

CONVECTION MIXTE DANS UNE CAVITE A PAROIS LATERALES MOBILES ET DONT UNE PARTIE DE LA PAROI INFERIEURE EST SOUMISE A UN FLUX DE CHALEUR FIXE

S. KACHI¹, S. BOUDEBOUS²

¹Faculté de Génie des Procédés, Département de Génie Chimique, Université de Constantine 3, 25000, kachi.sacia@gmail.com

²Faculté de Génie des Procédés, Département de Génie Chimique, Université de Constantine 3, 25000, s_boudebous@yahoo.fr

RÉSUMÉ

Dans la présente étude, nous nous intéressons à la simulation numérique de l'écoulement d'air en convection mixte laminaire, dans une cavité carrée, dont une partie du fond est soumise à un flux de chaleur constant. Les parois latérales de cette cavité se déplacent avec une vitesse fixée vers le haut, et sont soumises à une température froide. Les autres parties de cette cavité sont considérées adiabatiques. Un modèle mathématique reposant sur l'approche vorticité-fonction du courant ($\omega - \psi$), est utilisé. Les équations régissant ce phénomène ont été résolues par une approche numérique basée sur la méthode des différences finies, en considérant un maillage non uniforme.

Mots Clés : convection mixte, cavité carrée, méthode des différences finies, maillage non uniforme.

NOMENCLATURE

Symboles :

g	accélération de pesanteur, $m.s^{-2}$.
Gr	nombre de Grashof.
L	hauteur dimensionnelle de la cavité, m .
Nu	nombre de Nusselt local.
\overline{Nu}	nombre de Nusselt moyen.
p	pression, Pa .
p_0	pression de référence, Pa .
P	pression adimensionnelle.
Pr	nombre de Prandtl.
q''	densité de flux de chaleur, $W.m^{-2}$.
Re	nombre de Reynolds.
Ri	nombre de Richardson.
x, y	coordonnées d'espace dimensionnelles, m .
t	temps, s .
T	température, K .
T_F	température des parois latérale, K .
u, v	composantes des vitesses, $m.s^{-1}$.

U, V	composantes adimensionnelles des vitesses.
V_0	vitesse des parois latérale, $m.s^{-1}$.
x, y	coordonnées d'espace dimensionnelles, m .
X, Y	coordonnées d'espace adimensionnelles.

Lettres grecques :

ε	longueur adimensionnelle de la partie chauffée.
α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$.
β	coefficient d'expansion thermique à pression
θ	température adimensionnelle $\theta = (T - T_F)/\Delta T$.
ν	viscosité cinématique, $m^2.s$.
λ	conductivité thermique de l'air, $W.m^{-1}.K^{-1}$.
ψ	fonction de courant adimensionnelle.
ω	vorticité adimensionnelle.
τ	temps adimensionnel $\tau = t.V_0/L$.
ρ	masse volumique, $Kg.m^{-3}$.
ΔT	différence de température, $^{\circ}C$.

Indices/ Exposants :

F	froide.
-----	---------

1. INTRODUCTION

L'étude du mouvement d'un fluide en convection mixte dans les cavités est fréquemment rencontrée dans la nature et dans différents systèmes industriels. Ce mouvement résulte des interactions complexes au sein de ce milieu (fluide) ou entre différents milieux dès qu'il y a un gradient de température. Une grande variété d'écoulements de fluides, avec ou sans transfert de chaleur et de masse, sont régis par des systèmes d'équations différentielles non linéaires établis à partir des principes généraux de conservation de la physique. Ces systèmes d'équations non-linéaires contiennent de

nombreux paramètres qui sont susceptibles d'être la cause de nombreux phénomènes de changements du comportement de l'écoulement du fluide (bifurcation). De nombreuses études numériques et expérimentales concernant ce phénomène de changement de la nature même de l'écoulement dans différentes configurations géométriques en régime de convection naturelle, forcée ou mixte ont été rapportées dans la littérature. Les premiers modèles traitent du problème classique de la convection naturelle de Rayleigh-Bénard dans des espaces confinés et sont largement disponibles dans la littérature comme par exemple ceux d'Erenburg et al. [1], Venturi et al. [2] et Angelia et al. [3]. Dans les cavités l'interaction entre l'écoulement cisailé créée par le mouvement de la paroi et celui engendré par la convection naturelle reste jusqu'à présent un champ fondamental de la recherche. Aydin et Yang [4]; Guo et Sharif [5] ont présenté des études numériques de la convection mixte laminaire dans une cavité 2D dont la paroi supérieure est adiabatique et les parois verticales qui se déplacent vers le bas à une vitesse et une température froide constantes. Une source de chaleur est placée au centre de la paroi inférieure. Aydin et Yang [4] considèrent une température fixe, tandis que Guo et Sharif [5] imposent un flux de chaleur constant. L'effet de la longueur de la source de chaleur et le nombre de Richardson ont été étudiés. Dans ces deux cas, les effets des forces causées par la convection mixte de la partie chauffée et le déplacement des parois latérales de la cavité, étant coopératifs aucune rupture de la symétrie n'a été observée. Mais lorsque nous considérons le même problème que celui de Guo et Sharif [5], en inversant le sens du déplacement des parois latérales pour créer une compétition entre ces deux forces, nous constatons une perte de symétrie et un changement radical de l'écoulement à l'intérieur de la cavité.

2. MODELE MATHEMATIQUE

La géométrie du problème considéré est illustrée dans la figure 1. Il s'agit d'une cavité carrée remplie d'air dont les parois latérales sont maintenues à une température constante froide T_f et qui se déplacent vers le haut avec une vitesse fixée V_0 . Une source de chaleur est située au milieu de la paroi inférieure de la cavité ayant une longueur l égale au quatre cinquième de celle de la cavité L et soumise à un flux de chaleur constant q'' . Les autres parois sont supposées adiabatiques.

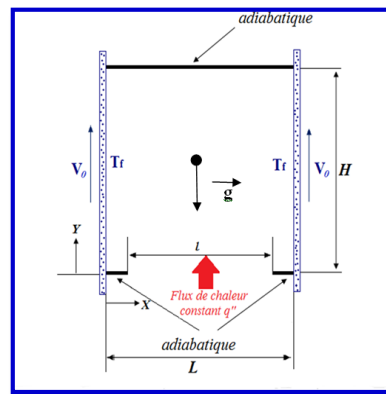


Figure 1. Domaine physique étudié

L'écoulement est bidimensionnel, laminaire et stationnaire, sans génération interne de chaleur. Les équations de conservation (continuité, énergie, vorticité, fonction de courant et composant de vitesse) sous forme adimensionnelle, bas es sur la formulation vorticité-fonction du courant ($\omega-\psi$), régissant le phénomène de la convection mixte sont données par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re.Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (4)$$

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \text{ et } V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (5)$$

Les variables réduites utilisées pour normaliser les équations gouvernantes sont :

$$X = \frac{x}{L}; Y = \frac{y}{L}; \tau = t \cdot \frac{V_0}{L}; U = \frac{u}{V_0}; V = \frac{v}{V_0}; \theta = \frac{T - T_f}{\Delta T} \text{ avec } \Delta T = q'' \cdot \frac{L}{\lambda}$$

Les paramètres de contrôle du problème Gr , Re , Pr et Ri dénotent, respectivement, les nombres de Grashof, de Reynolds, de Prandtl et de Richardson et sont définis par les relations suivantes :

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2}; Re = V_0 \cdot \frac{L}{\nu}; Pr = \frac{\nu}{\alpha}; Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

Les conditions aux limites associées aux équations de conservation sont :

Paroi supérieure : $U = V = 0$ pour: $0 < X < 1$; $Y = 0$ et $Y = 1$

Paroi gauche et droite : $\theta = 0$; $U = 0$ et $V = +1$ pour: $\begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \end{cases}$ et $0 < Y < 1$

Paroi inférieure : $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = -1$ et $U = V = 0$ pour: $\frac{1 - \varepsilon}{2} \leq X \leq \frac{1 + \varepsilon}{2}$ et $Y = 0$

$$\text{Et : } \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \text{ et } U = V = 0 \text{ pour: } \begin{cases} 0 < X < \frac{1 - \varepsilon}{2} \\ \frac{1 + \varepsilon}{2} < X < 1 \end{cases} \text{ et } Y = 0$$

Nombre de Nusselt moyen :

Le transfert de chaleur à partir de la paroi chaude est exprimé par le nombre de Nusselt moyen défini

comme suit : **Partie chauffante :** $\overline{Nu} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon Nu(X) dX$

$$Nu(X) : \text{ est le nombre de Nusselt local défini par : } Nu(X) = \frac{h \cdot L}{\lambda} = \frac{1}{\theta_w(X)}$$

L'intégrale donnant le nombre de Nusselt moyen a été déterminée numériquement par la méthode de Simpson.

3. PROCÉDURE NUMÉRIQUE

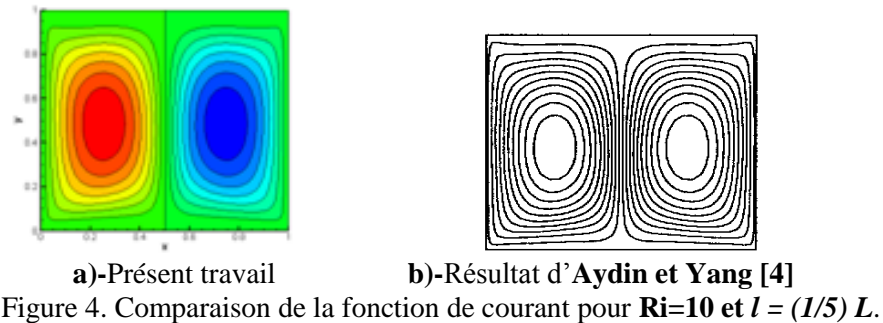
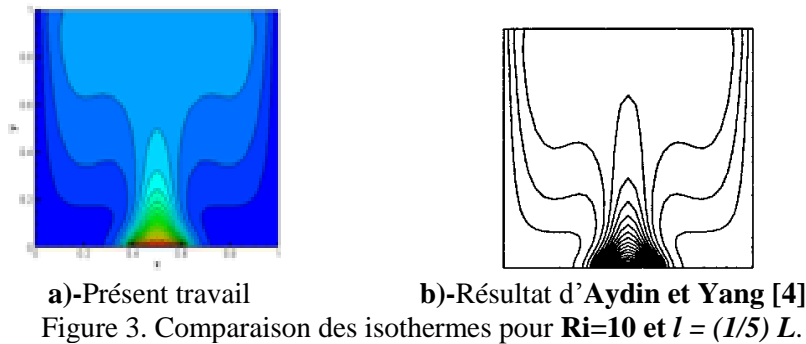
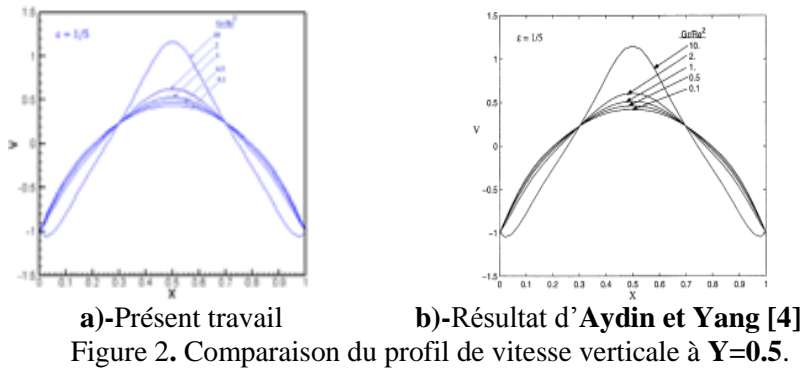
Afin de résoudre numériquement les équations gouvernantes (1-5) aux dérivées partielles, nous allons procéder à leurs discrétisations dans le but d'obtenir un système d'équations algébriques dont la résolution nous permet de déterminer les champs de toutes les variables du problème considéré. La méthode de différences finies a été adoptée pour accomplir cette discrétisation. La discrétisation du terme temporel est assurée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4). Les termes diffusifs, ainsi que les dérivées partielles du premier ordre (terme source de l'équation de la conservation de l'énergie et les vitesses), sont discrétisés en utilisant le schéma centré du 4ème ordre. Les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma Upwind du 3ème ordre [7]. L'équation de la fonction de courant est résolue par la méthode itérative de sur relaxation N.L.O.R. (Non Linear Over Relaxation), et sa convergence est obtenue à chaque pas du temps [8]. Nous avons opté pour un maillage non uniforme dans les deux directions, horizontal et vertical X et Y , ainsi que le langage FORTRAN a été élaboré comme un programme de calcul, pour un critère de convergence égale à 10^{-5} .

Choix du maillage :

Afin de rendre la solution numérique indépendante des valeurs des pas, nous avons procédé des différentes simulations, en comparant les valeurs du nombre de Nusselt moyen. Nous avons constatés un écart plus faible entre les valeurs du nombre de Nusselt moyen, déterminées avec un maillage de 81x81, 101x101, 161x161 et de 201x201. Ces comparaisons nous permettent le choix du maillage (101x101) car il fournit un bon compromis entre la durée du temps de calcul et la précision de ces calculs.

Validation du code de calcul :

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numériques obtenus dans le présent travail, une validation du code a été faite en prenant en compte certaines études numériques disponibles dans la littérature. Les résultats d'Aydin et Yang [4], obtenus dans le cas d'une cavité rectangulaire contenant de l'air, ont été utilisés pour tester notre code numérique.



4. RÉSULTATS

Toutes les simulations ont été réalisées en considérant l'air comme fluide, le nombre de Prandtl est fixé à 0.71 et le nombre de Reynolds à 100. La longueur adimensionnelle ϵ de la partie chauffée est égale à 0.8, avec un pas du temps adimensionnel fixé à 10^{-4} .

La bifurcation du régime de l'écoulement en convection mixte a été mise en évidence pour des nombres de Richardson égaux à 41.4 et 41.5.

Les résultats sont présentés sous formes de contours de température, de la fonction de courant et de l'évolution du nombre de Nusselt moyen.

Champs dynamiques :

Ces champs sont représentés sous forme d'iso-courants dans la figure 2 pour les deux valeurs du nombre de Richardson considérées. L'écoulement est constitué de deux cellules principales mais dissymétriques pour la valeur de 41.4 du nombre de Richardson. Une bifurcation vers un régime d'écoulement symétrique caractérisé par l'apparition brusque de quatre cellules principales est mise en évidence quand la valeur de ce même paramètre augmente juste de 0.1 ($Ri = 41.5$). Les deux cellules contrarotatives au centre de la cavité sont principalement entretenue par les forces de flottabilité par contre des deux autres cellules pincées situées près des parois verticales en mouvement sont entretenues par les forces de viscosité.

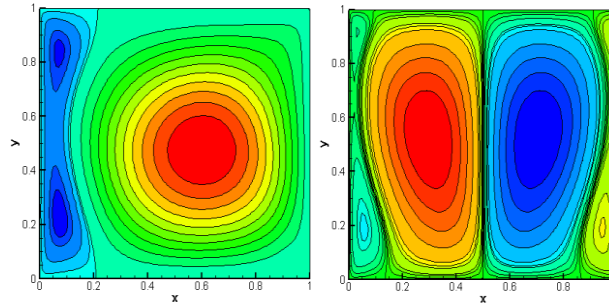


Figure 5. Champs dynamiques pour $Ri = 41.4$ à gauche et $Ri = 41.5$ à droite

Champs thermiques :

Ces champs sont représentés dans la figure 3 sous forme d'isothermes. La chaleur récupérée à partir de la partie chauffée de la cavité est transportée par convection essentiellement par la paroi droite de la cavité pour $Ri = 41.4$ alors que pour $Ri = 41.5$ celle-ci est évacuée symétriquement vers le haut au milieu de la cavité par la paire de cellules au centre. C'est ce qui explique les températures relativement élevées dans la partie centrale de la cavité.

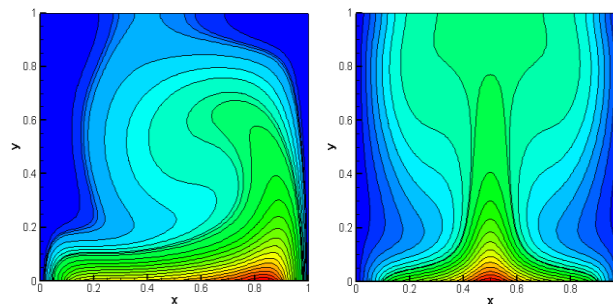


Figure 6. Champs thermiques pour $Ri = 41.4$ à gauche et $Ri = 41.5$ à droite

Nombre de Nusselt moyen :

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur la figure 4 (a) et (b). La valeur de ce nombre présente d'importantes fluctuations pendant un temps adimensionnel τ compris entre 0 et 15 (figure 4 (a)). Cette valeur diminue régulièrement, comme le montre la figure 4 (b), pour se stabiliser à une valeur fixe ($\overline{Nu} = 7.20$) pour $Ri = 41.5$, alors qu'elle présente une diminution brusque ($\overline{Nu} = 6.9645$) à $\tau = 48.7$ avant de se stabiliser ($\overline{Nu} = 7.41$) pour $Ri = 41.4$.

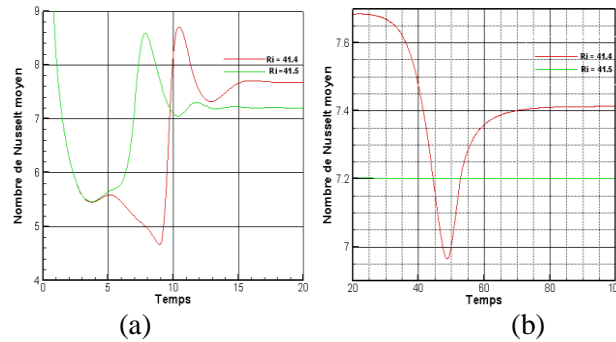


Figure 7. Evolution du nombre de Nusselt moyen : (a) $0 \leq \tau \leq 20$ et (b) $20 \leq \tau \leq 100$

5. CONCLUSIONS

La convection mixte dans une cavité carrée a été étudiée numériquement, tel que on a considéré l'écoulement laminaire et le transfert thermique d'air dus aux forces de flottabilité à l'intérieur de cette cavité bidimensionnelle avec le chauffage localisé à la paroi inférieure par le flux de chaleur constant et les parois latérales refroidies iso-thermiquement, alors que les autres parties sont considérées adiabatiques. Les résultats obtenus mettent en évidence l'existence du nombre de Richardson. Le passage de la première structure vers la deuxième se traduit d'une manière brusque pour une valeur bien déterminée de ce même nombre et conduit à une bifurcation d'un régime constitué de deux cellules à un autre constitué de quatre cellules.

REFERENCES

- [1] V. Erenburg, A. Yu. Gelfgat, E. Kit, P. Z. Bar-Yoseph and A. Solan, Multiple States, Stability and Bifurcations of Natural Convection in a Rectangular Cavity with Partially Heated Vertical Walls. *J. Fluid Mech.* Vol. 492, 63-89, 2003.
- [2] D. Venturi, X. Wan and G. Emkarniadakis, Stochastic Bifurcation Analysis of Rayleigh-Bénard Convection. *J. Fluid Mech.* Vol. 650, 391-413, 2010.
- [3] D. Angelia, A. Paganob, M. A. Corticellia, A. Ficherab, G. S. Barozzia, Bifurcations of Natural Convection Flows from an Enclosed Cylindrical Heat Source. *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, 2, 023003, 2011.
- [4] O. Aydin, and W.J Yang, Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 36, 695-710, 2000.
- [5] G. Guo, and M.A.R. Sharif, Mixed convection in rectangular cavities at various aspect ratios with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottom wall. *International Journal of Thermal Sciences* 43, 465-475, 2004.
- [6] T.S. Cheng, Characteristics of mixed convection heat transfer in a lid-driven square cavity with various Richardson and Prandtl numbers. *International Journal of Thermal Sciences*, 2010.
- [7] T. Kawamura, H. Takamiet K. Kuwahara. New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations, *Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics*, Vol. 218, 291-295, 1985.
- [8] B. Carnahan, H. A. Luther, and J. O. Wilkes. *Applied Numerical Methods*. Copyright by John Wiley & Sons. Inc, 1969.