

## ÉTUDE THERMO-ELASTIQUE EN FLEXIONS DES PLAQUES EN MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES FGM.

MERDADI Slimane<sup>1</sup>, BELGHOUL Hakima<sup>2</sup>, BENYOUCEF.S<sup>1</sup>, TOUNSLA<sup>1</sup>, E.A. ADDA BEDIA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>USBA/FT/DGC&TP/LM&H, BP 89 Cité Ben M'hidi22000 S.B.A, Algérie, slimanem2016@gmail.com

<sup>2</sup>USBA/FT/DGM/LMPM, BP 89 Cité Ben M'hidi22000 S.B.A, Algérie.

### RÉSUMÉ

Des difficultés actuelles des structures en matériaux fonctionnellement gradués **FGM** est l'analyse de la distribution du champ de déplacement et des contraintes d'origine thermiques dans l'épaisseur. L'intérêt de cette étude est l'analyse du comportement thermo-élastique de la flexion des plaques en **FGM** (Functionally Graded Materials) en utilisant des théories de déplacement des plaques de troisième ordre, la théorie sinusoïdale et faire une étude comparative entre les différents modèles de la littérature. Dans cet article nous utilisant un type de plaque en **FGM** « Métal / Céramique / Métal » matériaux composites. On suppose que les propriétés matérielles et le coefficient de dilatation thermique de la plaque varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. On peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement thermo-élastique de la flexion des plaques **FGM**.

**Mots Clés:** *FGM, Matériaux composites, Comportement Thermo-élastique, Théorie de déplacement (TSDPT et SSDPT), Flexion.*

---

### NOMENCLATURE

#### Symboles :

$E_m$  module de Young de la face supérieure la couche 1

$E_c$  module de Young du centre couche 2 ( $h_2 \leq z \leq h_3$ ).

$V$  fraction volumique

$\Omega$  surface supérieure

$u, v, w$  déplacements de la surface moyenne et membrane

$\phi_x, \phi_y, \phi_z$ , rotations autour des axes  $x, y$  et  $z$

$f(z)$  fonction de cisaillement transverse

**CLPT** la théorie classique de plaque

**FSDPT** la théorie de premier ordre

**SSDPT** la théorie sinusoïdale

#### Indices / Exposants :

$n$  l'indice de fraction volumique

$k$  l'indice de fraction volumique

$\nu$  Le coefficient de Poisson

---

### 1. INTRODUCTION

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la nature qui les entoure, les scientifiques, se sont préférés sur les avantages que présentaient ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vint apparaître, dans les années 1980. Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Les matériaux fonctionnellement gradués **FGM**(Functionally Graded Materials), sont de type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types des matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [12]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les **FGMs** sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil et trouvent également des applications biomédicales [2].

L'analyse des contraintes thermiques des structures isotropes été étudié par plusieurs chercheurs. Des contributions importantes ont été faites par [8-4]. La plupart des recherches de domaine des structures composites ont été concerné avec le problème thermique. Une méthode analytique a été diriger par [10-11] pour étudier les déformations thermiques dans les stratifiés symétriques et antisymétriques.

Une plaque rectangulaire simplement appuyée homogène et isotrope soumise à la distribution de température était analysé à l'aide de la procédure de Rayleigh-Ritz. Les températures critiques pour les différents types de composites ont été comparées avec celle de la plaque d'aluminium en utilisant la formulation de l'énergie. Les problèmes statiques linéaires associés à l'analyse thermo-élastique des plaques stratifiées ont été largement étudiés [5-11] qui a tiré les équations régissant le déplacement transversal d'une plaque mince est étudié le problème de la flexion thermique des plaques anisotropes.

Plusieurs théories de premier ordre et d'ordre supérieur a été développés pour l'analyse des problèmes isothermes des plaques sandwichs, et étendues pour inclure les effets thermo-élastiques [6]et[12]. En fait, un facteur de correction de cisaillement est introduit dans toutes les précédentes théories du premier ordre.

Dans cet article, une théorie associée de cisaillement et déformation des plaques épaisses est développé pour l'analyse de la flexion thermo-élastique des plaques en **FGM**. Cette théorie est simplifiée par l'application des conditions aux limites de traction libres à la plaque. Les effets de déformations de cisaillement sont toutes inclus, des solutions exactes pour les plaques symétriques et non symétrique en **FGM** sont présentées. Les effets de champ de température sur les contraintes normales et les contraintes tangentielles de la plaque en **FGM** sont étudiés.

## 2. APPROCHE THEORIQUE

Prenons le cas d'une plaque en **FGM** composé de trois couches comme le montre la figure 1. Plusieurs hypothèses visant à simplifier la complexité du problème sont introduits. Ce sont: (\*) Les couches de surface de la plaque sont en matériaux à gradation évaluée ayant des propriétés matérielles variant suivant la direction z (épaisseurs). La couche de cœur est faite d'un matériau isotrope homogène.

(\*)La plaque est symétrique par rapport au plan médian z = 0.

(\*)La couche inférieure et supérieure de la plaque est totalement en métal et la couche centrale est une couche entièrement en céramique.

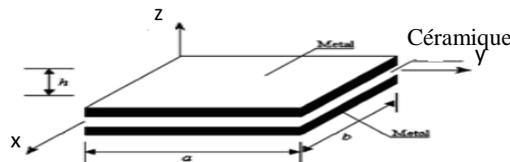


FIGURE 1. Les dimensions de la plaque rectangulaire **FGM**.

(\*) Les propriétés des matériaux efficaces pour les couches, comme le module de Young, coefficient de Poisson, et le coefficient de dilatation thermique, peut être exprimée comme :

$$E^{(n)}(z) = E_m + (E_c - E_m) V^{(n)} \tag{1}$$

Récemment, Chehel Amirani et al. [3] ont étudié la vibration libre de la poutre sandwich, et il est montré qu'il y a une différence négligeable entre les résultats obtenus par ces deux techniques. La fraction volumique dont cet article suppose transmettre à une fonction en loi de puissance le long de la direction de l'épaisseur:

$$v^{(1)} = \left( \frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (2a)$$

$$v^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (2b)$$

$$v^{(3)} = \left( \frac{z-h_4}{h_3-h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (2c)$$

### 3. CHAMP DU DEPLACEMENT ET LES EQUATIONS CONSTITUTIVES

Le champ du déplacement de la plaque **FGM** s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

$f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, (**CLPT**) est obtenue par en prenant  $f(z)=0$  et  $\phi_z=0$ , alors que (**FSDPT**) peut être obtenue par  $f(z)=z$  et  $\phi_z=0$ .

En outre, le champ de déplacement de (**TSDPT**) de Reddy [6] est obtenu par :

$$f(z) = z \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right], \quad \text{et } \phi_z = 0 \quad (4)$$

Dans cette étude le champ de déplacement de la théorie sinusoïdale (**SSDPT**) des plaques est obtenu par :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right), \quad \text{et } \phi_z = 0 \quad (5)$$

Dans le cadre des petites déformations le tenseur de déformations est obtenu par la dérivé du champ de déplacement [14] et s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x + f(z) \eta_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y + f(z) \eta_y \\ \varepsilon_z &= f''(z) \varepsilon_z^0 \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} + f(z) \eta_{xy} \\ \gamma_{yz} &= f'(z) \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz} &= f'(z) \gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (6)$$

### 4. ÉQUATIONS D'EQUILIBRE

Les équations d'équilibres sont obtenues en utilisant le principe de travail virtuel, qui peut être écrit comme suit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz = 0 \quad (7)$$

On peut obtenir l'équation d'équilibre associée à la théorie des déformations et de cisaillement présente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} &= 0 \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} - Q_{yz} &= 0 \\ Q_{xz,x} + Q_{yz,y} - N_{zz} &= 0 \end{aligned}$$

(8)

La résultante des contraintes d'une plaque composée de trois couches peuvent être liés aux couches totales par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^S \\ A & D & D^S \\ B^S & D^S & H^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \\ \eta \end{Bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{bmatrix} \varepsilon_z^0 - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \\ S^T \end{Bmatrix}, Q = A^S \gamma, N_{ZZ} = R^a \phi_z + L(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^a(k_x + k_y) + R(\eta_x + \eta_y) - N_{ZZ}^T \quad (9)$$

Les composantes du vecteur force généralisé sont donnée par :

$$f_1 = \frac{\partial N_x^T}{\partial x}, f_2 = \frac{\partial N_y^T}{\partial y}, f_3 = \frac{\partial^2 M_x^T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^T}{\partial y^2}, f_4 = \frac{\partial S_x^T}{\partial x}, f_5 = \frac{\partial S_y^T}{\partial y}, f_6 = N_z^T. \quad (10)$$

## 5. SOLUTION NUMERIQUE

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous sommes ici concernés avec la solution exacte des équations. pour une plaque **FGM** simplement appuyée. Navier a présenté la température transversale  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sous la forme d'une double série trigonométrique:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \quad (11)$$

Où  $\lambda = m\pi/a$  et  $\mu = n\pi/b$ . Pour le cas d'une charge distribuée sinusoïdalement, nous avons  $m=n=1$ . À la suite de la procédure de solution de Navier, nous supposons que la forme de solution pour la suite  $(u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z)$  satisfait les conditions aux limites,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ Y \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ Z \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

## 6. RESULTATS ET DISCUSSION

La plaque **FGM** est considérée comme étant en aluminium et d'alumine avec les propriétés des matériaux suivants:

- Métaux (aluminium, Al):  $E_m = 66.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ;
- Céramique (alumine,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ):  $E_c = 117.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  et  $E_0 = 1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,
- Le coefficient de Poisson égale  $\nu=0.3$  ; On prend le rapport:  $a/h=10$  ;  $\alpha_m=10.3 \times 10^{-6}/\text{K}$ ,  $\alpha_c=7.11 \times 10^{-6}/\text{K}$  et  $\alpha_0=10^{-6}/\text{K}$ .

Les différents paramètres sans dimensions sont :

$$\text{Déplacement : } w = \frac{h}{\alpha^2 \alpha_0 \bar{T}_2} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad (13)$$

$$\text{Contrainte axiale : } \sigma_{xx} = \frac{h^2}{\alpha^2 \alpha_0 \bar{T}_2 E_0} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right), \quad (14)$$

$$\text{Contrainte de cisaillement : } \tau_{xz} = \frac{10h}{\alpha_0 \bar{T}_2 E_0 a} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right), \quad (15)$$

- La plaque (a): La plaque est symétrique, deux couches d'épaisseur égale. Ainsi,  $h_1=h_2=0$ .
- La plaque (b): La plaque.sym, l'épaisseur de l'âme est la moitié de l'épaisseur de la face.  $h_1=-h/10$ ,  $h_2=h/10$ .
- La plaque (c): Dans ce cas, la plaque n'est pas symétrique. Ainsi,  $h_1=-h/10$ ,  $h_2=3h/10$ .

Dans le tableaux.1 en utilisant différentes théories des plaques. On reporte les valeurs de la flèche maximale adimensionnelle au centre de la plaque pour les différents types des plaques **FGM** . Le chargement thermique est supposé varier linéairement à travers l'épaisseur ( $T_3=0$ ).

<b>K</b>	<b>Théorie</b>	<b>La plaque (a)</b>	<b>La plaque (b)</b>	<b>La plaque (c)</b>
<b>0</b>	<b>FSDPT</b>	0.480262	0.480262	0.480262
	<b>TSDPT</b>	0.480262	0.480262	0.480262
	<b>SSDPT</b>	0.461634	0.461634	0.461634
<b>1</b>	<b>FSDPT</b>	0.636667	0.620792	0.592239
	<b>TSDPT</b>	0.636891	0.621067	0.592568
	<b>SSDPT</b>	0.614565	0.599933	0.573327
<b>2</b>	<b>FSDPT</b>	0.671339	0.655893	0.621215
	<b>TSDPT</b>	0.671486	0.656115	0.621544
	<b>SSDPT</b>	0.647135	0.633340	0.601843
<b>3</b>	<b>FSDPT</b>	0.683467	0.670077	0.633826
	<b>TSDPT</b>	0.683560	0.670253	0.634139
	<b>SSDPT</b>	0.658153	0.646475	0.614122
<b>4</b>	<b>FSDPT</b>	0.688734	0.677160	0.640607
	<b>TSDPT</b>	0.688795	0.677303	0.640905
	<b>SSDPT</b>	0.662811	0.652890	0.620540
<b>5</b>	<b>FSDPT</b>	0.691373	0.681207	0.644749
	<b>TSDPT</b>	0.691415	0.681327	0.645036
	<b>SSDPT</b>	0.665083	0.656635	0.586699

TABLEAU 1. L'effet de la flèche adimensionnelle pour différentes plaques en FGM ( $T_3=0$ ).

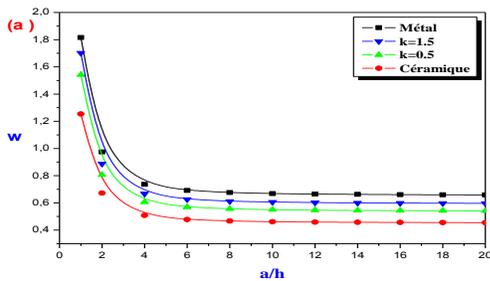


FIGURE 2. Influence de l'épaisseur ( $a/h$ ) plaque **FGM**.

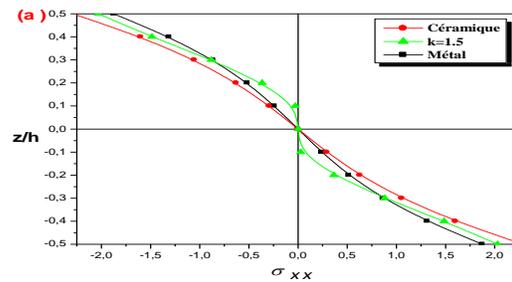


FIGURE 3. Variation de la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$ .

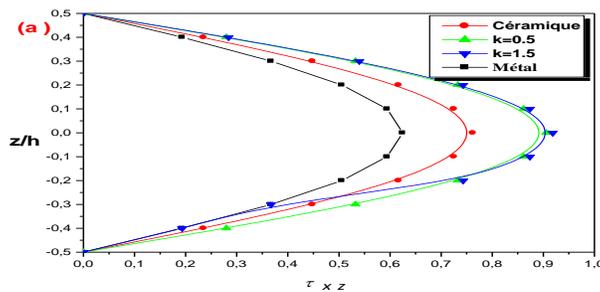


FIGURE 4. Variation de la contrainte de cisaillement pour différentes valeurs de  $k$  et différents plaques **FGM**.

La **Fig.2**, montre que la variation de déplacement diminue par rapport à l'épaisseur pour la plaque **FGM**. La diminution se situe entre celles des plaques en céramique ( $Al_2O_3$ ) et le métal (**Al**). On peut observer que la déflexion de la plaque **FGM** riche en métaux est plus grande par rapport à la plaque en céramique.

**Fig.3**, contient la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  à travers l'épaisseur de la plaque **FGM**. Les contraintes sont à la traction au-dessus du plan médian et à la compression en dessous du plan médian. Les résultats démontrent une non-linéarité de la variation de la contrainte axiale de l'épaisseur de la plaque en **FGM**. Il est important d'observer que la contrainte maximale dépend de la valeur de l'exposant de la fraction volumique **k**.

Dans la **Fig.4**, on a tracé les contraintes de cisaillement transversal  $\tau_{xz}$  à travers la distribution de l'épaisseur. La valeur maximale se produit à un point sur le plan médian de la plaque, et son portée pour une plaque **FGM** est plus grand que, pour une plaque homogène.

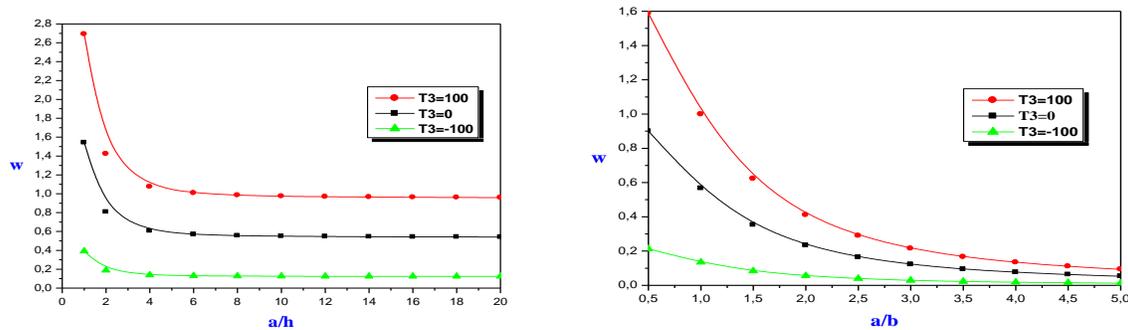


FIGURE 5. Le rapport de l'épaisseur (**a/h**) et de l'allongement (**a/b**) par rapport au déplacement de la plaque **FGM** pour (**k = 0,5**).

**Fig.5** montre les effets du rapport de l'épaisseur et de l'allongement sur la dimension centrale de déplacement pour la plaque **FGM** pour (**k = 0,5**) et qui soumis à un champ de distribution non uniforme de température. On le constate que l'effet de rapport d'épaisseur et d'allongement sont exprimés la variation de déplacement de la plaque sous la distribution uniforme de la température  $T_3 = 100$ ; et il est moins prononcé à la plaque non uniforme de température  $T_3 = -100$ . Mais quand  $T_3 = 0$ , le déplacement au centre de la plaque prend des valeurs intermédiaires entre non uniforme et uniforme de la plaque thermique.

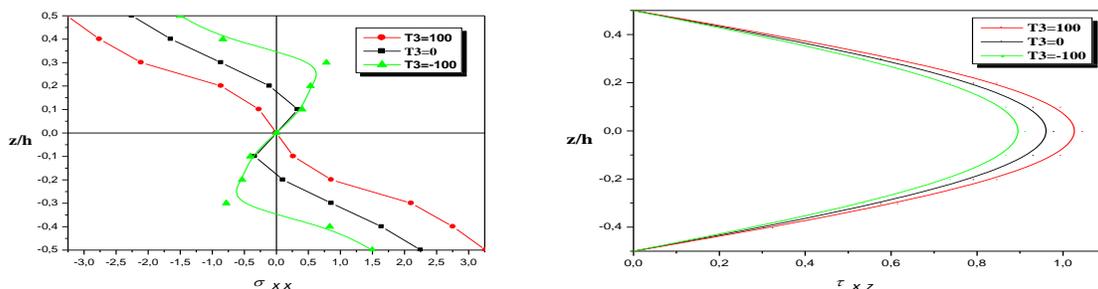


FIGURE 6. Distribution des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque **FGM** pour (**k = 1,5**).

la **Fig.6**, montre que la variation des contraintes est très sensible à la variation de la charge thermique  $T_3$ .

### 7. CONCLUSIONS

Dans cette étude, nous avons développé et proposé une solution générale du comportement thermo-élastique de la flexion des plaques en matériaux fonctionnellement gradués « **FGM** » en utilisant les différentes méthodes. La théorie présentée à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, et donne

une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.

Des solutions analytiques pour les plaques en **FGM** sont développées en utilisant la procédure de Navier. Les résultats du cisaillement et déformation sont comparés entre eux. Le présent **SSDPT**, offre des solutions précises et fiables pour l'analyse des plaques **FGM** en comparant avec les d'autres théories de déformation de cisaillement. On voit que les déviations des plaques qui correspondent aux propriétés intermédiaires à celle du métal et de céramique nécessairement situent entre celui de la céramique et le métal. La contrainte axiale est trouvé pour prendre la compression maximale à la {traction minimale} au sommet {inférieure} surface de la couche centrale. Cependant, la contrainte de cisaillement transversale se trouve à prendre la valeur maximale à un point sur le plan médian de la plaque **FGM**. Enfin, l'inclusion de la couche normale transversale augmente la contrainte de cisaillement et diminue à la fois de déflexion et l'effort axial.

## REFERENCES

- [1] Boley BA, Weiner JH (1997) Theory of thermal stresses.
- [2] Baron.C, S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [3] Chehel Amirani,M., Khalili, S.M.R., Nemati, N.: Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method. *Compos. Struct.* 90, 373–379 (2009).
- [4] Nowacki .W (1986) Thermoelasticity. Pergamon, London.
- [5] Pell.WH (1946) *Q Appl Math* 4:27.
- [6] Reddy. JN, Hsu YS (1980) *J Therm Stresses* 3:475.
- [7] Stavsky.Y (1963) *J Eng Mech Div Proc ASCE* 89:89.
- [8] Timoshenko SP, Woinowsky-Krieger S (1959) Theory of plates and shells. McGraw-Hill, New York.
- [9]. Tauchert TR (1980) *J Therm Stresses* 3:117.
- [10] Wu CH, Tauchert TR (1980) *J Therm Stresses* 3:247 and 3:365.
- [11] Zenkour AM, Fares ME (2000) *J Therm Stresses* 23:505.
- [12] Zhong.Z, T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.
- [13] S.Merdaci , A.Tounsi , M.S.A.Houari , I.Mechab .,H.Hebali ,S.Benyoucef : Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates *Journal of Springer-Verlag* 2010.
- [14] S.Merdaci, S.Benyoucef , A.Tounsi, E.A.A.Bedia. : Calcul des Déplacements et les Contraintes de Cisaillement pour les Plaques Sandwich à Gradient Variable « FGM » Séminaire National JM'08 2012 Ecole Militaire Polytechnique Huitièmes Journées de Mécanique 10-11 Avril 2012 , Bordj El Bahri.
- [15] Nemati, N.: Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method. *Compos. Struct.* 90, 373–379 (2009).
- [16] Sallai, B.O., Tounsi, A., Mechab, I., Bachir, B.M., Meradjah, M., Adda, E.A.: A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams. *Comput. Mater. Sci.* 44, 1344–1350 (2009).
- [17] Meradjah.M, Benyoucef.S, Tounsi.A ,E.A.Adda Bedia and Merdaci.S. Interfacial Stresses in Plated Beams with Exponentially-Varying Properties, *Journal of Adhesion Science and Technology* 0 (2010) 1–19.