

## La repense mécanique de la poutre FGM non-locale : une théorie raffinée de déformation de cisaillement

Amine Zemri<sup>1</sup>, Mohammed Sid Ahmed Houari<sup>2,3</sup>, Abdelmoumen Anis Bousahla<sup>1,4</sup>, Abdelouahed Tounsi<sup>1,3,4\*</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire des matériaux et hydrologie, Université de Sidi Bel Abbes, Faculté de Technologie, Département de génie civil, Algérie.(amine.btp@hotmail.fr)*

<sup>2</sup> *Département de génie civil, Université de Mascara, Algérie.*

<sup>3</sup> *Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics, Université de Sidi Bel Abbes, Faculté de Technologie, Département de génie civil, Algérie.*

<sup>4</sup> *Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-échelle, Département de Physique, Faculté des Sciences Exactes, Département de Physique, Université de Sidi Bel Abbés, Algérie.*

**Résumé :** Dans ce travail, on présente la théorie non-locale de cisaillement des nano-poutres fonctionnellement graduées (FGM), pour la flexion et la vibration libre en utilisant les relations constitutives différentielles d'Eringen. Cette théorie développée dans ce travail prend en compte la variation d'ordre élevé de la déformation due au cisaillement à travers l'épaisseur du nano-poutre, et satisfait les conditions de la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures. En outre, ce modèle de nano-poutre non-locale intègre le paramètre d'échelle de longueur qui peut traduire l'effet de petite échelle. Les propriétés matérielles de la poutre nano-FGM sont considérées variables à travers l'épaisseur. Les équations de mouvement sont dérivées à partir du principe d'Hamilton. Des solutions analytiques sont présentées pour des nano-poutres simplement appuyées.

**Mots clés :** Nano-poutre; La théorie d'élasticité non locale; Flexion; Vibration; Matériaux à gradient fonctionnelle.

### 1. Introduction générale

Les nanotechnologies concernent la conception, la caractérisation, la production et l'application de structures, dispositifs et systèmes par le contrôle de la forme et de la taille à une échelle nanométrique. Par conséquent, les effets d'échelle sont importants dans le comportement mécanique de ces structures dans lesquelles les dimensions sont faibles et comparables aux dimensions des molécules. Cet effet peut être capturé en utilisant des théories comme la théorie de gradient de déformation, la théorie des moments modifiés et la théorie d'élasticité non-locale [1, 2]

Contrairement aux théories classiques, les théories non-locales contiennent un paramètre de longueur interne de matériau qui peut représenter la dépendance de l'effet d'échelle. Un exposé de divers modèles non locaux peut être trouvé dans [3].

Une nouvelle classe des matériaux composites qui s'appelle « les matériaux fonctionnellement gradués » (FGM) a une grande importance pratique par ces vastes applications dans différents secteurs industriels comme les systèmes micro/nano-électromécaniques (MEMS/NEMS), les dispositifs MEMS électriquement actionnés et les microscopes à force atomique [4, 5].

Le but de ce travail est de proposer une théorie non locale raffinée de poutre pour la flexion et la vibration des nano-poutres FGM. En outre, l'effet d'échelle est pris en compte en utilisant les relations constitutives non locales d'Eringen. Pour illustrer l'exactitude de la théorie actuelle, les résultats obtenus sont comparés avec ceux prédits par la théorie classique des poutres et celles de Timoshenko.

Enfin, les influences de paramètre non local, l'indice de matériel, et le ratio de longueur/épaisseur de la flexion et la vibration libre des nano-poutres FGM sont discutées.

## 2. Formulation théorique :

La formulation théorique de la nano-poutre FGM est basée sur des hypothèses cinématiques et physiques. La poutre est considérée qu'elle occupe le domaine :

$$0 \leq x \leq L; \quad -b/2 \leq y \leq b/2; \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad ($$

où  $x, y, z$  sont les coordonnées cartésiennes,  $L$  est la longueur,  $b$  est la largeur et  $h$  est la hauteur totale du nano-poutre. Le nano-poutre est chargé transversalement par une charge uniforme  $q(x)$ .

## 3. Les matériaux fonctionnellement gradués

On considère que les propriétés matériels de la nano-poutre FGM, comme le module de Young ( $E$ ), le coefficient de Poisson le module, d'élasticité transversale et la densité massique, varient continuellement à travers l'épaisseur de la poutre en suivant une loi de puissance [6, 7, 8], qui peut être décrit par :

$$P(z) = (P_t - P_b) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_b \quad (2)$$

Où  $P_t$  et  $P_b$  sont les propriétés matérielles correspondantes aux surfaces supérieure et inférieure de la poutre,  $k$  est un nombre positif qui dicte le profil de variation matérielle à travers l'épaisseur.

## 4. Les hypothèses de base

Le champ de déplacement, dans la direction des « x » est  $u(x, z, t)$ , et dans celle des « z » est  $w(x, z, t)$ , peut se définir, comme suit :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3a)$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (3b)$$

tel que  $u_0$  est le déplacement de la fibre médiane ;  $w_b$  et  $w_s$  est la flèche due à la flexion et au cisaillement, respectivement ;  $f(z) = z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right]$  est la fonction de gauchissement. Le champ de déformation s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \text{ et } \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s \quad (4)$$

où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad f = \frac{-1}{4} z + \frac{5}{3} z \left( \frac{z}{h} \right)^2, \quad g = \frac{5}{4} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \quad (5)$$

## 5. Les relations constitutives :

L'élasticité non locale est considérée pour la première fois par Eringen [1, 2]. Il a supposé que la déformation dans un point référentiel est fonction des déformations de tous les points de la structure. Eringen [1, 2] a proposé la forme différentielle des relations constitutives non-locales suivantes :

$$\sigma_x - \mu \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} = E \varepsilon_x \quad (6a)$$

$$\tau_{xz} - \mu \frac{d^2 \tau_{xz}}{dx^2} = G \gamma_{xz} \quad (6b)$$

Où  $\mu = (e_0 a)^2$  est le paramètre non-local,  $e_0$  est une constante appropriée pour chaque matériau et  $a$  est le rapport entre la longueur caractéristique interne et celle des caractéristiques externes. En général, une estimation est prise pour le produit  $e_0 a < 2.0$  nm pour les nanotubes en carbone [9, 7].

## 6. Equations de mouvement :

En utilisant la version dynamique du principe des travaux virtuels, l'équation différentielle pour la nano-poutre fonctionnellement graduée est obtenue. Le principe des travaux virtuels appliqué sur la nano-poutre nous amène à :

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx - \int_0^L \int_A \rho [\ddot{u}_0 \delta u_0 + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta (w_b + w_s)] dA dx \\ & - \int_0^L q \delta (w_b + w_s) dx = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

En collectant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$  de l'équation (7), les équations de mouvement sont :

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 \quad (8a)$$

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} \quad (8b)$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (8c)$$

Où  $N$ ,  $M_b$ ,  $M_s$  et  $Q$  sont les efforts internes résultants, défini comme :

$$(N, M_b, M_s) = \int_A (1, z, f) \sigma_x dA \quad \text{et} \quad Q = \int_A g \tau_{xz} dA \quad (9)$$

et  $(I_0, I_2)$  sont les inerties massiques définis comme :

$$(I_0, I_2) = \int_A (1, z^2) \rho(z) dA \quad (10)$$

Quand on néglige l'effet de cisaillement ( $w_s = 0$ ), les équations d'équilibre Eq. (8) coïncident avec celles trouvées par la théorie de poutre d'Euler Bernoulli. En substituant Eq. (5) dans Eq. (6) et les résultats ultérieurs dans Eq. (9), il en résulte les efforts internes :

$$N - \mu \frac{d^2 N}{dx^2} = A \frac{du_0}{dx} - B \frac{d^2 w_b}{dx^2} - B_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (11a)$$

$$M_b - \mu \frac{d^2 M_b}{dx^2} = B \frac{du_0}{dx} - D \frac{d^2 w_b}{dx^2} - D_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (11b)$$

$$M_s - \mu \frac{d^2 M_s}{dx^2} = B \frac{du_0}{dx} - D \frac{d^2 w_b}{dx^2} - H_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (11c)$$

$$Q - \mu \frac{d^2 Q}{dx^2} = A_s \frac{dw_s}{dx} \quad (11d)$$

Où les composantes de la rigidité sont données par :

$$\{A, B, D, \bar{E}, F, H\} = \int_A \{1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\} E(z) dA,$$

$$B_s = -\frac{1}{4} B + \frac{5}{3h^2} \bar{E},$$

$$D_s = -\frac{1}{4} D + \frac{5}{3h^2} F, \quad (12)$$

$$H_s = \frac{1}{16} D - \frac{5}{6h^2} F + \frac{25}{9h^4} H,$$

$$\{A_{55}, D_{55}, F_{55}\} = \int_A \{1, z^2, z^4\} G(z) dA,$$

$$A_s = \frac{25}{16} A_{55} - \frac{25}{2h^2} D_{55} + \frac{25}{h^4} F_{55},$$

En substituant Eq. (11) dans Eq. (8), les équations non-locales de mouvement peuvent être exprimées en terme de déplacements ( $u_0, w_b, w_s$ ) comme suit :

$$A \frac{d^2 u_0}{dx^2} - B \frac{d^3 w_b}{dx^3} - B_s \frac{d^3 w_s}{dx^3} = I_0 \left( \ddot{u}_0 - \mu \frac{d^2 \ddot{u}_0}{dx^2} \right) \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} B \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} \\ = I_0 \left( (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \mu \frac{d^2 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{dx^2} \right) - I_2 \left( \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_b}{dx^4} \right) \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned}
 & B_s \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D_s \frac{d^4 w_b}{dx^4} - H_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} \\
 & = I_0 \left( (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \mu \frac{d^2 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{dx^2} \right) - \frac{I_2}{84} \left( \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_s}{dx^4} \right) \quad (13c)
 \end{aligned}$$

Les équations de mouvement de la théorie locales peuvent être obtenues à partir de l'équation (13) en mettant le paramètre non-locale  $\mu$  égale à zéro.

### 7. La solution analytique pour la poutre nano FGM simplement appuyée :

La solution de Navier est utilisée pour déterminer la solution analytique pour la poutre nano en FGM simplement appuyée. La solution prend la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_n \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \\ W_{bn} \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ W_{sn} \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

où  $U_n$ ,  $W_{bn}$ , et  $W_{sn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée au mode propre  $n$ , et  $\alpha = n\pi/L$ . Le chargement transversal  $q$  est aussi écrit sous forme de série de

$$\text{Fourier : } q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \alpha x, \quad Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\alpha x) dx \quad (15)$$

Les coefficients de Fourier  $Q_n$  associés à un chargement uniforme sont donnés par :

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (16)$$

Substituant les expressions de  $u_0$ ,  $w_b$ ,  $w_s$ , et  $q$  de Eqs. (14) et (15) dans Eq. (13), les solutions analytiques peuvent être du système suivant :

$$\left( \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} - \lambda \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda Q_n \\ \lambda Q_n \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{Où : } S_{11} = A\alpha^2, \quad S_{12} = -B\alpha^3, \quad S_{13} = -B_s\alpha^3, \quad S_{22} = D\alpha^4, \quad S_{23} = D_s\alpha^4, \quad S_{33} = H_s\alpha^4 + A_s\alpha^2$$

$$m_{11} = m_{23} = I_0, \quad m_{22} = I_0 + I_2\alpha^2, \quad m_{33} = I_0 + \frac{I_2}{84}\alpha^2, \quad \lambda = 1 + \mu\alpha^2 \quad (18)$$

### 8. Caractéristiques des matériaux

Cette section est subdivisée en deux parties. La première présente une vérification du modèle proposé avec ceux précédemment publiés. La deuxième partie montre les effets du paramètre non-local, l'indice matériel  $k$  et le rapport de la longueur  $L$  sur l'épaisseur  $h$ , sur la flexion statique et la vibration libre de la poutre nano FGM. Dans ce qui suit, deux types de poutres nano FGM sont

étudiées. La première a les caractéristiques suivantes:  $E_t = 0.25 \text{ TPa}$ ,  $E_b = 1 \text{ TPa}$ ,  $\nu_t = \nu_b = 0.3$  [6]. La deuxième poutre est composée du métal et céramique ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ). Les fibres inférieures de la poutre sont constituées de métal pur, tandis que celles supérieures sont en céramique pure. Les propriétés matérielles sont comme suit:  $E_t = 390 \text{ GPa}$ ,  $E_b = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho_t = 3960 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_b = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu_t = \nu_b = 0.3$  [10]. Le coefficient de correction de cisaillement est pris égal à  $5/6$  pour la poutre de Timoshenko. Pour la convenance, les quantités non dimensionnelles suivantes sont utilisées :

- $\bar{w} = 100w \frac{E_t I}{q_0 L^4}$  pour le chargement uniforme;
- $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_t A}{E_t I}}$  pour la fréquence;

## 9. Comparaison des études

Afin de démontrer la précision de la solution présentée dans ce travail, quelques comparaisons des résultats actuels avec ceux disponibles dans la littérature ont été effectuées.

Tableau 1: flèche non-dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) de la poutre nano-FGM pour une charge uniformément répartie.

$L/h$	$k$	Paramètre Non local, $e_0 a$ (nm)														
		0			0.5			1			1.5			2		
		TBT <sup>(a)</sup>	SBT <sup>(a)</sup>	Present	TBT <sup>(a)</sup>	SBT <sup>(a)</sup>	Present	TBT <sup>(a)</sup>	SBT <sup>(a)</sup>	Present	TBT <sup>(a)</sup>	SBT <sup>(a)</sup>	Present	TBT <sup>(a)</sup>	SBT <sup>(a)</sup>	Present
10	0	5.3383	5.3381	5.3383	5.4659	5.4659	5.4659	5.8487	5.8485	5.8487	6.4867	6.4865	6.4867	7.3798	7.3797	7.3799
	0.3	3.2169	3.2178	3.2181	3.2938	3.2946	3.2951	3.5245	3.5254	3.5258	3.9090	3.9102	3.9104	4.4472	4.4482	4.4488
	1	2.4194	2.4193	2.4194	2.4772	2.4772	2.4773	2.6508	2.6508	2.6509	2.9401	2.9401	2.9401	3.3451	3.3449	3.3452
	3	1.9249	1.9234	1.9234	1.9710	1.9693	1.9694	2.1091	2.1074	2.1074	2.3393	2.3373	2.3375	2.6615	2.6596	2.6595
	10	1.5799	1.5790	1.5790	1.6176	1.6169	1.6168	1.7310	1.7301	1.7301	1.9190	1.9190	1.9189	2.1843	2.1831	2.1831
30	0	5.2227	5.2228	5.2228	5.2366	5.2366	5.2367	5.2784	5.2786	5.2785	5.3480	5.3480	5.3481	5.4455	5.4456	5.4455
	0.3	3.1486	3.1473	3.1475	3.1570	3.1557	3.1559	3.1822	3.1809	3.1811	3.2241	3.2230	3.2230	3.2829	3.2815	3.2818
	1	2.3732	2.3731	2.3732	2.3795	2.3795	2.3795	2.3985	2.3984	2.3985	2.4301	2.4301	2.4302	2.4744	2.4744	2.4744
	3	1.8894	1.8892	1.8892	1.8944	1.8943	1.8943	1.9095	1.9094	1.9094	1.9347	1.9344	1.9346	1.9700	1.9698	1.9698
	10	1.5489	1.5488	1.5488	1.5530	1.5530	1.5529	1.5654	1.5653	1.5653	1.5860	1.5861	1.5860	1.6149	1.6149	1.6149
100	0	5.2096	5.2097	5.2096	5.2108	5.2110	5.2109	5.2146	5.2146	5.2146	5.2208	5.2210	5.2209	5.2296	5.2296	5.2296
	0.3	3.1408	3.1394	3.1395	3.1416	3.1404	3.1403	3.1438	3.1426	3.1425	3.1476	3.1465	3.1463	3.1529	3.1517	3.1515
	1	2.3679	2.3680	2.36794	2.3685	2.3686	2.3685	2.3702	2.3702	2.3702	2.3730	2.3731	2.3731	2.3770	2.3771	2.3770
	3	1.8853	1.8853	1.8854	1.8858	1.8858	1.8858	1.8871	1.8871	1.8872	1.8894	1.8893	1.8894	1.8926	1.8926	1.8926
	10	1.5453	1.5453	1.5454	1.5457	1.5457	1.5458	1.5468	1.5468	1.5469	1.5487	1.5487	1.5487	1.5513	1.5513	1.5513

<sup>(a)</sup> Larbi Chaht et al. (2015)

Le tableau 1 montre les flèches maximales non dimensionnelles  $\bar{w}$  d'une poutre nano FGM simplement appuyée soumise à un chargement uniforme. Les valeurs obtenues ont été trouvées en utilisant 100 termes dans les séries (14) et (15). On remarque que  $e_0 a = 0$  correspond à la théorie locale. Les résultats trouvés sont comparés avec ceux reportés par Larbi Chaht [6] basé sur la théorie non-locale de Timoshenko (TBT) et la théorie sinusoïdale non-locale (SBT) pour une série de valeurs du paramètre non-local ( $e_0 a$ ), l'indice matériel ( $k$ ) et le rapport longueur/épaisseur ( $L/h$ ).

On peut voir que les résultats obtenus par la présente théorie sont dans un excellent accord avec ceux calculés par les deux théories TBT et SBT [6] pour toutes les valeurs du paramètre non-local ( $e_0 a$ ), le coefficient matériel ( $k$ ) et le rapport longueur sur épaisseur ( $L/h$ ). Les valeurs des flèches  $\bar{w}$  sont proportionnelles avec le paramètre non-local et inversement proportionnelles avec l'indice matériel. Les valeurs de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle pour différentes valeurs de paramètre non-local  $e_0 a$  sont présentées dans le tableau 3. Les propriétés matérielles de la poutre nano FGM sont les mêmes que celles utilisées par [10]. Les résultats trouvés dans le présent travail sont comparés ceux calculés par la théorie d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, un grand arrangement avec cette dernière est observé. A partir de ce tableau on peut dire que la fréquence non dimensionnelle fondamentale décroît quand le paramètre non local l'indice matériel augmentent. En général, l'effet de la déformation de cisaillement et le paramètre non local  $e_0 a$  est d'amplifier la flèche et réduire la fréquence propre de la poutre. En diminuant l'indice matériel, la flèche ainsi que la fréquence propre vont augmenter. Cela est due au fait que l'augmentation de l'indice matériel cause l'augmentation de la rigidité de la poutre nano FGM.

Tableau 3: la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) de la poutre nano-FGM.

L/h	k	Paramètre Non local, $e_0 a$ (nm)														
		0			0.5			1			1.5			2		
		EBT	TBT	Present	EBT	TBT	Present	EBT	TBT	Present	EBT	TBT	Present	EBT	TBT	Present
10	0	9.8293	9.7075	9.7075	9.7102	9.5899	9.5899	9.3774	9.2612	9.2612	8.8915	8.7813	8.7813	8.3228	8.2196	8.2197
	0.3	8.2694	8.1700	8.1709	8.1692	8.0711	8.0719	7.8892	7.7944	7.7952	7.4804	7.3905	7.3913	7.0019	6.9178	6.9185
	1	6.9650	6.8814	6.8814	6.8807	6.7981	6.7981	6.6448	6.5651	6.5651	6.3005	6.2249	6.2249	5.8975	5.8267	5.8267
	3	6.1575	6.0784	6.0755	6.0829	6.0048	6.0019	5.8744	5.7990	5.7962	5.5700	5.4985	5.4959	5.2137	5.1468	5.1443
	10	5.6544	5.5794	5.5768	5.5859	5.5118	5.5092	5.3945	5.3229	5.3204	5.1150	5.0470	5.0447	4.7878	4.7242	4.7221
30	0	9.8651	9.8511	9.8511	9.8516	9.8376	9.8376	9.8114	9.7975	9.7975	9.7456	9.7318	9.7318	9.6556	9.6419	9.6419
	0.3	8.3015	8.2901	8.2902	8.2902	8.2787	8.2788	8.2564	8.2450	8.2451	8.2010	8.1897	8.1898	8.1252	8.1140	8.1141
	1	6.9929	6.9832	6.9832	6.9833	6.9737	6.9737	6.9548	6.9453	6.9452	6.9082	6.8987	6.8987	6.8444	6.8349	6.8349
	3	6.1806	6.1715	6.1712	6.1722	6.1631	6.1627	6.1470	6.1380	6.1376	6.1058	6.0968	6.0964	6.0494	6.0405	6.0401
	10	5.6744	5.6658	5.6655	5.6667	5.6581	5.6578	5.6436	5.6350	5.6347	5.6057	5.5972	5.5969	5.5540	5.5455	5.5452
100	0	9.8692	9.8679	9.8679	9.8680	9.8667	9.8667	9.8643	9.8631	9.8631	9.8583	9.8570	9.8570	9.8498	9.8485	9.8485
	0.3	8.3052	8.3042	8.3042	8.3042	8.3031	8.3032	8.3011	8.3001	8.3001	8.2960	8.2950	8.2950	8.2889	8.2878	8.2878
	1	6.9961	6.9952	6.9952	6.9952	6.9943	6.9943	6.9926	6.9917	6.9917	6.9883	6.9874	6.9874	6.9823	6.9814	6.9814
	3	6.1833	6.1825	6.1824	6.1825	6.1817	6.1817	6.1802	6.1794	6.1794	6.1764	6.1756	6.1756	6.1711	6.1703	6.1703
	10	5.6767	5.6760	5.6759	5.6761	5.6753	5.6752	5.6740	5.6732	5.6731	5.6705	5.6697	5.6697	5.6656	5.6648	5.6648

## 10. Etude paramétrique

La flexion des poutres nano-FGM est étudiée ici en supposant les propriétés matérielles utilisées par [6]. Par contre, la repense dynamique est recherchée en proposant les propriétés utilisées par [10]. Pour les cas locales et non locales on a pris  $e_0 a = 0$  et  $e_0 a = 1$  nm, respectivement. L'indice matériel est considéré constant  $k = 1$ . A partir de ces figures, on constate que les flèches prédites par la théorie non locale sont plus grandes que celles locales, tandis que la solution non locale de la fréquence propre est plus petite que celles prédites par la théorie locales. Ce résultat indique que le paramètre non local assouplit la poutre nano. En outre, il est remarqué que pour des valeurs faibles du rapport longueur sur épaisseur, l'effet d'échelle est plus significatif. Par contre, l'effet d'échelle sur la flexion et la fréquence propre diminue quand le rapport longueur / épaisseur augmente. Cela implique que les effets d'échelle sur le comportement vis à vis la flexion statique et la vibration libre ne sont pas évidentes pour les nano poutre élancée mais ils doivent être pris en compte pour les na poutres courtes.

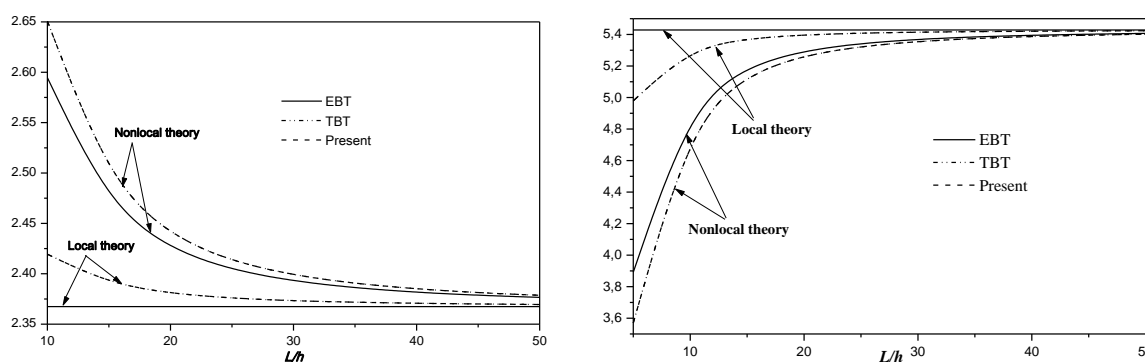


Figure 5: L'effet du rapport longueur/épaisseur sur la flèche (à gauche) et la fréquence propre (à droite) non-dimensionnelle pour une charge uniforme avec  $k=1$  et  $e_0 a = 1$  nm.

Dans le but de montrer l'influence du paramètre non locale sur la flexion et la vibration libre, la théorie non locale des nano poutres FGM est utilisée avec différentes valeurs du rapport longueur/épaisseur, ce qui est montré dans les figures 5 jusqu'à 7, respectivement. L'indice matériel est assumé d'être constant,  $k=1$ . Ces figures montrent que les repenses varient non linéairement avec le paramètre non locale. On peut remarquer que l'influence de l'effet d'échelle, présenté par le paramètre non locale  $e_0 a$ , sur la flexion et la vibration libre pour les nano poutres FGM est significatif surtout pour des valeurs relativement élevées du rapport  $L/h$ .

En outre, on peut conclure que le comportement des nano poutres FGM a une grande dépendance du rapport longueur/épaisseur dans la théorie d'élasticité non locale.

L'effet de l'indice matériel sur la flexion statique et la vibration libre des poutres nano FGM est représentées sur les figures 8 jusqu'à 10 pour différentes valeurs de paramètres non locale avec  $L/h = 10$ . On peut remarquer que les flèches dues à la flexion et les fréquences propres diminuent quand l'indice matériel augmente. On note que cette observation a été remarquée dans les tableaux 1 et 2, et cela est dû au fait qu'une augmentation de l'indice matériel mène à une diminution de la rigidité de la poutre nano FGM.



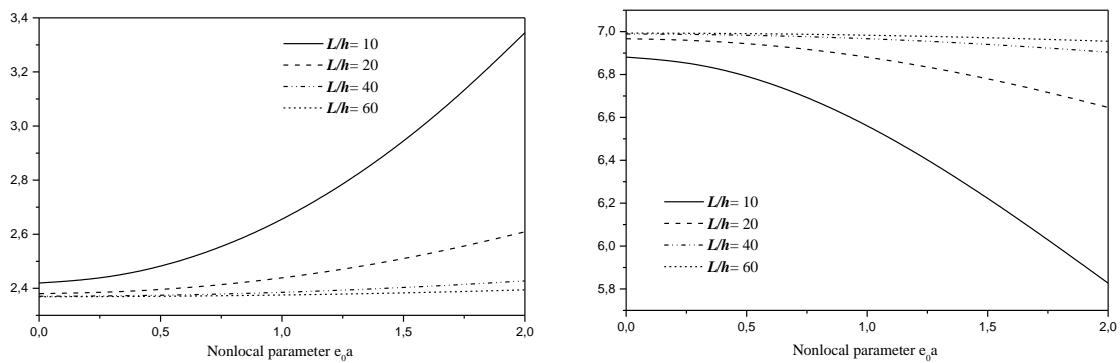


Figure 5: L'effet du paramètre non-local sur la flèche (à gauche) et la fréquence propre (à droite) non-dimensionnelles pour une charge uniforme avec  $k = 1$ .

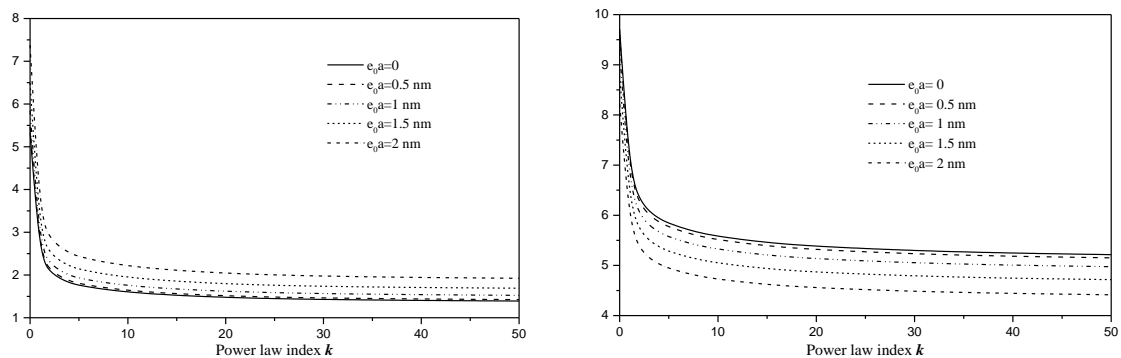


Figure 8 : L'effet de l'indice de matériel sur la flèche (à gauche) et la fréquence propre (à droite) non-dimensionnelle pour une charge uniforme avec  $L / h = 10$ .

## 11. Conclusions

Une théorie de déformation de cisaillement non locale est utilisée pour étudier la flexion et la vibration libre des nano-poutres FGM. Ce modèle actuel est capable de capturer à la fois l'effet d'échelle et l'influence de la déformation de cisaillement, et ne nécessite pas des facteurs de correction de cisaillement. Des exemples numériques montrent que la présente théorie donne des valeurs identiques à ceux générés par la théorie de Timoshenko. Les effets du paramètre non local, du rapport d'aspect et de l'indice matériel  $k$  sont étudiés en détail.

### Référence :

1. Eringen, A.C. (1972), "Nonlocal polar elastic continua", *Int. J. Eng. Sci.*, 10, 1–16.
2. Eringen, A.C. (1983), "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *J. Appl. Phys.*, 54, 4703–4710.
3. Bazant, Z.P., Jirasek, M. (2002), "Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress", *Journal of Engineering Mechanics*, 128, 1119–1149.
4. Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Structural Engineering and Mechanics*, Accepted.

5. Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013), "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 48, 547 – 567.
6. Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O., Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel and Composite Structures*, 18(2), 425 – 442.
7. Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013a), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerospace Science and Technology*, 24, 209 – 220.
8. Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, 18(1), 235 – 253.
9. Wang, Q. (2005), "Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics", *J. Appl. Phys.*, 98, 124301.
10. Eltaher, M.A., Emam, S.A., Mahmoud, F.F. (2012), "Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams", *Applied Mathematics and Computation*, 218, 7406– 7420.