alpha_{j1}(x)}^{infime} \int_{\alpha_{j2}(y)}^{\infty} a_j(x,y,s,t)u^q(s,t)dsdt \\ & + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\beta_{k1}(x)}^{\infty} \int_{\beta_{k2}(y)}^{\infty} b_k(x,,y,s,t)u^q(s,t)dsdt, \end{aligned} \tag{3.13}$$

alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, *il existe* $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}_+^2$, *de sorte que pour tout* $0 \leq x^* \leq x < \infty$ *et* $0 \leq y^* \leq y < \infty$, *nous avons*

$$\begin{aligned} u(x,y) \;\leq\; & \Bigg(G^{-1} \Bigg[G(c(x,y)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{alpha_{j1}(x)}^{\infty} \int_{\alpha_{j2}(y)}^{\infty} a_j(x,y,s,t))dt \\ & + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\beta_{k1}(x)}^{\infty} \int_{\beta_{k2}(y)}^{\infty} b_k(x,y,s,t)dsdt \Bigg] \Bigg)^{1/p}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

avec

$$G(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{s^{q/p}}, \qquad z \geq z_0 > 0. \tag{3.15}$$

Où G^{-1} *est l'inverse de* G, *à condition que* $G(+\infty) = +\infty$, *et les nombres réels* $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}_+^2$ *sont choisis de sorte que* $G(c(x,y)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\alpha_{j1}(x)}^{\infty} \int_{\alpha_{j2}(y)}^{\infty} a_j(x,y,s,t))dt$
$+ \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\beta_{k1}(x)}^{\infty} \int_{\beta_{k2}(y)}^{\infty} b_k(x,y,s,t)dsdt \in Dom(G^{-1})$ *pour tout* $x \in [x^*, \infty)$ *et* $y \in [y^*, \infty)$.

Remarque 2.4 *Il est intéressant de noter que dans le cas particulier où* $n_1 = j = 1$ *et* $\beta_{j1}(x) = x \ (x \in \mathbb{R}_+)$ *alors l'inégalité donnée dans Corollaire 3.1 se réduit au résultat El-Owaidy [6] dans le cas d'intégration infinie.*

Remarque 2.5 *Le cas particulier* $(j = 1)$*lorsque* $c(x, y) = u_0$ *(constante positive),* $a_1(x, y, s, t) = g(s, t)$*,* $b_1(x, y, s, t) = h(s, t)$*, for all* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *alors l'inégalité (3.16) se réduit au théorème 2.2 dans [1] dans le cas d'une intégration infinie.*

3 Autres généralisations

Dans cette section, nous énonçons et prouvons quelques nouvelles inégalités intégrales non-linéaires retardées de type Gronwall-Bellman, qui sont des généralisations supplémentaires pour certains résultats connus dans le cas de n variables indépendantes, ces inégalités peuvent être utilisées dans l'analyse de divers problèmes de la théorie des équations différentielles non-linéaires retardées.

Dans toute la présente section, toutes les fonctions qui apparaissent dans les inégalités sont supposées être à valeurs réelles de $n-$variables non négatives et continues. Toutes les intégrales sont supposées exister sur leurs domaines de définitions. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $\widetilde{\infty} = (+\infty, +\infty, \ldots, +\infty)$, nous désignons

$$\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} dt = \int_{\alpha_{j1}(x_1)}^{+\infty} \int_{\alpha_{j2}(x_2)}^{+\infty} \cdots \int_{\alpha_{jn}(x_2)}^{+\infty} dt_n \cdots dt_1, \qquad j = 1, \ldots, n_1,$$

$$\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} dt = \int_{\beta_{k1}(x_1)}^{\infty} \int_{\beta_{k2}(x_2)}^{\infty} \cdots \int_{\beta_{kn}(x_2)}^{\infty} dt_n \cdots dt_1, \qquad k = 1, \ldots, n_2,$$

avec $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. Pour$x, t \in \mathbb{R}_+^n$, nous écrirons $x \leq t < \widetilde{\infty}$ chaque fois que $x_i \leq t_i < +\infty$, avec $i = 1, 2, \ldots, n$.

On note $D = D_1 D_2 \cdots D_n$, où $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On utilise la convention habituelle d'écriture $\sum_{s \in \Phi} u(s) = 0$ Si Φ est un ensemble vide. $\widetilde{\alpha_j}(x) = (\alpha_{j1}(x_1), \alpha_{j2}(x_2), \ldots, \alpha j_n(x_n)) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $j = 1, 2, \ldots, n_1$,
$\widetilde{\beta_k}(x) = (\beta_{k1}(x_1), \beta_{k2}(x_2), \ldots, \beta_{kn}(x_n)) \in \mathbb{R}_+^n$. pour $k = 1, 2, \ldots, n_2$.
Nos principaux résultats sont décrits comme suit.

Lemme 3.3 *Soit* $c \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$*, et soit* $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *soit une fonction non décroissante avec* $w(u) > 0$ *sur* $(0, \infty)$ *et soit* $a_j(x, t) \in C(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$ *des fonctions non décroissantes en* x *pour chaque* t *fixé et pour tout* $j = 1, 2, \ldots, n_1$ *. Soit* $\alpha_{ji} \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *des fonctions* *non décroissantes avec* $\alpha_{ji}(t_i) \geq t_i$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$ *et* $j = 1, 2, \ldots, n_1$. *Soit* $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *une fonction strictement croissante avec* $lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.*Si* $u \in C(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}_+)$

$$\varphi(u(x)) \leq c(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t) w(u(t)) dt, \qquad t \in \mathbb{R}^n, \tag{3.16}$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$, *alors il existe* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ *avec* $0 \leq x^* \leq x < \infty$, *nous avons*

$$u(x) \leq \varphi^{-1}\left(G^{-1}\left[G(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t) dt \right] \right). \tag{3.17}$$

Où

$$G(z) = \int_c^z \frac{ds}{w(\varphi^{-1}(s))}, \qquad c > 0, \quad z \in (0, +\infty), \tag{3.18}$$

et φ^{-1}, G^{-1} *sont respectivement l'inverse de* φ *et* G, *à condition que* $G(+\infty) = +\infty$, *et les nombres réels* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$, *sont choisis de sorte que* $G(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t) dt \in Dom(G^{-1})$ *et* $G^{-1}\left[G(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t) dt \right] \in Dom(\varphi^{-1})$ *pour tous les* $x \in [x^*, \infty)$.

Démonstration. ***1)*** *Si* $c(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n_+$, *Fixant arbitrairement* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+$ *avec* $0 \leq x^* \leq y \leq x < \widetilde{\infty}$, *nous définissons sur* $[y, \widetilde{\infty})$ *une fonction* $z(x)$ *par*

$$z(x) = c(y) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t) w(u(t)) dt, \tag{3.19}$$

alors $z(x)$ *est une fonction positive et non croissante dans chaque variable*$x_i \in [y_i, +\infty)$, *et*

$$u(x) \leq \varphi^{-1}(z(x)), \qquad x \in [y; \widetilde{\infty}). \tag{3.20}$$

nous savons que différencier (3.19) *et en utilisant* (3.20) *et la monotonie de* φ *et* w, *on en déduit que*

$$D_1 D_2 \cdots D_n z(x) = (-1)^n \sum_{j=1}^{n_1} a_j(y, \widetilde{\alpha}(x)) w(u(\widetilde{\alpha}_j(x))) \alpha'_{j1} \alpha'_{j2} \cdots \alpha'_{jn},$$

pour tout $j = 1, 2, \ldots, n_1$.

i) *Si n est pair et puisque $\alpha_{ji}(t_i) \geq t_i$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, n_1$, Nous avons $z(\widetilde{\alpha}_j(x)) \leq z(x)$, alors*

$$\begin{aligned} D_1D_2\cdots D_n z(x) &= -\sum_{j=1}^{n_1} a(y, \widetilde{\alpha}_j(x))w(u(\widetilde{\alpha}_j(x)))\alpha_{j1}^{'}\alpha_{j2}^{'}\cdots\alpha_{jn}^{'}, \\ &\geq -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x))w(\varphi^{-1}(z(\widetilde{\alpha}_j(x))))\alpha_{j1}^{'}\alpha_{j2}^{'}\cdots\alpha_{jn}^{'}, \\ &\geq -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x))w(\varphi^{-1}(z(x)))\alpha_{j1}^{'}\alpha_{j2}^{'}\cdots\alpha_{jn}^{'}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

pour tout $x \in [y, \widetilde{\infty})$ et $j = 1, 2, \ldots, n_1$. Depuis

$$w(\varphi^{-1}(z(x))) \geq w(\varphi^{-1}(z(\widetilde{\infty}))) = w(\varphi^{-1}(c(y))) > 0. \tag{3.22}$$

Utilisant (3.21) et (3.22), nous avons

$$\frac{D_1D_2\cdots D_n z(x)}{w(\varphi^{-1}(z(x)))} \geq -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x))\alpha_{j1}^{'}\alpha_{j2}^{'}\cdots\alpha_{jn}^{'}, \tag{3.23}$$

utilisant $[D_1D_2\cdots D_{n-1}z(x)] \times D_n z(x) < 0$ et $(\varphi^{-1})' \geq 0, w' \geq 0$ et (3.23), Nous avons

$$\begin{aligned} D_n\left(\frac{D_1D_2\cdots D_{n-1}z(x)}{w(\varphi^{-1}(z(x)))}\right) &\geq \frac{D_1D_2\cdots D_n z(x)}{w(\varphi^{-1}(z(x)))} \\ &\geq -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x))\alpha_{j1}^{'}\alpha_{j2}^{'}\cdots\alpha_{jn}^{'}, \end{aligned}$$

Fixant $x_1, x_{2,}, \ldots, x_{n-1}$, paramètre $x_n = t_n$ et intégrant (3.14) de x_n à ∞, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{D_1D_2\cdots D_{n-1}z(x)}{w(\varphi^{-1}(z(x)))} \quad &\geq \quad -\sum_{j=1}^{n_1}\left[\int_{\alpha_{jn}(x_n)}^{\infty} a(y, , \alpha_{j1}(x_1), \alpha_{j1}(x_2), \ldots, \alpha_{jn-1}(x_{n-1}), t_n)\right. \\ &\qquad \left. \times\alpha_{j1}^{'}(x_1)\alpha_{j2}^{'}(x_2)\cdots\alpha_{jn-1}^{'}(x_{n-1})dt_n\right] \end{aligned}$$

En utilisant la même méthode ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}&(-1)^{n-1}\frac{D_1 z(x)}{w(\varphi^{-1}(z(x)))}\\ \geq\ & -\sum_{j=1}^{n_1}\left(\int_{\alpha_{j2}(x_2)}^{\infty}\cdots\int_{\alpha_{jn}(x_n)}^{\infty} a(y,\alpha_{j1}(x_1),t_2,\ldots,t_{n-1},t_n)\alpha_{j1}'(x_1)dt_n\cdots dt_2\right).\end{aligned}$$

Comme n est pair, on a

$$\begin{aligned}&\frac{D_1 z(x)}{w(\varphi^{-1}(z(x)))}\\ \geq\ & -\sum_{j=1}^{n_1}\left(\int_{\alpha_{j2}(x_2)}^{\infty}\cdots\int_{\alpha_{jn}(x_n)}^{\infty} a(y,\alpha_{j1}(x_1),t_2,\ldots,t_{n-1},t_n)\alpha_{j1}'(x_1)dt_n\cdots dt_2\right),\end{aligned} \tag{3.24}$$

pour tous $x\in[y,\widetilde{\infty})$. En intégrant (3.24) de x_1 à $+\infty$, on obtient

$$G(z(+\infty,x_2,\ldots,x_n))-G(z(x))\geq-\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}}a_j(y,t)dt,$$

pour tous $x\in[y,\widetilde{\infty})$, ce qui implique que

$$G(z(x))\leq G(c(y))+\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}}a_j(y,t)dt,$$

Nous avons

$$z(y)\leq G^{-1}\left[G(c(y))+\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(y)}^{\widetilde{\infty}}a_j(y,t)dt\right], \tag{3.25}$$

pour tout nombre arbitraire $y\in\mathbb{R}_+^n$, avec $x^*\leq y$ et G est défini par (3.18). De (3.25) et (3.10) on obtient l'inégalité suivante

$$u(y)\leq\varphi^{-1}\left(G^{-1}\left[G(c(y))+\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(y)}^{\widetilde{\infty}}a_j(y,t)dt\right]\right).$$

Puisque y sont des nombres arbitraires avec $x^*\leq y$, on obtient le résultat (3.17).
ii)*Dans le cas où n est impair, en utilisant la même méthode en (i) avec n est impair, on obtient le résultat du lemme 3.3, nous omettons les détails ici.*
2) *If $c(x)\geq 0$, nous effectuons la procédure ci-dessus en (i) et (ii) avec $c(x)+\epsilon$ à la place de $c(x)$, où $\epsilon>0$ est une petite constante arbitraire, et passe ensuite à la limite comme $\epsilon\to 0$*

obtenir (3.17). Ceci achève la démonstration.

Remarque 3.1 *Sous la même hypothèse que dans le lemme précédent, et si*

$$u(x) \leq c(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t) w(\varphi^{-1} u(t)) dt, \qquad t \in \mathbb{R}^n, \tag{3.26}$$

où $c(x) \in C(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}_+)$, alors l'inégalité (3.17) est satisfaite. En fait, on peut observer que dans le cas particulier ($n = 2$ et $j = 1$) l'inégalité (3.26) se réduit aux principaux résultats dans [8, Lemme 2.1] sans la condition de monotonie sur $H(x,y)$.

Remarque 3.2 *On peut aussi considérer le lemme 3.3 comme une forme généralisée d'une inégalité de Gronwall (3.6) avec argument avancé à n-variables indépendants.*

Remarque 3.3 *Il est intéressant de noter que dans le cas particulier où $c(x) = c$ (constante positive), $n = 1, j = 1$ et $a_1(x,t) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ alors l'inégalité (3.16) se réduit au résultat de Zhao et Meng dans [29, Lemme 2.1].*

Théorème 3.2 *Soit $c \in C(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}_+)$, w_1, $w_2 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ des fonctions non décroissantes avec $w_1(u), w_1(u) > 0$ sur $(0, \infty)$ et soit $a_j(x,t)$et $b_k(x,t) \in C(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}_+)$ des fonctions non décroissantes en x pour chaque t fixé pour $j = 1, 2, \ldots, n_1$ et $k = 1, 2, \ldots, n_2$. Soit $\alpha_{ji}, \beta_{ki} \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ des fonctions non décroissantes avec $\alpha_i(t_i) \geq t_i$ et $\beta_i(t_i) \geq t_i$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n_1$ et $k = 1, 2, \ldots, n_2$. Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction strictement croissante avec $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$. Si $u \in C(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}_+)$ et*

$$\varphi(u(x)) \leq c(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha} j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t) w_1(u(t)) dt + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t) w_2(u(t)) dt, \tag{3.27}$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$ avec $0 \leq \zeta_1 \leq x < \infty$,
(a) *Dans le cas $w_2(u) \leq w_1(u)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$, il existe $\zeta_1 \in \mathbb{R}^n_+$, de sorte que pour tous $0 \leq \zeta_1 \leq x < \infty$, nous avons*

$$u(x) \leq \varphi^{-1} \left(G_1^{-1} \left[G_1(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_k(x,t) dt + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t) dt \right] \right). \tag{3.28}$$

(b) *Dans le cas $w_2(u) \geq w_1(u)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$, il existe $\zeta_2 \in \mathbb{R}^n_+$, de sorte que pour tous*

$0 \leq \zeta_2 \leq x < \infty$, *nous avons*

$$u(x) \leq \varphi^{-1}\left(G_2^{-1}\left[G_2(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t)dt + \sum_{k=1}^{n_2}\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t)dt\right]\right). \tag{3.29}$$

Où

$$G_\tau(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{w_\tau(\varphi^{-1}(s))}, \qquad z \geq z_0 > 0, \quad (\tau = 1,2), \tag{3.30}$$

et $\varphi^{-1}, G_\tau^{-1}$ *sont respectivement l'inverse de* φ *et* G_τ, *à condition que* $G_i(+\infty) = +\infty$, *et le les nombres reels* $\zeta_\tau \in \mathbb{R}_+^n$ *sont choisis de sorte que* $G_\tau(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t)dt + \sum_{k=1}^{n_2}\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t)dt \in Dom(G_\tau^{-1})$ *et*
$G_\tau^{-1}\left[G_\tau(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t)dt + \sum_{k=1}^{n_2}\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t)dt\right] \in Dom(\varphi^{-1})$ *pour tout* $x \in [\zeta_\tau, \infty)$ *pour* $(\tau = 1,2)$ *respectivement.*

Démonstration. *Si* $c(x) > 0$ *pour tous* $x \in \mathbb{R}_+^n$, *Fixant arbitrairement* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ *avec* $0 \leq \zeta_\tau \leq y \leq x < \infty$ $(\tau = 1,2)$, *nous définissons sur* $[y, \widetilde{\infty})$ *une fonction* $z(x)$ *par*

$$z(x) = c(y) + \sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t)w_1(u(t))dt + \sum_{k=1}^{n_2}\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t)w_2(u(t))dt, \tag{3.31}$$

alors $z(x)$ *est une fonction positive et non croissante en chaque variable* $x_i \in [y_i, \infty)$, *et*

$$u(x) \leq \varphi^{-1}(z(x)), \qquad x \in [y; \widetilde{\infty}). \tag{3.32}$$

Nous savons que différencier (3.31) et en utilisant (3.32) et la monotonie de φ *et* w, *on en déduit que*

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \cdots D_n z(x) \;&=\; (-1)^n \sum_{j=1}^{n_1} a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x)) w_1(u(\widetilde{\alpha}_j(x)))\alpha'_{j1}\alpha'_{j2}\cdots\alpha'_{jn} \\ &\quad + (-1)^n \sum_{k=1}^{n_2} b_k(y, \widetilde{\beta}_k(x)) w_2(u(\widetilde{\beta}_k(x)))\beta'_{k1}\beta'_{k2}\cdots\beta'_{kn}. \end{aligned}$$

dans le cas où n est pair, alors

$$\begin{aligned} D_1D_2\cdots D_nz(x) &\geq -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y,\widetilde{\alpha}_j(x))w_1(\varphi^{-1}(z(x)))\alpha_{j1}^{'}\alpha_{j2}^{'}\cdots\alpha_{jn}^{'} \\ &\quad -\sum_{k=1}^{n_2} b_k(y,\widetilde{\beta}_k(x))w_2(\varphi^{-1}(z(x)))\beta_{k1}^{'}\beta_{k2}^{'}\cdots\beta_{kn}^{'}. \end{aligned}$$

(a) *Quand $w_2(u) \leq w_1(u)$, on en déduit que*

$$\begin{aligned} D_1D_2\cdots D_nz(x) &\geq -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y,\widetilde{\alpha}_j(x))w_1(\varphi^{-1}(z(x)))\alpha_{j1}^{'}\alpha_{j2}^{'}\cdots\alpha_{jn}^{'} \\ &\quad -\sum_{k=1}^{n_2} b_k(y,\widetilde{\beta}_k(x))w_1(\varphi^{-1}(z(x)))\beta_{k1}^{'}\beta_{k2}^{'}\cdots\beta_{kn}^{'}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

por tout $x \in [y,\widetilde{\infty})$,

$$w_1(\varphi^{-1}(z(x))) \geq w_1(\varphi^{-1}(z(\widetilde{\infty}))) = w_1(\varphi^{-1}(c(y))) > 0. \tag{3.34}$$

Utilisant (3.33) et (3.34), Nous avons

$$\frac{D_1D_2\cdots D_nz(x)}{w_1(\varphi^{-1}(z(x)))} \geq -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y,\widetilde{\alpha}_j(x))\alpha_{j1}^{'}\alpha_{j2}^{'}\cdots\alpha_{jn}^{'} - \sum_{k=1}^{n_2} b_k(y,\widetilde{\beta}_k(x))\beta_{k1}^{'}\beta_{k2}^{'}\cdots\beta_{kn}^{'}.$$

En utilisant des procédures similaires à partir de (3.10) à (3.25) dans la preuve du lemme 3.3 (i) et (ii), nous pouvons obtenir la borne souhaitée de $u(x)$ dans (3.28). Par continuité, (3.28) vaut aussi pour le cas $c(x) \geq 0$.

Remarque 3.4 *Dans le cas particulier ($n = 1, j = 1$ et $k = 1$) lorsque $c(x) = u_0$ (constante positive), $a(x,t) = g(x)$, $b(x,t) = h(x)$, $\widetilde{\beta}(x) = x$, $\widetilde{\alpha}(x) = \alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ alors l'inégalité (3.16) se réduit au théorème 2.2 in [1] dans le cas d'intégration infinie.*

Théorème 3.3 *Soit les fonctions $u, c, a, b, w_1, w_1, \alpha_{ji}$ et β_{ki} soit défini comme dans le théorème 3.2. De plus, soit p, q des constantes non négatives ($p > q \geq 0$).*

(A$_1$) *Si $u \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$ et*

$$u(x)^p \leq c(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t) u^q(t) dt + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t) u^q(t) w_1(u(t)) dt, \tag{3.35}$$

alors pour tout $x, t \in \mathbb{R}_+^n$ *, il existe* $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ *, de sorte que pour tout* $0 \leq x^* \leq x < \infty$, *nous avons*

$$u(x) \leq \left(\Psi_1^{-1} \left[\Psi_1(p(x)) + \frac{p-q}{p} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t) dt \right] \right)^{p/(p-q)}. \tag{3.36}$$

Où

$$p(x) = c^{(p-q)/p}(x) + \frac{p-q}{p} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t) dt, \tag{3.37}$$

$$\Psi_1(\delta) = \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{ds}{w_1\left(s^{1/(p-q)}\right)}, \qquad \delta > \delta_0 > 0. \tag{3.38}$$

Ici Ψ_1^{-1} *est l'inverse de* Ψ_1, *à condition que* $\Psi_1(+\infty) = +\infty$, *et les nombres reels* $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ *sont choisis de sorte que* $\Psi_1(p(x)) + \frac{p-q}{p} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t) dt \in Dom(\Psi_1^{-1})$ *et pour tout* $x \in [x^*, \infty)$.

(A$_2$***)*** *Si* $u \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$ *et*

$$\begin{aligned} u^p(x) \quad &\leq \quad c(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t) u^q(t) w_1(u(t)) dt \\ &+ \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t) u^q(t) w_2(u(t)) dt, \end{aligned} \tag{3.39}$$

(i) *Dans le cas* $w_2(u) \leq w_1(u)$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^n$, *il existe* $\zeta_1 \in \mathbb{R}_+^n$, *de sorte que pour tout* $0 \leq \zeta_1 \leq x < \infty$, *avec on a*

$$u(x) \leq \left(\Psi_2^{-1} \left[\Psi_2 \left(c^{(p-q)/p}(x) \right) + e(x) \right] \right)^{1/(p-q)}. \tag{3.40}$$

(ii) *Dans le cas* $w_2(u) \geq w_1(u)$ *, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^n$ *, il existe* $\zeta_2 \in \mathbb{R}_+^n$ *, de sorte que pour tout* $0 \leq \zeta_2 \leq x < \infty$, *nous avons*

$$u(x) \leq \left(\Psi_1^{-1} \left[\Psi_1 \left(c^{(p-q)/p}(x) \right) + e(x) \right] \right) t^{1/(p-q)}. \tag{3.41}$$

Avec

$$e(x) = \frac{p-q}{p}\left[\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t)dt + \sum_{k=1}^{n_2}\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t)dt\right], \tag{3.42}$$

$$\Psi_\tau(\delta) = \int_{\delta_0}^{\delta}\frac{ds}{w_i\left(s^{1/(p-q)}\right)}, \qquad \tau=1,2. \tag{3.43}$$

Où Ψ_τ^{-1} *sont les inverses* Ψ_τ $(\tau = 1,2)$, *à condition que* $\Psi_\tau(+\infty) = +\infty$, *et les nombres réels* $\zeta_\tau \in \mathbb{R}_+^n$ *sont choisis de sorte que* $\left(\Psi_i\left(c^{(p-q)/p}(x)\right)+e(x)\right) \in Dom(\Psi_i^{-1})$ *pour tout* $x \in [\zeta_\tau, \infty)$ *for* $(\tau = 1,2)$ *respectivement.*

Démonstration. ***(A1)*** *Si* $c(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^n$, *Fixant arbitrairement* $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ *avec* $0 \le x^* \le y \le x < \infty$, *nous définissons sur* $[y,\widetilde{\infty})$ *une fonction* $z(x)$ *par*

$$\begin{aligned} z(x) &= c(y) + \sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t)u^q(t)dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_2}\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t)u^q(t)w_1(u(t))dt, \end{aligned} \tag{3.44}$$

alors $z(x)$ *est une fonction positive et non croissante dans chaque variable* $x_i \in [y_i,\infty)$, *et*

$$u(x) \le z(x)^{1/p}, \qquad x \in [y;\widetilde{\infty}). \tag{3.45}$$

nous savons que différencier (3.44) et en utilisant (3.45) et la monotonie de φ *et* w *et dans le cas où* n *est paire, alors on en déduit que*

$$\begin{aligned} D_1D_2\cdots D_n z(x) &= -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y,\widetilde{\alpha}_j(x))u^q(\widetilde{\alpha}_j(x))\alpha'_{j1}\alpha'_{j2}\cdots\alpha'_{jn} \\ &\quad -\sum_{k=1}^{n_2} b_k(y,\widetilde{\beta}_k(x))u^q(\widetilde{\beta}_k(x))w_1(u(\widetilde{\beta}_k(x)))\beta'_{k1}\beta'_{k2}\cdots\beta'_{kn}, \\ &\ge z^{q/p}(x)\left[-\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y,\widetilde{\alpha}_j(x))\alpha'_{j1}\alpha'_{j2}\cdots\alpha'_{jn}\right. \\ &\quad \left.\sum_{k=1}^{n_2} -b_k(y,\widetilde{\beta}_k(x))w_1(z^{1/p}(x))\beta'_{k1}\beta'_{k2}\cdots\beta'_{kn}\right], \end{aligned} \tag{3.46}$$

pour tout $x \in [y,\widetilde{\infty})$

$$z^{q/p}(x) \ge z^{q/p}(\widetilde{\infty}) = z^{q/p}(c(y)) > 0. \tag{3.47}$$

utilisant (3.46) et (3.47), on a

$$\frac{D_1 D_2 \cdots D_n z(x)}{z^{q/p}(x)} \geq -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x))\alpha'_{j1}\alpha'_{j2}\cdots\alpha'_{jn}$$
$$-\sum_{k=1}^{n_2} -b_k(y, \widetilde{\beta}_k(x))w_1(z^{1/p}(x))\beta'_{k1}\beta'_{k2}\cdots\beta'_{kn}.$$

utilisant des procédures similaires à celles du lemme 3.3 (i), on obtient

$$(-1)^{n-1}\ \frac{D_1 z(x)}{z^{p/q}(x)}$$
$$\geq -\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\alpha_{j2}(x_2)}^{\infty}\cdots\int_{\alpha_{jn-1}(x_{n-1})}^{\infty}\int_{\alpha_{jn}(x_n)}^{\infty} a_j(y, \alpha_{j1}(x_1), t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)\alpha'_{j1}(x_1)dt_n\cdots dt_2$$
$$-\sum_{k=1}^{n_2}\int_{\beta_{k2}(x_2)}^{\infty}\cdots\int_{\beta_{kn-1}(x_{n-1})}^{\infty}\int_{\beta_{kn}(x_n)}^{\infty} b_k(y, \beta_{k1}(x_1), t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)$$
$$\times w_1(z^{1/p}(\beta_{k1}(x_1), t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n))\beta'_{k1}(x_1)dt_n\cdots dt_2,$$

puisque n est paire, on obtient

$$(-1)^{n-1}\ \frac{D_1 z(x)}{z^{p/q}(x)}$$
$$\geq -\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\alpha_{j2}(x_2)}^{\infty}\cdots\int_{\alpha_{jn-1}(x_{n-1})}^{\infty}\int_{\alpha_{jn}(x_n)}^{\infty} a_j(y, \alpha_{j1}(x_1), t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)\alpha'_{j1}(x_1)dt_n\cdots dt_2$$
$$-\sum_{k=1}^{n_2}\int_{\beta_{k2}(x_2)}^{\infty}\cdots\int_{\beta_{kn-1}(x_{n-1})}^{\infty}\int_{\beta_{kn}(x_n)}^{\infty} b_k(y, \beta_{k1}(x_1), t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)$$
$$\times w_1(z^{1/p}(\beta_{k1}(x_1), t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n))\beta'_{k1}(x_1)dt_n\cdots dt_2, \tag{3.48}$$

pour tout $x \in [y, \widetilde{\infty})$.

En intégrant (3.48) de x_1 à $+\infty$, on obtient

$$\frac{p}{p-q}z^{(p-q)/p}(y) - \frac{p}{p-q}z^{(p-q)/p}(x) \geq -\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t)dt$$
$$-\sum_{k=1}^{n_2}\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t)w_1(z^{1/p}(t))dt,$$

pour tout $x \in [y, \widetilde{\infty})$*, nous avons*

$$\begin{aligned} z^{(p-q)/p}(x) &\leq c^{(p-q)/p}(y) + \frac{p-q}{p} \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t)dt \\ &+ \frac{p-q}{p} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t) w_1(z^{1/p}(t))dt. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Définissons $r_1(x)$ *comme* $r_1(x) = z^{(p-q)/p}(x)$*,(3.49) peut être réécrite comme*

$$r_1(x) \leq p(y) + \frac{p-q}{p} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t) w_1(r_1^{1/(p-q)}(t))dt, \tag{3.50}$$

où $p(y)$ *est défini par (3.37). On applique le lemme 3.3 à (3.50), on obtient*

$$r_1(x) \leq \Psi_1^{-1} \left[\Psi_1(p(y)) + \frac{p-q}{p} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t)dt \right].$$

De (3.49) et pour tout y *quelconque, on obtient*

$$z(y) \leq \Psi_1^{-1} \left[\Psi_1(p(y)) + \frac{p-q}{p} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(y)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t)dt \right]^{p/(p-q)}.$$

Puisque y *sont des nombres arbitraires* $x^* \leq y$*, la limite souhaitée pour* $u(x)$ *apparaît dans (3.36) directement. Par continuité, (3.36) est aussi satisfaite pour le cas* $c(x) \geq 0$ *et* n *est un nombre impair.*

(A2) *Si* $c(x) > 0$ *pour tous* $x \in \mathbb{R}_+^n$*, fixant arbitrairement* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ *avec* $0 \leq \zeta_1 \leq y \leq x < \infty$*, nous définissons sur* $[y, \widetilde{\infty})$ *une fonction* $z(x)$ *par*

$$\begin{aligned} z(x) &= c(y) + \sum_{j=1}^{n_1} \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t) u^q(t) w_1(u(t))dt \\ &+ \sum_{k=1}^{n_2} \int_{\widetilde{\beta}_k(y)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t) u^q(t) w_2(u(t))dt, \end{aligned} \tag{3.51}$$

alors $z(x)$ *est une fonction positive et non croissante en chaque variable* $x_i \in [y_i, \infty)$*, et*

$$u(x) \leq z(x)^{1/p}, \qquad x \in [y; \widetilde{\infty}). \tag{3.52}$$

nous savons que différencier (3.51) et en utilisant (3.52) et la monotonie de $z^{1/p}$ et w_τ, on en déduit que

$$\begin{aligned} D_1D_2\cdots D_n z(x) &= (-1)^n a(y,\widetilde{\alpha}(x))u^q(\widetilde{\alpha}(x))w_1(u(\widetilde{\alpha}(x)))\alpha^{'}_{j1}\alpha^{'}_{j2}\cdots\alpha^{'}_{jn} \\ &+(-1)^n\sum_{k=1}^{n_2} b_k(y,\widetilde{\beta}_k(x))u^q(\widetilde{\beta}_k(x))w_2(u(\widetilde{\beta}_k(x)))\beta^{'}_{k1}\beta^{'}_{k2}\cdots\beta^{'}_{kn}, \end{aligned}$$

(i) *Lorsque $w_2(u)\le w_1(u)$ et si n est pair, alors*

$$\begin{aligned} D_1D_2\cdots D_n z(x) &= -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y,\widetilde{\alpha}_j(x))u^q(\widetilde{\alpha}_j(x))w_1(u(\widetilde{\alpha}_j(x)))\alpha^{'}_{j1}\alpha^{'}_{j2}\cdots\alpha^{'}_{jn} \\ &-\sum_{k=1}^{n_2} b_k(y,\widetilde{\beta}_k(x))u^q(\widetilde{\beta}_k(x))w_2(u(\widetilde{\beta}_k(x)))\beta^{'}_{k1}\beta^{'}_{k2}\cdots\beta^{'}_{kn}, \\ &\ge z^{q/p}(x)\Bigg[-\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y,\widetilde{\alpha}_j(x))w_2(z^{1/p}(x))^{'}_{j1}\alpha^{'}_{j2}\cdots\alpha^{'}_{jn} \\ &-\sum_{k=1}^{n_2} b_k(y,\widetilde{\beta}_k(x))w_2(z^{1/p}(x))\beta^{'}_{k1}\beta^{'}_{k2}\cdots\beta^{'}_{kn}\Bigg], \end{aligned} \tag{3.53}$$

pour tout $x\in[y,\widetilde{\infty})$

$$z^{q/p}(x)\ge z^{q/p}(\widetilde{\infty}) = z^{q/p}(c(y))>0. \tag{3.54}$$

Utilisant (3.53) et (3.54), on a

$$\begin{aligned} \frac{D_1D_2\cdots D_n z(x)}{z^{q/p}(x)} &\ge -\sum_{j=1}^{n_1} a_j(y,\widetilde{\alpha}_j(x))w_2(z^{1/p}(x))^{'}_{j1}\alpha^{'}_{j2}\cdots\alpha^{'}_{jn} \\ &-\sum_{k=1}^{n_2} b_k(y,\widetilde{\beta}_k(x))w_2(z^{1/p}(x))\beta^{'}_{k1}\beta^{'}_{k2}\cdots\beta^{'}_{kn}, \end{aligned}$$

en utilisant des procédures similaires à celles du lemme 3.3, pour tout $x\in[y,\widetilde{\infty})$ on obtient

$$\begin{aligned} z^{(p-q)/p}(x) &\le c^{(p-q)/p}(y)+\frac{p-q}{p}\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t)w_2(z^{1/p}(t))dt \\ &+\frac{p-q}{p}\sum_{k=1}^{n_2}\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t)w_2(z^{1/p}(t))dt. \end{aligned} \tag{3.55}$$

on pose $r_1(x) = z^{(p-q)/p}(x)$,*(3.55) peut être réécrit comme*

$$\begin{aligned} r_1(x) \quad &\leq \quad c^{(p-q)/p}(y) + \frac{p-q}{p}\sum_{j=1}^{n_1}\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t)w_2(r_1^{1/(p-q)}(t))dt \\ &+\frac{p-q}{p}\sum_{k=1}^{n_2}\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(y,t)w_2(r_1^{1/(p-q)}(t))dt, \end{aligned} \tag{3.56}$$

Appliquant maintenant le théorème 3.2 à (3.56), et puisque y *sont des nombres arbitraires* $\zeta_1 \leq y$, *la limite souhaitée pour* $u(x)$ *apparaît dans (3.40) directement. Par continuité, (3.40) vaut aussi pour le cas* $c(x) \geq 0$.

Remarque 3.5 *Le théorème 3.3 se réduit à [17, théorème 2.2] dans le cas d'une variable (avec une limite d'intégration infinie) , lorsque* $b_k(x,t) = 0$, $w_1(t) = 1$, $j = 1$ *et* $n = 1$.

Théorème 3.4 *Soit les fonctions* $u, c, a, b, w, \widetilde{\alpha}_j$ *et* $\widetilde{\beta}_k$ $(j = 1, 2, \ldots, n_1,\ k = 1, 2, \ldots, n_2)$ *soit défini comme dans le théorème 3.3. De plus , Soit* $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *une fonction strictement croissante avec* $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$, *et* $\Phi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *une fonction non décroissante avec* $\Phi(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^n$. *Soient* $d_j(x)$ *et* $l_k(x)$ *des fonctions continues non décroissantes en tout* $x \in \mathbb{R}_+^n$. *Si* $u \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$ *et*

$$\begin{aligned} \varphi\left(u(x)\right) \quad &\leq \quad c(x) + \sum_{j=1}^{n_1} f_j(x)\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t)\Phi\left(u(t)\right)dt \\ &+\sum_{k=1}^{n_2} g_k(x)\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t)\Phi\left(u(t)\right)w(u(t))dt, \end{aligned} \tag{3.57}$$

alors pour tout $x, t \in \mathbb{R}_+^n$ *, il existe* $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ *, tel que pour tout* $0 \leq x^* \leq x < \infty$, *nous avons*

$$u(x) \leq \varphi^{-1}\left(G^{-1}\left[\Omega_1^{-1}\left(\Omega_1\left(\eta(x)\right) + \sum_{k=1}^{n_2} g_k(x)\int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t)dt\right)\right]\right). \tag{3.58}$$

Où

$$\eta(x) = G(c(x)) + \sum_{j=1}^{n_1} f_j(x)\int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t)dt, \tag{3.59}$$

$$G(\delta) = \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{ds}{\Phi(\varphi^{-1}(s))}, \qquad \delta > \delta_0 > 0, \tag{3.60}$$

$$\Omega_1(\delta) = \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{ds}{w\left(\varphi^{-1}(G^{-1}(s))\right)}, \qquad \delta > \delta_0 > 0. \tag{3.61}$$

Ici Ω_1^{-1} *est l'inverse de* Ω_1, *à condition que* $\Omega_1(+\infty) = +\infty$, *et les nombres réels* $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ *sont choisis de sorte que* $\Omega_1(\eta(x)) + \int_{\widetilde{\beta}(x)}^{\widetilde{\infty}} b(x,t)dt \in Dom(\Omega_1^{-1})$, $\Omega_1^{-1}\left(\Omega_1(\eta(x)) + \int_{\widetilde{\beta}(x)}^{\widetilde{\infty}} b(x,t)dt\right) \in Dom(G^{-1})$ *et* $G^{-1}\left[\Omega_1^{-1}\left(\Omega_1(\eta(x)) + \int_{\widetilde{\beta}(x)}^{\widetilde{\infty}} b(x,t)dt\right)\right] \in Dom(\varphi^{-1})$ *pour tout* $x \in [x^*, \infty)$.

Démonstration. *Si* $c(x) > 0$ *por tout* $x \in \mathbb{R}_+^n$, *Fixant arbitrairement* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ *avec* $0 \leq x^* \leq y \leq x < \infty$, *nous définissons sur* $[y, \widetilde{\infty})$ *une fonction* $z(x)$ *par*

$$z(x) = c(y) + \sum_{j=1}^{n_1} f_j(y) \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t)\Phi\left(u(t)\right)dt + \sum_{k=1}^{n_2} g_k(y) \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t)\Phi\left(u(t)\right)w(u(t))dt, \tag{3.62}$$

alors $z(x)$ *est une fonction positive et non croissante en chaque variable* $x_i \in [y_i, +\infty)$, *et*

$$u(x) \leq \varphi^{-1}(z(x)), \qquad x \in [y; \widetilde{\infty}). \tag{3.63}$$

Nous différencions (3.62) *et en utilisant* (3.63) *et la monotonie de* φ , ϕ *et* w, *on en déduit que*

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \cdots D_n z(x) &= (-1)^n \sum_{j=1}^{n_1} f_j(y) a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x)) \Phi(u(\widetilde{\alpha}_j(x))) \alpha'_{j1} \alpha'_{j2} \cdots \alpha'_{jn} \\ &\quad + (-1)^n \sum_{k=1}^{n_2} g_k(y) b_k(y, \widetilde{\beta}_k(x)) \Phi(u(\widetilde{\beta}_k(x))) w(u(\widetilde{\beta}_k(x))) \beta'_{k1} \beta'_{k2} \cdots \beta'_{kn}, \end{aligned}$$

dans le cas où n *est pair, et puisque* $\widetilde{\alpha}_j(x), \widetilde{\beta}_k(x) \geq x$ *pour tous* $j = 1, 2, \ldots, n_1$ *et* $j =$

$1, 2, \ldots, n_2$, *on a* $z(\widetilde{\alpha}_j(x)) \leq z(x)$ *et* $z(\widetilde{\beta}_k(x)) \leq z(x)$, *alors*

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \cdots D_n z(x) &= -\sum_{j=1}^{n_1} f_j(y) a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x)) \Phi(u(\widetilde{\alpha}_j(x))) \alpha'_{j1} \alpha'_{j2} \cdots \alpha'_{jn} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n_2} g_k(y) b_k(y, \widetilde{\beta}_k(x)) \Phi(u(\widetilde{\beta}_k(x))) w(u(\widetilde{\beta}_k(x))) \beta'_{k1} \beta'_{k2} \cdots \beta'_{kn}, \\ &\geq \Phi\left(\varphi^{-1}\left(z(x)\right)\right) \left[-\sum_{j=1}^{n_1} f_j(y) a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x)) \alpha'_{j1} \alpha'_{j2} \cdots \alpha'_{jn} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n_2} g_k(y) b_k(y, \widetilde{\beta}_k(x)) w(\varphi^{-1}\left(z(x)\right) \beta'_{k1} \beta'_{k2} \cdots \beta'_{kn} \right], \end{aligned} \tag{3.64}$$

pour tout $x \in [y, \widetilde{\infty})$ *et* $j = 1, 2, \ldots, n_1$ *et* $k = 1, 2, \ldots, n_2$

$$\Phi\left(\varphi^{-1}\left(z(x)\right)\right) \geq \Phi\left(\varphi^{-1}\left(z(\widetilde{\infty})\right)\right) = \Phi(c(y)) > 0. \tag{3.65}$$

Utilisant (3.64) et (3.65), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{D_1 D_2 \cdots D_n z(x)}{\Phi(\varphi^{-1}(x))} &\geq -\sum_{j=1}^{n_1} f_j(y) a_j(y, \widetilde{\alpha}_j(x)) \alpha'_{j1} \alpha'_{j2} \cdots \alpha'_{jn} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n_2} g_k(y) b_k(y, \widetilde{\beta}_k(x)) w(\varphi^{-1}(z(x))) \beta'_{k1} \beta'_{k2} \cdots \beta'_{kn}, \end{aligned}$$

en utilisant des procédures similaires à celles de la preuve du lemme 3.3, on obtient

$$\begin{aligned} G(c(y)) - G(z(x)) &\geq -\sum_{j=1}^{n_1} f_j(y) \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y, t) dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n_2} g_k(y) \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b(y, \widetilde{\beta}_k(x)) w(\varphi^{-1}\left(z(t)\right) dt, \end{aligned}$$

où G est défini dans (3.60), pour tout $x \in [y, \widetilde{\infty})$, on a

$$G(z(x)) \leq G(c(y)) + \sum_{j=1}^{n_1} f_j(y) \int_{\widetilde{\alpha}_j(y)}^{\widetilde{\infty}} a_j(y,t)dt \tag{3.66}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_2} g_k(y) \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b(y, \widetilde{\beta}_k(x)) w(\varphi^{-1}(z(t))dt. \tag{3.67}$$

On pose $r_1(x) = G(z(x))$,(3.67) peut être réécrit comme

$$r_1(x) \leq \eta(y) + \sum_{k=1}^{n_2} g_k(y) \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b(y, \widetilde{\beta}_k(x)) w(\varphi^{-1}(z(t))dt. \tag{3.68}$$

Où η est défini dans (3.59) . Appliquant maintenant le théorème 3.2 à (3.68), on a

$$z(y) \leq G^{-1}\left(\Omega_1^{-1}\left[\Omega_1(\eta(y)) + \int_{\widetilde{\beta}(y)}^{\widetilde{\infty}} b(y,t)dt\right]\right).$$

Puisque y sont des nombres arbitraires $x^* \leq y$, la limite souhaitée pour $u(x)$ apparaît dans (3.58) directement. Par continuité, (3.58) vaut aussi pour le cas $c(x) \geq 0$.

Remarque 3.6 *Sous la même hypothèse que dans le théorème précédent, on obtient facilement l'estimation de l'inégalité suivante*

$$\varphi(u(x)) \leq c(x) + \sum_{j=1}^{n_1} f_k(x) \int_{\widetilde{\alpha}_j(x)}^{\widetilde{\infty}} a_j(x,t)\Phi(u(t)) w_1(u(t))dt$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_2} g_k(x) \int_{\widetilde{\beta}_k(x)}^{\widetilde{\infty}} b_k(x,t)\Phi(u(t)) w_2(u(t))dt, \tag{3.69}$$

pour tout $x, t \in \mathbb{R}_+^n$. Les détails sont omis ici.

Remarque 3.7 *Comme on peut le voir, les résultats établis ci-dessus traitent principalement des inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman impliquant une intégrale infinie pour les fonctions à n variables indépendantes. Et ils sont différents des principaux résultats présentés dans [29]. Il est intéressant de noter que dans le cas particulier $n = 1(\mathbb{R}_+)$ et $j = k = 1$ lorsque $c(x_1, \ldots, x_n) = c$ (constante positive), et $a_1(x_1, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(x)$, $b_1(x_1, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = g(x)$ et $(\alpha_{j1}(x_1), \ldots, \alpha_{jn}(x_n)) = (\beta_{k1}(x_1), \ldots, \beta_{k1}(x_n)) = \alpha(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $\Phi(u) = u$ alors l'inégalité (3.57) se réduit au résultat principal de Zhao et Meng dans [29, Théorème 3.1] (Inégalité (3.4) dans le cas d'une variable) .*

Remarque 3.8 *Comme dans le corollaires 3.1, d'autres nouvelles inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman de une et deux variables peuvent être obtenues à partir des théorèmes3.3 et 3.4 en choisissant les fonctions appropriées pour φ,w et Φ. Les détails sont omis ici.*

4 Une application

Dans cette section, motivé par les travaux en [8, 13], nous donnons la bornitude des solutions de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm avec retard et la borne supérieure à l'infini

$$\begin{aligned} u^p(x,y) &= c(x,y)+\int_{\alpha_1(x)}^{\infty}\int_{\alpha_2(y)}^{\infty}K_1(x,y,s,t,u(s,t))dsdt \\ &\quad +\int_{\beta_1(x)}^{\infty}\int_{\beta_2(x)}^{\infty}K_2(x,y,s,t,u(s,t)dsdt. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Où $u(x,y),c(x,y)\in C(\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R})$, avec $\alpha_i,\beta_i\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ sont des fonctions non décroissantes telles que $\alpha_i(x)\geq x,\ \ \alpha_i(+\infty)=+\infty\ \ (\beta_i(x)\geq x,\ \ \beta_i(+\infty)=+\infty)$ et $K_i\in C(\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i=1,2$.

Proposition 3.1 *Supposons que $u(x,y)$ soit une solution de (3.70) et les fonctions $K_i\in C(\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, $i=1,2$ vérifient les conditions suivantes*

$$|K_1(x,y,s,t,u(s,t))| \leq f_1(x,y,s,t)\,|u(s,t)|^{\frac{p}{2}}, \tag{3.71}$$

$$|K_2(x,y,s,t,u(s,t))| \leq f_2(x,y,s,t)\,|u(s,t)|^{\frac{p}{2}}. \tag{3.72}$$

Où $f_i\in C(\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R}_+)$ $i=1,2$, sont des fonctions non décroissantes en x,y pour chaque s,t. Nous avons

$$\begin{aligned} |u(x,y)| &\leq \left\{\sqrt{|c(x,y)|}+\frac{1}{2}\int_{\alpha_1(x)}^{\infty}\int_{\alpha_2(y)}^{\infty}f_1(x,y,s,t)dsdt\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{2}\int_{\beta_1(x)}^{\infty}\int_{\beta_2(y)}^{\infty}f_2(x,y,s,t)dsdt\right\}^{\frac{2}{p}}, \end{aligned} \tag{3.73}$$

Démonstration. *Par les conditions (3.71) et (3.72) , de (3.70) on a*

$$\begin{aligned} |u(x,y)|^p &= |c(x,y)|+\int_{\alpha_1(x)}^{\infty}\int_{\alpha_2(y)}^{\infty}f_1(x,y,s,t)\ \ |u(s,t)|^{p/2}dsdt \\ &\quad +\int_{\beta_1(x)}^{\infty}\int_{\beta_2(x)}^{\infty}f_2(x,y,s,t)\,|u(s,t)|^{p/2}dsdt, \end{aligned} \tag{3.74}$$

une application appropriée du corollaire 3.1 (avec $q = \frac{p}{2}$) de (3.74) donne

$$\begin{aligned} |u(x,y)| &\le \left(G^{-1}\left[G(c(x,y)) + \int_{\alpha_1(x)}^{\infty}\int_{\alpha_2(y)}^{\infty} f_1(x,y,s,t)dsdt \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \int_{\beta_1(x)}^{\infty}\int_{\beta_2(y)}^{\infty} f_2(x,y,s,t)dsdt\right]\right)^{1/p}, \end{aligned} \tag{3.75}$$

avec

$$G(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{s^{1/2}} = 2\sqrt{z} - 2\sqrt{z_0}, \qquad z \ge z_0 > 0, \tag{3.76}$$

$$G^{-1}(z) = \left(\frac{z + 2\sqrt{z_0}}{2}\right)^2, \quad z \ge z_0 > 0. \tag{3.77}$$

De (3.75), (3.76) et (3.77) , on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} |u(x,y)| &\le \left\{\frac{G(c(x,y)) + \int_{\alpha_1(x)}^{\infty}\int_{\alpha_2(y)}^{\infty} f_1(x,y,s,t)dsdt}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int_{\beta_1(x)}^{\infty}\int_{\beta_2(y)}^{\infty} f_2(x,y,s,t)dsdt + 2\sqrt{z_0}}{2}\right\}^{\frac{2}{p}} \\ &\le \left\{\frac{2\sqrt{c(x,y)} - 2\sqrt{z_0} + \int_{\alpha_1(x)}^{\infty}\int_{\alpha_2(y)}^{\infty} f_1(x,y,s,t)dsdt}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int_{\beta_1(x)}^{\infty}\int_{\beta_2(y)}^{\infty} f_2(x,y,s,t)dsdt + 2\sqrt{z_0}}{2}\right\}^{\frac{2}{p}}, \end{aligned}$$

C'est l'estimation souhaitée (3.73).

Remarque 4.1 *En utilisant le théorème 3.3, nous pouvons obtenir une estimation des solutions de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm (3.70) dans $\mathbb{R}_+^n$.*

Conclusion générale et perspectives

Cette étude s'inscrit dans la démarche de ...

Bibliographie

[1] A. Abdeldaim. Nonlinear retarded integral inequalities of gronwall-bellman type and applications. *J. Maths. Inequalities*, 10 :285–299, 2016. 1, 61, 67

[2] P. A. Binding and P. J. Brown. Oscillation theory for indefinite strum-liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions. *Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect. A*, 127(6) :1123–1136, 1997. 2

[3] A. Boudeliou and H. Khellaf. On some delay nonlinear integral inequalities in two independent variables. *J. Inequal Appl*, 14 :292–313, 2015. 1, 56

[4] M. Demirici, Z. Akdogan, and O. SH. Mukhtarov. Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of one discontinuous boundary -value problem. *International Journal of Computational Cognition*, 2(3) :101–113, 2004. 1, 4, 21, 29

[5] S. S. Dragomir and Y. H. Kim. Some integral inequalities for functions of two variables. *Electron. J. Diff. Eqns*, 10 :1–13, 2003. 56

[6] H. El-Owaidy, A. Abdeldaim, and A. A. El-Deeb. On some new nonlinear retarded integral inequalities with iterated integrals and their applications in differential-integral equations. *Mathematical Sciences Letters journal*, 3 :157–164, 2014. 61

[7] C.T. Fulton. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. *Proc.Roy.Soc.Edin*, 77A :293–308, 1977. 1, 2

[8] J. Huang and W. S. Wang. Some volterra-fredholm type nonlinear inequalities involving four iterated infenite integral and application. *J. Maths. Inequalities*, 10 :1105–1118, 2016. 57, 65, 77

[9] M. Kadakal and O. Sh. Mukhtarov. Discontinuous sturm-liouville problems containing eigenparameter in the boundary conditions. *Acta Mathematica Sinica*, 22(5) :1519–1528, 2006. 1, 4, 21, 29

[10] H. Khellaf and M. Smakdj. Nonlinear delay integral inequalities for multi-variable functions. *Electron. J. Diff. Eqns*, 169 :1–14, 2011. 1, 14, 23, 56

[11] H. Khellaf, M. Smakdji, and M. Denche. Some new generalized nonlinear integral inequalities for functions of two independent variables. *int. Journal of Math analysis*, 7(40) :1961–1976, 2013. 1

[12] H. Khellaf, M. Smakdji, and M. Denche. Integral inequalities with time delay in two independent variables. *Electron. J. Diff. Eqns*, 117 :1–16, 2014. 1, 56

[13] Y.H. Kim. On some new integral inequalities for functions in one and two variables. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 21 :423–434, 2005. 56, 77

[14] M. Kobayashi. Eigenvalues of discontinuous sturm-liouville problems with symmetric potentials. *Computers. Math. Applic*, 18(4) :357–364, 1989. 2

[15] O. Lipovan. A retarded gronwall-like inequality and its applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 251 :389–401, 2000. 56

[16] O. Lipovan. A retarded integral inequality and its applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 285 :436–443, 2003. 56, 57

[17] O. Lipovan. Integral inequalities for retarded volterra equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 322 :349–358, 2006. 57, 73

[18] O. Sh. Mukhtarov, M. Kadakal, and F. S. Mukhtarov. Eigenvalues and normalized eigenfunctionsof discontinuous sturm-liouville problem with transmission conditions. *Reports of Mathematical Physics*, 54(1) :41–56, 2004. 1, 4, 21, 29

[19] O. Sh. Mukhtarov, M. Kadalak, and N. Altinsik. Asymptotic behaviour of eigenvalues for the discontinuous boundary-value problem with functional-transmission conditions. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics.*, 2002. 21

[20] O. Sh. Mukhtarov and S. Yakubov. Problems for ordinary differential equations with transmission conditions. *Applicable Analysis*, 81 :1033–1064, 2002. 2, 21

[21] B.G. Pachpatte. *Inequalities for differential and integral equations*. Academic Press, New York, 1998. 7, 56

[22] B.G. Pachpatte. Explicit bounds on certain integral inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 267 :48–61, 2002. 56

[23] M. Smakdji, M. Denche, and H. Khellaf. Estimation for bounded solutions of some nonlinear integral inequalities with delay in several variables. *Australian Journal of Mathematical analysis and Applications*, 19(2) :1–19, 2022. 2

[24] E.C. Titchmarsh. *Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I.* Oxford Univ. Press, London, 1962. 1

[25] J. Walter. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. *Math. Z.*, 133 :301–312, 1973. 1

[26] S. Yakubov. *Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators.* Longman Scientific Technical, New York, 1994. 1

[27] S. Yakubov and Y. Yakubov. Abel basis of root functions of regular boundary value problems. *Math. Nachr.*, 197 :157–187, 1999. 1

[28] S. Yakubov and Y. Yakubov. *Differential-Operator Equations, Ordinary and Partial Differential Equations.* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton,568, 2000. 1

[29] X. Zhao and F. Meng. On some advanced integral inequalities and their applications. *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 6 :1–8, 2005. 56, 57, 58, 65, 76

مـلـخـص

العمل الحالي مخصص من جهة لدراسة بعض مشاكل الإرسال ويتكون بشكل أساسي من دراسة بعض مسائل الارسال وهي مكونة أساسا من معادلة تفاضلية في مجال يحوي نقطة او عدة نقاط غير مستمرة عندها، مع وجود الوسيط الطيفي في المعادلة التفاضلية و موجود أيضا على الأقل في إحدى الشروط الابتدائية وإحدى شروط الارسال. لقد حصلنا على نتائج مهمة على السلوك المقارب للقيم الذاتية والاشعة الذاتية وحتى السلوك المقارب للناظيم التوابع الذاتية. ومن جهة أخرى، قدمنا بعض أنواع المتباينات التكاملية.

Résumé

Le présent travail est consacré, d’une part, à l'étude de quelques problèmes de transmission et consiste principalement à l’étude d’une équation différentielle dans un domaine qui contient un ou plusieurs points discontinuités, avec la présence du paramètre spectral dans l'équation différentielle et également dans au moins une des conditions initiales et l'une des conditions de transmissions. Nous avons obtenu des résultats importants sur le comportement asymptotique des valeurs propres et des vecteurs propres et même le comportement asymptotique de la norme de la fonction propre. D’autre part, nous avons présenté certaines inégalités du type intégrales.

Abstract

The present work is devoted on the one hand, to the study of some transmission problems and it consists mainly in the study a differential equation in a domain that contains one or more discontinuity points, with the presence of the spectral parameter in the differential equation and also in at least one of the initial conditions and one of the transmission conditions. We obtained important results on the asymptotic behavior of eigenvalues and eigenvectors and even the asymptotic behavior of the norm of the Eigen function. On the other hand, we present some inequalities of the integral type.