

Analyse de la convection thermosolutale dans une cavité poreuse inclinée et anisotrope

Safia SAFI^{1*}, Smail BENISSAAD²

^{1,2}Laboratoire d'Énergétique Appliquée et de Pollution

¹ Département de Génie climatique, Faculté des Sciences de la Technologie. Université des Frères Mentouri – Constantine, Algérie

² Département de Génie mécanique, Faculté des Sciences de la Technologie. Université des Frères Mentouri – Constantine, Algérie

* auteur correspondant : s.safisafia@gmail.com

Résumé - Dans ce travail, le transfert combiné de chaleur et de masse par convection naturelle dans un milieu poreux incliné saturé par un fluide binaire a été étudié. Ce milieu est globalement homogène et anisotrope. Les parois verticales de la cavité sont soumises à des gradients de température et de concentration constants. Les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Les équations de base décrivant la convection thermosolutale au sein de l'enceinte sont résolues par la méthode des volumes finis. L'étude a porté sur les effets de l'anisotropie en perméabilité et l'angle d'inclinaison sur les structures d'écoulement ainsi que sur les transferts de chaleur et de masse. Les résultats numériques de cette étude sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature.

Mots Clés : convection thermosolutale ; milieu poreux anisotrope ; parois inclinée ; volumes finis.

Nomenclature

A	rapport de forme de la cavité, $A = L/H$	T	température adimensionnelle, $(T - T_0)/\Delta T$
C	concentration adimensionnelle, $(C - C_0)/\Delta C$	t^*	temps caractéristique, $t^* = \sigma H/U^*$
C_f	coefficient de Forchheimer	(U, V)	vitesse adimensionnelle dans les directions (X, Y) , $(u/U^*, v/V^*)$
Da	nombre de Darcy, $Da = K_y/H^2$	U^*	vitesse caractéristique, $U^* = a/H$
H	hauteur de la cavité, m	(X, Y)	coordonnées cartésiennes adimensionnelles du système, $(X, Y) = (x, y)/H$
g	accélération de la pesanteur, $m \cdot s^{-2}$	<i>Symboles Grecs</i>	
K_x	perméabilités selon la direction x	a	diffusivité thermique du fluide, $m^2 \cdot s^{-1}$
K_y	perméabilités selon la direction y	φ	porosité du milieu poreux
K	rapport des perméabilités, $\frac{K_x}{K_y}$, m^2	λ	rapport de conductivité thermique, $\lambda = \lambda_x/\lambda_y$, $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
\bar{K}	tenseur des perméabilités	α	angle d'inclinaison de la cavité
L	longueur de la cavité, m	ϑ	viscosité cinématique du fluide, $m^2 \cdot s^{-1}$
Le	nombre de Lewis, $Le = D/a$	ρ	densité du fluide, $kg \cdot m^{-3}$
N	rapport des forces de volumes, $N = \beta_C \Delta C / \beta_T \Delta T$	τ	temps adimensionnel, s
P	pression adimensionnelle, $P = p/P^*$		
P^*	pression caractéristique, $P^* = \rho_0 U^{*2}$		
Pr	nombre de Prandtl, $Pr = \vartheta/a$		
Ra	nombre de Rayleigh thermique, $Ra = g\beta_T \Delta T H^3 / \alpha \vartheta$		

1. Introduction

Le phénomène de transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux a intéressé beaucoup de chercheurs à cause de ses diverses applications telles que l'extraction de l'énergie géothermique, la récupération du pétrole, les échangeurs de chaleur et le stockage des produits d'agriculture.

Ce sujet occupe un large espace dans la littérature des dernières décennies, Nield et Bejan [1] pour les milieux poreux ; Mojtabi et Charrier-Mojtabi [2] et Mamou [3]. Les premières études sur la convection double-diffusive en milieu poreux sont principalement axées sur le problème de l'instabilité convective dans une couche horizontale. Taunton et al. [4] et Malashetty [5] ont utilisé l'analyse de la stabilité linéaire pour étudier le déclenchement de la convection thermosolutale. La convection naturelle en double diffusion dans une cavité poreuse a été étudiée par Bytas et al. [6]. La cavité est considérée partiellement poreuse avec des conditions de température et de concentration uniformes sur les parois latérales. Les transferts massiques et thermiques sont analysés pour différentes valeurs de l'épaisseur de la couche poreuse, du nombre de Rayleigh et de Darcy. Les résultats ont montré que l'épaisseur de la couche poreuse a un effet significatif sur les transferts massique et thermique. Amahmid et al. [7] ont utilisé le modèle de Brinkman pour étudier la convection naturelle thermosolutale induite dans une couche poreuse verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniformes. Il a été trouvé que le nombre de Rayleigh thermique critique augmente lorsque le nombre de Darcy augmente ou lorsque nombre de Lewis tend vers l'unité. De plus, il a été montré que l'augmentation du nombre de Darcy induit une diminution de l'intensité de l'écoulement et des transferts thermiques et massiques.

Une revue complète sur la convection naturelle dans les milieux poreux anisotropes est donnée dans le livre d'Ingham et Pop [8]. Bennacer et al. [9] dans une étude plus générale, ont considéré une cavité verticale soumise à des températures et des concentrations constantes sur les parois verticales. Ce milieu est globalement homogène et présente une anisotropie thermique. Les forces de volume induisant l'écoulement sont supposées coopérantes. Ils ont démontré que les propriétés anisotropiques du milieu poreux affectent considérablement les taux de transfert de la chaleur et de la masse dans la cavité uniforme. Safi et Benissaad [10] ont étudié l'influence de l'anisotropie en perméabilité et d'autres paramètres sur les transferts de chaleur et de masse. Les résultats obtenus ont montré que les nombres de Nusselt et de Sherwood croissent en augmentant l'anisotropie en perméabilité pour différents Nombre de Darcy. L'effet d'un gradient de température incliné par rapport à la verticale sur les instabilités dans un milieu poreux saturé anisotrope a été étudié par Parthiban et Patil [11]. Ils ont observé que le milieu poreux anisotrope horizontal est plus stable que le milieu isotrope vertical. La Convection naturelle dans une cavité carrée inclinée constituée d'un milieu poreux thermiquement anisotrope avec une source de chaleur interne se résument Au travail de Krishna et Basak [12]. La convection de non Darcy a été utilisée pour caractériser le comportement du fluide. L'analyse de l'anisotropie sur le transfert thermique et les structures de l'écoulement a été illustrée. Il a été démontré que les propriétés anisotropes ont une influence significative sur le comportement de l'écoulement et le transfert de chaleur.

Une étude numérique de la convection en double diffusion générée dans une cavité poreuse inclinée renfermant deux couches poreuses disposées verticalement, a été étudiée par Hadidi et al [13]. Chaque couche poreuse est considérée homogène, isotrope et saturée par le même fluide. Les résultats sont analysés en termes de lignes de courant, des isothermes, des isoconcentrations et des nombres de Nusselt et Sherwood moyens. Une analyse d'échelle est utilisée pour caractériser l'effet du taux de perméabilité sur le transfert de chaleur et de masse. Il a été trouvé que les solutions numériques des équations gouvernantes sont en bon accord avec les résultats de l'analyse d'échelle pour certaines conditions spécifiques. Les angles d'inclinaison Optimum sont déduits.

La Convection naturelle dans une cavité carrée inclinée constituée d'un milieu poreux thermiquement anisotrope avec une source de chaleur interne se résumant au travail de Jaya Krishna et Basak [14]. Le modèle de Darcy modifié a été utilisé pour caractériser le comportement du fluide. Il a été démontré que les propriétés anisotropes ont une influence significative sur le comportement de l'écoulement et le transfert de chaleur. Une corrélation pour la température maximale dans la cavité pour une large gamme de paramètres (Ra, Da, θ , K) est développée.

Une étude analytique plus récente a été menée par Barletta et Rees [15]. Une analyse plus détaillée est présentée concernant l'existence de la couche limite dans la pratique dans une surface verticale semi infini uniformément chaud intégré dans un milieu poreux saturé par un fluide. Ils ont utilisé le théorème de la couche limite rigoureuse avec un grand nombre de Darcy –Rayleigh et tenter de déterminer comment le fluide se comporte dans la région en dehors de la couche limite.

Le présent travail, objet de cet article, concerne la convection en double diffusion dans une cavité poreuse inclinée, homogène et anisotrope. Les parois verticales de l'ensemble du domaine sont soumises à des températures et de concentrations constantes. Alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Nous nous proposons à travers cette étude l'analyse des résultats numériques de la convection thermosolutale au sein de la cavité poreuse.

2. Formulation mathématique

Le modèle physique considéré consiste en une cavité horizontale contenant un milieu poreux saturé par un fluide binaire newtonien supposé incompressible (figure1). Elle est inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal. Les parois actives (verticales) sont soumises à des températures et des concentrations constantes et uniformes. Les parois horizontales sont supposées imperméables et adiabatiques. Dans ce cas une convection thermosolutale bidimensionnelle et laminaire s'établit dans l'enceinte poreuse. Le milieu poreux considéré dans le présent travail est homogène et anisotrope. La masse volumique est considérée constante (hypothèse de Boussinesq). En utilisant le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer, les équations adimensionnelles régissant ce problème sont :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi^2} \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Pr}{\varphi} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{Pr}{Da} \bar{K}^{-1} U - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \bar{K}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{U^2 + V^2} U + PrRa(T + NC) \sin \alpha \quad (2)$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi^2} \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Pr}{\varphi} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{Pr}{Da} V - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \sqrt{U^2 + V^2} V +$$

$$PrRa(T + NC) \cos \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \bar{\lambda}^{-1} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi} \left(U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \frac{1}{Le} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

Les équations précédentes sont soumises aux conditions initiales et aux limites adimensionnelles suivantes :

$$U = V = 0, T = 0 \text{ et } C = 0 \text{ pour } t = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial C}{\partial x} = 0, U = V = 0 \text{ pour } Y = 0, \forall X$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial C}{\partial x} = 0, U = V = 0 \text{ pour } Y = 1, \forall X$$

$$T = 1, C = 0, U = V = 0 \text{ pour } X = 0, \forall Y$$

$$T = 0, C = 1, U = V = 0 \text{ pour } X = 4, \forall Y$$

La mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernante a donnée naissance à un groupement adimensionnel tel que le nombre de Darcy (Da), le nombre de Prandtl (Pr), le nombre de Lewis (Le) ainsi que le nombre de Rayleigh (Ra).

Les anisotropies en perméabilité et conductivité thermique sont exprimées respectivement par les tenseurs adimensionnés du second ordre:

$$\bar{K}^{-1} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } K = \frac{K_x}{K_y} \text{ et } \lambda = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}$$

Les transferts de chaleur et de masse, sont exprimés par les nombres de Nusselt et de Sherwood définis respectivement, comme suit:

$$Nu = \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X=0} dY \quad (6)$$

$$Sh = \int_0^1 \left(\frac{\partial C}{\partial X} \right)_{X=0} dY \quad (7)$$

La résolution du système d'équations est faite en utilisant la procédure des volumes finis. La méthode proposée par Patankar [17] a été utilisée pour la discrétisation des termes convectifs et diffusifs. Le couplage pression-vitesse est assuré par l'algorithme SIMPLER. Un maillage raffiné de 132 × 68 nœuds, a été retenu. Le critère de convergence est basé sur l'erreur relative sur les variables dépendantes U, V, P, T, C ; une valeur de 10⁻⁴ s'est avérée suffisante dans le cas présent.

Le code de calcul est validé par rapport à plusieurs cas limites de la littérature [9-16], les résultats comparatifs sont résumés dans le tableau 1. Une très bonne concordance est à noter.

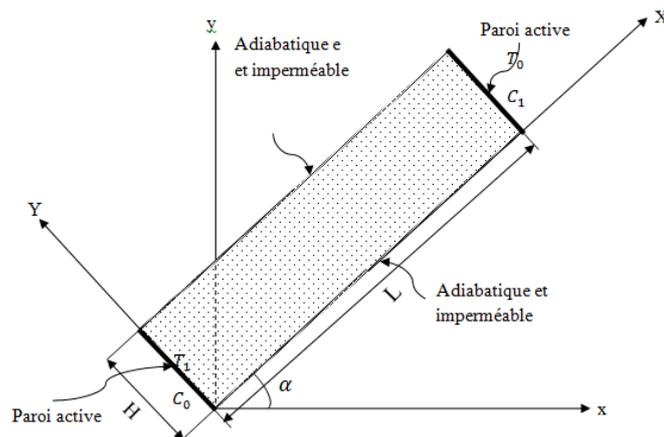


Figure 1 : modèle physique et système de coordonnées

 Tableau 1 : Comparaison du nombre de Nusselt pour différents taux d'anisotropie en perméabilité (K) pour : $Da=10^7$, $A=1$, $Ra=10^3$, $N=0$, $\lambda=1$

$K=K_Y/K_X$	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}
Bennacer et al [9]	1.00	1.29	4.17	13.48	37.56	80.62
Ni et Beckermann[16]	1.01	1.30	4.17	13.41	37.37	80.34
Présent travail	1.04	1.26	4.19	13.09	37.31	80.33

3. Résultats et discussion

Dans les équations adimensionnelles le nombre de Forchheimer $C_f = 0.55$. Le nombre de Prandtl (Pr) et la porosité (ϕ) sont respectivement égale à 0,71 et 0,8 le long des calculs. Le nombre de Lewis et le nombre de Darcy sont fixés à 10 et 10^{-4} . Par ailleurs, le rapport de forme A est pris égal à quartes. Les autres paramètres varient dans la plage suivante :

Le rapport de perméabilité K de 10^{-4} à 10^4 , L'angle d'inclinaison α de 0° à 60° . Différentes valeurs de l'angle d'inclinaison α et du rapport de perméabilités K conduisent à différentes structures d'écoulement et de transfert de chaleur et de masse.

Les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations sont présentées respectivement dans la figure 2. Pour $\alpha=0^\circ$ et une faible valeur de K ($K=0.1$), l'écoulement est monocellulaire et la couche limite solutale est plus fine que la couche limite thermique. Les isothermes sont stratifiés dans la direction y de la paroi et les isocontours de fonction de courant deviennent plus serrés à coté des parois latérales lorsque $K=1$. Pour la même valeur de α ($\alpha=0^\circ$) et en passant à un K égal à 10, on note la non dépendance des isothermes et des isoconcentrations avec le rapport de perméabilité K. Par ailleurs la configuration des lignes de courant indique qu'une grande partie du fluide dans le centre de la cavité est maintenant stagnante en raison de l'effet de blocage de la stratification verticale de la densité dans cette région.

Pour les valeurs de α supérieur à 0° ($\alpha=30^\circ$ et 60°) et une faible anisotropie K ($K=0.1$) On constate que la déformation des isoconcentrations augmente quand l'angle d'inclinaison augmente.

Dans le cas K égal à l'unité, les isothermes présentent un minimum de distorsion ce qui indique que la conduction est le mécanisme dominant de transfert de la chaleur.

On augmentant le taux de perméabilité K les structures restent les mêmes. Par ailleurs, ce comportement induit des transferts asymptotiques. On note aussi la non dépendance des isothermes avec l'angle d'inclinaison α . Alors que pour $\alpha = 60^\circ$ on constate la naissance de deux cellules de convection occupant deux angles opposés de la cavité pour $K=0.1$ et $K=1$.

La figure 3 montre l'évolution des transferts thermique et massique en fonction du rapport des perméabilités K pour plusieurs valeurs de l'angle d'inclinaison de la cavité.

Les effets de K sur les transferts sont notables. Nous observons que le transfert de chaleur et de masse varie légèrement avec les différentes valeurs de l'angle d'inclinaison α allant de 0° à 60° pour les faibles taux d'anisotropie K (10^{-4} à 10^{-2}), les transferts sont principalement par diffusion ce problème est due à la couche poreuse qui présente une faible perméabilité, l'écoulement convectif est alors de plus en plus prononcé avec la croissance de K . Pour le transfert de masse on remarque la même forme. Nous constatons que pour K supérieures à environ 10, les transferts s'intensifient et tendent vers des valeurs limites maximales constantes qui est fonction de N et indépendantes de K , ce qui est en bon accord avec les résultats donnés dans la littérature. Ceci est dû à l'accroissement des forces de volume dans l'équation de quantité de mouvement. Ces valeurs correspondent à un écoulement en couche limite. La variation de la perméabilité met donc en évidence trois régimes de transferts, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de K , un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de K et un régime complètement couche limite indépendant de K . Nous constatons qu'à K donnée, le transfert de matière est plus élevé que le transfert de chaleur. En effet, vu que le nombre de Lewis (Le) est pris égal à 10, la couche limite solutale est plus fine que la couche limite thermique. Ceci est aussi à l'origine de l'obtention d'un transfert de masse diffusif pour des valeurs de K plus faibles que dans le cas du transfert de chaleur.

Il apparaît que les transferts sont influencés par l'angle d'inclinaison α sur une certaine gamme de K et N .

Pour une valeur fixe de N et α varie entre 0° et 60° le transfert de chaleur et de masse augmente avec l'augmentation de K . En effet la résistance à l'écoulement et ainsi la diminution des transferts. Le transfert de chaleur atteint le maximum pour $\alpha = 30^\circ$ lorsque $N=0$ et $N = 1$. Par contre le transfert de masse atteint le maximum pour $\alpha = 30^\circ$ et le minimum pour $\alpha = 60^\circ$. Ce problème est dû à la haute perméabilité de la couche poreuse. Pour les transferts de chaleur et de masse les résultats sont semblables aux résultats obtenus par [13].

4. Conclusion

Dans cette étude, nous avons étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité poreuse anisotrope et inclinée remplie par un fluide binaire. Le domaine est soumis à des températures et des concentrations constantes sur les parois verticales. Nous avons montré à travers ce travail que la variation de la perméabilité a un effet très appréciable sur la structure d'écoulement et les transferts. Cette étude a permis d'identifier deux régimes d'écoulement. L'un pleinement convectif indépendant de K et l'autre modérément convectif en fonction de K . D'autre part, nous avons également analysé et discuté les effets de l'angle d'inclinaison sur les transferts de chaleur et de masse pour $N=0$ et $N=1$.

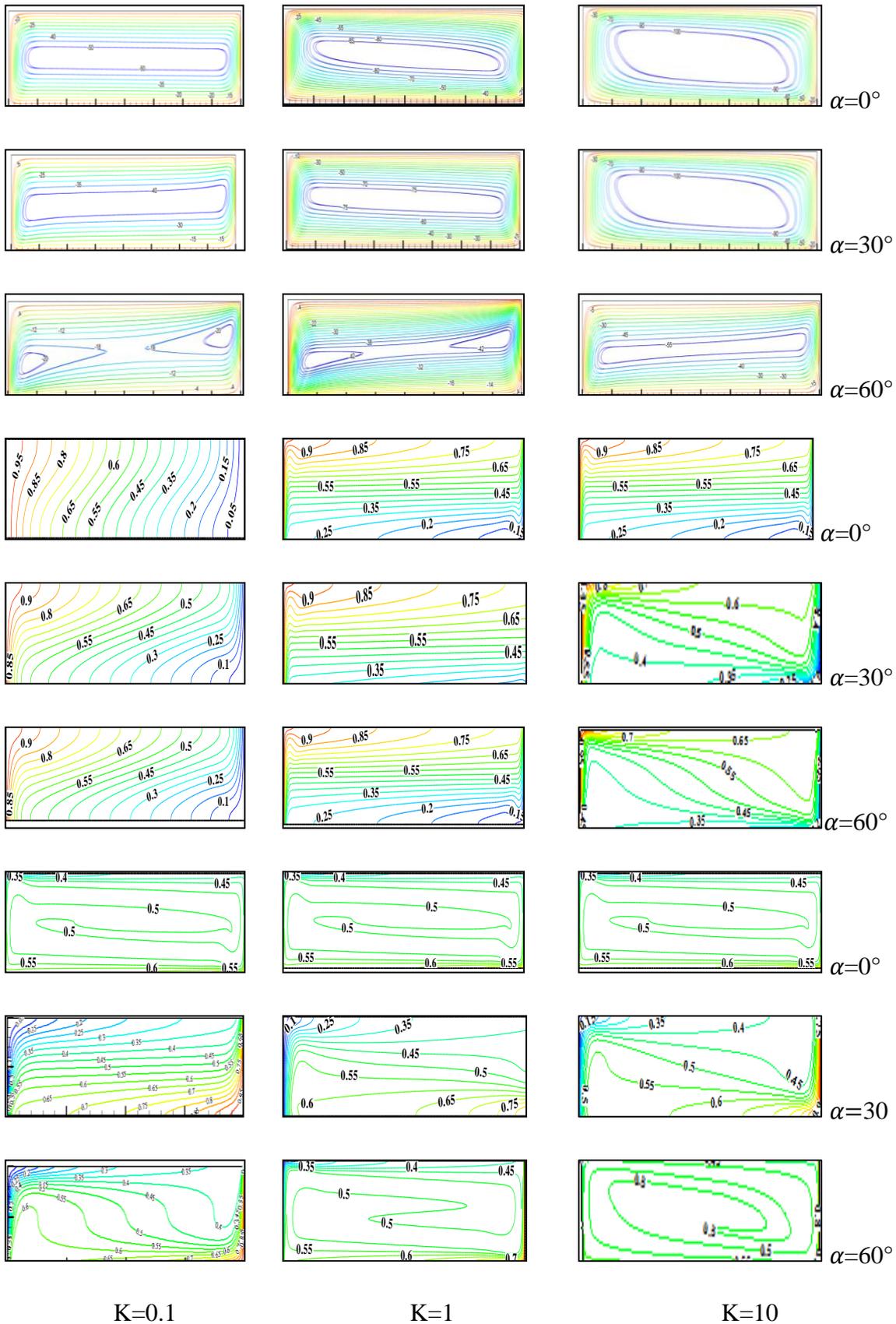


Figure 2 : représentation respective des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations :
 $Da=10^{-4}$, $N=10$, $Le=10$, $Ra=10^6$, $\lambda=10$

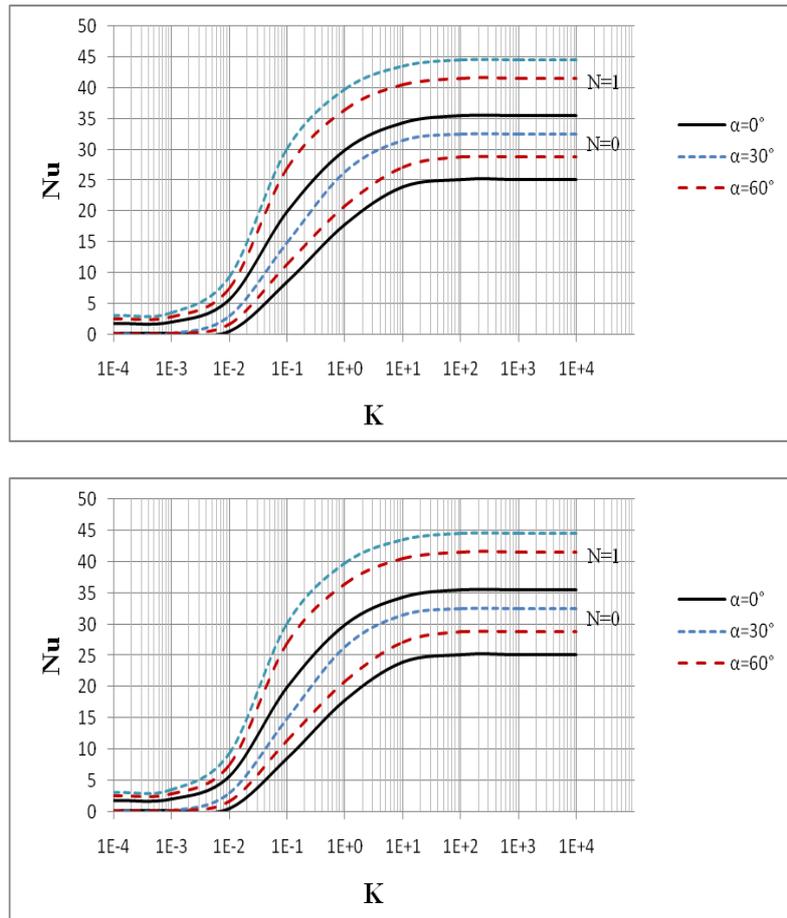


Figure 3 : effet de la l'anisotropie K sur les transferts de chaleur et de masse pour différents valeur de α et N avec $Ra=10^4$ et $Da=10^4$, $\lambda=10$

Références

1. D.A. Nield and A. Bejan, Convection in porous media, Springer (1999).
2. A. Mojtabi , MC. Charrier-Mojtabi, Handbook of Porous Media, Edition, Taylor and Francis , New York . 2 (2005) 269–320.
3. M. Mamou,Transport Phenomena in porous Media,Elsevier, Oxford (2002).
4. J. W. Taunton, E. N. Lightfoot, Thermohaline instability and salt fingers in a porous medium. Physics of Fluids, 15 (1972) 748–753
5. M. S. Malashetty, Anisotropic thermoconvective effects on the onset of double-diffusive convection in a porous-medium. International Journal of Heat and Mass Transfer.36 (1993) 2397–2401.
6. A.C. Baytas , F. Ingham ,D. B. Pop ,Double diffusive natural convection in an enclosure filled with a step type porous layer. Int. J. thermal Science, 48 (2009) 665- 673.
7. A. Amahmid, M .Hasnaoui, P. Vasseur, Etude Analytique et Numérique de la Convection Naturelle dans une Couche Poreuse de Brinkman Doublement Diffusive. Int. J. Heat and Mass Transfer. 42-15(1999) 2991-3005
8. D. B. Ingham, I. Pop, Transport Phenomena in Porous Media, Pergarmon, Elsevier (1998).
9. R. Bennacer, A.Tobbal, H. Bej , P.Vasseur, Double Diffusive Convection in a Vertical Enclosure Filled with Anisotropic Porous Media. Int. J. Thermal Sciences. 40-1(2001) 30-41.

10. S.Safi , S.Benissaad, Heat and Mass Transfer in Anisotropic Porous Media. *Advanced in Theoretical and Applied Mechanics*. 5 (2012) 15-26.
11. C. Parthiban , P. R. Patil , Effect of Inclined Temperature Gradient on Thermal Instability in an Anisotropic Porous Medium. *Warme-und Stoffubertragung*, 29 (1993) 63-69.
12. D. Jaya Krishna , B.Tanmay , Natural convection in a heat generating hydrodynamically and thermally anisotropic non-Darcy porous medium .*International Journal of Heat and Mass Transfer*. (2008) 4691–4703.
13. N. Hadidi, Y.Ould-Amer, Bi-layered and inclined porous collector: Optimum heat and mass transfer. *Energy* .51 (2013) 422-430
14. A. Jaya Krishna, B .Tanmay Basak, K. Sarit Das, Natural convection in a heat generating hydrodynamically. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51 (2008) 4691–4703.
15. A. Barletta, D.A.S. Rees , Local thermal non-equilibrium analysis of the thermoconvective instability in an inclined porous layer .*International Journal of Heat and Mass Transfer*, 82 (2015) 206–212.
16. J .NI, C. Beckermann, Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled with Anisotropic Porous Media. *Journal of Heat Transfer*, 113 (1991)1033-1037.
17. S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York (1980).