

## Analyse mécanique de structures à base céramique réparées par des patchs composites à joints simple ou double bracelet

Toufik ACHOUR<sup>1</sup>, Fayçal MILI<sup>1,2\*</sup>, Noureddine BENSEDDIQ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Département de Génie mécanique, Faculté des Sciences de la Technologie. Université des Frères Mentouri – Constantine 1. Campus Chaab Ersas, 25000 Constantine, Algérie

<sup>2</sup>Laboratoire de mécanique, Faculté des Sciences de la Technologie. Université des Frères Mentouri – Constantine 1. Campus Chaab Ersas, 25000 Constantine, Algérie

<sup>3</sup>Laboratoire de Mécanique de Lille, IUT-A GMP, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59653 Villeneuve d'Ascq, France.

\* auteur correspondant : mili\_faycal@yahoo.fr

**Résumé** - Dans cette étude, on s'est intéressé à évaluer la tenue d'une structure composite, à renfort céramique de type carbure de silicium SiC et à matrice d'aluminium, réparée par le collage d'un patch composite. Pour cette raison, on a fait appel à la méthode réparatrice, représentée par le collage d'un joint simple ou double bracelet. De telles solutions ou méthodes permettent d'apporter de gains économiques aux entreprises de construction, en évitant le jet de pièces endommagées par réparation, et en récupérant d'autres par renforcement. Afin d'atteindre cet objectif, on a mis en évidence certains paramètres, tels que la nature et la géométrie du patch, sur l'évolution du comportement mécanique de l'ensemble. Les résultats obtenus ont montré que le renforcement de la structure par le céramique SiC provoque la faible résistance des joints au niveau des extrémités et à la zone d'interruption dans le cas d'un bracelet.

**Mots Clés** : Réparation, Renforcement, Carbure de Silicium, Cisaillement, Pelage.

### Nomenclature

$E$	module d'Young, $N.m^{-2}$	$\nu$	coefficient de poisson
$G$	module de cisaillement, $N.m^{-2}$	$\sigma$	contrainte de pelage, $N.m^{-2}$
$l$	longueur du patch, $m$	<i>Indices et exposants</i>	
$M$	moment de flexion, $N.m^{-2}$	$A$	couche adhésive
$N$	effort normal, $N$	$H$	extérieur du patch
$P$	charge de traction, $N$	$I$	intérieur du patch
$t$	épaisseur, $m$	$P$	patch
$u$	déplacement, $m$	$S$	structure
$V$	effort vertical, $N$	$Y$	limite élastique
$W$	déflexion, $m$	$0$	niveau d'interruption
<i>Symboles grecs</i>		$1$	sens longitudinal
$\varepsilon$	déformation	$2$	sens transversal
$\gamma$	distorsion angulaire		

### 1. Introduction

Comme toute structure mécanique, les pièces composites peuvent être endommagées lorsqu'elles sont soumises à des chocs, à des impacts qui sont souvent de nature accidentelle, dans des milieux corrosifs ou lorsqu'elles vieillissent, provoquant par suite l'apparition des fissures qui diminuent leurs temps de service. Dans de nombreuses applications, le coût élevé des structures stratifiées complexes ne permet pas l'échange systématique des éléments endommagés. On peut alors utiliser la réparation comme une bonne alternative économique et mécanique. Afin de rétablir

au maximum les performances de la structure, tout en tenant compte des aspects pratiques et économiques, une des méthodes de réparation couramment utilisées est le collage de patchs sur la partie endommagée.

Cette solution apparaît alors comme une alternative avantageuse par rapport aux autres techniques plus conventionnelles de réparation, par rivetage ou soudure de structures métalliques. Tout d'abord, les composites sont des matériaux légers aux caractéristiques mécaniques intéressantes qui peuvent aisément être assemblés sur des surfaces à géométrie complexe. Ensuite, le choix du collage permet d'éliminer les zones de concentration de contraintes dûes aux rivets. Néanmoins, la qualité de ce type de réparations est fortement liée aux procédures de réalisation du collage car chaque écart par rapport au protocole de collage peut provoquer une dégradation inattendue des performances de la réparation.

Dans ce même axe de recherche, plusieurs travaux ont vu le jour ces dernières années traitant le problème d'endommagement des matériaux composites, et leurs modes de réparation. On peut citer les travaux d'Akpınar [1] et Aggelopoulos et al. [2]. L'intérêt d'utilisation d'un patch à deux dimensions a été d'abord traité analytiquement par Rose [3], et aussi Soutis [4]. Cette technique de réparation a intéressé aussi d'autres chercheurs tels que Atluri [5], Bottega et Loia [6]. Leurs contributions ont abordé la conception et l'analyse des réparations soient par rivetage, boulonnage ou collage. Des efforts parallèles, dans le développement de méthodes analytiques pour les réparations des structures composites, ont également été déployés dans les dernières décennies, dont on peut citer les œuvres d'Engels et Becker [7] et Oterkus et al. [8].

Cette contribution a pour objectif de présenter les techniques de réparation par le collage d'un joint simple ou double bracelet et l'analyse des contraintes de cisaillement et de pelage dans la partie adhésive d'une structure composite Al/SiC renforcée par des particules de carbure de silicium soumise à l'effort de traction uniaxiale. Une bonne connaissance de l'état de contraintes dans cette partie, qui représente le maillon le plus faible de l'ensemble (structure-patch-colle), permet de concevoir une meilleure réparation.

## 2. Théorie des patchs collés

Une structure peut être renforcée ou réparée par le collage d'un patch composite, afin d'améliorer sa résistance de fatigue, ou de stopper la propagation de la fissure. Les joints de collage en général se caractérisent par des concentrations de contraintes dans la couche adhésive. Ceux-ci proviennent, dans le cas de contraintes de cisaillement, de l'inégalité des déformations axiales des adhérents, et dans le cas de contraintes de pelage, en raison de l'excentricité dans le chemin de charge.

Du point de vue de la fiabilité des joints, il est essentiel d'éviter de laisser la couche adhésive comme le maillon faible dans l'ensemble, ce qui signifie qu'il est nécessaire que le joint soit conçu pour s'assurer que les substrats à coller rompent avant la couche de liaison. La théorie de patchs collés sera donc développée dans cette présente contribution, traitant les cas des patchs collés sur une face ou deux faces d'une pièce mécanique endommagée dans une zone à renforcer et à récupérer au maximum ses caractéristiques mécaniques. Les deux types de patchs considérés sont à simple ou à double bracelet (Figure 1). La théorie présentée est essentiellement basée sur les travaux de Hart-Smith [9] dont une analyse élasto-plastique pour l'adhésif est présentée. Des solutions explicites peuvent être obtenues et toutes les fonctions de première importance sont traitées. L'effet de couplage entre le pelage et le comportement en cisaillement ne sera pas considéré dans ces types de configurations.

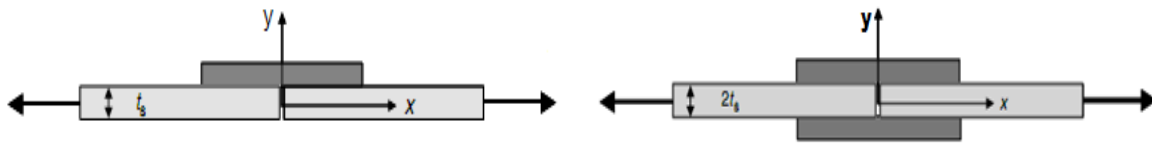


Figure 1 : Configuration des joints à simple et à double bracelet

### 2.1. Joint à simple bracelet :

L'analyse adaptée pour le calcul de la distribution des contraintes de pelage et de cisaillement s'effectue après considération que le patch est rigidement lié à la structure. Il convient donc de traiter un élément  $dx$  de l'ensemble présenté dans la Figure 2.

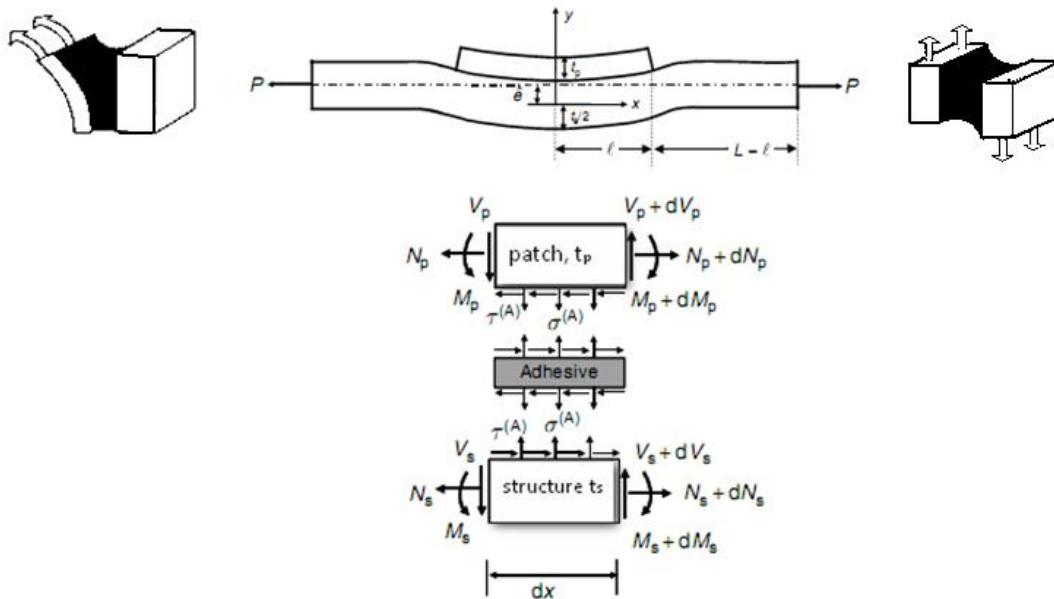


Figure 2 : Analyse des contraintes agissant sur un élément  $dx$  d'une structure à joint simple

Les équations, qui régissent les contraintes de l'adhésif, exigent des connaissances du moment de flexion au niveau des extrémités du patch autant que les conditions aux limites, et sont déterminées à partir de :

- Equilibre des moments :

$$\frac{dM_p}{dx} = V_p - \frac{\tau^{(A)}t_p}{2} \quad (1)$$

$$\frac{dM_s}{dx} = V_s - \frac{\tau^{(A)}t_s}{2} \quad (2)$$

- Equilibre des forces horizontales :

$$\frac{dN_p}{dx} - \tau^{(A)} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dN_s}{dx} + \tau^{(A)} = 0 \quad (4)$$

- Equilibre des forces verticales :

$$\frac{dV_p}{dx} - \sigma^{(A)} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dV_s}{dx} + \sigma^{(A)} = 0 \quad (6)$$

- Relation moments-courbures :

$$\frac{d^2 w_P}{dx^2} = -\frac{M_P}{D_P} \quad (7)$$

$$\frac{d^2 w_S}{dx^2} = -\frac{M_S}{D_S} \quad (8)$$

- Relations déformations-déplacements :

$$\varepsilon^{(A)} = \frac{\sigma^{(A)}}{E_A} = \frac{w_P - w_S}{t_A} \quad (9)$$

$$\gamma^{(A)} = \frac{\tau^{(A)}}{G_A} = \frac{u_P - u_S}{t_A} \quad (10)$$

Le développement de ces dernières relations permet d'aboutir à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^4}{dx^4} \left( \frac{w_S - w_P}{2} \right) + \frac{4E_A}{t_A(D_S + D_P)} \left( \frac{w_S - w_P}{2} \right) = -\frac{(D_S - D_P)}{(D_S + D_P)} \frac{d^4 w_I}{dx^4} \quad (11)$$

La recherche de ces solutions aboutira respectivement aux expressions des contraintes de pelage maximales au bord et au milieu du patch :

$$\sigma_{\max}^{(A)} = -\frac{P(\hat{e}) E_A \tanh(\xi_I \ell)}{2D_S v^2 t_A \left[ 1 + \frac{\xi_I}{\xi_H} \tanh(\xi_I \ell) \right]} + \frac{E_A}{t_A} \left( \frac{\xi_I^2}{v^2} - \frac{4v}{\xi_I} + 2 \right) \frac{(D_S - D_P) \cdot (\hat{e})}{\left[ (D_S + D_P) + \frac{4E_A}{t_A \xi_I^2} \right] \left[ 1 + \frac{\xi_I}{\xi_H} \right]} \quad (12)$$

$$\sigma_{\max}^{(A)} = -\frac{E_A}{2v^2 D_P t_A} \left[ \frac{P(\hat{e})}{\left[ \cosh(\xi_I \ell) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \sinh(\xi_I \ell) \right]} + P \left( \frac{t_P + t_S}{2} - \hat{e} \right) \right] \quad (13)$$

dont :

$$D_{S,P} = \frac{E_{S,P} t_{S,P}^3}{12}, \quad \xi_{I,H} = \sqrt{\frac{P}{D_{I,S}}}, \quad D_I = \left( 1 + \frac{E_S t_S^3}{E_P t_P^3} + \frac{1 + \left( \frac{t_S}{t_P} \right)^2}{1 + \left( \frac{E_P t_P}{E_S t_S} \right)} \right) \cdot D_S, \quad \hat{e} = \frac{\left( \frac{t_S + t_P}{2} \right) S}{1 + S}, \quad S = \frac{E_P t_P}{E_S t_S}$$

De même, on obtient respectivement les contraintes de cisaillement maximales au bord et au milieu du patch :

$$\tau_{\max}^{(A)} = \frac{S}{(1+S)\ell} \sigma_{\infty} t_S + \left[ \frac{P}{E_S t_S} + \frac{t_S M_H(\ell)}{D_S} \right] \frac{G_A}{2\beta_A t_A} \left( 1 - \frac{1}{2\beta_A \ell} \right) \quad (14)$$

$$\tau_{\max}^{(A)} = \frac{1}{1+S} \left( \frac{\sigma_{\infty} t_S}{\ell} \right) + \frac{G_A}{2\beta_A t_A} \left[ \frac{M_I^P(0) t_P}{2D_P} - \frac{\sigma_{\infty} t_S}{E_P t_P} \right] \left( 1 - \frac{1}{2\beta_A \ell} \right) \quad (15)$$

avec :

$$M_H(\ell) = \frac{P(\hat{e}) \frac{\xi_I}{\xi_H} \tanh(\xi_I \ell)}{\cosh(\xi_H \ell) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \sinh(\xi_I \ell)}, \quad M_I^P(0) = -\frac{P(\hat{e})}{\cosh(\xi_H \ell) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \sinh(\xi_I \ell)} - P \left( \frac{t_P + t_S}{2} - \hat{e} \right)$$

$$\sigma_{\infty} = \sigma_S(0) \cdot (1 + S), \quad \beta_A^2 = \frac{G_A}{t_A} \left( \frac{1+S}{S} \right) \frac{1}{E_S t_S}$$

## 2.2. Joint à double bracelet :

Vu que le collage à bracelet représente une structure multi-matériaux impliquant deux substrats et une couche d'adhésive mince, les états de contraintes qui existent à différents niveaux sont très complexes. Pour cette raison, on a développé des études élastique, élasto-plastique et mécanique permettant de déterminer la distribution des contraintes le long de la partie adhésive afin d'évaluer les zones critiques.

2.2.1. Analyse élastique :

En se référant à la Figure 3 et en considérant un élément  $dx$  pour appliquer l'équilibre des forces horizontales, on trouve que :

$$\begin{aligned} \frac{dN_p}{dx} - \tau^{(A)} &= 0 \\ \frac{dN_s}{dx} + \tau^{(A)} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dx} &= \frac{N_p}{E_p t_p} \\ \frac{du_s}{dx} &= \frac{N_s}{E_s t_s} \end{aligned} \quad (17)$$

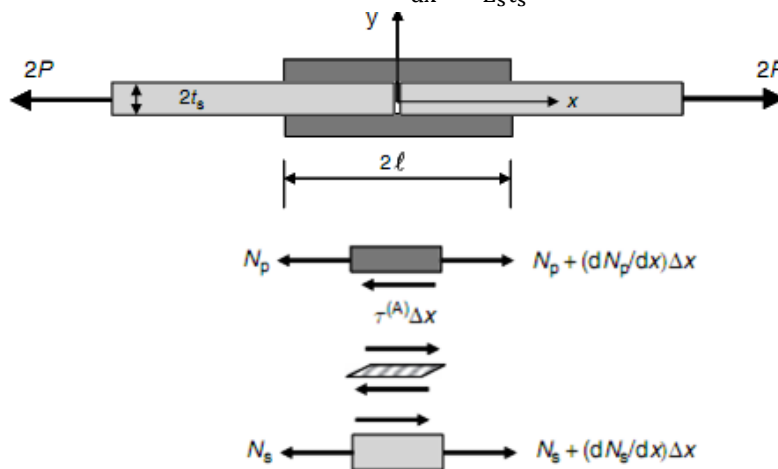


Figure 3 : Analyse des contraintes agissant sur un élément  $dx$  d'une structure à joint bracelet

La relation qui lie les contraintes de cisaillement aux distorsions angulaires en domaine élastique est donnée par la relation suivante :

$$\tau^{(A)} = G_A \gamma^{(A)} = -\frac{G_A}{t_A} (u_s - u_p) \quad (18)$$

Après substitution des relations (17) dans la dérivée de (18), on aboutit à :

$$\frac{d\tau^{(A)}}{dx} = -\frac{G_A}{t_A} \left( \frac{du_s}{dx} - \frac{du_p}{dx} \right)$$

Ou bien :

$$\frac{d\tau^{(A)}}{dx} = -\frac{G_A}{t_A} \left[ \frac{N_s}{E_s t_s} - \frac{N_p}{E_p t_p} \right] \quad (19)$$

De même, en dérivant l'équation (19) et en utilisant (16), on trouve :

$$\frac{d^2 \tau^{(A)}}{dx^2} - \beta_A^2 \tau^{(A)} = 0 \quad (20)$$

avec :

$$\beta_A^2 = \frac{G_A}{t_A} \left( \frac{1+S}{S} \right) \frac{1}{E_s t_s} \quad (21)$$

La résolution de l'équation différentielle (20), en fonction des conditions aux limites, donne comme solution la contrainte de cisaillement :

$$\tau^{(A)} = -\frac{G_A \sinh(\beta_A x)}{\beta_A t_A} \left[ -\frac{\sigma_\infty}{SE_s} \right] - \left[ \frac{G_A \cosh(\beta_A x)}{\beta_A t_A \sinh(\beta_A \ell)} \right] \left\{ \frac{\sigma_\infty}{E_s} \left[ 1 + \frac{\cosh(\beta_A \ell)}{S} \right] \right\} \quad (22)$$

### 2.2.2. Analyse élasto-plastique :

Dans le cas d'un joint à double bracelet, la zone plastique apparaît dans les deux zones, près de l'interruption et au bord du patch, comme il est présenté dans la Figure 4 où les contraintes de cisaillement sont importantes.

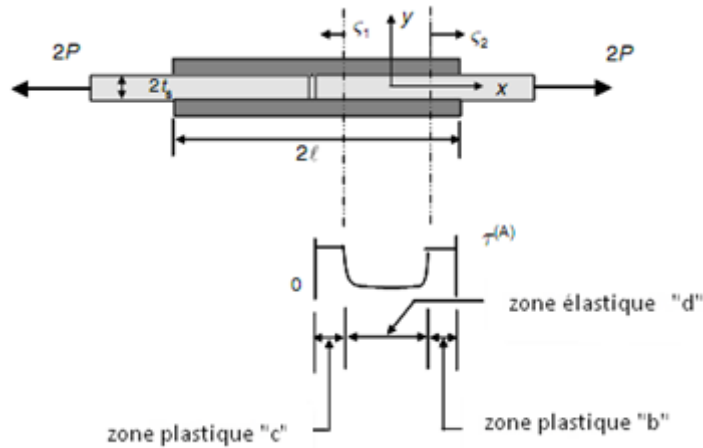


Figure 4 : Zones élastique et plastique pour une configuration double bracelet

La déformation angulaire sera exprimée alors par :

$$\gamma^{(A)} = -\frac{u_s - u_p}{t_A} \quad (22)$$

Tandis que la contrainte de cisaillement dans la région élastique de l'adhésif est exprimée par l'équation (18). Cependant, à travers la région restante plastique, la contrainte de cisaillement de l'adhésif est considérée comme constante :

$$\tau^{(A)} = -\tau_y^{(A)} \quad (23)$$

La dérivation de l'équation (18) et la substitution de la relation (17) donnent :

$$\frac{d\gamma^{(A)}}{dx} = -\frac{1}{t_A} \left( \frac{N_s}{E_s t_s} - \frac{N_p}{E_p t_p} \right) \quad (24)$$

En dérivant une autre fois cette dernière équation, en éliminant les termes de  $\frac{dN_p}{dx}$  et  $\frac{dN_s}{dx}$  et à partir de la relation (16), on trouve l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\gamma^{(A)}}{dx^2} - \frac{G_A}{t_A} \left( -\frac{1}{E_p t_p} \right) \frac{\tau^{(A)}}{G_A} \frac{1}{E_s t_s} - \frac{1}{E_p t_p} \left( \frac{\tau^{(A)}}{G_A} \right) \frac{1}{G_A} = 0 \quad (25)$$

Sa résolution donne le déplacement au niveau de la zone de l'interruption de la structure:

$$u_s(\zeta_1 = c) = \frac{t_A \gamma_y^{(A)}}{2G_A} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{0Y}} \right)^2 \right] \quad (26)$$

avec :

$$\sigma_0 = E_s \varepsilon_s = \frac{\sigma_\infty E_s t_s}{E_s t_s + E_p t_p} \quad \text{et} \quad \sigma_{0Y} = \frac{\tau_y^{(A)}}{\beta_A t_s}$$

### 2.2.3. Détermination de la contrainte de pelage :

Dans le cas de patchs épais, le joint peut se rompre avant que la contrainte de cisaillement n'atteigne sa valeur critique à cause de la contrainte de pelage. L'établissement des équations différentielles gouvernant le patch externe sont :

- Pour l'équilibre des moments :

$$\frac{dM_P}{dx} = V_P - \frac{\tau^{(A)}t_p}{2} \quad (27)$$

- Pour l'équilibre des forces :

$$\frac{dV_P}{dx} = \sigma^{(A)} \quad (28)$$

D'après la relation (moment et courbure), on a :

$$\frac{d^2w_p}{dx^2} = -\frac{M_P}{D_P} \quad (29)$$

Aussi, la relation déformation-contraintes est exprimée par :

$$\varepsilon^{(A)} = \frac{\sigma^{(A)}}{E_A} = \frac{w_p - w_s}{t_A} = \frac{w_p}{t_A} \quad (30)$$

À partir des équations (27), (28), (29) et (30), on peut aboutir à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^4w_p}{dx^4} + \frac{E_A}{D_P t_A} w_p = 0 \quad (31)$$

dont sa solution permet d'obtenir la contrainte de pelage maximale évaluée pour  $x = 0$

$$\sigma_{\max}^{(A)} = \tau_Y^{(A)} \left( \frac{3E_A t_p}{E_p t_A} \right)^{1/4} \quad (32)$$

$\tau_Y^{(A)}$  est la contrainte limite élastique au cisaillement.

Cette relation a été proposée par Hart-Smith [9] à condition que la contrainte de cisaillement n'atteigne pas la limite élastique, c'est-à-dire :

$$\sigma_{\max}^{(A)} = \tau_{\max}^{(A)} \left( \frac{3E_A t_p}{E_p t_A} \right)^{1/4} \quad (33)$$

$\tau_{\max}^{(A)}$  est la contrainte de cisaillement maximale (au bord du patch).

Dans le cas où le patch est suffisamment long :

$$\tau_{\max}^{(A)} = \tau_Y^{(A)} \quad (34)$$

## 3. Résultats et Discussions

La structure endommagée est choisie en matériau composite à matrice métallique (CMM) qui connaît un développement intense dans pratiquement l'industrie aérospatiale. Le matériau est désigné par Al/SiC et est constitué d'une matrice d'Aluminium alliée principalement avec le cuivre. Le renfort se présente sous forme de particules de carbure de Silicium dont son taux volumique est 15%. L'ordre de grandeur du diamètre des particules est de (5-50)  $\mu m$  et leur module d'Young atteint 480 GP.

Le patch utilisé pour la réparation de la structure endommagée est aussi un matériau composite à renforcement unidirectionnel du type carbone/époxyde. Le taux de renfort est choisi égal à 0.7 et les fibres composant toutes les couches sont orientées à 0°. Le patch est collé à la structure par l'intermédiaire d'une couche adhésive mince, constituée de résine époxyde, de type FM 73. Les caractéristiques élastiques de l'ensemble (structure-colle-patch) sont répertoriées dans le tableau 1.

Tableau 1 : Caractéristiques élastiques de l'ensemble (structure-colle-patch)

	Type de matériau	E <sub>1</sub> , GPa	E <sub>2</sub> , GPa	ν <sub>12</sub>	G <sub>12</sub> , GPa
Structure	Al2124/SiC	90.8	90.8	0.31	37.2
Patch	Carbone/époxyde (T300)	181	10.3	0.28	7.17
Colle	FM 73	2	1	0.33	1.89

Afin d'évaluer les contraintes de pelage et de cisaillement maximales le long de la couche adhésive dans le but de déterminer les zones critiques, on a procédé à une étude paramétrique prenant en compte la variation de certaines caractéristiques géométriques et mécaniques du patch.

On a représenté, sur la figure 5, la variation de la contrainte de pelage le long du patch. On constate qu'elle prenne des valeurs maximales au milieu et au bord du patch puis elle commence de diminuer chaque fois qu'on s'éloigne de ces deux zones critiques jusqu'à qu'elle s'annule. Donc, la configuration simple bracelet comprend deux zones critiques de pelage ou d'arrachement, l'une au centre et l'autre au bord du patch. Dans la zone critique, il s'effectue un transfert de charge de la structure vers le patch.

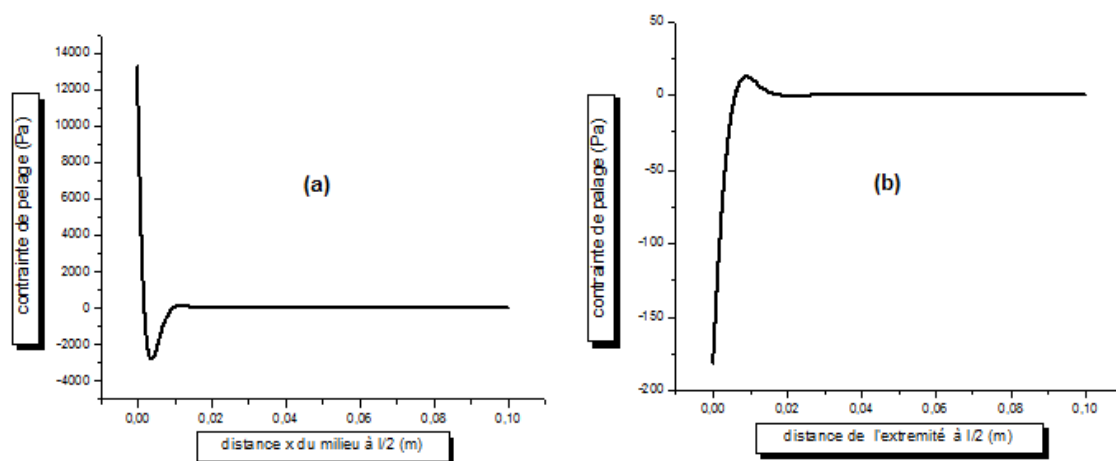


Figure 5 : Variation de la contrainte de pelage au centre (a) et au bord (b) d'un joint à simple bracelet.

Par contre, la Figure 6 illustre la variation de la contrainte de pelage dans la configuration à joint double bracelet au milieu et au bord du patch. On remarque alors que la contrainte est maximale à l'extrémité du patch et à la zone d'interruption de la structure réparée, puis elle diminue progressivement jusqu'à atteindre des valeurs négatives où la résistance au pelage devient de plus en plus importante. Au fur et mesure qu'on se rapproche du point l/2, la résistance au pelage devient très importante impliquant une contrainte nulle.



Dans le cas de la contrainte de cisaillement, la réparation à simple bracelet se caractérise, dans la figure 7a, par la diminution de la longueur de la zone de transfert de charge qui est devenue très réduite. Pour une configuration de réparation à double bracelet (Figure 7b), on distingue deux zones critiques : l'une au bord libre du patch, et l'autre dans la zone d'interruption, et dont la contrainte de cisaillement diminue progressivement pour être nulle juste au milieu de la demi longueur du patch  $\ell/2$ .

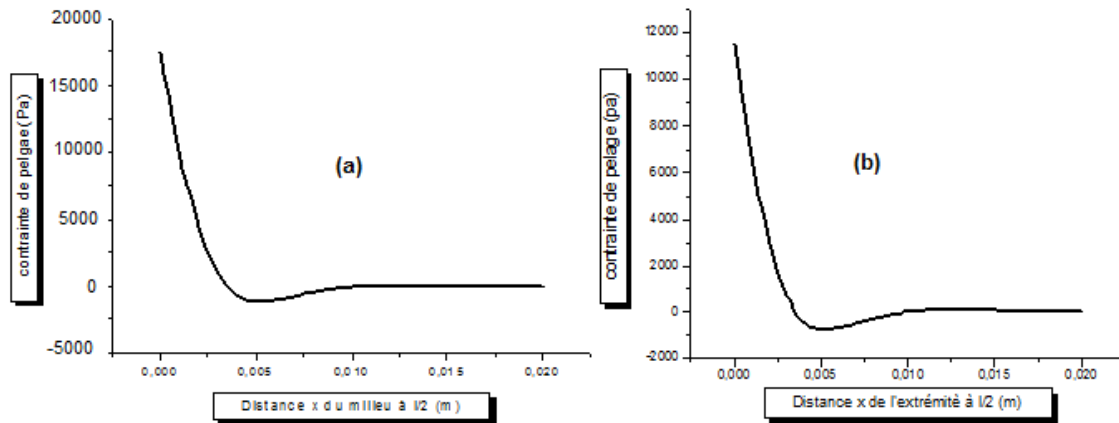


Figure 6 : Variation de la contrainte de pelage au centre (a) et au bord (b) d'un joint à double bracelet.

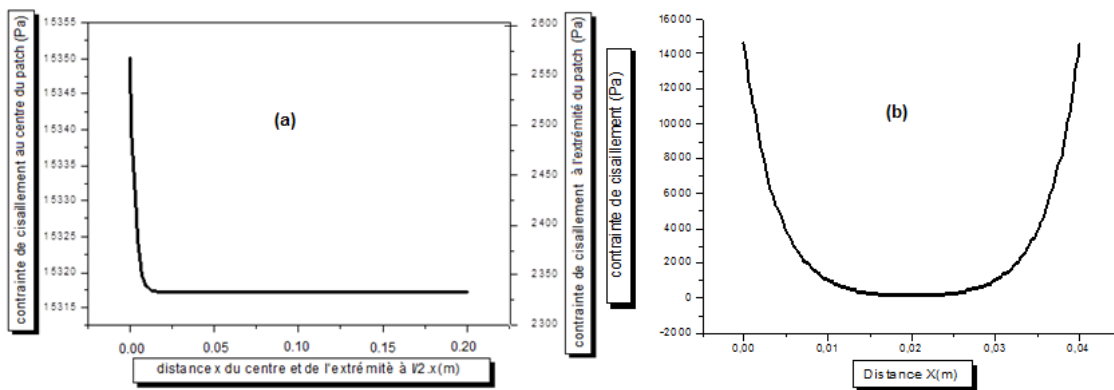


Figure 7 : Variation de la contrainte de cisaillement au centre et à l'extrémité d'un joint à simple bracelet (a) et le long d'un joint à double bracelet (b).

Afin de caractériser les joints à double bracelet et juste au milieu des patchs, on a représenté sur la Figure 8 l'effet de la nature du matériau du patch et de sa longueur sur les contraintes de cisaillement et de pelage respectivement. On remarque qu'en faisant augmenter le module d'Young, la contrainte de cisaillement diminue, pour des longueurs données du patch. La diminution de la contrainte de cisaillement  $\tau^{(A)}$  entraîne la variation décroissante de la contrainte de pelage. De plus, l'augmentation de la longueur du patch conduit à une décroissance de la contrainte de cisaillement ou de pelage, jusqu'à des valeurs où la longueur du patch n'a pas d'effet considérable.

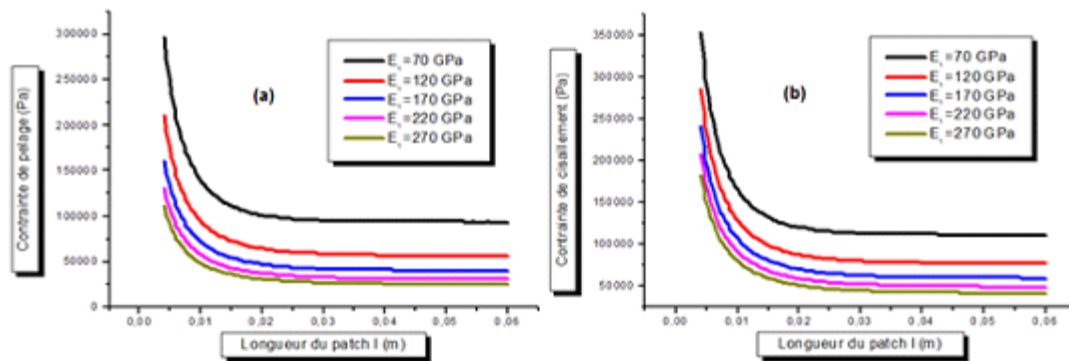


Figure 8 : Variation des contraintes de pelage (a) et de cisaillement (b) au milieu du patch à double bracelet à différentes caractéristiques élastiques et géométriques.

## 1. Conclusion

Dans cette étude, on a considéré des patchs composites en carbone/époxyde collés sur des structures en Al/SiC sous des configurations à simple et double bracelet. La meilleure façon de concevoir de telles opérations est d'assurer une bonne adhésion du joint (structure-patch-colle) et réduire les contraintes de pelage et de cisaillement afin d'éviter au maximum la décohésion du patch. Elles sont assez importantes au milieu et au bord du patch (zones critiques). Aussi, plus que le patch est rigide, ces contraintes deviennent plus importantes à ses extrémités qu'à son centre. Pour cette raison, le patch le plus adéquat à utiliser doit avoir une rigidité proche de celle de la structure.

## Références

1. S. Akpınar, Effects of laminate carbon/epoxy composite patches on the strength of double-strap adhesive joints: Experimental and numerical analysis. *Materials & Design*, 51 (2013) 501-512.
2. E.S. Aggelopoulos, T.D. Righiniotis, M.K. Chryssanthopoulos, Composite patch repair of steel plates with fatigue cracks growing in the thickness direction, *Composite Structures*, 108 (2014) 729-735.
3. C.H. Wang, L.R.F. Rose, R. Callinan, Analysis of out-of-plane bending in one-sided bonded repair. Aeronautical and Maritime Research Laboratory, Airframes and Engines Division, Defence Science and Technology Organization, Melbourne, Australia (1998).
4. C. Soutis, F.Z. Hu, Design and performance of bonded patch repairs of composite structures. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 211 (1997) 263-271.
5. J.H. Park, T. Ogiso, S.N. Atluri, Analysis of crack in aging aircraft structures with and without composite-patch repairs. *Computational Mechanics*, 10 (1992) 169-201.
6. W.J. Bottega, M.A. Loia, Edge debonding in patched cylindrical panels. *International Journal Solids and Structures*, 33 (1996) 3755–3777.
7. H Engels, W. Becker, On the way to get optimized patch repairs of laminates. *Proceedings of the 8<sup>th</sup> Pan American Congress of Applied Mechanics*, 10 (2004), Havana, Cuba.
8. E. Oterkus, A. Barut, E. Madenci, D.R. Ambur, Nonlinear analysis of a composite panel with a cutout repaired by a bonded tapered composite patch. *International Journal of Solids and Structures*, 42 (2005) 5274-5306.
9. *L.J. Hart-Smith, Adhesive-bonded double-lap joints*, NASA CR-112235, NASA Contractor Report, (1973) Langley, USA.